Annales scientifiques de l'É.N.S.

Charles Riquier

Sur l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles auquel conduit l'étude des déformations finies d'un milieu continu

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 22 (1905), p. 475-538

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1905_3_22__475_0>

SUR L'INTÉGRATION

D'UN

SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

AUQUEL CONDUIT L'ÉTUDE

DES DÉFORMATIONS FINIES D'UN MILIEU CONTINU [1],

PAR M. CHARLES RIQUIER.

L'objet du présent Mémoire consiste dans l'étude du système d'équations aux dérivées partielles :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2=\lambda_1(x,y,z),\\ &\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2=\lambda_2(x,y,z),\\ &\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2=\lambda_3(x,y,z),\\ &\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}=\mu_1(x,y,z),\\ &\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}=\mu_2(x,y,z),\\ &\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}=\mu_3(x,y,z),\end{aligned}\right.$$

---

[1] Le même sujet a été traité par M. Manville dans une Thèse de Physique mathématique, soutenue le 3 décembre 1903 devant la Faculté des Sciences de Bordeaux; son travail renfermant quelques erreurs, j'ai cru devoir le reprendre, et c'est ce qui m'a déterminé à publier le présent Mémoire.

où u, v, w désignent trois fonctions inconnues, et

$$(2) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3$$

six fonctions données des trois variables indépendantes x, y, z [1]. Bien que tous les résultats qui s'y trouvent exposés ne soient pas nouveaux [2], il nous a semblé qu'un travail, où la simplicité et la précision ont été recherchées avant tout, pouvait présenter quelque intérêt. Nous signalerons notamment au lecteur les deux points suivants : en premier lieu, la démonstration, pour les systèmes *orthoïques* et *orthonomes*, étudiés dans nos travaux antérieurs, d'une règle de passivité plus simple, abrégeant, dans bien des cas, les calculs à effectuer sur ces systèmes; en second lieu, la détermination des éléments dont on peut disposer arbitrairement dans le choix des fonctions (2) pour

---

(1) La plupart des auteurs prennent comme inconnues les différences :

$$u - x = \mathfrak{u}, \qquad v - y = \mathfrak{v}, \qquad w - z = \mathfrak{w}.$$

Si l'on effectue cette transformation, et que l'on pose, en outre,

$$\frac{\lambda_1 - 1}{2} = \varepsilon_1, \qquad \frac{\lambda_2 - 1}{2} = \varepsilon_2, \qquad \frac{\lambda_3 - 1}{2} = \varepsilon_3,$$
$$\mu_1 = \gamma_1, \qquad \mu_2 = \gamma_2, \qquad \mu_3 = \gamma_3,$$

le système (1) prend la forme suivante, sous laquelle on le considère fréquemment :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\right)^2\right] = \varepsilon_1,\\
&\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}\right)^2\right] = \varepsilon_2,\\
&\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\right)^2\right] = \varepsilon_3,\\
&\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = \gamma_1,\\
&\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} = \gamma_2,\\
&\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} = \gamma_3.
\end{aligned}$$

(2) Voir l'Ouvrage de M. Darboux ayant pour titre : *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*.

que le système (1) soit intégrable, ou, en d'autres termes, la détermination du degré de généralité du système formé par les conditions de possibilité : le résultat auquel on est conduit présente cette particularité, facile à prévoir, que, les fonctions (2) étant, comme les conditions de possibilité, en nombre égal à six, trois d'entre elles convenablement choisies (par exemple : μ_1, μ_2, μ_3) sont entièrement arbitraires.

CHAPITRE I.

SUR LES CONDITIONS DE PASSIVITÉ DES SYSTÈMES ORTHOÏQUES ET ORTHONOMES.

1. Considérons un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et dont les seconds membres soient, dans une certaine région, tous analytiques. Nous dirons qu'une dérivée de fonction inconnue est, par rapport à ce système, *principale* ou *paramétrique*, suivant qu'elle coïncide ou non, soit avec quelqu'un des premiers membres, soit avec quelqu'une de leurs dérivées. Des intégrales (ordinaires) quelconques d'un pareil système étant supposées développées par la série de Taylor à partir de valeurs initiales quelconques des variables indépendantes, les portions de ces développements formées par l'ensemble des termes qui, aux facteurs numériques connus près, ont pour coefficients les valeurs numériques initiales des intégrales dont il s'agit et de leurs dérivées paramétriques de tous ordres, se nommeront les *déterminations initiales* de ces intégrales. On peut d'ailleurs, comme je l'ai établi [1], fixer à l'aide des considérations les plus élémentaires l'économie des fonctions (ou constantes), en nombre fini, dont la connaissance équivaut à celle des déterminations initiales.

[1] *Sur une question fondamentale du Calcul intégral*, première Partie (*Acta Mathematica*, t. XXIII, p. 215-230).

A chacune des variables indépendantes et des fonctions inconnues engagées dans notre système faisons correspondre maintenant p entiers (positifs, nuls ou négatifs) que nous nommerons respectivement *cote première, cote seconde, ..., cote* $p^{\text{ième}}$ de cette quantité, les entiers dont il s'agit étant assujettis à la seule restriction *que la cote première de toute variable indépendante soit positive* et au moins égale à 1. Considérons ensuite une dérivée d'ordre quelconque r de l'une des fonctions inconnues, et nommons *cote* $q^{\text{ième}}$ $(q = 1, 2, \ldots, p)$ de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote $q^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue les cotes $q^{\text{ièmes}}$ des r variables de différentiation. Désignons enfin par δ, δ' deux quantités appartenant à l'ensemble illimité que forment les fonctions inconnues et leurs dérivées de tous ordres, par

$$\begin{matrix} c_1, & c_2, & \ldots, & c_p, \\ c'_1, & c'_2, & \ldots, & c'_p, \end{matrix}$$

les cotes respectives de ces deux quantités, et convenons de dire que δ' est *normale* ou *anormale* par rapport à δ, suivant que les différences

$$c_1 - c'_1, \qquad c_2 - c'_2, \qquad \ldots, \qquad c_p - c'_p$$

satisfont ou non à la double condition : 1° que ces différences ne soient pas toutes nulles; 2° que la première d'entre elles non égale à zéro soit positive.

Cela étant, le système différentiel considéré sera dit *orthoïque*, si les seconds membres y sont indépendants de toute dérivée principale, et si, moyennant un choix convenable du nombre p et des cotes que l'on a commencé par attribuer aux variables et aux inconnues, chaque second membre ne contient *effectivement*, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) qui soient normales par rapport au premier membre correspondant [1].

2. *Dans tout système orthoïque, l'ensemble illimité que forment les dérivées principales des inconnues se partage, d'après une loi déterminée, en ensembles limités successifs satisfaisant à la condition suivante :*

---

[1] *Ibid.*, p. 234.

Si l'on désigne par δ, δ' deux dérivées principales quelconques, la dérivée δ' est normale ou anormale vis-à-vis de δ, suivant que l'ensemble partiel où figure δ' précède ou non celui où figure δ ([1]).

Observons tout d'abord qu'en désignant par φ la cote première minima des diverses fonctions inconnues, toute dérivée d'ordre n de ces dernières aura une cote première au moins égale à $n+\varphi$, puisque la cote première de toute variable indépendante est au moins égale à 1. Il résulte de là que la cote première d'une dérivée d'ordre quelconque ne tombe jamais au-dessous de $1+\varphi$, et qu'en désignant par c un entier déterminé quelconque (au moins égal à $1+\varphi$), le nombre des dérivées possédant une cote première égale à c est essentiellement limité.

Cela posé, on partagera d'abord les dérivées principales des inconnues en ensembles limités successifs d'après leurs cotes premières croissantes; chaque ensemble ainsi obtenu sera, toutes les fois qu'il y aura lieu, partagé en ensembles partiels successifs d'après les cotes secondes croissantes des dérivées qui le composent; puis, chacun des ensembles résultants en ensembles partiels successifs d'après les cotes troisièmes croissantes de ses termes; et ainsi jusqu'à épuisement des p cotes. L'ensemble illimité formé par les dérivées principales se trouvera finalement partagé en ensembles limités se succédant suivant une certaine loi, et l'on voit immédiatement que, par rapport à une dérivée quelconque figurant dans l'ensemble partiel de rang N, les dérivées figurant dans les ensembles partiels de rangs $1, 2, \ldots, N-1$ sont toutes normales, tandis que les dérivées figurant dans les ensembles partiels de rangs $N, N+1, \ldots$ sont toutes anormales. C'est ce qu'il s'agissait de prouver.

Si maintenant l'on convient de dire qu'une dérivée principale est de *classe* 1, 2, 3, ... suivant qu'elle appartient au premier, au second, au troisième, ... des ensembles successifs formés ci-dessus, notre théorème peut encore s'exprimer en disant que *toute dérivée principale est normale ou anormale relativement à une autre suivant qu'elle est ou non de classe inférieure à cette autre.*

([1]) *Ibid.*, p. 233 et 234.

On observera que *toute dérivée de quelque dérivée principale est de classe supérieure à cette dernière :* car, la cote première de toute variable indépendante étant au moins égale à 1, toute différentiation exécutée sur quelqu'une des fonctions inconnues ou de leurs dérivées a pour effet d'augmenter la cote première.

3. Soit S un système *orthoïque*. Si aux équations du système S on adjoint toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations (d'ordres quelconques), les premiers membres du groupe illimité résultant de cette adjonction sont (avec répétition possible, mais sans omission) les dérivées principales des inconnues $u, v, \ldots$; d'ailleurs, ainsi qu'il est facile de l'établir [1], le second membre de chaque relation adjointe ne contient, avec les variables $x, y, \ldots$, que des quantités (inconnues ou dérivées) normales vis-à-vis du premier membre correspondant, et ne contient, par suite, en ce qui concerne les dérivées principales, que celles de classe inférieure au premier membre (n° 2). Souvenons-nous enfin que le second membre de chaque relation du système S est, par hypothèse, indépendant de toute dérivée principale.

Cela étant, partageons les relations du groupe illimité dont il vient d'être question, en groupes limités successifs d'après la classe croissante des dérivées principales qui figurent dans leurs premiers membres, et soient

$$(3) \qquad \mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \quad \mathfrak{P}_3, \quad \ldots$$

les groupes successifs dont il s'agit. Si de chacun des groupes (3) on extrait un groupe partiel ayant, mais sans répétition, les mêmes premiers membres que le groupe total correspondant, les groupes partiels ainsi obtenus sont, d'après ce qui précède, successivement résolubles par rapport aux dérivées principales de classes 1, 2, 3, ..., et cela, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux variables $x, y, \ldots$, aux inconnues $u, v, \ldots$ et aux dérivées paramétriques. Mais la même chose n'a pas nécessairement lieu pour les

---

(1) *Ibid.*, p. 235 et suiv.

groupes totaux (3), parce que la répétition possible d'une même dérivée principale dans plusieurs premiers membres d'un groupe total entraîne, dans bien des cas, l'incompatibilité. Cela étant, si, quelles que soient les valeurs numériques attribuées à $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et aux dérivées paramétriques, l'incompatibilité ne se manifeste dans aucun des groupes (3), et si, dès lors, la résolution successive de ces groupes est indéfiniment possible quelles que soient les valeurs dont il s'agit, le système orthoïque sera dit *passif*.

D'après cette définition, il semble qu'on ne puisse en général exprimer la passivité qu'à l'aide d'un nombre infini d'identités; *ces identités*, toutefois, ainsi que nous l'avons établi ([1]), *résultent, à titre de conséquences nécessaires, d'un nombre essentiellement limité d'entre elles, obtenues par la simple considération des groupes*

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_K,$$

où K *désigne la classe maxima des dérivées cardinales des inconnues.*

4. On peut, comme nous allons le voir, simplifier cette règle dans bien des cas. Rappelons tout d'abord la définition des dérivées cardinales.

Si l'on considère deux dérivées (distinctes) d'une fonction quelconque u de $x, y, \ldots$, et que l'on adjoigne mentalement à chacune d'elles la suite indéfinie de ses propres dérivées, tout terme commun aux deux ensembles illimités ainsi obtenus se nommera une *résultante* des deux dérivées en question. Pour passer de la fonction u à l'une ou à l'autre de ces dernières, il faut exécuter sur elle certaines différentiations, dont quelques-unes peuvent être les mêmes de part et d'autre : en désignant par le symbole D. l'ensemble de ces différentiations communes, et par les symboles D'., D''. l'ensemble des différentiations restantes pour la première et la seconde dérivée respectivement, les deux dérivées considérées peuvent évidemment s'écrire

$$\mathrm{D}.\mathrm{D}'.u, \quad \mathrm{D}.\mathrm{D}''.u,$$

([1]) *Ibid.*, p. 241 à 250.

et l'on voit sans peine : 1° qu'elles admettent $D.D'.D''.u$ comme *résultante unique d'ordre minimum;* 2° que l'ensemble complet de leurs résultantes s'obtient en adjoignant à celle d'ordre minimum la suite indéfinie de ses propres dérivées.

Considérons maintenant un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des inconnues, et, dans ce système, deux équations ayant pour premiers membres respectifs deux dérivées d'une même inconnue; puis, prenons la résultante d'ordre minimum de ces dérivées, et répétons l'opération en faisant varier de toutes les manières possibles le choix de la fonction inconnue et celui des deux équations sur les premiers membres desquelles on doit opérer : les résultantes, en nombre essentiellement limité, que nous obtiendrons ainsi, se nommeront, par rapport au système donné, les dérivées *cardinales* de ses diverses fonctions inconnues.

