ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

NIELS NIELSEN

Sur les séries factorielles et la fonction gamma (extrait d'une lettre adressée à M. N. de Sonin, à Saint-Pétersbourg)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 23 (1906), p. 145-168
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__145_0>

SUR LES

SÉRIES DE FACTORIELLES

ET LA

FONCTION GAMMA.

(EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. N. DE SONIN, A SAINT-PÉTERSBOURG.)

PAR M. NIELS NIELSEN,

A COPENHAGUE.

...Votre aimable envoi d'un exemplaire de votre intéressante correspondance (1) avec l'illustre Hermite concernant les polynomes de Bernoulli et la fonction gamma m'a beaucoup réjoui et m'a vivement encouragé à poursuivre mes recherches sur les séries de factorielles et leur représentation asymptotique avec application sur la fonction gamma, recherches qui m'ont conduit à plusieurs de vos formules et à quelques autres qui sont nouvelles peut-être. C'est pourquoi je me permets de vous communiquer, dans cette lettre, mes réflexions générales sur ce sujet et quelques-uns des résultats particuliers que je viens d'obtenir.

§ 1. — Propriétés générales d'une série de factorielles $\Omega(x)$.

Dans une publication récente (2), je viens de démontrer ce théorème général :

(1) *Journal de Crelle*, t. 116, 1896.
(2) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXI, 1904, p. 452.

I. *Supposons développable, dans une série de factorielles, la fonction*

(1) $$\Omega(x) = \int_0^\infty f(z)\, e^{-zx}\, dz,$$

de sorte que $f(z)$ doit être holomorphe aux environs du point $z = 0$; posons ensuite

(2) $$f(z) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s}{s!} z^s,$$

puis supposons que la série de puissances (2) ne soit pas intégrable, terme à terme, de $z = 0$ à $z = \infty$, après être multipliée par e^{-zx}, nous aurons cette série asymptotique, d'après la définition de M. Poincaré [1],

(3) $$\Omega(x) \sim \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_s}{x^{s+1}},$$

et (3) est applicable pour tous les points très éloignés du domaine de convergence de la série de factorielles obtenue pour $\Omega(x)$, les points situés sur l'axe des nombres négatifs toujours exclus.

Étudions plus en détail la portée du théorème I. A cet effet, supposons $|x|$ très grand, puis mettons $x = |x| e^{i\theta}$, nous aurons à considérer séparément ces trois cas :

1° La série de factorielles obtenue pour $\Omega(x)$ est convergente dans toute l'étendue du plan des x, à l'exception des valeurs entières non positives, la série (3) est applicable, pourvu que $-\pi < \theta < +\pi$;

2° La série susdite est convergente pourvu que $\mathfrak{R}(x) \geqq 0$ [2], (3) est certainement applicable, pourvu que $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq +\frac{\pi}{2}$;

3° Le domaine de convergence de la série de factorielles obtenues

---

(1) *Acta Mathematica*, t. VIII, 1886, p. 297.

Le signe $\sim$ indique que $\lim\limits_{|x|=\infty} \left| \left[\Omega(x) - \left(\frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^n} \right) \right] x^n \right| = 0.$

(2) $\mathfrak{R}(x)$ désigne, ici et dans ce qui suit, la partie réelle de x. Le domaine de convergence d'une série de factorielles est un demi-plan situé à droite d'une certaine ligne perpendiculaire à l'axe des nombres réels.

pour $\Omega(x)$ ne contient pas l'axe des nombres purement imaginaires, il faut, dans (3), admettre $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$.

Quant à la série de factorielles obtenue pour $\Omega(x)$, posons

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \tag{4}$$

nous aurons $A_0 = a_0$, et généralement

$$A_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} C_n^s \, a_{n-s}, \tag{5}$$

où nous avons posé

$$x(x+1)\ldots(x+n-1) = \sum_{s=0}^{s=n-1} C_n^s \, x^{n-s}.$$

De plus, nous aurons, pour $\Omega(x)$, cet autre développement (¹)

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\mathfrak{A}_s}{(x+1)(x+2)\ldots(x+s+1)}, \tag{6}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\mathfrak{A}_n = \sum_{s=0}^{s=n} C_{n+1}^s \, a_{n-s}, \tag{7}$$

et la série nouvelle (6) est convergente dans la partie du domaine de convergence de (4) qui est située à droite de l'axe des nombres purement imaginaires.

Quant à la différentiation et l'intégration terme à terme de la série asymptotique (3), nous aurons sans peine, en vertu de (1), ces deux

---

(¹) *Voir* mon Mémoire : *Les séries de factorielles et les opérations fondamentales* (*Mathematische Annalen*, t. LIX, 1904, p. 375).

représentations intégrales

$$(8) \qquad \Omega^{(1)}(x) = -\int_0^\infty f(z)\, z e^{-zx}\, dz,$$

$$(9) \qquad \int \Omega(x)\, dx - a_0 \log x = -\int_0^\infty \frac{f(z) - f(0)}{z} e^{-zx}\, dz.$$

Posons maintenant, dans (8) et (9), $z = -\log t$, nous verrons que les fonctions génératrices des deux intégrales nouvelles ainsi obtenues ont généralement dans $t = 0$ un point singulier, même dans le cas où ce point est ordinaire pour $f(-\log t)$. Or, on sait que les deux fonctions figurant dans (8) et (9) sont développables en séries de factorielles de la forme (4) et convergentes dans la partie du domaine de convergence de (4) qui est située à droite de l'axe des nombres purement imaginaires [1], d'où cet autre théorème :

II. *La série asymptotique (3) peut être différentiée ou intégrée terme à terme, et les séries ainsi obtenues, savoir*

$$(10) \qquad \Omega^{(1)}(x) \sim -\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(s+1)a_s}{x^{s+2}},$$

$$(11) \qquad \int \Omega(x)\, dx - a_0 \log x \sim -\sum_{s=1}^{s=n} \frac{a_s}{s x^s},$$

sont certainement applicables, pourvu que $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$.