5. Un système orthoïque, S, étant donné, supposons que les dérivées *cardinales* des inconnues puissent s'y répartir en deux groupes (A), (B), satisfaisant à la double condition suivante : 1° une dérivée quelconque du groupe (B) est de classe supérieure à une quelconque du groupe (A); 2° si l'on considère exclusivement, parmi les premiers membres de S, ceux dont une même dérivée du groupe (B) peut se déduire par différentiation, deux quelconques d'entre eux sont les termes extrêmes d'une suite, formée avec quelques-uns d'entre eux, et telle que, pour deux termes *consécutifs* de la suite, la dérivée cardinale correspondante fasse partie du groupe (A).

Cela étant, nous conviendrons de dire que, par rapport au système orthoïque S, les dérivées cardinales du groupe (B) sont *superflues;* il est alors facile d'établir que les conditions de passivité peuvent être obtenues par la simple considération de ceux d'entre les groupes (3) dont l'indice ne surpasse pas la classe maxima des dérivées cardinales non superflues (¹).

(¹) Nous prions le lecteur de se reporter à la démonstration de la règle formulée plus haut (*Acta mathematica*, t. XXIII, p. 243 et suiv.), démonstration dont les alinéas I, II, III, IV et V devront tout d'abord être reproduits. Le raisonnement s'achèvera alors comme il suit :

Ainsi, *pour qu'un système orthoïque soit passif, ou, en d'autres termes, pour que les groupes (en nombre illimité)*

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \quad \mathfrak{P}_3, \quad \ldots$$

VI. *Si, désignant par* J *la classe maxima des dérivées cardinales non superflues, et par* j *un entier au moins égal à* J, *on suppose que les diverses expressions directes de chaque dérivée principale des classes* $1, 2, \ldots, j$ *sont identiquement égales, la même chose a lieu pour chaque dérivée cardinale de classe* $j+1$.

Soit Δ une dérivée cardinale de classe $j+1$, appartenant, pour fixer les idées, à l'inconnue u : on sait déjà (IV) que, parmi ses expressions directes, toutes celles qu'on obtient en partant d'une même équation du système proposé sont identiques entre elles, et il reste à prouver que les deux expressions obtenues en partant de deux équations différentes jouissent de la même propriété.

Or, $j+1$ étant supérieur à J, la dérivée cardinale Δ est superflue : en conséquence, les premiers membres des deux équations considérées sont les termes extrêmes de quelque suite, formée avec des premiers membres ayant pour dérivée commune Δ, et telle que, pour deux termes consécutifs quelconques de la suite, la résultante d'ordre minimum soit une dérivée cardinale non superflue. Nous pouvons donc nous borner, dans notre démonstration, à l'examen du cas où les deux expressions directes considérées de la dérivée cardinale Δ ont été obtenues en partant de deux équations dont les premiers membres aient pour résultante d'ordre minimum une dérivée cardinale non superflue, δ. Dans cette hypothèse, Δ, qui est une résultante des deux premiers membres dont il s'agit, ne peut que coïncider, soit avec δ, soit avec une dérivée de δ; comme elle est d'ailleurs superflue et que δ ne l'est pas, elle est de classe supérieure à δ, et, par suite, coïncide forcément avec une dérivée de δ.

Cela étant, pour passer de la fonction u à l'une ou à l'autre des deux dérivées qui figurent respectivement dans les deux premiers membres, il faut exécuter sur elle certaines différentiations dont quelques-unes peuvent être les mêmes de part et d'autre. Nous désignerons par le symbole D. l'ensemble de ces différentiations communes, et par les symboles D'., D''. l'ensemble des différentiations restantes pour la première et la seconde dérivée respectivement. Les deux équations pourront alors s'écrire sous la forme

$$\mathrm{D}.\mathrm{D}'.u = \ldots, \tag{4}$$

$$\mathrm{D}.\mathrm{D}''.u = \ldots, \tag{5}$$

la résultante d'ordre minimum, δ, de leurs premiers membres ne sera autre que $\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\mathrm{D}''.u$, et Δ se déduira de $\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\mathrm{D}''.u$ par une différentiation convenablement choisie (d'ordre supérieur à zéro). En conséquence, les opérations à exécuter, soit sur l'équation (4), soit sur l'équation (5), pour en déduire une expression directe de la dérivée cardinale Δ, pourront l'être comme il suit : 1° on effectuera d'abord la différentiation D''. s'il s'agit de la première, la différentiation D'. s'il s'agit de la seconde, et l'on remplacera les dérivées principales figurant dans les seconds membres par leurs expressions ultimes;

soient, pour toutes valeurs numériques des variables, des inconnues et de leurs dérivées paramétriques (considérées pour un instant comme autant de quantités indépendantes distinctes), *successivement résolubles (sans incompatibilité) par rapport aux dérivées principales de classes* 1, 2, 3, ..., *il suffit que, en désignant par* J *la classe maxima des dérivées cardinales non superflues, cette résolution soit possible pour les groupes (en nombre limité)*

$$(6) \qquad \mathfrak{P}_1, \ \mathfrak{P}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{P}_J$$

et les dérivées principales correspondantes.

Il va sans dire que, pour effectuer le calcul des conditions de passivité, on peut, au système (6), substituer tout autre système qui lui soit algébriquement équivalent, et exprimer que ce dernier système est résoluble (sans incompatibilité) par rapport aux dérivées principales des classes 1, 2, ..., J.

Les relations ainsi obtenues, indépendantes de toute dérivée principale, doivent, comme l'indique l'énoncé, être vérifiées *identiquement*. Si elles ne le sont pas, et si l'on cesse, en conséquence, d'y considérer comme indépendantes les quantités autres que $x, y, \ldots$, elles se présentent comme étant, *au point de vue de l'intégration*, des conséquences du système donné, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent manquer d'être satisfaites par tout groupe d'intégrales de ce système : *au cas* donc *où*,

---

2° on exécutera ensuite les différentiations restantes, qui sont les mêmes de part et d'autre, et l'on éliminera finalement des seconds membres les dérivées principales. Or, $\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\mathrm{D}''.u$ ou δ étant nécessairement de classe inférieure à $j+1$, il suit de nos hypothèses que les résultats sont identiques, d'abord après la première partie de l'opération, et ensuite après la seconde.

VII. Comme on l'a vu à l'alinéa III, chaque dérivée principale de première classe ne possède qu'une seule expression directe. Si donc on suppose que les diverses expressions ultimes de chaque dérivée cardinale non superflue sont identiquement égales, l'application répétée des alinéas IV et V prouve que l'égalité identique entre les diverses expressions directes d'une même dérivée principale a encore lieu, de proche en proche, dans les classes 1, 2, ..., J. Après quoi, l'application répétée des alinéas IV, VI et V prouve qu'elle a encore lieu, de proche en proche, dans les classes J + 1, J + 2, ... *Il n'y a* dès lors, *pour une même dérivée principale quelconque,* qu'une seule expression directe, et, à plus forte raison, *qu'une seule expression ultime.* C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

sans être identiquement vérifiées, elles ne contiendraient que les seules variables x, y, ..., elles indiqueraient que *le système n'admet aucun groupe d'intégrales.*

6. Dans un système orthoïque, supposé passif, la question de savoir si les intégrales hypothétiques répondant à des déterminations initiales données (convergentes) existent effectivement, se résout par l'affirmative dans le cas où leurs développements construits *a priori* sont tous convergents, par la négative dans le cas contraire. Cette convergence n'a pas nécessairement lieu, ainsi qu'on peut le prouver par des exemples (1); mais il est toute une catégorie de systèmes orthoïques où elle ne peut manquer de se produire : c'est celle où les cotes *premières* des diverses variables indépendantes sont toutes égales à un même entier positif, *entier qu'il est toujours permis,* sans restreindre la généralité, *de supposer égal à* 1 (2). Le système orthoïque sera dit, en pareil cas, *orthonome.*

Ainsi donc, *si, dans un système orthonome passif, on se donne arbitrairement les déterminations initiales* (convergentes) *d'un groupe d'intégrales hypothétiques,* les portions restantes des développements de ces dernières sont elles-mêmes convergentes, et *les intégrales dont il s'agit existent effectivement* (3).

En d'autres termes, *tout système orthonome passif est complètement intégrable.*

7. Étant donné un système *orthonome,* S, où les cotes premières des variables indépendantes sont, comme il vient d'être dit, toutes égales à 1, il est clair que la cote première d'une dérivée quelconque de fonction inconnue s'obtient en ajoutant à la cote première de la

---

(1) *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta Mathematica,* t. XXIII, p. 251 et suivantes).

(2) *Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque* (*Acta Mathematica,* t. XXV, p. 313 et suivantes).

(3) *Sur une question fondamentale du Calcul intégral,* troisième Partie (*Acta Mathematica,* t. XXIII, p. 259 et suivantes).

fonction l'ordre total de la dérivée. Cela étant, adjoignons aux relations du système S toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations (d'ordres quelconques), et partageons le groupe illimité ainsi obtenu en groupes limités successifs d'après les cotes premières croissantes des premiers membres. En désignant par ω la cote première minima des premiers membres de S, et par

$$S_\omega, \quad S_{\omega+1}, \quad S_{\omega+2}, \quad \ldots$$

les groupes successifs dont il s'agit, la règle de passivité formulée au nº 5 entraîne, à plus forte raison, la suivante, souvent plus commode au point de vue pratique lorsqu'il s'agit d'effectuer les calculs :

Pour que le système orthonome S *soit passif, ou, en d'autres termes, pour que les groupes (en nombre illimité)*

$$S_\omega, \quad S_{\omega+1}, \quad S_{\omega+2}, \quad \ldots$$

soient, pour toutes valeurs numériques des variables, des inconnues et de leurs dérivées paramétriques (considérées pour un instant comme autant de quantités indépendantes distinctes), *successivement résolubles (sans incompatibilité) par rapport aux dérivées principales de cotes premières* ω, $\omega+1$, $\omega+2$, ..., *il suffit qu'en désignant par* Ω *la cote première maxima des dérivées cardinales non superflues, cette résolution soit possible pour les groupes (en nombre limité)*

$$(7) \qquad S_\omega, \quad S_{\omega+1}, \quad \ldots, \quad S_\Omega$$

et les dérivées principales correspondantes [1].

---

[1] Considérons, comme exemple, un système d'équations aux dérivées partielles impliquant trois fonctions inconnues, u, v, w, des variables indépendantes $x, y, \ldots$, et supposons qu'il ait pour premiers membres toutes les dérivées d'ordre m de u, toutes celles d'ordre n de v, toutes celles d'ordre p de w, les seconds membres ne contenant, avec les variables $x, y, \ldots$, que les trois inconnues u, v, w et leurs dérivées d'ordres respectivement inférieurs à m, n, p. En attribuant à $x, y, \ldots$ des cotes respectives toutes égales à 1, et à u, v, w des cotes respectives c_u, c_v, c_w vérifiant les relations

$$c_u + m = c_v + n = c_w + p,$$

on voit immédiatement que le système dont il s'agit est orthonome; on voit en même temps qu'en désignant par C la valeur commune des trois entiers $c_u + m$, $c_v + n$, $c_w + p$, les premiers membres y sont tous de cote C, et que les diverses dérivées cardinales y

On pourra d'ailleurs, pour effectuer le calcul des conditions de

---

ont des cotes respectives pouvant varier de $C+1$ à $C+m$ s'il s'agit de l'inconnue u, de $C+1$ à $C+n$ s'il s'agit de l'inconnue v, de $C+1$ à $C+p$ s'il s'agit de l'inconnue w. Je dis que, dans un pareil système, *toutes les dérivées cardinales de cote supérieure à* $C+1$ *sont superflues*.

Pour le démontrer, il suffit évidemment d'établir le point suivant : *Deux dérivées d'un même ordre m d'une fonction u sont toujours les termes extrêmes de quelque suite, exclusivement formée avec des dérivées d'ordre m de u, et telle : 1° que toute dérivée commune aux deux termes extrêmes soit commune à tous les autres; 2° que, pour deux termes consécutifs quelconques, la résultante d'ordre minimum soit d'ordre* $m+1$.

Effectivement, supposons tout d'abord qu'il n'y ait que deux variables x, y, et soient

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta},\quad \frac{\partial^m u}{\partial x^{\alpha-h}\,\partial y^{\beta+h}} \tag{8}$$

les deux dérivées dont il s'agit, qui ont pour résultante d'ordre minimum

$$\frac{\partial^{m+h} u}{\partial x^\alpha\,\partial y^{\beta+h}}. \tag{9}$$

Si l'on forme la suite

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta},\quad \frac{\partial^m u}{\partial x^{\alpha-1}\,\partial y^{\beta+1}},\quad \frac{\partial^m u}{\partial x^{\alpha-2}\,\partial y^{\beta+2}},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^m u}{\partial x^{\alpha-h}\,\partial y^{\beta+h}},$$

où les termes extrêmes sont précisément les dérivées (8), on voit immédiatement que les divers termes, tous d'ordre m, admettent pour dérivée commune la dérivée (9), par suite aussi toute dérivée de cette dernière, par suite enfin toute dérivée commune aux deux dérivées (8); on voit en outre que, pour deux termes consécutifs quelconques, la résultante d'ordre minimum est d'ordre $m+1$.

Notre proposition étant vraie dans le cas de deux variables, tout revient à établir qu'en la supposant telle pour un nombre de variables inférieur à $k+1$, elle l'est encore pour les $k+1$ variables $x, y, \ldots$.

Partageons à cet effet les dérivées de l'ordre total m en groupes successifs d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel relatif à x, et soient

$$G_m,\quad G_{m-1},\quad \ldots,\quad G_1,\quad G_0$$

les groupes successifs dont il s'agit.

Si l'on considère d'abord deux dérivées appartenant à un même groupe, G_α, elles pourront s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial^{m-\alpha} u}{\partial y^{\beta'}\,\partial z^{\gamma'}\ldots},\quad \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial^{m-\alpha} u}{\partial y^{\beta''}\,\partial z^{\gamma''}\ldots}. \tag{10}$$

Or, en vertu de ce qui est admis, les deux dérivées

$$\frac{\partial^{m-\alpha} u}{\partial y^{\beta'}\,\partial z^{\gamma'}\ldots},\quad \frac{\partial^{m-\alpha} u}{\partial y^{\beta''}\,\partial z^{\gamma''}\ldots},$$

passivité, substituer au système (7) tout autre système qui lui soit algébriquement équivalent, et exprimer que ce dernier système est

---

qui intéressent seulement les k variables y, z, ..., peuvent être considérées comme les termes extrêmes de quelque suite, exclusivement formée avec des dérivées d'ordre $m-\alpha$ relatives aux seules variables y, z, ..., et telle : 1° que toute dérivée relative à ces seules variables et commune aux deux termes extrêmes soit commune à tous les autres; 2° que, pour deux termes consécutifs quelconques, la résultante d'ordre minimum soit d'ordre $m-\alpha+1$. Si l'on substitue maintenant à chaque terme de la suite sa dérivée prise α fois par rapport à x, ce qui donnera des dérivées d'ordre total m, la nouvelle suite aura pour termes extrêmes les deux dérivées (10), et jouira de la double propriété : 1° que toute dérivée commune aux deux termes extrêmes soit commune à tous les autres; 2° que, pour deux termes consécutifs quelconques, la résultante d'ordre minimum soit d'ordre $m+1$.

Pour établir maintenant l'exactitude du point qui nous occupe dans le cas général où les deux dérivées considérées de l'ordre m appartiennent respectivement aux deux groupes $G_{\alpha+p}$, G_α, il suffit, puisque la démonstration se trouve déjà faite dans le cas particulier où p est nul, de faire voir qu'en supposant la chose exacte pour la valeur actuelle de p, elle l'est pour la valeur suivante $p+1$.

Considérons donc deux dérivées appartenant respectivement aux deux groupes $G_{\alpha+p+1}$, G_α, et soient

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^{\alpha+p+1}\,\partial y^{\beta'}\,\partial z^{\gamma'}\cdots},\quad \frac{\partial^m u}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta''}\,\partial z^{\gamma''}\cdots}$$

les deux dérivées dont il s'agit. Leurs ordres partiels relatifs à x étant inégaux, les sommes des ordres partiels restants sont inégales en sens contraire, et l'on a forcément

$$\beta''+\gamma''+\ldots>\beta'+\gamma'+\ldots$$

ou

$$(\beta''-\beta')+(\gamma''-\gamma')+\ldots>0;$$

l'une au moins des différences

$$\beta''-\beta',\quad \gamma''-\gamma',\quad \ldots,$$

la première, par exemple, est donc positive, et, en désignant par l un certain entier positif, les deux dérivées peuvent s'écrire

$$(11)\qquad \frac{\partial^m u}{\partial x^{\alpha+p+1}\,\partial y^{\beta'}\,\partial z^{\gamma'}\cdots},\quad \frac{\partial^m u}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta'+l}\,\partial z^{\gamma''}\cdots}.$$

Considérons, en même temps qu'elles, la dérivée

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^{\alpha+p}\,\partial y^{\beta'+1}\,\partial z^{\gamma'}\cdots},$$

résoluble (sans incompatibilité) par rapport aux dérivées principales de cotes premières ω, $\omega+1$, ..., Ω.

---

et rangeons ces trois dérivées dans l'ordre suivant :

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^{\alpha+p+1}\,\partial y^{\beta'}\,\partial z^{\gamma'}\cdots},\quad \frac{\partial^m u}{\partial x^{\alpha+p}\,\partial y^{\beta'+1}\,\partial z^{\gamma'}\cdots},\quad \frac{\partial^m u}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta'+l}\,\partial z^{\gamma''}\cdots}. \tag{12}$$

En désignant par $D.u$ la résultante d'ordre minimum de

$$\frac{\partial^{\gamma'+\cdots} u}{\partial z^{\gamma'}\cdots} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{\gamma''+\cdots} u}{\partial z^{\gamma''}\cdots},$$

celle des deux termes extrêmes de la suite (12) est évidemment

$$\frac{\partial^{(\alpha+p+1)+(\beta'+l)}}{\partial x^{\alpha+p+1}\,\partial y^{\beta'+l}}\,D.u$$

et ne peut manquer, à cause de $l \geqq 1$, d'être en même temps une dérivée du terme intermédiaire : il en résulte que toute dérivée commune aux deux termes extrêmes de (12) est forcément aussi une dérivée du terme intermédiaire. D'un autre côté, les deux premiers termes de (12) ont pour résultante d'ordre minimum la dérivée d'ordre $m+1$

$$\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^{\alpha+p+1}\,\partial y^{\beta'+1}\,\partial z^{\gamma'}\cdots};$$

et les deux derniers termes, qui appartiennent respectivement aux groupes $G_{\alpha+p}$, G_α, peuvent, en vertu de ce qui est admis pour la valeur p, être considérés comme les deux termes extrêmes d'une suite formée avec des dérivées d'ordre m, et telle : 1° que toute dérivée commune aux deux termes extrêmes soit commune à tous les autres; 2° que, pour deux termes consécutifs quelconques, la résultante d'ordre minimum soit d'ordre $m+1$. On en déduit immédiatement l'exactitude du point à établir pour les deux dérivées (11).

Revenons maintenant au système différentiel spécifié au début de la présente Note. Pour qu'une dérivée de cote $C+1$ y soit cardinale, il est évidemment nécessaire et suffisant qu'elle intéresse plusieurs variables indépendantes distinctes. Si l'on en considère une intéressant k variables distinctes, il existe, dans le système proposé, k équations distinctes qui, différentiées chacune par rapport à la variable voulue, en fourniront des expressions où ne figurent, avec les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) de cote inférieure à $C+1$: dans ces k expressions on remplacera les dérivées de cote C par leurs valeurs tirées des équations du système, et il faudra, pour la passivité, que les k expressions résultantes soient toutes identiquement égales. On procédera de même, pour toutes les dérivées cardinales de cote $C+1$, et l'on aura ainsi l'ensemble des conditions de passivité.

CHAPITRE II.

SUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

8. Considérons le système d'équations algébriques

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = \sigma_1,\\ &u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 = \sigma_2,\\ &u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 = \sigma_3;\\ &u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3 = \tau_1,\\ &u_3 u_1 + v_3 v_1 + w_3 w_1 = \tau_2,\\ &u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 = \tau_3, \end{aligned}\right.$$

où

$$(14)\qquad \left\{\begin{matrix} u_1, & v_1, & w_1,\\ u_2, & v_2, & w_2,\\ u_3, & v_3, & w_3 \end{matrix}\right.$$

désignent des indéterminées, et

$$(15)\qquad \sigma_1,\quad \sigma_2,\quad \sigma_3,\quad \tau_1,\quad \tau_2,\quad \tau_3$$

des constantes données. Relativement aux neuf indéterminées, le système (13), composé de six équations, possède autant de déterminants différentiels qu'il y a de combinaisons de neuf objets six à six. Pour se représenter commodément l'une de ces combinaisons, on peut construire le Tableau à double entrée

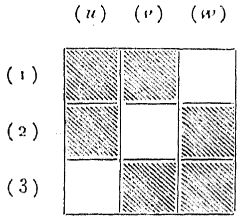
	(u)	(v)	(w)
(1)			
(2)			
(3)			

,

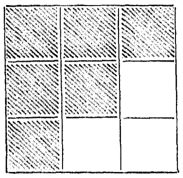
dont les neuf cases correspondent respectivement aux neuf indéterminées (14), et noircir à l'aide de hachures les cases correspondant aux six éléments de la combinaison considérée; on obtiendra ainsi une sorte de damier où les six cases noires et les trois cases blanches pourront offrir des dispositions relatives variées; par exemple, à la combinaison

$$u_1, \quad v_1, \quad u_2, \quad w_2, \quad v_3, \quad w_3$$

correspondra le damier ci-dessous :



Cela étant, nous dirons qu'une combinaison des neuf indéterminées six à six est *parfaite*, si son damier, moyennant un ordre convenable adopté pour les lignes et pour les colonnes, offre la disposition suivante :



9. *Si l'on attribue aux neuf indéterminées* (14) *des valeurs numériques n'annulant pas le déterminant*

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix},$$

les divers déterminants différentiels du système (13) *qui correspondent aux diverses combinaisons parfaites* (*n*° 8) *des neuf indéterminées, ne peuvent s'annuler à la fois.*

Effectivement, si l'on prend les dérivées premières des premiers membres de (13) par rapport aux neuf indéterminées

$$u_1, \quad v_1, \quad w_1, \quad u_2, \quad v_2, \quad w_2, \quad u_3, \quad v_3, \quad w_3,$$

on obtient (en adoptant pour les lignes un ordre convenable et supprimant le facteur 2 dans certaines lignes) le Tableau rectangulaire

$$(17) \qquad \left\{ \begin{matrix} u_1, & v_1, & w_1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ u_2, & v_2, & w_2, & u_1, & v_1, & w_1, & 0, & 0, & 0, \\ u_3, & v_3, & w_3, & 0, & 0, & 0, & u_1, & v_1, & w_1, \\ 0, & 0, & 0, & u_2, & v_2, & w_2, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & u_3, & v_3, & w_3, & u_2, & v_2, & w_2, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & u_3, & v_3, & w_3, \end{matrix} \right.$$

dont nous désignerons les neuf colonnes respectivement par

$$(u_1), \quad (v_1), \quad (w_1), \quad (u_2), \quad (v_2), \quad (w_2), \quad (u_3), \quad (v_3), \quad (w_3).$$

La seule inspection du Tableau (17) nous montre que, si l'on s'assujettit à y prendre les trois colonnes (u_1), (v_1), (w_1), deux des trois colonnes (u_2), (v_2), (w_2), et une des trois colonnes (u_3), (v_3), (w_3), le déterminant différentiel correspondant s'obtiendra en multipliant le déterminant (16) par l'un des trois déterminants du second ordre extraits du Tableau

$$(18) \qquad \left\{ \begin{matrix} u_2, & v_2, & w_2, \\ u_3, & v_3, & w_3, \end{matrix} \right.$$

et le résultat par l'une des trois quantités

$$u_3, \quad v_3, \quad w_3.$$

Or, le premier facteur de ce produit est, par hypothèse, différent de zéro; des trois déterminants du second ordre extraits du Tableau (18), l'un au moins est différent de zéro, puisque le déterminant (16) est supposé l'être; et si l'on suppose, pour fixer les idées,

$$\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ce qui conduit à prendre, dans le Tableau (17), les deux colonnes (u_2), (v_2), l'une au moins des deux quantités u_3, v_3, par exemple la première, située dans la colonne (u_3), sera différente de zéro, en sorte que le produit

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} u_3,$$

c'est-à-dire le déterminant différentiel correspondant à la combinaison parfaite

$$\begin{matrix} u_1, & v_1, & w_1, \\ u_2, & v_2, & \\ u_3, & & \end{matrix}$$

le sera lui-même.

10. *Pour que le système* (13) *possède quelque solution numérique n'annulant pas le déterminant* (16), *il est nécessaire que la forme quadratique*

$$(19) \qquad \sigma_1 X^2 + \sigma_2 Y^2 + \sigma_3 Z^2 + 2\tau_1 YZ + 2\tau_2 ZX + 2\tau_3 XY,$$

aux trois indéterminées X, Y, Z, *soit décomposable en une somme algébrique de trois carrés indépendants* [1].

Réciproquement, si une pareille décomposition est possible, aucune des solutions numériques, en nombre infini, du système (13) *n'annule le déterminant* (16).

En désignant enfin par

$$\begin{matrix} \upsilon_1, & \varphi_1, & \psi_1, \\ \upsilon_2, & \varphi_2, & \psi_2, \\ \upsilon_3, & \varphi_3, & \psi_3 \end{matrix}$$

l'une quelconque de ces solutions numériques, et par

$$(20) \qquad \left\{ \begin{matrix} l_1, & m_1, & n_1, \\ l_2, & m_2, & n_2, \\ l_3, & m_3, & n_3 \end{matrix} \right.$$

---

(1) Nous rappellerons que la condition nécessaire et suffisante pour la possibilité de cette décomposition est

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & \sigma_2 & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & \sigma_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

les éléments d'un déterminant orthogonal arbitraire, c'est-à-dire des quantités pouvant recevoir tous les systèmes de valeurs qui vérifient les relations

$$(21)\quad \begin{cases} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0, \\ n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 = 0, \\ l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0, \end{cases}$$

la solution la plus générale du système (13) *est donnée par les formules*

$$(22)\quad \begin{cases} u_1 = l_1 \upsilon_1 + m_1 \varphi_1 + n_1 \psi_1, \\ v_1 = l_2 \upsilon_1 + m_2 \varphi_1 + n_2 \psi_1, \\ w_1 = l_3 \upsilon_1 + m_3 \varphi_1 + n_3 \psi_1, \\ u_2 = l_1 \upsilon_2 + m_1 \varphi_2 + n_1 \psi_2, \\ v_2 = l_2 \upsilon_2 + m_2 \varphi_2 + n_2 \psi_2, \\ w_2 = l_3 \upsilon_2 + m_3 \varphi_2 + n_3 \psi_2, \\ u_3 = l_1 \upsilon_3 + m_1 \varphi_3 + n_1 \psi_3, \\ v_3 = l_2 \upsilon_3 + m_2 \varphi_3 + n_2 \psi_3, \\ w_3 = l_3 \upsilon_3 + m_3 \varphi_3 + n_3 \psi_3. \end{cases}$$

I. *Si le déterminant*

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_1^2 & v_1^2 & w_1^2 & 2v_1 w_1 & 2w_1 u_1 & 2u_1 v_1 \\ u_2^2 & v_2^2 & w_2^2 & 2v_2 w_2 & 2w_2 u_2 & 2u_2 v_2 \\ u_3^2 & v_3^2 & w_3^2 & 2v_3 w_3 & 2w_3 u_3 & 2u_3 v_3 \\ u_2 u_3 & v_2 v_3 & w_2 w_3 & v_2 w_3 + v_3 w_2 & w_2 u_3 + w_3 u_2 & u_2 v_3 + u_3 v_2 \\ u_3 u_1 & v_3 v_1 & w_3 w_1 & v_3 w_1 + v_1 w_3 & w_3 u_1 + w_1 u_3 & u_3 v_1 + u_1 v_3 \\ u_1 u_2 & v_1 v_2 & w_1 w_2 & v_1 w_2 + v_2 w_1 & w_1 u_2 + w_2 u_1 & u_1 v_2 + u_2 v_1 \end{vmatrix}$$

jouit de la même propriété.