§ 2. — Autres propriétés de la représentation asymptotique de $\Omega(x)$.

Pour étudier avec plus de détails la série asymptotique (3), mettons-y $x + y$ au lieu de x, puis appliquons l'identité élémentaire

$$\frac{1}{x+y} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s y^s}{x^{s+1}} + \frac{(-1)^n y^n}{x^n (x+y)},$$

---

(1) *Loc. cit.*, p. 366 et 368.

nous aurons, en différentiant r fois par rapport à y,

$$\frac{1}{(x+y)^{r+1}} = \sum_{s=0}^{s=n-r-1} (-1)^s \binom{r+s}{s} \frac{y^s}{x^{r+s+1}} + \frac{(-1)^{r+n}}{r!\,x^n} \mathrm{D}_y^r \left(\frac{y^n}{x+y}\right),$$

d'où, sans peine,

$$(1) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_s}{(x+y)^{s+1}} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{s!\,\omega_s(y)}{x^{s+1}} = \mathrm{R}_n(x, y),$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$(2) \qquad \omega_p(y) = \sum_{r=0}^{r=p} \frac{(-1)^r a_{p-r}}{(p-r)!} \frac{y^r}{r!},$$

tandis que le terme de reste se détermine comme suit :

$$\mathrm{R}_n(x, y) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^{s+n} a_s}{s!\,x^n} \mathrm{D}_y^s \left(\frac{y^n}{x+y}\right).$$

Or, supposons fini $|y|$, nous aurons immédiatement ces deux valeurs limites

$$\lim_{|x+y|=\infty} |(x+y)^n \mathrm{R}_n(x, y)| = 0,$$
$$\lim_{|x|=\infty} |x^n \mathrm{R}_n(x, y)| = 0,$$

de sorte que nous avons démontré cet autre théorème :

III. *Supposons applicable pour* $\Omega(x+y)$ *la série asymptotique* [§ 1, (3)], *nous aurons aussi, pourvu que* $|y|$ *soit finie,*

$$(3) \qquad \Omega(x+y) \sim \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{s!\,\omega_s(y)}{x^{s+1}}.$$

Posons, dans le paragraphe 1 [formule (1)], $x+y$ au lieu de x, puis appliquons l'identité

$$(4) \qquad e^{-zy} f(z) = \sum^{s=\infty} \omega_s(y) z^s,$$

la formule (3) est une conséquence immédiate du paragraphe I [formule (1)]; cependant, le théorème III est valable pour une série asymptotique quelconque, comme le montre clairement notre démonstration précédente.

Quant à la fonction $\Omega(x+y)$, où la série de factorielles obtenues pour $\Omega(x)$ est convergente, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > \Lambda$, j'ai démontré (1) que $\Omega(x+y)$ est développable en séries de factorielles comme suit :

$$\Omega(x+y) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s(y)}{x(x+1)\dots(x+s)}, \tag{5}$$

$$\Omega(x+y) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\mathfrak{A}_s(y)}{(x+1)(x+2)\dots(x+s+1)}, \tag{6}$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$A_n(y) = \sum_{s=0}^{s=n-1} C_n^s (n-s)!\, \omega_{n-s}(y), \qquad A_0(y) = a_0, \tag{7}$$

$$\mathfrak{A}_n(y) = \sum_{s=0}^{s=n} C_{n+1}^s (n-s)!\, \omega_{n-s}(y), \tag{8}$$

et les séries de factorielles (5), (6) sont convergentes, pourvu que nous ayons à la fois $\mathfrak{R}(x) > \Lambda$ et $\mathfrak{R}(x+y) \geqq 0$.

Démontrons maintenant que la formule (3) nous conduira à un autre théorème essentiel dans les applications suivantes. A cet effet, supposons que $\Omega(x)$ satisfasse à cette équation aux différences finies, linéaire et non homogène,

$$\sum_{s=0}^{s=n} \alpha_s \Omega(x+n-s) = g(x), \tag{9}$$

où les coefficients α_s sont des constantes par rapport à x, tandis que $g(x)$ est développable en série de puissances négatives entières

(1) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XIX, 1902, p. 433.

de x, savoir :

$$g(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\beta_s}{x^{s+1}}, \tag{10}$$

puis supposons que la série de factorielles obtenue pour $\Omega(x)$ soit convergente, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > \Lambda$, les n fonctions

$$\Omega(x), \quad \Omega(x+1), \quad \ldots, \quad \Omega(x+n)$$

sont développables en séries asymptotiques toujours applicables, pourvu que $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$, où nous avons posé $x = |x| e^{i\theta}$.