Si, dans une forme quadratique des indéterminées U, V, W, on substitue à ces dernières trois formes linéaires des indéterminées X, Y, Z, on tombe sur une forme quadratique de X, Y, Z. Cela étant, proposons-nous de déterminer une forme quadratique F(U, V, W) par la condition qu'en y substituant à U, V, W les trois formes linéaires données

$$(23) \qquad \begin{cases} U = u_1 X + u_2 Y + u_3 Z, \\ V = v_1 X + v_2 Y + v_3 Z, \\ W = w_1 X + w_2 Y + w_3 Z, \end{cases}$$

qui, en vertu de notre hypothèse, sont *indépendantes*, on tombe sur une forme quadratique donnée H(X, Y, Z) : ce problème admet évidemment une solution et une seule, qui s'obtient en substituant à X, Y, Z, dans la forme quadratique donnée, leurs valeurs en U, V, W tirées des formules (23).

Or, en désignant par

$$A_1 X^2 + A_2 Y^2 + A_3 Z^2 + 2 B_1 YZ + 2 B_2 ZX + 2 B_3 XY$$

la forme quadratique donnée, et par

$$M_1 U^2 + M_2 V^2 + M_3 W^2 + 2 P_1 VW + 2 P_2 WU + 2 P_3 UV$$

la forme quadratique cherchée, les coefficients inconnus de cette dernière sont fournis par les équations

$$\begin{cases} u_1^2 M_1 + v_1^2 M_2 + w_1^2 M_3 + 2 v_1 w_1 P_1 + 2 w_1 u_1 P_2 + 2 u_1 v_1 P_3 = A_1, \\ u_2^2 M_1 + v_2^2 M_2 + w_2^2 M_3 + 2 v_2 w_2 P_1 + 2 w_2 u_2 P_2 + 2 u_2 v_2 P_3 = A_2, \\ u_3^2 M_1 + v_3^2 M_2 + w_3^2 M_3 + 2 v_3 w_3 P_1 + 2 w_3 u_3 P_2 + 2 u_3 v_3 P_3 = A_3, \\ u_2 u_3 M_1 + v_2 v_3 M_2 + w_2 w_3 M_3 + (v_2 w_3 + v_3 w_2) P_1 + (w_2 u_3 + w_3 u_2) P_2 + (u_2 v_3 + u_3 v_2) P_3 = B_1, \\ u_3 u_1 M_1 + v_3 v_1 M_2 + w_3 w_1 M_3 + (v_3 w_1 + v_1 w_3) P_1 + (w_3 u_1 + w_1 u_3) P_2 + (u_3 v_1 + u_1 v_3) P_3 = B_2, \\ u_1 u_2 M_1 + v_1 v_2 M_2 + w_1 w_2 M_3 + (v_1 w_2 + v_2 w_1) P_1 + (w_1 u_2 + w_2 u_1) P_2 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) P_3 = B_3. \end{cases}$$

Ce système admettant, d'après ce qui a été dit, une solution et une seule, le déterminant formé avec les coefficients des inconnues est nécessairement différent de zéro, ce qu'il s'agissait de prouver.

II. Revenons à notre énoncé.

La forme quadratique la plus générale (à trois variables) décomposable en trois carrés indépendants est

$$(u_1 X + u_2 Y + u_3 Z)^2 + (v_1 X + v_2 Y + v_3 Z)^2 + (w_1 X + w_2 Y + w_3 Z)^2, \tag{25}$$

où

$$\begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, \\ v_1, & v_2, & v_3, \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{matrix}$$

désignent neuf constantes (réelles ou imaginaires) arbitrairement choisies sous la seule restriction que leur déterminant ne soit pas nul; en l'ordonnant par rapport à X, Y, Z, elle devient

$$\begin{aligned} &(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)X^2 + (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)Y^2 + (u_3^2 + v_3^2 + w_3^2)Z^2 \\ &+ 2(u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3)YZ + 2(u_3 u_1 + v_3 v_1 + w_3 w_1)ZX \\ &+ 2(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)XY. \end{aligned} \tag{25 bis}$$

Cela étant, si le système (13) admet quelque solution numérique n'annulant pas le déterminant (16), la forme (19) est identique à (25 *bis*) ou (25) pour les valeurs considérées des indéterminées (14), et, par suite, est décomposable comme l'indique l'énoncé.

Réciproquement, si la forme (19) est décomposable comme l'indique l'énoncé, elle est identique à (25) ou (25 *bis*) pour certaines valeurs des mêmes indéterminées n'annulant pas le déterminant (16), et, par suite, le système (13) admet quelque solution numérique satisfaisant à la même restriction. Cela étant, si l'on désigne par

$$\begin{matrix} \upsilon_1, & \varphi_1, & \psi_1, \\ \upsilon_2, & \varphi_2, & \psi_2, \\ \upsilon_3, & \varphi_3, & \psi_3 \end{matrix}$$

une semblable solution numérique, on peut, aux variables anciennes (14), substituer neuf variables nouvelles (20) définies par les formules (22), puisque le déterminant différentiel des anciennes variables par rapport aux nouvelles est, en vertu des formules de transformation, égal au cube de

$$\begin{vmatrix} \upsilon_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ \upsilon_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ \upsilon_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} \tag{26}$$

et, par suite, essentiellement différent de zéro. En écrivant alors que les seconds membres des formules (22) vérifient le système (13), nous obtiendrons un système de six équations, linéaires par rapport aux six expressions qui constituent les premiers membres de (21); et si, pour abréger, nous désignons ces six expressions respectivement par

$$Q_1,\quad Q_2,\quad Q_3,\quad R_1,\quad R_2,\quad R_3, \tag{27}$$

le système (13) transformé se déduira du système (24) par la simple substitution des lettres

$$Q,\quad R,\quad \upsilon,\quad \varphi,\quad \psi,\quad \sigma,\quad \tau$$

aux lettres

$$M,\quad P,\quad u,\quad v,\quad w,\quad A,\quad B$$

respectivement. Si l'on a égard maintenant à la non-nullité du déterminant (26), il résulte de l'alinéa I que, dans le système (13) transformé, le déterminant formé avec les coefficients des quantités (27) est différent de zéro, et que ce système admet, par rapport aux quantités dont il s'agit, une solution et une seule; cette solution est d'ailleurs bien facile à apercevoir, car, en tenant compte de ce que les éléments du déterminant (26) constituent une solution numérique du système (13), le système (13) transformé est manifestement vérifié pour

$$Q_1 = 1,\qquad Q_2 = 1,\qquad Q_3 = 1,\qquad R_1 = 0,\qquad R_2 = 0,\qquad R_3 = 0;$$

on tombe ainsi sur les formules (21).

On voit par là que la solution la plus générale du système (13) est bien fournie par les formules (22), comme l'indique l'énoncé. Aucune solution particulière n'annule d'ailleurs le déterminant (16), car, si l'on tient compte des formules (22), ce déterminant est visiblement le produit du déterminant (26) par le déterminant orthogonal formé avec les quantités (20).

11. *La forme quadratique* (19) *étant supposée décomposable en trois carrés indépendants, si l'on considère comme initiales les neuf valeurs*

particulières des indéterminées (14) *qui constituent une solution numérique du système* (13), *on peut, à partir des valeurs dont il s'agit, résoudre ce dernier, conformément au principe général des fonctions implicites, par rapport à quelque combinaison parfaite des neuf indéterminées.*

C'est là une conséquence immédiate des deux numéros précédents.

12. *Les constantes* (15) *étant supposées réelles, pour que le système* (13) *possède quelque solution numérique réelle n'annulant pas le déterminant* (16), *il est nécessaire que la forme quadratique* (19) *soit la somme (proprement dite, et non algébrique) des carrés de trois formes linéaires indépendantes à coefficients réels* [1].

Réciproquement, si une pareille décomposition est possible, aucune des solutions numériques réelles, en nombre infini, du système (13) *n'annule le déterminant* (16).

En désignant enfin par

$$\begin{array}{ccc} \upsilon_1, & \varphi_1, & \psi_1, \\ \upsilon_2, & \varphi_2, & \psi_2, \\ \upsilon_3, & \varphi_3, & \psi_3 \end{array}$$

l'une quelconque de ces solutions numériques réelles, et par

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

un déterminant orthogonal arbitraire à éléments réels, la solution réelle la plus générale du système (13) *est donnée par les formules* (22).

Effectivement la forme quadratique réelle la plus générale décom-

---

(1) Nous rappellerons que les inégalités

$$\sigma_1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} \sigma_1 & \tau_3 \\ \tau_3 & \sigma_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} \sigma_1 & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & \sigma_2 & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & \sigma_3 \end{vmatrix} > 0$$

constituent un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes pour la possibilité de cette décomposition.

posable comme l'indique l'énoncé est

$$(u_1 X + u_2 Y + u_3 Z)^2 + (v_1 X + v_2 Y + v_3 Z)^2 + (w_1 X + w_2 Y + w_3 Z)^2,$$

où

$$\begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, \\ v_1, & v_2, & v_3, \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{matrix}$$

désignent neuf constantes réelles arbitrairement choisies sous la seule restriction que leur déterminant ne soit pas nul; en l'ordonnant par rapport à X, Y, Z, elle prend la forme (25 *bis*).

Cela étant, si le système (13) admet quelque solution numérique réelle n'annulant pas le déterminant (16), la forme (19) est identique à (25 *bis*) pour les valeurs considérées des indéterminées (14) et, par suite, est décomposable comme l'indique l'énoncé.

Réciproquement, si la forme (19) est décomposable comme l'indique l'énoncé, elle est identique à (25 *bis*), pour certaines valeurs réelles des mêmes indéterminées n'annulant pas le déterminant (16), et, par suite, le système (13) admet quelque solution numérique réelle satisfaisant à la même restriction. Cela étant, on désignera par

$$\begin{matrix} \upsilon_1, & \varphi_1, & \psi_1, \\ \upsilon_2, & \varphi_2, & \psi_2, \\ \upsilon_3, & \varphi_3, & \psi_3 \end{matrix}$$

une semblable solution numérique; on substituera aux variables anciennes (14) neuf variables nouvelles définies par les formules (22), et la démonstration s'achèvera comme au n° 10.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES SPÉCIFIÉ DANS L'INTRODUCTION.

---

13. Désignant par u, v, w trois fonctions inconnues, et par λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 six fonctions données des trois variables indépendantes x, y, z, nous considérerons le système d'équations aux dérivées partielles (1), spécifié dans l'Introduction, et nous adopterons pour ce système la notation abrégée

$$(28)\qquad \sum\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=\lambda_1,\qquad \sum\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\lambda_2,\qquad \sum\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\lambda_3,$$

$$(29)\qquad \sum\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}=\mu_1,\qquad \sum\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}=\mu_2,\qquad \sum\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=\mu_3,$$

où les sommations indiquées par le symbole $\sum$ doivent s'étendre aux trois fonctions inconnues u, v, w. Un pareil système se déduit, comme on le voit, du système algébrique (13), en y remplaçant les indéterminées (14) respectivement par les neuf dérivées premières des inconnues, et les constantes

$$\sigma_1,\quad \sigma_2,\quad \sigma_3,\qquad \tau_1,\quad \tau_2,\quad \tau_3$$

respectivement par les fonctions données

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\qquad \mu_1,\quad \mu_2,\quad \mu_3.$$

Occupons-nous tout d'abord de déterminer la région dans laquelle il convient de faire mouvoir les variables x, y, z.

En premier lieu, si l'on admet, conformément au point de vue adopté par M. Méray et par un certain nombre d'auteurs, que l'existence des dérivées d'une fonction implique, par définition même, la possibilité de son développement en une série entière par rapport aux accroissements des variables, la seule inspection du système [(28), (29)] nous montre que nous n'avons pas à faire varier x, y, z au delà des limites où cette possibilité existe à la fois pour tous les seconds membres.

D'un autre côté, les seuls groupes d'intégrales dont la recherche soit intéressante au point de vue des applications sont ceux pour lesquels le déterminant différentiel

$$\tag{30} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul : si donc nous nous bornons, comme il est naturel de le faire, à la recherche exclusive de ces groupes d'intégrales, nous n'avons pas à faire varier x, y, z au delà des limites où la forme quadratique

$$\tag{31} \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + 2\mu_1 YZ + 2\mu_2 ZX + 2\mu_3 XY$$

est décomposable en une somme algébrique de trois carrés indépendants (n° 10).