Cela posé, la formule (3) donnera, en vertu de (9),

$$a_r = \frac{1}{\alpha_n} \left[\beta_r - \sum_{s=0}^{s=n-1} \alpha_s s! \, \omega_r(n-s) \right]; \tag{11}$$

or, supposons $\mathfrak{R}(x) > \Lambda - 1$, les fonctions

$$\Omega(x+1), \quad \Omega(x+2), \quad \ldots, \quad \Omega(x+n)$$

admettent des séries asymptotiques déduites directement de (3), de sorte que l'équation aux différences finies (9) montrera que les n fonctions susdites possèdent la même propriété, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > \Lambda - 2$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous obtenions une série asymptotique pour $\Omega(x)$ dans le cas où $\mathfrak{R}(x) \leqq 0$, dont les coefficients se déterminent toujours à l'aide de (11); c'est-à-dire que nous avons démontré ce théorème, nouveau je le crois :

IV. *Supposons que la série de factorielles $\Omega(x)$ satisfasse à l'équation aux différences finies* (9), *la série asymptotique du paragraphe* 1 [*formule* (3)] *est toujours applicable pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ aussi.*

§ 3. — Sur la fonction $\Omega(u + iv)$ pour u et v réels.

Pour étudier maintenant la fonction $\Omega(u + iv)$, où u et v désignent des quantités réelles, la formule (3) (§ 2) suffira dans le cas où un des nombres $|u|$ et $|v|$ restera fini, tandis que le cas contraire, où et $|u|$ et $|v|$ deviennent très grands, exige des recherches ultérieures.

Généralisons maintenant le problème qui nous occupe en étudiant la fonction $\Omega(x+iy)$, où x et y désignent deux variables quelconques, réelles ou imaginaires, nous aurons à considérer ces trois cas différents :

1° $|y|$ restera fini, de sorte que x est la variable proprement dite : ici nous avons à appliquer les formules tirées du nº 2, (3), (5), (6), en y remplaçant y par iy.

2° $|x|$ restera fini de sorte que y est la variable proprement dite; nous aurons ici, en vertu du nº 2, (3), cette série asymptotique

$$\Omega(x+iy) \sim \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{i^{-s-1} s!\, \omega_s(x)}{y^{s+1}}, \tag{1}$$

valable, pourvu que la variable $x+iy$ soit située dans le domaine de convergence de la série de factorielles, nº 1, (4).

3° Le rapport $|y|:|x|$ restera fini; posons

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \tag{2}$$

d'où

$$x+iy = re^{i\theta}, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{y}{x}, \tag{2 bis}$$

où θ désigne une quantité finie pour laquelle les valeurs de la forme

$$\theta = \frac{s\pi}{2},$$

où s désigne un nombre entier, sont exclues.

Cela posé, nous aurons, en vertu du nº 1, (3), cette série asymptotique

$$\Omega(x+iy) \sim \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_s e^{-(s+1)\theta i}}{r^{s+1}} \tag{3}$$

et deux autres obtenues en introduisant dans (3) à l'aide de (2) une des variables x et y. Toutes ces séries asymptotiques sont applicables aussi, pourvu que la variable $x+iy$ soit située dans le domaine de convergence de la série de factorielles, § 1, (4).

Quant aux développements en séries de factorielles de la fonction $\Omega(x+iy)$, développements qui correspondent aux séries asymptotiques (1) et (3), mettons dans le paragraphe 1, (1), $z=-\log t$, et

$$\varphi(t)=f(-\log t), \qquad f(z)=\varphi(e^{-z}),$$

nous aurons

$$\Omega(x)=\int_0^1 \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt, \tag{4}$$

et un théorème connu de la théorie des séries de factorielles ([1]) montrera que les développements en question ne sont possibles que dans les deux cas suivants :

1° La fonction génératrice $\varphi(t)$ est une fonction entière, transcendante ou non ;

2° $\varphi(t)$ n'a que le seul point singulier fini $t=0$.

Considérons d'abord le premier de ces deux cas, une application *formelle* de (1) donnera cette représentation intégrale

$$\Omega(x+iy)=\frac{1}{i}\int_0^\infty t^{-iy} f\left(\frac{z}{i}\right) e^{zxi}\, dt=\frac{1}{i}\int_0^1 \varphi(t^{-i})\, t^{-xi}\, t^{y-1}\, dt. \tag{5}$$

Or, la série asymptotique (1) ne déterminant pas d'une manière univoque la fonction qu'elle représente, la formule (5) exige une démonstration plus rigoureuse.

A cet effet, supposons vraie pour un instant la formule (5), le théorème fondamental de la théorie des séries de factorielles ([2]) donnera ce développement

$$\Omega(x+iy)=\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{B_s(x)}{y(y+1)\ldots(y+s)}, \tag{6}$$

([1]) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XIX, 1902, p. 420.

([2]) *Loc. cit.*, p. 450.

où nous avons posé pour abréger

$$(7)\qquad B_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} i^{-(n-s+1)} C_n^s (n-s)!\,\omega_{n-s}(x), \qquad B_0(x) = i a_0,$$

et la série (6) est convergente, pourvu que $\mathfrak{R}(y) > 0$.

Cela posé, il est évident que la série de factorielles (6) nous conduira précisément à la série asymptotique (1) et voilà la démonstration exacte de (5).

La formule (3) donnera de la même manière ces représentations intégrales

$$(8)\qquad \Omega(x+iy) = e^{-\theta i}\int_0^{\infty} f(z e^{-\theta i}) e^{-zr}\,dz = e^{-\theta i}\int_0^{1} \varphi(t^{e^{-\theta i}})\, t^{r-1}\,dt,$$

où il faut admettre

$$(8\ bis)\qquad \mathfrak{R}(e^{-\theta i}) \geqq 0, \qquad \mathfrak{R}(r) > 0;$$

nous aurons ici cette série de factorielles

$$(9)\qquad \Omega(x+iy) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s(\theta)}{r(r+1)\ldots(r+s)},$$

convergente sous les conditions (8 *bis*) et nous avons posé pour abréger

$$(10)\qquad A_n(\theta) = e^{-\theta i}\sum_{s=0}^{s=n-1} C_n^s a_{n-s} e^{-(n-s)\theta i}, \qquad A_0(\theta) = e^{-\theta i} a_0.$$

Il est évident que les séries asymptotiques obtenues de (3) en y introduisant x ou y au lieu de r nous conduiront à des séries de factorielles analogues à (9) mais ayant les arguments x ou y et qui sont convergentes, pourvu que nous ayons respectivement

$$(11)\qquad \mathfrak{R}(\cos\theta\, e^{-\theta i}) \geqq 0, \qquad \mathfrak{R}(x) > 0,$$

$$(11\ bis)\qquad \mathfrak{R}(\sin\theta\, e^{-\theta i}) \geqq 0, \qquad \mathfrak{R}(y) > 0.$$

On voit que la fonction de M. Prym

$$P(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt, \qquad \Re(x) > 0$$

est un exemple net des fonctions susdites, dont la fonction génératrice est entière.

Dans le second cas susdit, où $t = 0$ est le seul point singulier de la fonction génératrice $\varphi(t)$, les formules précédentes sont valables encore, et les domaines de convergence des séries de factorielles correspondantes se déterminent en étudiant le point singulier des fonctions génératrices

$$\varphi(t^{-i}), \qquad \varphi(t^{-\theta i})$$

et en appliquant ensuite le théorème fondamental susdit (¹).

Supposons maintenant réelles les deux variables u et v, puis mettons

$$|u + iv| = r, \qquad u + iv = re^{i\theta},$$

les recherches précédentes nous donnent immédiatement ce théorème singulier, ce me semble :

V. *Supposons que la fonction génératrice de $\Omega(x)$ soit une fonction entière ou ne possède que le seul point singulier fini $t = 0$, la fonction $\Omega(u + iv)$ prise d'une variable complexe ordinaire est développable en séries de factorielles des arguments r, u ou v, séries qui sont convergentes toutes les trois, pourvu que* $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$.

§ 4. — Applications sur la fonction $\Psi(x) = D_x \log \Gamma(x)$.

Comme un premier exemple des théories générales que nous venons de développer étudions cette fonction très élémentaire dans la théorie des séries de factorielles

$$(1) \qquad \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{x+s} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt,$$

(¹) *Annales de l'École Normale*, t. XIX, 1902, p. 420.

où la convergence de l'intégrale définie exige la condition $\mathfrak{R}(x) > 0$; nous aurons ce développement en série de factorielles

$$(2) \qquad \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} \frac{1}{2^{s+1}},$$

convergente pour une valeur quelconque de x, zéro et les nombres négatifs entiers exclus; c'est-à-dire que la série asymptotique obtenue pour $\beta(x)$ est applicable dans tous les points très éloignés du plan des x, dont la distance à l'axe des nombres négatifs est très grande.

Pour obtenir les coefficients de cette série partons de l'intégrale définie

$$(3) \qquad \beta(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1+e^{-t}} dt, \qquad \mathfrak{R}(x) > 0,$$

puis désignons par

$$T_1, \quad T_2, \quad T_3, \quad \ldots$$

les nombres entiers souvent appelés les *coefficients du tangent*, nous aurons immédiatement

$$(4) \qquad \beta(x) \sim \frac{1}{2x} - \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s T_s}{(2x)^{2s}};$$

on voit, en effet, à cause des pôles simples de $\beta(x)$, que la série infinie obtenue de (4) en faisant croître au delà de toute limite le positif entier n sera divergente.

Cela posé, nous aurons aussi

$$(5) \qquad \beta(x+\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(x+\frac{1}{2})}}{1+e^{-t}} dt, \qquad \mathfrak{R}(x) > -\tfrac{1}{2},$$

et nous savons que $\beta(x+\frac{1}{2})$ est développable en série de factorielles convergentes, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > -\frac{1}{2}$; c'est-à-dire que la série asymptotique déduite immédiatement de (5)

$$(6) \qquad \beta(x+\tfrac{1}{2}) \sim \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s E_{s+1}}{(2x)^{2s+1}},$$

où les coefficients

$$E_1, \; E_2, \; E_3, \; \ldots$$

désignent les nombres d'*Euler*, est certainement applicable, pourvu que $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$, où nous avons posé pour abréger $x = |x| e^{\theta i}$.