Enfin, comme nous aurons à nous occuper du calcul par cheminement des intégrales de notre système, nous devons évidemment faire varier x, y, z dans une région *continue*.

En résumé donc, la région $\mathfrak{R}$ dans laquelle nous ferons mouvoir les variables x, y, z sera supposée satisfaire à la triple condition suivante :

1° A partir de valeurs initiales arbitrairement choisies dans la région $\mathfrak{R}$ (et pour des accroissements suffisamment petits), les seconds membres du système [(28), (29)] sont tous développables par la série de Taylor;

2° Pour tout point de la région $\mathfrak{R}$, la forme quadratique (31) est décomposable en une somme algébrique de trois carrés indépendants;

3° La région $\mathfrak{R}$ est continue.

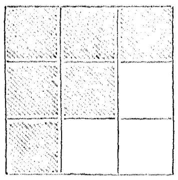
14. Bien que les équations (28) et (29) ne contiennent pas explicitement les trois fonctions inconnues u, v, w, il est toujours permis

de les considérer comme subsistant entre u, v, w, x, y, z, et les neuf dérivées premières de u, v, w par rapport à x, y, z, soit en tout *quinze quantités :* il va sans dire alors que, dans toute solution numérique du système, les valeurs de u, v, w sont entièrement arbitraires.

Cela étant, et en assujettissant, comme il vient d'être dit, les variables indépendantes x, y, z à ne pas excéder la région $\mathfrak{R}$, le système [(28), (29)] possède diverses propriétés que nous allons successivement énumérer.

I. Étant donné un système du premier ordre résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, on peut, pour en disposer nettement les diverses équations, les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x).

Cela étant, si l'on considère comme initiales les valeurs qui constituent l'une quelconque des solutions numériques du système [(28), (29)], il résulte du n° 11 qu'à partir de ces valeurs le système peut toujours être résolu, conformément au principe général des fonctions implicites, par rapport à six dérivées premières choisies de telle façon que, moyennant un ordre convenable adopté pour les lignes et pour les colonnes du quadrillage, les cases pleines et vides présentent la disposition relative suivante :

(32) 

II. Les dix-huit équations déduites de [(28), (29)] par toutes les différentiations premières possibles, et qui sont linéaires par rapport aux dix-huit dérivées secondes de u, v, w, peuvent, pour toute solution numérique du système [(28), (29)], être résolues par rapport à ces dix-huit dérivées secondes.

Différentiant en effet la première équation (28) par rapport à x, on a

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}. \tag{33}$$

Différentiant ensuite la troisième équation (29) par rapport à x, et la première équation (28) par rapport à y, il vient

$$\sum \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \mu_3}{\partial x},$$
$$\sum \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial y},$$

d'où, par soustraction membre à membre,

$$\sum \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \mu_3}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}. \tag{34}$$

Différentiant enfin la deuxième équation (29) par rapport à x, et la première équation (28) par rapport à z, il vient

$$\sum \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \mu_2}{\partial x},$$
$$\sum \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial z},$$

d'où, par soustraction membre à membre,

$$\sum \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial z}. \tag{35}$$

Le rapprochement des formules (33), (34) et (35) nous donne le groupe

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}, \\ &\sum \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \mu_3}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}, \\ &\sum \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial z}, \end{aligned} \right. \tag{36}$$

et nous en déduirons, par permutations tournantes, les deux groupes

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \mu_3}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda_2}{\partial x},\\ &\sum \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda_2}{\partial y},\\ &\sum \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \mu_1}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda_2}{\partial z},\end{aligned}\right.$$

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \mu_2}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda_3}{\partial x},\\ &\sum \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \mu_1}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda_3}{\partial y},\\ &\sum \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda_3}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

Ces trois groupes d'équations sont respectivement résolubles par rapport aux trois groupes de dérivées secondes

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \end{matrix}$$

puisque, dans chacun d'eux, les coefficients des dérivées secondes sont les éléments du déterminant (30).

Si l'on différentie maintenant les trois équations (29) par rapport à x, y, z respectivement, il vient

$$\begin{aligned} &\sum \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \sum \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial \mu_1}{\partial x},\\ &\sum \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial \mu_2}{\partial y},\\ &\sum \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} + \sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial \mu_3}{\partial z}.\end{aligned}$$

Multipliant ces trois dernières équations respectivement par -1, 1, 1, et ajoutant membre à membre, il vient

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu_2}{\partial y} + \frac{\partial \mu_3}{\partial z} - \frac{\partial \mu_1}{\partial x}\right).$$

Différentiant la deuxième équation (28) par rapport à z, la troisième par rapport à y, et adjoignant les deux équations ainsi obtenues à la précédente, nous aurons le groupe

$$(39)\qquad \begin{cases} \sum \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mu_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \mu_3}{\partial z} - \dfrac{\partial \mu_1}{\partial x}\right), \\ \sum \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial z}, \\ \sum \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \lambda_3}{\partial y}. \end{cases}$$

Nous en déduirons, par permutations tournantes, les deux groupes

$$(40)\qquad \begin{cases} \sum \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial z}, \\ \sum \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mu_3}{\partial z} + \dfrac{\partial \mu_1}{\partial x} - \dfrac{\partial \mu_2}{\partial y}\right), \\ \sum \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \lambda_3}{\partial x}, \end{cases}$$

$$(41)\qquad \begin{cases} \sum \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial y}, \\ \sum \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial x}, \\ \sum \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mu_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \mu_2}{\partial y} - \dfrac{\partial \mu_3}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Pour la même raison que précédemment, ces trois nouveaux groupes d'équations sont respectivement résolubles par rapport aux trois groupes de dérivées secondes

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x}, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \end{array}$$

III. Supposons qu'à partir d'une solution numérique quelconque du système [(28), (29)], on ait résolu ce dernier par rapport à six dérivées premières choisies de telle façon que, moyennant un ordre convenable adopté pour les lignes et pour les colonnes, les cases pleines et vides de son Tableau (I) présentent la disposition (32); soit, pour fixer les idées,

(42)

$\frac{\partial u}{\partial x} = \ldots$	$\frac{\partial v}{\partial x} = \ldots$	$\frac{\partial w}{\partial x} = \ldots$
$\frac{\partial u}{\partial y} = \ldots$	$\frac{\partial v}{\partial y} = \ldots$	
$\frac{\partial u}{\partial z} = \ldots$		

le système ainsi obtenu. Supposons en outre qu'on ait résolu par rapport aux dix-huit dérivées secondes de u, v, w les dix-huit équations déduites de [(28), (29)] par toutes les différentiations premières possibles, et aux équations (42) adjoignons alors celles qui expriment les quatre dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y\, \partial z}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

en fonctions des dérivées premières de u, v, w et des variables indépendantes, en ayant soin seulement d'y remplacer les six dérivées premières

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \\ \frac{\partial u}{\partial z} & & \end{array}$$

par leurs valeurs tirées de (42). Dans ce système (composé de dix équations, six du premier ordre, quatre du second ordre), *les seules dérivées paramétriques des inconnues sont*

$$\begin{array}{cc} & \dfrac{\partial w}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial z}, & \dfrac{\partial w}{\partial z}, \end{array}$$

et les seconds membres ne contiennent aucune dérivée principale. *Le système est* d'ailleurs *orthonome*, comme on le voit en attribuant aux variables et aux inconnues les cotes respectives suivantes :

	x	y	z	u	v	w
Cotes premières	1	1	1	0	0	0
Cotes secondes	2	1	0	2	1	0

IV. Les cotes premières des variables indépendantes étant, comme nous venons de l'indiquer, toutes égales à 1, et celles des inconnues toutes égales à 0, la cote première d'une dérivée quelconque est ici égale à son ordre. Les dérivées cardinales (nº 4) du système orthonome ci-dessus défini (III) sont d'ailleurs les suivantes : pour u, les trois dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}$; pour v, la dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$, et les deux dérivées troisièmes $\dfrac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial z^2}$, $\dfrac{\partial^3 v}{\partial y\,\partial z^2}$; pour w, les cinq dérivées troisièmes $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial z^2}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^2\,\partial z}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial z^2}$, et la dérivée quatrième $\dfrac{\partial^4 w}{\partial y^2\,\partial z^2}$.

Or, *cette dernière*, d'ordre supérieur (et par suite, ici, de classe supérieure) à toutes les précédentes, *est superflue :* car, parmi les premiers membres de notre système orthonome, ceux d'où elle peut provenir par dérivation sont

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

et forment une suite où la comparaison de deux termes consécutifs ne donne que des dérivées cardinales du troisième ordre, savoir :

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^2\,\partial z}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial z^2}.$$

Nous n'aurons donc à nous occuper, dans l'application de la règle formulée au n° 7, que des dérivées principales appartenant aux ordres 1, 2, 3.

15. Cela posé, soient, dans le système orthonome ci-dessus défini (n° 14, III) :

R_1 le groupe du premier ordre qui a pour premiers membres les six dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x};$$

R_2 le groupe du second ordre qui a pour premiers membres les quatre dérivées

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Soient en outre :

R'_1, R''_1 les groupes déduits de R_1 par toutes les différentiations possibles du premier et du second ordre respectivement;

R'_2 le groupe déduit de R_2 par toutes les différentiations premières possibles;

S_1 le groupe formé par les équations (28) et (29);

S'_1, S''_1 les groupes déduits de S_1 par toutes les différentiations possibles du premier et du second ordre respectivement.

Pour former les conditions de passivité du système orthonome (R_1, R_2), il suffit, conformément à notre énoncé du n° 7, d'exprimer que le système

$$(R_1;\ R'_1,\ R_2;\ R''_1,\ R'_2) \tag{43}$$

est résoluble (sans incompatibilité) par rapport aux dérivées principales des trois premiers ordres (quelles que soient les valeurs numériques attribuées à $x, y, z, u, v, w, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}\Big)$. Or, je dis en premier lieu que *le système* (43) *équivaut algébriquement à*

$$(S_1,\ S'_1,\ S''_1). \tag{44}$$

Effectivement, le système R_1 équivaut algébriquement à S_1 parce qu'il s'en déduit à l'aide d'une résolution effectuée conformément au principe général des fonctions implicites, et il en résulte que les deux systèmes (R_1, R'_1), (S_1, S'_1) sont eux-mêmes algébriquement équivalents [1]. Le système (R_1, R'_1) équivaut d'ailleurs algébriquement à (R_1, R'_1, R_2), car : 1° il en est évidemment une conséquence algébrique, puisqu'il en fait partie; 2° les relations R_2 appartenant, d'après leur définition même, à un groupe déduit de (S_1, S'_1) par une résolution conforme au principe général des fonctions implicites, sont des conséquences algébriques de (S_1, S'_1), par suite, de (R_1, R'_1), d'où résulte que (R_1, R'_1, R_2) est conséquence algébrique de (R_1, R'_1). Cela étant, les deux systèmes

$$(R_1,\ R'_1,\ R_2),\quad (S_1,\ S'_1),$$

algébriquement équivalents à un même troisième, (R_1, R'_1), le sont aussi entre eux, et cette dernière équivalence entraîne celle des systèmes

$$(R_1,\ R'_1,\ R_2,\ R''_1,\ R'_2),\quad (S_1,\ S'_1,\ S''_1),$$

qu'il s'agissait d'établir.

Je dis en second lieu qu'en désignant par T_2 le groupe des dix-huit

---

(1) Nous nous appuyons à plusieurs reprises, dans la démonstration ci-dessus, sur les deux propositions suivantes :

1° Tout système de n équations, résoluble par rapport à n quantités conformément au principe général des fonctions implicites, équivaut algébriquement au système formé par les n formules de résolution.

2° Considérons deux systèmes différentiels, S, T, impliquant les mêmes fonctions inconnues des mêmes variables indépendantes; sur chacune des équations de S exécutons, suivant la règle des fonctions composées, toutes les différentiations possibles des ordres 1, 2, ..., m, et adjoignons à S les diverses relations ainsi obtenues; puis opérons de même sur T. Cela étant, si les deux systèmes S, T sont algébriquement équivalents, les deux systèmes résultant de cette adjonction ne peuvent manquer de l'être aussi.

équations

$$(36),\quad (37),\quad (38),\quad (39),\quad (40),\quad (41),$$

et par T'_2 le groupe déduit de T_2 à l'aide de toutes les différentiations premières possibles, *le système* (44) *équivaut algébriquement à*

$$(45) \qquad (S_1,\ T_2,\ T'_2).$$

Effectivement, l'équivalence algébrique des systèmes S'_1 et T_2 entraîne celle des systèmes

$$(S_1,\ S'_1),\quad (S_1,\ T_2),$$

puis celle des systèmes

$$(S_1,\ S'_1,\ S''_1),\quad (S_1,\ S'_1,\ T_2,\ T'_2),$$

puis enfin celle des systèmes

$$(S_1,\ S'_1,\ T_2,\ T'_2),\quad (S_1,\ T_2,\ T'_2);$$

et les deux dernières équivalences entraînent à leur tour celle des systèmes (44) et (45).

Pour former les conditions de passivité du système orthonome (R_1, R_2), on peut donc, en se fondant sur les équivalences qui viennent d'être établies, prendre indifféremment l'un ou l'autre des deux systèmes (44), (45), et effectuer, entre les relations qui composent ce système, l'élimination des dérivées principales des trois premiers ordres.

En effectuant cette élimination dans le système (44), où les groupes S_1, S'_1, S''_1 se composent d'équations en nombres respectivement égaux à 6, 18, 36, tandis que les dérivées principales des trois premiers ordres sont en nombres respectivement égaux à 6, 18, 30, on obtiendra manifestement six conditions.