Or, nous aurons cette équation aux différences finies de la même forme qu'au paragraphe 2, (9), de sorte que la série (6) est valable encore pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Appliquons ensuite la formule fondamentale

$$\beta(x) + \beta(1 - x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

nous avons de même

$$\beta(x + \tfrac{1}{2}) + \beta(\tfrac{1}{2} - x) = \frac{\pi}{\cos \pi x};$$

supposons maintenant très grandes les valeurs absolues de la partie imaginaire de x, puis désignons par p un positif entier fini, mais aussi grand qu'on le veut; nous aurons évidemment cette valeur limite

$$\lim_{|x| = \infty} \left| \frac{x^p}{\cos \pi v} \right| = 0; \tag{7}$$

c'est-à-dire que *la série asymptotique* (6) *est applicable pourvu que* $-\pi < \theta < +\pi$.

Pour étudier la série asymptotique obtenue pour $\beta(x - y)$, il faut calculer les coefficients de la série de puissances

$$\frac{e^{ty}}{1 + e^{-t}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \omega_s(y)\, t^s, \qquad |t| < \pi;$$

or, prenons pour point de départ la série analogue

$$\frac{e^{ty}\, t}{1 - e^{-t}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varphi_s(y)\, t^s, \qquad |t| < 2\pi; \tag{8}$$

où les fonctions $\varphi_s(y)$ sont les polynomes de Bernoulli, savoir :

$$\varphi_0(y) = 0,$$
$$\varphi_1(y) = y + \tfrac{1}{2},$$
$$\varphi_n(y) = \frac{y^n}{n!} + \frac{1}{2}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{(2s)!}\frac{y^{n-2s}}{(n-2s)},$$

où les coefficients

$$B_1, \quad B_2, \quad B_3, \quad \ldots$$

sont les nombres de Bernoulli, un simple calcul donnera

$$\varphi_{n+1}(y) + \omega_n(y) = 2^{n+1}\varphi_{n+1}\left(\frac{y}{2}\right),$$
$$\varphi_{n+1}(y) - \omega_n(y) = 2^{n+1}\varphi_{n+1}\left(\frac{y-1}{2}\right),$$

d'où

$$\omega_n(y) = 2^n\left[\varphi_{n+1}\left(\frac{y}{2}\right) - \varphi_{n+1}\left(\frac{y-1}{2}\right)\right],$$

de sorte que nous obtenons cette série asymptotique

$$(9) \qquad \beta(x-y) \sim \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{2^s s!\left[\varphi_{s+1}\left(\frac{y}{2}\right) - \varphi_{s+1}\left(\frac{y-1}{2}\right)\right]}{x^{s+1}},$$

applicable, pourvu que $x - y$ satisfasse aux mêmes conditions que x dans (4).

Remarquons que la fonction génératrice de l'intégrale définie qui figure dans (1) a un simple pôle dans $t = -1$, les séries de factorielles mentionnées dans le paragraphe 3 ne sont jamais convergentes ici.

Considérons ensuite la fonction

$$(10) \qquad \Psi(x) = D_x \log\Gamma(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right),$$

où C désigne la constante d'Euler, nous aurons évidemment

$$\beta(x) = \tfrac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Pour étudier la fonction $\Psi(x)$, partons de cette représentation intégrale

$$(11) \qquad \Psi(x) + C = \int_0^1 \frac{1 - t^{x-1}}{1-t}\,dt, \qquad \mathfrak{R}(x) > 0;$$

il est clair que $\Psi(x)$ ne peut pas être développée en série de factorielles, et dans le paragraphe 5 nous démontrerons, de plus, que la fonction susdite n'est pas développable en série asymptotique. Considérons maintenant cette autre fonction

$$(12) \qquad \Psi(x) - \Psi(x-y) = \int_0^1 \frac{t^{-y} - 1}{1-t}\, t^{x-1}\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{ty} - 1}{1 - e^{-t}}\, e^{-tx}\,dt,$$

où la convergence des intégrales définies exige à la fois

$$\mathfrak{R}(x) > 0, \qquad \mathfrak{R}(x-y) > 0.$$

Cela posé, nous obtenons sans peine ce développement en série de factorielles

$$(13) \qquad \Psi(x) - \Psi(x-y) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{y(y+1)(y+2)\ldots(y+s)}{(s+1)\,x(x+1)\ldots(x+s)},$$

convergente pourvu que $\mathfrak{R}(x-y) > 0$, ce qui donnera, en vertu de (8), la série asymptotique

$$(14) \qquad \Psi(x) - \Psi(x-y) \sim \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{s!\,[\varphi_{s+1}(y) - \varphi_{s+1}(0)]}{x^{s+1}},$$

pour laquelle nous avons à démontrer cette proposition :

Supposons fini $|y|$, *la série asymptotique* (14) *est applicable pour les valeurs de* x, *telles que* $|x|$ *est très grand et* $-\pi < \theta < +\pi$, *où* $x = |x|\,e^{\theta i}$.

Nous savons tout d'abord que (14) est applicable pourvu que $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$; de plus, nous aurons cette équation aux différences finies

$$\Psi(x+1) - \Psi(x-y+1) = \Psi(x) - \Psi(x-y) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-y}$$

de la même forme qu'au paragraphe 2, (9); c'est-à-dire que (14) est applicable pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ aussi.