Pour effectuer pratiquement le calcul, nous considérerons le système (45), où les groupes S_1, T_2, T'_2 se composent d'équations en nombres respectivement égaux à 6, 18, 54, et nous partagerons par la pensée les 54 équations T'_2 en groupes de trois de la manière suivante :

Nous commencerons par former, avec les diverses dérivées troisièmes de u, v, w, tous les groupes possibles de trois dérivées semblables. En désignant, comme il est naturel de le faire, chacun des groupes dont il s'agit par le dénominateur commun figurant dans les notations des dérivées qu'il contient, nous obtiendrons les dix groupes

$$(46)\qquad \partial x^3,\quad \partial y^3,\quad \partial z^3;$$
$$(47)\qquad \partial x^2\,\partial y,\quad \partial x^2\,\partial z,\quad \partial x\,\partial y^2,\quad \partial x\,\partial z^2,\quad \partial y^2\,\partial z,\quad \partial y\,\partial z^2;$$
$$(48)\qquad \partial x\,\partial y\,\partial z.$$

A chacun des groupes (46) correspondra, parmi nos cinquante-quatre équations, *un groupe de trois équations,* résoluble par rapport aux dérivées troisièmes semblables qui y figurent, et les exprimant à l'aide des dérivées premières et secondes et des variables indépendantes; au groupe ∂x^3, par exemple, correspondra un groupe de trois équations, résoluble par rapport aux trois dérivées $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$. $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$. A chacun des groupes (47) correspondront *deux groupes de trois équations,* dont chacun sera résoluble par rapport aux dérivées troisièmes semblables qui y figurent; au groupe $\partial x^2\,\partial y$, par exemple, correspondront deux groupes de trois équations, dont chacun sera résoluble par rapport aux trois dérivées $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial y}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}$. Enfin au groupe (48) correspondront *trois groupes de trois équations,* dont chacun sera résoluble par rapport aux trois dérivées $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$.

Faisant alors abstraction des groupes (46) et considérant les deux groupes de trois équations qui correspondent à l'un quelconque des groupes (47), nous éliminerons entre ces six équations les trois dérivées du troisième ordre qui y figurent, ce qui nous donnera trois relations. Considérant ensuite les trois groupes de trois équations qui correspondent au groupe (48), nous éliminerons entre ces neuf équations les trois dérivées $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, ce qui nous donnera six relations. Nous obtiendrons donc en tout $3 \times 6 + 6$ ou vingtquatre relations du second ordre, qui, en fait, se réduiront à six; finalement nous tiendrons compte, dans ces six relations, des équations S_1 et T_2, afin d'éliminer les dérivées principales du premier et du second ordre.

16. Exécutons maintenant le calcul qui vient d'être indiqué.

En effectuant sur les équations T_2 toutes les différentiations premières propres à amener dans les premiers membres les dérivées troisièmes figurant dans les groupes (47) et (48), on tombe sur les groupes suivants d'équations :

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}+\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x\,\partial y},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}+\sum \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}+\sum \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y\,\partial z};
\end{aligned}\right.$$

$$(49\ bis)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}+\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x\,\partial y},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}+\sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}+\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 \mu_3}{\partial x\,\partial z}\right);
\end{aligned}\right.$$

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial z}+\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x\,\partial z},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial z}+\sum \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial x\,\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y\,\partial z},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial z}+\sum \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x\,\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z^2};
\end{aligned}\right.$$

$$(50\ bis)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial z}+\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x\,\partial z},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial z}+\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_3}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x\,\partial y}\right),\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial z}+\sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x^2};
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x\,\partial y},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x\,\partial z};
\end{aligned}\right. \tag{51}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} + \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x\,\partial y},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial y\,\partial z}\right);
\end{aligned}\right. \tag{51 bis}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x\,\partial z} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x^2},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x\,\partial z} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x\,\partial y},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x\,\partial z};
\end{aligned}\right. \tag{52}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2} + \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z^2},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial y\,\partial z}\right),\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x\,\partial z};
\end{aligned}\right. \tag{52 bis}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial y\,\partial z} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x\,\partial z},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial y\,\partial z},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial y\,\partial z} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial z^2};
\end{aligned}\right. \tag{53}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x\,\partial y}\right),\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial y\,\partial z},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\,\partial z} + \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial y^2};
\end{aligned}\right. \tag{53 bis}$$

$$
(54)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial y\,\partial z} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x\,\partial y},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial y\,\partial z} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial y^2},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial y\,\partial z};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(54\ bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_2}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x\,\partial z}\right),\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z^2} + \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial z^2},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial y\,\partial z};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(55)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2}\right),\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x\,\partial z},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x\,\partial y};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(55\ bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y\,\partial z},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_3}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial y^2}\right),\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x\,\partial y};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(55\ ter)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y\,\partial z},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x\,\partial z},\\
&\sum \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Cela étant, la comparaison des systèmes

(49) et (49 *bis*),
(50) et (50 *bis*),
(51) et (51 *bis*),
(52) et (52 *bis*),
(53) et (53 *bis*),
(54) et (54 *bis*),
(55), (55 *bis*) et (55 *ter*)

nous donne seulement les six relations

$$(56)\qquad \sum\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)^2\right]=\frac{\partial^2\mu_1}{\partial y\,\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial z^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial y^2},$$

$$(57)\qquad \sum\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}\right)^2\right]=\frac{\partial^2\mu_2}{\partial z\,\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial z^2},$$

$$(58)\qquad \sum\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]=\frac{\partial^2\mu_3}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial x^2};$$

$$(59)\qquad \sum\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mu_2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\mu_3}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2\mu_1}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial y\,\partial z},$$

$$(60)\qquad \sum\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mu_3}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2\mu_1}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2\mu_2}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial z\,\partial x},$$

$$(61)\qquad \sum\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mu_1}{\partial z\,\partial x}+\frac{\partial^2\mu_2}{\partial z\,\partial y}-\frac{\partial^2\mu_3}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial x\,\partial y}.$$

Dans ces relations, nous remplacerons, comme il a été dit, les dérivées secondes de u, v, w par leurs valeurs tirées des équations T_2 en fonctions des variables indépendantes et des dérivées premières, puis nous tiendrons compte des équations S_1, qui lient entre elles les dérivées premières.

Effectuons d'abord le calcul dont il s'agit sur la relation (56), qui contient les neuf dérivées secondes de u, v, w relatives à y et z : ces dérivées secondes nous sont fournies par les systèmes (37), (38) et (39). Pour abréger, nous désignerons dans ce qui suit par

$$\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3,\\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3,\\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3\end{matrix}$$

les seconds membres des systèmes respectifs (36), (37), (38), et par

$$\begin{matrix}\delta_1, & \delta_2, & \delta_3,\\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3,\\ \theta_1, & \theta_2, & \theta_3\end{matrix}$$

ceux des systèmes respectifs (39), (40), (41). En posant alors

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{vmatrix},\qquad B_u=\begin{vmatrix}\beta_1 & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x}\\ \beta_2 & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y}\\ \beta_3 & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{vmatrix},$$

$$\Gamma_u = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_2 & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_3 & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_u = \begin{vmatrix} \delta_1 & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \delta_2 & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \delta_3 & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix},$$

l'algorithme de Cramer, appliqué aux systèmes (37), (38) et (39), nous donne

$$D\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = B_u, \qquad D\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Gamma_u, \qquad D\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \Delta_u,$$

d'où

$$D^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)^2\right] = B_u\Gamma_u - \Delta_u^2$$

et

$$(62) \qquad D^2\sum\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)^2\right] = \sum B_u\Gamma_u - \sum \Delta_u^2.$$

En effectuant, conformément à la règle de multiplication des déterminants, les produits D^2, $B_u\Gamma_u$, et tenant compte des relations (28) et (29), il vient

$$D^2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_3 & \mu_2 \\ \mu_3 & \lambda_2 & \mu_1 \\ \mu_2 & \mu_1 & \lambda_3 \end{vmatrix},$$

$$B_u\Gamma_u = \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1 + \lambda_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 & \beta_1\gamma_2 + \mu_3 - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} & \beta_1\gamma_3 + \mu_2 - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} \\ \beta_2\gamma_1 + \mu_3 - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} & \beta_2\gamma_2 + \lambda_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 & \beta_2\gamma_3 + \mu_1 - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} \\ \beta_3\gamma_1 + \mu_2 - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} & \beta_3\gamma_2 + \mu_1 - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} & \beta_3\gamma_3 + \lambda_3 - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

Dans ce dernier déterminant, chaque colonne peut se décomposer en deux sous-colonnes, respectivement formées avec les termes précédés du signe + et les termes précédés du signe — ; les sous-colonnes de la deuxième espèce ont d'ailleurs leurs éléments proportionnels : si donc on décompose, par la considération des sous-colonnes, le déterminant ci-dessus en une somme de huit autres, quatre de ces derniers s'évanouissent comme ayant au moins deux colonnes proportionnelles, et il vient simplement

$$
\begin{aligned}
\mathrm{B}_u\Gamma_u = &\begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1+\lambda_1 & \beta_1\gamma_2+\mu_3 & \beta_1\gamma_3+\mu_2 \\ \beta_2\gamma_1+\mu_3 & \beta_2\gamma_2+\lambda_2 & \beta_3\gamma_3+\mu_1 \\ \beta_3\gamma_1+\mu_2 & \beta_3\gamma_2+\mu_1 & \beta_3\gamma_3+\lambda_3 \end{vmatrix} \\
&- \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 & \beta_1\gamma_2+\mu_3 & \beta_1\gamma_3+\mu_2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} & \beta_2\gamma_2+\lambda_2 & \beta_2\gamma_3+\mu_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial z} & \beta_3\gamma_2+\mu_1 & \beta_3\gamma_3+\lambda_3 \end{vmatrix} \\
&- \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1+\lambda_1 & \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} & \beta_1\gamma_3+\mu_2 \\ \beta_2\gamma_1+\mu_3 & \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 & \beta_2\gamma_3+\mu_1 \\ \beta_3\gamma_1+\mu_2 & \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial z} & \beta_3\gamma_3+\lambda_3 \end{vmatrix} \\
&- \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1+\lambda_1 & \beta_1\gamma_2+\mu_3 & \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \beta_2\gamma_1+\mu_3 & \beta_2\gamma_2+\lambda_2 & \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \beta_3\gamma_1+\mu_2 & \beta_3\gamma_2+\mu_1 & \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Pour avoir maintenant $\sum \mathrm{B}_u\Gamma_u$, il faut ajouter à l'expression précédente les deux qui s'en déduisent par le changement de u en v, puis en w, c'est-à-dire répéter trois fois le premier des quatre déterminants ci-dessus, remplacer par λ_1, μ_3, μ_2 les éléments de la première colonne du second, par μ_3, λ_2, μ_1 ceux de la seconde colonne du troisième, et par μ_2, μ_1, λ_3 ceux de la dernière colonne du quatrième. La somme algébrique de ces six nouveaux déterminants pourra d'ailleurs s'effectuer en les groupant deux par deux, les deux déterminants de chaque groupe étant précédés de signes contraires; l'un des trois groupes dont il s'agit sera, par exemple,

$$
\begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1+\lambda_1 & \beta_1\gamma_2+\mu_3 & \beta_1\gamma_3+\mu_2 \\ \beta_2\gamma_1+\mu_3 & \beta_2\gamma_2+\lambda_2 & \beta_2\gamma_3+\mu_1 \\ \beta_3\gamma_1+\mu_2 & \beta_3\gamma_2+\mu_1 & \beta_3\gamma_3+\lambda_3 \end{vmatrix}
$$

$$-\begin{vmatrix} \lambda_1 & \beta_1\gamma_2+\mu_3 & \beta_1\gamma_3+\mu_2 \\ \mu_3 & \beta_2\gamma_2+\lambda_2 & \beta_2\gamma_3+\mu_1 \\ \mu_2 & \beta_3\gamma_2+\mu_1 & \beta_3\gamma_3+\lambda_3 \end{vmatrix}$$

et donnera immédiatement comme résultat le déterminant

$$\begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1 & \beta_1\gamma_2+\mu_3 & \beta_1\gamma_3+\mu_2 \\ \beta_2\gamma_1 & \beta_2\gamma_2+\lambda_2 & \beta_2\gamma_3+\mu_1 \\ \beta_3\gamma_1 & \beta_3\gamma_2+\mu_1 & \beta_3\gamma_3+\lambda_3 \end{vmatrix},$$

lequel se réduit, par la considération des sous-colonnes proportionnelles, à

$$\begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1 & \mu_3 & \mu_2 \\ \beta_2\gamma_1 & \lambda_2 & \mu_1 \\ \beta_3\gamma_1 & \mu_1 & \lambda_3 \end{vmatrix}.$$

En opérant de la même manière sur chacun des deux groupes restants, il vient

$$(63)\qquad \sum B_u\Gamma_u = \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1 & \mu_3 & \mu_2 \\ \beta_2\gamma_1 & \lambda_2 & \mu_1 \\ \beta_3\gamma_1 & \mu_1 & \lambda_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \beta_1\gamma_2 & \mu_2 \\ \mu_3 & \beta_2\gamma_2 & \mu_1 \\ \mu_2 & \beta_3\gamma_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_3 & \beta_1\gamma_3 \\ \mu_3 & \lambda_2 & \beta_2\gamma_3 \\ \mu_2 & \mu_1 & \beta_3\gamma_3 \end{vmatrix};$$

et l'on aura $\sum \Delta_u^2$ en remplaçant, dans l'expression précédente, chacune des lettres β et γ par δ. Finalement donc, notre relation (56), qui, en tenant compte de (62), peut s'écrire sous la forme

$$D^2\left(\frac{\partial^2\mu_1}{\partial y\,\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial y^2}\right) = \sum B_u\Gamma_u - \sum \Delta_u^2,$$

deviendra

$$(64)\qquad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_3 & \mu_2 \\ \mu_3 & \lambda_2 & \mu_1 \\ \mu_2 & \mu_1 & \lambda_3 \end{vmatrix}\left(\frac{\partial^2\mu_1}{\partial y\,\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial y^2}\right)$$
$$= \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1-\delta_1^2 & \mu_3 & \mu_2 \\ \beta_2\gamma_1-\delta_2\delta_1 & \lambda_2 & \mu_1 \\ \beta_3\gamma_1-\delta_3\delta_1 & \mu_1 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} \lambda_1 & \beta_1\gamma_2-\delta_1\delta_2 & \mu_2 \\ \mu_3 & \beta_2\gamma_2-\delta_2^2 & \mu_1 \\ \mu_2 & \beta_3\gamma_2-\delta_3\delta_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_3 & \beta_1\gamma_3-\delta_1\delta_3 \\ \mu_3 & \lambda_2 & \beta_2\gamma_3-\delta_2\delta_3 \\ \mu_2 & \mu_1 & \beta_3\gamma_3-\delta_3^2 \end{vmatrix},$$

où les β, les γ et les δ désignent, comme nous l'avons dit, les seconds membres des systèmes (37), (38) et (39).