Cela posé, prenons pour point de départ cette équation fonctionnelle

$$\Psi(-x) - \Psi(x) = \frac{1}{x} + \pi \cot \pi x,$$

un simple calcul donnera

$$\Psi(x) - \Psi(x+y) - \Psi(-x) + \Psi(-x+y)$$
$$= \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x} + \frac{\pi \sin \pi y}{\sin \pi x \sin \pi (x-y)};$$

c'est-à-dire que nous avons ici une valeur limite analogue à (7), d'où, en vertu de (14), cette nouvelle série asymptotique

$$\Psi(-x) - \Psi(-x+y) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-y} \sim \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{s![\varphi_{s+1}(y) - \varphi_{s+1}(0)]}{x^{s+1}};$$

changeons maintenant dans cette formule le signe de y, puis appliquons les identités suivantes :

$$\varphi_{s+1}(-y) = (-1)^{s+1}\left[\varphi_{s+1}(y) - \frac{y^s}{s!}\right],$$
$$\varphi_{s+1}(0) = (-1)^{s+1}\varphi_{s+1}(0),$$

conséquences immédiates des définitions susdites des polynomes de Bernoulli, on trouvera précisément la formule obtenue de (14) en y changeant le signe de x.

Appliquons ensuite aux formules (13), (14) l'identité du paragraphe 1, (5), nous aurons ce développement selon les polynomes de Bernoulli :

$$(15) \qquad \frac{y(y+1)\ldots(y+n)}{n+1} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{C_n^{n-s-1}}{s!}[\varphi_{s+1}(y) - \varphi_{s+1}(0)].$$

Différentions enfin p fois par rapport à y la formule (14), ce qui est permis, puis appliquons la formule

$$\varphi_{n+1}^{(1)}(y) = \varphi_n(y),$$

nous aurons cette autre série asymptotique

$$(16)\qquad (-1)^{p+1}\Psi^{(p)}(x-y) \sim \sum_{s=0}^{s=n-p} \frac{(p-s-1)!\,\varphi_s(y)}{x^{p+s}},$$

d'où particulièrement, pour $y = 0$,

$$(17)\qquad (-1)^{p+1}\Psi^{(p)}(x) \sim \sum_{s=0}^{s=n-p} \frac{(p-s-p)!\,\varphi_s(0)}{x^{p+s}},$$

séries particulières qui sont applicables où l'est (14).

§ 5. — Évaluation nouvelle de la série de Stirling.

Comme un second exemple de nos théories générales, considérons la célèbre fonction de Binet :

$$(1)\qquad \omega(x) = \log\Gamma(x) - (x - \tfrac{1}{2})\log x + x - \log\sqrt{2\pi},$$

pour laquelle Cauchy a donné cette élégante représentation intégrale

$$(2)\qquad \omega(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-tx}}{t}\,dt, \qquad \mathfrak{R}(x) > 0,$$

de sorte que la série de puissances

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s B_s}{(2s)!}\,t^{2s-1}, \qquad |t| < 2\pi,$$

où B_1, B_2, B_3, ... désignent les nombres de Bernoulli, nous conduira immédiatement, en vertu du paragraphe I, (5), (7), aux séries de factorielles données par Binet; elles sont convergentes toutes les deux, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 0$.

Cela posé, remarquons que $\omega(x)$ satisfait à cette équation aux différences finies

$$(3)\qquad \omega(x+1) = \omega(x) - \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right],$$

qui est précisément de la même forme que (9) du paragraphe 2; appliquons ensuite la formule eulérienne

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x};$$

un simple calcul donnera, en vertu de (1), (3), une équation fonctionnelle de cette forme

$$(4) \qquad \omega(x) + \omega(-x) = -\log(e^{\pi x i} - e^{-\pi x i}) \pm \frac{\pi i}{2} \pm \pi i + \left(x + \frac{1}{2}\right)\pi i.$$

Pour déterminer les signes inconnus qui figurent au second membre, supposons que x ne soit pas réelle, puis prenons comme point de départ cette formule due à Binet

$$\omega(x) = \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{s-1}{2s(s+1)} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{(x+r)^s};$$

il est assez facile de démontrer, comme l'a fait voir M. Jensen [1], qu'il est possible de choisir $|x|$ si grand que

$$|\omega(x)| < \varepsilon, \qquad |\omega(-x)| < \varepsilon,$$

où ε désigne une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut; c'est-à-dire que nous avons à considérer ces deux cas différents :

1° La partie réelle de ix est positive; la formule (4) s'écrira sous cette forme

$$(5) \qquad \omega(x) + \omega(-x) = -\log(1 - e^{-2\pi x i});$$

2° La partie réelle de ix est négative; nous aurons au contraire

$$(5\ bis) \qquad \omega(x) + \omega(-x) = -\log(1 - e^{2\pi x i}).$$

Cela posé, nous avons démontré cette intéressante proposition :

---

[1] *Nyt Tidsskrift for Matematik*, t. II B., 1891, p. 45 (danois).

La série de Stirling

$$\omega(x) \sim \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s B_{s+1}}{(2s+1)(2s+2)} \frac{1}{x^{2s+1}} \tag{6}$$

est applicable pour tous les points très éloignés du plan des x situés dans une très grande distance de l'axe des nombres négatifs.