Des permutations convenables, effectuées sur (64), fourniront les relations semblables déduites de (57) et (58).

Il nous reste à transformer de même les relations (59), (60) et (61). Considérons, par exemple, la relation (59). En adoptant les notations ci-dessus et posant, de plus,

$$\mathrm{A}_u = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \alpha_2 & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \alpha_3 & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}, \qquad \mathrm{H}_u = \begin{vmatrix} \eta_1 & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \eta_2 & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \eta_3 & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}, \qquad \Theta_u = \begin{vmatrix} \theta_1 & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_2 & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_3 & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix},$$

l'algorithme de Cramer, appliqué aux systèmes (36), (39), (40) et (41), nous donne

$$\mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{A}_u, \qquad \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \Delta_u, \qquad \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \mathrm{H}_u, \qquad \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \Theta_u,$$

d'où

$$\mathrm{D}^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right) = \mathrm{A}_u\Delta_u - \Theta_u\mathrm{H}_u$$

et

$$(65)\qquad \mathrm{D}^2\sum\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right) = \sum \mathrm{A}_u\Delta_u - \sum \Theta_u\mathrm{H}_u.$$

Or, le carré D^2 a déjà été effectué; la quantité $\sum \mathrm{A}_u\Delta_u$ se déduit du second membre de (63) en y remplaçant les lettres β, γ respectivement par α, δ, et la quantité $\sum \Theta_u\mathrm{H}_u$ se déduit du même second membre en y remplaçant les lettres β, γ respectivement par θ, η. En conséquence, notre relation (59), qui, en tenant compte de (65), peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{D}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y\,\partial z}\right) = \sum \mathrm{A}_u\Delta_u - \sum \Theta_u\mathrm{H}_u,$$

deviendra

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_3 & \mu_2 \\ \mu_3 & \lambda_2 & \mu_1 \\ \mu_2 & \mu_1 & \lambda_3 \end{vmatrix}\left(\frac{\partial^2\mu_2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\mu_3}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2\mu_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial y\,\partial z}\right) \\ &\quad= \begin{vmatrix} \alpha_1\delta_1-\theta_1\eta_1 & \mu_3 & \mu_2 \\ \alpha_2\delta_1-\theta_2\eta_1 & \lambda_2 & \mu_1 \\ \alpha_3\delta_1-\theta_3\eta_1 & \mu_1 & \lambda_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \alpha_1\delta_2-\theta_1\eta_2 & \mu_2 \\ \mu_3 & \alpha_2\delta_2-\theta_2\eta_2 & \mu_1 \\ \mu_2 & \alpha_3\delta_2-\theta_3\eta_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\ &\qquad+ \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_3 & \alpha_1\delta_3-\theta_1\eta_3 \\ \mu_3 & \lambda_2 & \alpha_2\delta_3-\theta_2\eta_3 \\ \mu_2 & \mu_1 & \alpha_3\delta_3-\theta_3\eta_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}\right.$$

où les α, les δ, les η et les θ désignent, comme nous l'avons dit, les seconds membres des systèmes (36), (39), (40) et (41).

Des permutations convenables, effectuées sur (66), nous fourniront les relations semblables déduites de (60) et (61).

17. Pour former le système orthonome dont les conditions de passivité viennent d'être calculées, nous avons considéré l'une quelconque des solutions numériques du système [(28), (29)], et nous avons mentalement supposé qu'à partir des valeurs constituant la solution numérique dont il s'agit, le système [(28), (29)] se trouvait résolu, conformément au principe général des fonctions implicites, par rapport à six dérivées premières choisies de telle façon que le Tableau résultant (n° 14, I), moyennant un ordre convenable adopté pour ses lignes et pour ses colonnes, présentât la disposition (32). Or, tout en faisant intervenir, dans notre raisonnement, les formules de résolution, nous n'y avons pas eu recours, *en fait*, dans notre calcul, et nous n'avons fait usage des équations (28) et (29) que sous la forme même où elles se trouvaient données. Les résultats de notre calcul ne changent donc pas, quelle que soit la solution numérique considérée au début pour le système [(28), (29)]; il n'y figure, notamment, aucune dérivée première de u, v, w, en sorte que les six relations obtenues subsistent entre les seules fonctions *données*, λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, des variables indépendantes x, y, z, et leurs dérivées premières et secondes. Si donc on se reporte aux remarques finales du n° 5, si l'on observe d'autre part que, dans les limites

mêmes où les formules de résolution du système [(28), (29)] sont applicables, ce dernier équivaut, au point de vue de l'intégration, au système orthonome considéré dans notre raisonnement, on est conduit à la conclusion suivante :

Ou bien les six relations obtenues par le calcul précédent sont identiquement vérifiées, et à toute solution numérique du système [(28), (29)] (considéré comme subsistant entre quinze quantités, ainsi qu'il a été dit au début du nº 14) *correspond alors un groupe unique d'intégrales;*

Ou bien elles ne le sont pas, et le système [(28), (29)] *n'admet en pareil cas aucun groupe d'intégrales.*

Pour cette raison, nous les nommerons désormais *conditions de possibilité.*

18. *Les valeurs initiales des variables indépendantes étant choisies à volonté dans la région* $\mathfrak{R}$ (nº 13), *et les conditions de possibilité étant supposées satisfaites, tout groupe d'intégrales particulières du système* [(28), (29)] *est calculable par cheminement dans cette région.*

En désignant par $(\upsilon, \varphi, \psi)$ *l'un quelconque des groupes d'intégrales dont il s'agit, la solution générale du système* [(28), (29)] *est donnée par les formules*

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= l_1\upsilon + m_1\varphi + n_1\psi + h_1,\\ v &= l_2\upsilon + m_2\varphi + n_2\psi + h_2,\\ w &= l_3\upsilon + m_3\varphi + n_3\psi + h_3,\end{aligned}\right.$$

où h_1, h_2, h_3 *désignent trois constantes entièrement arbitraires, et*

$$(68)\qquad \left\{\begin{matrix} l_1, & m_1, & n_1,\\ l_2, & m_2, & n_2,\\ l_3, & m_3, & n_3\end{matrix}\right.$$

les éléments d'un déterminant orthogonal arbitraire, c'est-à-dire des constantes pouvant recevoir tous les systèmes de valeurs qui vérifient les relations

$$(69)\qquad \left\{\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1,\\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1,\\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1,\end{aligned}\right.$$

$$(70)\qquad \left\{\begin{aligned} m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 &= 0,\\ n_1l_1 + n_2l_2 + n_3l_3 &= 0,\\ l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3 &= 0.\end{aligned}\right.$$

La solution générale du système [(28), (29)] *dépend ainsi de six constantes arbitraires.*

Enfin, les solutions particulières, en nombre infini, fournies par les formules (67) *sont deux à deux opposées.*

I. *Si, parmi les solutions numériques du système* [(28), (29)], *on considère, à l'exclusion de toutes les autres, celles où x, y, z ont des valeurs déterminées, x_0, y_0, z_0, et si l'on désigne par $(\upsilon, \varphi, \psi)$ le groupe d'intégrales particulières du système* [(28), (29)] *qui correspond à l'une d'elles, l'ensemble des groupes d'intégrales qui correspondent respectivement à ces diverses solutions numériques est donné par les formules* (67).

Effectivement, puisque les fonctions υ, φ, ψ sont développables à partir de x_0, y_0, z_0 et vérifient identiquement le système [(28), (29)], on voit d'abord que les fonctions u, v, w définies par les formules (67) sont développables à partir des mêmes valeurs, puis, en tenant compte des relations (69) et (70), que leur substitution dans les relations du système [(28), (29)] vérifie ces dernières identiquement.

Pour établir qu'inversement les formules (67) fournissent *tous* les groupes d'intégrales visés par l'énoncé du présent alinéa I, adjoignons à ces formules celles qui s'en déduisent par toutes les différentiations premières possibles, et, dans ces douze relations, remplaçons, d'une part, υ, φ, ψ et leurs dérivées premières par les valeurs numériques qu'elles prennent en (x_0, y_0, z_0), d'autre part, u, v, w et leurs dérivées premières par des valeurs numériques indéterminées; nous aurons ainsi le système suivant :

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} u_0 &= l_1\upsilon_0 + m_1\varphi_0 + n_1\psi_0 + h_1,\\ v_0 &= l_2\upsilon_0 + m_2\varphi_0 + n_2\psi_0 + h_2,\\ w_0 &= l_3\upsilon_0 + m_3\varphi_0 + n_3\psi_0 + h_3;\end{aligned}\right.$$

$$(72)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 &= l_1\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)_0 + m_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + n_1\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0,\\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 &= l_2\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)_0 + m_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + n_2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0,\\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 &= l_3\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)_0 + m_3\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + n_3\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0;\end{aligned}\right.$$

$$(72)\ (suite)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 &= l_1\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)_0 + m_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 + n_1\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0,\\
\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 &= l_2\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)_0 + m_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 + n_2\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0,\\
\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 &= l_3\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)_0 + m_3\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 + n_3\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0;
\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 &= l_1\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)_0 + m_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 + n_1\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_0,\\
\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 &= l_2\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)_0 + m_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 + n_2\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_0,\\
\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 &= l_3\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)_0 + m_3\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 + n_3\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_0.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.$$

Si maintenant, dans le système [(28), (29)], nous remplaçons, d'une part, x, y, z par les valeurs numériques x_0, y_0, z_0, d'autre part, les dérivées premières de u, v, w par les valeurs numériques indéterminées dont nous avons parlé, il viendra :

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0^2 = \lambda_1(x_0, y_0, z_0),\\
&\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0^2 = \lambda_2(x_0, y_0, z_0),\\
&\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0^2 = \lambda_3(x_0, y_0, z_0),\\
&\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 = \mu_1(x_0, y_0, z_0),\\
&\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = \mu_2(x_0, y_0, z_0),\\
&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = \mu_3(x_0, y_0, z_0).
\end{aligned}\right.$$

Cela étant, il suffit d'observer que, en vertu du n° 10, la solution la plus générale du système algébrique (73), aux neuf indéterminées

$$\begin{matrix}
\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0, & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0, & \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0,\\
\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0, & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0, & \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0,\\
\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0, & \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0, & \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0,
\end{matrix}$$

est fournie par les formules (72), où les quantités (68) sont assujetties aux relations (69) et (70), et que, les quantités (68) étant ainsi choisies, les indéterminées u_0, v_0, w_0, calculées à l'aide des formules (71), prendront, moyennant un choix convenable de h_1, h_2, h_3, des valeurs numériques arbitrairement choisies d'avance.

II. *Si, parmi les solutions numériques du système* [(28), (29)], *on considère exclusivement, comme à l'alinéa* I, *celles où x, y, z ont les valeurs x_0, y_0, z_0, il existe quelque constante positive, r_0, telle que les groupes correspondants d'intégrales, développés à partir de x_0, y_0, z_0, admettent tous des rayons de convergence au moins égaux à r_0.*

Si l'on désigne en outre par (x_1, y_1, z_1) un autre système de valeurs numériques attribuées à x, y, z, et qu'on lui fasse correspondre de même une constante positive r_1, on peut toujours, lorsque le point (x_1, y_1, z_1) est suffisamment voisin de (x_0, y_0, z_0), choisir la constante r_1 de telle façon que sa différence à r_0 soit moindre en valeur absolue que toute quantité donnée.

Ce double point est une conséquence immédiate de l'alinéa I.