Ce résultat général a été donné pour la première fois par Stieltjes [1], mais il est digne de remarque que ce même résultat se présente comme cas particulier des belles recherches de M. Mellin [2].

Considérons encore cette autre fonction de Binet

$$\omega_1(x) = \log x - \Psi(x) = \frac{1}{2x} - \omega^{(1)}(x), \tag{7}$$

nous aurons, en vertu de (2), cette représentation intégrale

$$\omega_1(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + 1 \right) \frac{e^{-tx}}{t} \, dt, \qquad \Re(x) > 0, \tag{8}$$

ce qui donnera immédiatement les deux séries de factorielles, développées ou indiquées par Binet, et cette série asymptotique

$$\omega_1(x) \sim \frac{1}{2x} - \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{2s} \frac{1}{x^{2s}}, \tag{9}$$

qui est valable où l'est (6).

Quant à la portée de notre méthode générale, remarquons que les séries de factorielles qui représentent les deux fonctions $\omega(x)$ et $\omega_1(x)$ peuvent être déduites d'une méthode entièrement élémentaire, comme j'ai fait voir récemment [3]; de plus, le passage de ces

---

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. V, 1889, p. 434.
(2) *Acta mathematica*, t. XXV, 1902, p. 171.
(3) *Annali di Matematica*, 3e série, t. IX, 1903, p. 237-245.

séries aux séries asymptotiques (6) et (9) est élémentaire aussi; c'est-à-dire que :

Notre méthode générale nous permet d'établir la série de Stirling dans toute sa généralité, à l'aide des méthodes les plus élémentaires, sans appliquer le calcul intégral.

Remarquons maintenant que la formule (8) du paragraphe 3 donnera immédiatement ce développement en série de puissances :

$$\frac{e^{-ty}}{t}\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)=\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\left[\varphi_{s+2}(y)-\frac{y^{s+2}}{(s+2)!}-\frac{y^{s+1}}{2(s+1)!}\right]t^s;$$

il en résulte, après un simple calcul, cette série asymptotique :

$$\omega(x+y)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{y}{x}\right)-y\log\left(1+\frac{y}{x}\right)+y\sim\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{s!\,\varphi_{s+2}(y)}{x^{s+1}}, \tag{10}$$

d'où, en changeant le signe de y, cette formule analogue :

$$\begin{aligned}\omega(x-y)&+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{y}{x}\right)\\ &+y\log\left(1-\frac{y}{x}\right)-\log\left(1-\frac{y}{x}\right)\sim\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s s!\,\varphi_{s+2}(y)}{x^{s+1}};\end{aligned} \tag{11}$$

il est évident que ces deux formules nous conduisent, à l'aide de (1), aisément à celles que vous avez données comme exemples de votre belle méthode générale ([1]). Les deux formules susdites donnent encore, de la même manière, ces deux autres, que l'on trouve aussi dans le Mémoire susdit de Stieltjes ([2]) :

$$\frac{1}{2}\log\frac{\Gamma(x+y)\Gamma(x-y+1)}{\Gamma(x)\Gamma(x+1)}\sim\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}}\frac{(2s)!\,[\varphi_{2s+2}(y)-\varphi_{2s+2}(0)]}{x^{2s+1}}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x-y+1)}-\left(y-\frac{1}{2}\right)\log x\sim-\sum_{s=1}^{\leq\frac{n}{2}}\frac{(2s-1)!\,\varphi_{2s+1}(y)}{x^{2s}}, \tag{13}$$

([1]) *Journal de Crelle*, t. 116, 1896, p. 137; *Annales de l'Université de Varsovie*, 1888.

([2]) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. V, 1889, p. 440 et 443.

qui sont valables où l'est la série de Stirling, pourvu que $|y|$ soit fini.

Quant aux séries asymptotiques obtenues pour les fonctions $\omega_1(x \pm y)$, elles peuvent être déduites en différentiant, par rapport à y, les deux formules (10) et (11); du reste, la formule (7) montrera que ces séries asymptotiques ne sont réellement autre chose que celles qui figurent dans la formule (14) du paragraphe 4.

On voit encore que les séries de factorielles développées dans le paragraphe 3 sont applicables pour les deux fonctions $\omega(x)$ et $\omega_1(x)$, et que l'application des formules générales ne présente aucune difficulté.

§ 6. — Remarques sur la fonction $\Gamma(u+iv)$.

Quoique les formules du paragraphe 5 nous permettent une étude assez simple de la fonction gamma, d'un argument complexe ordinaire, savoir $\Gamma(u+iv)$, où u et v sont deux quantités réelles, il nous semble utile de traiter ce problème sous un autre point de vue. A cet effet, désignons par x et y deux variables complexes, le produit de Weierstrass pour $\Gamma(x)$ donnera immédiatement

$$\log\Gamma(x+iy) = \log\Gamma(x) - P(x, y) - i[y\,\Psi(x) + Q(x, y)], \tag{1}$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$P(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{s=\infty}\log\left[1 + \frac{y^2}{(x+s)^2}\right], \tag{2}$$

$$Q(x, y) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{y}{x+s} - \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x+s}\right), \tag{3}$$

où les fonctions multiformes qui figurent aux seconds membres sont définies, de sorte qu'elles s'évanouissent avec y.

On voit que les formules (2) et (3) donnent immédiatement, pour $P(x, y)$ et $Q(x, y)$, ces propriétés fondamentales :

$$\begin{cases} P(x, y) = P(x+1, y) + \dfrac{1}{2}\log\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right), \\ \lim\limits_{n=\infty} P(x+n, y) = 0; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} Q(x, y) = Q(x+1, y) + \left(\dfrac{y}{x} - \operatorname{arc\,tang}\dfrac{y}{x}\right), \\ \lim\limits_{n=\infty} Q(x+n, y) = 0; \end{cases} \tag{5}$$

propriétés qui suffisent pour définir entièrement les deux fonctions en question.

Supposons x et y finis et tels que les égalités

$$x + s = 0 \quad \text{et} \quad x + s \pm iy = 0, \tag{6}$$

où s désigne un entier non négatif, soient exclues; les formules (2) et (3) montrent que $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions holomorphes de l'une des variables x et y, pourvu que l'autre soit considérée comme une constante quelconque.

Les mêmes formules (2) et (3) donnent encore, pour $P(x, y)$ et $Q(x, y)$, cette propriété fondamentale :

$$P(x, -y) = \quad P(x, y), \tag{7}$$
$$Q(x, -y) = -Q(x, y). \tag{8}$$

Cela posé, changeons, dans (1), le signe de i; nous aurons, en additionnant, puis en soustrayant :

$$P(x, y) = \log\Gamma(x) - \tfrac{1}{2}[\log\Gamma(x + iy) + \log\Gamma(x - iy)], \tag{9}$$

$$Q(x, y) = \frac{1}{2i}[\log\Gamma(x + iy) - \log\Gamma(x - iy)] - y\Psi(x), \tag{10}$$

d'où, en vertu de la formule (1) du paragraphe 5,

$$\begin{aligned} &P(x, y) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + y \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} \\ &\quad = \omega(x) - \frac{1}{2}[\omega(x + iy) + \omega(x - iy)], \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &Q(x, y) - y\log\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + y - y\,\omega_1(x) \\ &\quad = \frac{1}{2i}[\omega(x + iy) - \omega(x - iy)]. \end{aligned} \tag{12}$$

Appliquons d'abord les formules (9) et (10), nous aurons immédiatement ces deux formules fondamentales :

$$P(1 - x, y) + P(x, y) \qquad = \frac{1}{2}\log\frac{e^{2\pi y} + e^{-2\pi y} - 2\cos\pi x}{4\sin^2 x}, \tag{13}$$

$$Q(x, y) \qquad - Q(1 - x, y) = \pi y\cot\pi x + \frac{1}{2i}\log\frac{\sin\pi(x - iy)}{\sin\pi(x + iy)}, \tag{14}$$

d'où, particulièrement,

$$P\left(\frac{1}{2}, y\right) = \frac{1}{2}\log\frac{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}{2}, \tag{15}$$

tandis que (9) donnera cette autre formule particulière :

$$P(1, y) = \frac{1}{2}\log\frac{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}{2\pi y}. \tag{16}$$

Supposons maintenant $|y|$ fini, les formules (12) et (13) du paragraphe 5 nous donneront immédiatement les séries asymptotiques obtenues pour $P(x, y)$ et $Q(x, y)$, tandis que le cas contraire, où $|x|$ est supposé fini, peut être traité en combinant les formules (11) et (12) avec (10) et (11) du paragraphe 5. De plus, on voit que l'application des formules du paragraphe 3 est évidente, parce qu'elles s'appliquent immédiatement à la fonction $\omega(x \pm iy)$.

Quant aux représentations intégrales des deux fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$, prenons pour point de départ ces deux formules élémentaires :

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(ty)}{t}e^{-tx}\,dt = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right), \tag{17}$$

$$\int_0^\infty \frac{ty-\sin(ty)}{t}e^{-tx}\,dt = \frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}, \tag{18}$$

qui sont valables pourvu que nous ayons

$$\mathfrak{R}(x \pm iy) > 0. \tag{19}$$

Posons maintenant, dans (17) et (18), $x+1$, $x+2$, $x+3$, ... au lieu de x, puis additionnons toutes les équations ainsi obtenues, nous aurons finalement

$$P(x, y) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(yt)}{t(1-e^{-t})}e^{-tx}\,dt, \tag{20}$$

$$Q(x, y) = \int_0^\infty \frac{yt-\sin(yt)}{t(1-e^{-t})}e^{-tx}\,dt, \tag{21}$$

formules qui sont valables sous la condition (19).

Pour obtenir les séries de factorielles pour $P(x, y)$ et $Q(x, y)$, il est le plus facile de développer en séries de puissances négatives les deux fonctions qui figurent dans (17) et (18) et appliquer ensuite les formules générales (5) et (7) du paragraphe I; les séries ainsi obtenues sont convergentes, pourvu que $\mathfrak{R}(x \pm iy) > 0$.

...Voyez mes dernières réflexions sur les séries de factorielles et leurs applications. Maintenant je laisse à votre autorité de décider si ma méthode, nouvelle je le crois, est d'une valeur si générale qu'elle mérite d'être publiée.

Copenhague, le 12 janvier 1905.