III. En vertu de la continuité supposée de la région $\mathfrak{R}$ (n° 13), deux points, (x_0, y_0, z_0), (X, Y, Z), pris à volonté dans cette région, peuvent être reliés l'un à l'autre à l'aide d'un arc continu entièrement situé dans la région $\mathfrak{R}$ et admettant les deux points dont il s'agit comme extrémités initiale et finale respectivement [1]. Cela étant, *si*

---

[1] Dans le monde des quantités réelles, les formules qui définissent l'arc sont de la forme

$$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t),$$

où t désigne une variable réelle, assujettie à varier dans un certain intervalle, t_0 à T, et où $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ désignent trois fonctions réelles de cette variable, continues dans l'intervalle dont il s'agit, et vérifiant les relations numériques

$$x_0 = \varphi(t_0), \qquad y_0 = \chi(t_0), \qquad z_0 = \psi(t_0); \qquad \mathrm{X} = \varphi(\mathrm{T}), \qquad \mathrm{Y} = \chi(\mathrm{T}), \qquad \mathrm{Z} = \psi(\mathrm{T}).$$

Dans le monde des quantités imaginaires, les formules qui définissent l'arc sont de la forme

$$x = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t), \qquad y = \chi_1(t) + i\chi_2(t), \qquad z = \psi_1(t) + i\psi_2(t),$$

où t a la même signification que ci-dessus, et où $\varphi_1(t)$, $\chi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\chi_2(t)$, $\psi_2(t)$ désignent six fonctions réelles de cette variable, continues dans l'intervalle de t_0 à T, et vérifiant les relations numériques

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi_1(t_0) + i\varphi_2(t_0), & y_0 &= \chi_1(t_0) + i\chi_2(t_0), & z_0 &= \psi_1(t_0) + i\psi_2(t_0), \\ \mathrm{X} &= \varphi_1(\mathrm{T}) + i\varphi_2(\mathrm{T}), & \mathrm{Y} &= \chi_1(\mathrm{T}) + i\chi_2(\mathrm{T}), & \mathrm{Z} &= \psi_1(\mathrm{T}) + i\psi_2(\mathrm{T}). \end{aligned}$$

l'on considère exclusivement, parmi les solutions numériques du système [(28), (29)], *celles où x, y, z ont pour valeurs les coordonnées des divers points de l'arc, il existe quelque système de rayons de convergence commun à tous les groupes d'intégrales correspondants.*

Ce point se déduit de l'alinéa II à l'aide du raisonnement usité en pareille circonstance.

IV. *Tout groupe d'intégrales particulières du système* [(28), (29)] *est calculable par cheminement dans la région* $\mathfrak{R}$.

C'est là une conséquence immédiate de l'alinéa III.

V. *En désignant par* $(\upsilon, \varphi, \psi)$ *un groupe quelconque d'intégrales particulières du système* [(28), (29)], *la solution générale de ce dernier est donnée par les formules* (67).

Effectivement, tout groupe d'intégrales particulières du système, étant calculable par cheminement dans la région $\mathfrak{R}$, peut être considéré comme déterminé par un groupe de conditions initiales où x, y, z ont des valeurs numériques assignées d'avance et indépendantes du groupe d'intégrales que l'on considère.

Cela étant, le point que nous avons actuellement en vue est une conséquence évidente de l'alinéa I.

VI. *Les solutions particulières fournies par les formules* (67) *sont deux à deux opposées.*

Car, si l'on remplace par leurs opposées les douze constantes qui figurent dans les formules (67), les relations (69) et (70) ne cessent pas d'être vérifiées.

19. Plaçons-nous actuellement dans le monde des quantités réelles, et ne considérons, parmi les intégrales du système [(28), (29)], que celles qui sont réelles. La région $\mathfrak{R}'$ dans laquelle nous ferons mouvoir les variables x, y, z devra satisfaire, en pareil cas, aux trois conditions indiquées plus haut (nº 13), mais avec cette restriction essentielle que, pour tout point de la région, la forme quadratique (31) soit la somme (proprement dite) des carrés de trois formes linéaires indépendantes à coefficients réels. En désignant par $(\upsilon, \varphi, \psi)$ une

solution réelle particulière du système [(28), (29)], la solution réelle la plus générale est donnée par les mêmes formules (67), où les constantes ne recevront, naturellement, que des valeurs réelles.

Si l'on considère l'une quelconque, (u, v, w), de ces solutions réelles, le déterminant différentiel

$$(74)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix},$$

étant différent de zéro dans toute l'étendue de la région $\mathfrak{R}'$, y reste ou constamment positif, ou constamment négatif. Dans les théories physiques où le système [(28), (29)] intervient, on ne considère, parmi les solutions réelles, que celles où le déterminant dont il s'agit est positif. Si l'on se place à ce point de vue, il ne faudra prendre, parmi les solutions (67), que celles où le produit

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \upsilon}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \upsilon}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \upsilon}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

est positif; en supposant donc, comme il est en pareil cas naturel de le faire, que le second facteur de ce produit soit positif (*voir* n° 18, VI), il faudra que le premier ait pour valeur $+1$.

20. Un cas très simple où les conditions de possibilité sont identiquement satisfaites est celui où *les six fonctions* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ *se réduisent toutes à des constantes*, ces constantes étant, naturellement, choisies de telle façon que la forme quadratique (31) soit décomposable en une somme algébrique de trois carrés indépendants. La solution la plus générale du système [(28), (29)] est donnée, en

pareil cas, par les formules

$$(75)\qquad \begin{cases} u = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1, \\ v = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2, \\ w = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3, \end{cases}$$

où d_1, d_2, d_3 désignent trois constantes entièrement arbitraires, et

$$(76)\qquad \begin{cases} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{cases}$$

neuf constantes assujetties aux relations

$$(77)\qquad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \lambda_1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \lambda_2, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \lambda_3; \end{cases}$$

$$(78)\qquad \begin{cases} b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = \mu_1, \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = \mu_2, \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \mu_3. \end{cases}$$

Effectivement, les neuf dérivées premières des fonctions u, v, w, définies par (75), se réduisant respectivement aux constantes (76), il résulte des relations (77) et (78) que les fonctions dont il s'agit vérifient identiquement le système [(28), (29)].

Réciproquement, on peut, moyennant un choix convenable des douze constantes, faire en sorte que les fonctions dont il s'agit coïncident avec des intégrales particulières assignées d'avance : car leurs neuf dérivées premières peuvent, en vertu de (77) et (78), prendre toutes valeurs numériques vérifiant le système [(28), (29)], et, cela étant, les formules (75) permettent de déterminer d_1, d_2, d_3 de telle sorte que, pour des valeurs numériques données de x, y, z, les fonctions u, v, w prennent elles-mêmes des valeurs numériques données.

Si l'on se place dans le monde des quantités réelles, on doit supposer que la forme quadratique (31) est la somme (proprement dite) des carrés de trois formes linéaires indépendantes à coefficients réels, et l'on ne doit attribuer aux douze constantes des formules (75) que des valeurs réelles. Si l'on veut en outre que le déterminant différentiel (74) soit positif, on ne prendra, parmi les solutions réelles du système [(77), (78)], que celles qui rendent positif le déterminant des quantités (76).

Lorsque les fonctions λ_1, λ_2, λ_3 se réduisent à l'unité et les fonctions μ_1, μ_2, μ_3 à zéro, la solution générale est donnée par les formules

$$\begin{aligned} u &= l_1 x + m_1 y + n_1 z + h_1, \\ v &= l_2 x + m_2 y + n_2 z + h_2, \\ w &= l_3 x + m_3 y + n_3 z + h_3, \end{aligned}$$

où figurent douze constantes, dont neuf sont assujetties à former un déterminant orthogonal. Les solutions réelles s'obtiendront en donnant à ces constantes des valeurs réelles, et il faudra, pour que le déterminant (74) soit positif, que le déterminant orthogonal dont il s'agit ait pour valeur $+1$.

CHAPITRE IV.

SUR LES CONDITIONS DE POSSIBILITÉ DU SYSTÈME PRÉCÉDEMMENT ÉTUDIÉ.

21. Les six fonctions données, λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, des variables x, y, z devant vérifier identiquement, comme nous l'avons vu au Chapitre III, les six conditions de possibilité, un point intéressant consiste à rechercher *quels sont, dans le choix de ces fonctions, les éléments dont on peut disposer arbitrairement*. Pour résoudre cette question, nous considérerons, dans les conditions de possibilité, les six fonctions dont il s'agit comme des inconnues, nous mettrons le système différentiel résultant sous une forme orthonome passive, et nous fixerons, une fois cette réduction faite, l'économie des conditions initiales.

Le calcul, ci-dessus effectué (n° 16), des conditions de possibilité nous a montré que les six quantités

$$\sum\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)^2\right],$$
$$\sum\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}\right)^2\right],$$
$$\sum\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right],$$
$$\sum\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right),$$
$$\sum\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right),$$
$$\sum\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\right)$$

peuvent, en vertu des équations (28), (29) et de toutes celles qu'on en déduit par des différentiations premières, s'exprimer à l'aide des six fonctions λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 et de leurs dérivées du premier ordre : dans ce qui suit, nous désignerons par

$$\Phi_x,\quad \Phi_y,\quad \Phi_z,\quad \Psi_x,\quad \Psi_y,\quad \Psi_z$$

les expressions respectives dont il s'agit. Cela étant, les conditions de possibilité peuvent s'écrire sous la forme

$$(79)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\mu_1}{\partial y\,\partial z}+2\Phi_x=0,\\
&\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial z^2}-2\frac{\partial^2\mu_2}{\partial z\,\partial x}+2\Phi_y=0,\\
&\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\mu_3}{\partial x\,\partial y}+2\Phi_z=0,\\
&\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2\mu_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\mu_2}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2\mu_3}{\partial x\,\partial z}+2\Psi_x=0,\\
&\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial z\,\partial x}+\frac{\partial^2\mu_2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\mu_3}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2\mu_1}{\partial y\,\partial x}+2\Psi_y=0,\\
&\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\mu_3}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\mu_1}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2\mu_2}{\partial z\,\partial y}+2\Psi_z=0.
\end{aligned}\right.$$

Nous résoudrons ces équations comme il suit :

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2\mu_2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\mu_3}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2\mu_1}{\partial x^2} - 2\Psi_x;\\
&\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2\mu_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial y^2} - 2\Phi_z,\\
&\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2\mu_3}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2\mu_1}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\mu_2}{\partial y^2} - 2\Psi_y;
\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2\mu_2}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial z^2} - 2\Phi_y,\\
&\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\mu_1}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2\mu_2}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\mu_3}{\partial z^2} - 2\Psi_z,\\
&\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2\mu_1}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\lambda_2}{\partial z^2} - 2\Phi_x.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.$$

Le système (80), ainsi obtenu, ne contient dans ses seconds membres aucune dérivée principale; il est d'ailleurs orthonome, comme on le voit en attribuant aux variables indépendantes et aux inconnues les cotes respectives suivantes :

	x	y	z	λ_1	λ_2	λ_3	μ_1	μ_2	μ_3
Cotes premières........	1	1	1	0	0	0	0	0	0
Cotes secondes........	0	0	0	0	1	2	-1	-1	-1

La cote première d'une dérivée quelconque est, d'après ce Tableau, égale à son ordre même; les dérivées cardinales des inconnues sont d'ailleurs

$$\frac{\partial^3\lambda_2}{\partial x^2\,\partial z},\quad \frac{\partial^3\lambda_3}{\partial x^2\,\partial y},\quad \frac{\partial^3\lambda_3}{\partial x\,\partial y^2},\quad \frac{\partial^4\lambda_3}{\partial x^2\,\partial y^2};$$

or, cette dernière, d'ordre supérieur (et par suite, ici, de classe supérieure) à toutes les autres, est superflue : car, parmi les premiers membres de (80), ceux d'où elle peut provenir par dérivation sont

$$\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2\lambda_3}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2\lambda_3}{\partial y^2},$$

et forment une suite où la comparaison de deux termes consécutifs ne fournit que des dérivées cardinales du troisième ordre, savoir :

$$\frac{\partial^3 \lambda_3}{\partial x^2\, \partial y}, \quad \frac{\partial^3 \lambda_3}{\partial x\, \partial y^2}.$$

Il n'y a donc, pour former les conditions de passivité, qu'à effectuer les éliminations voulues entre les équations (80) et celles qui s'en déduisent par différentiations premières. Cela étant, je dis que *le système orthonome* (80) *est passif.*

Je commencerai par constater que, dans les conditions de passivité, tous les termes du troisième ordre disparaissent, en sorte que les conditions dont il s'agit sont au plus du second ordre. Exécutons, en effet, sur les équations (80) toutes les différentiations propres à amener dans les premiers membres l'une ou l'autre des dérivées cardinales

$$(81) \qquad \frac{\partial^3 \lambda_2}{\partial x^2\, \partial z}, \quad \frac{\partial^3 \lambda_3}{\partial x^2\, \partial y}, \quad \frac{\partial^3 \lambda_3}{\partial x\, \partial y^2};$$

il vient ainsi, en se bornant aux termes du troisième ordre :

$$(82) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 \lambda_2}{\partial x^2\, \partial z} = 2\dfrac{\partial^3 \mu_3}{\partial x\, \partial y\, \partial z} - \dfrac{\partial^3 \lambda_1}{\partial y^2\, \partial z} & \ldots, \\ \dfrac{\partial^3 \lambda_2}{\partial x^2\, \partial z} = \dfrac{\partial^3 \mu_3}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + \dfrac{\partial^3 \mu_1}{\partial x^2\, \partial y} - \dfrac{\partial^3 \mu_2}{\partial x\, \partial y^2} & \ldots, \\ \dfrac{\partial^3 \lambda_3}{\partial x^2\, \partial y} = 2\dfrac{\partial^3 \mu_2}{\partial x\, \partial y\, \partial z} - \dfrac{\partial^3 \lambda_1}{\partial y\, \partial z^2} & \ldots, \\ \dfrac{\partial^3 \lambda_3}{\partial x^2\, \partial y} = \dfrac{\partial^3 \mu_1}{\partial x^2\, \partial z} + \dfrac{\partial^3 \mu_2}{\partial x\, \partial y\, \partial z} - \dfrac{\partial^3 \mu_3}{\partial x\, \partial z^2} & \ldots, \\ \dfrac{\partial^3 \lambda_3}{\partial x\, \partial y^2} = \dfrac{\partial^3 \mu_1}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + \dfrac{\partial^3 \mu_2}{\partial y^2\, \partial z} - \dfrac{\partial^3 \mu_3}{\partial y\, \partial z^2} & \ldots, \\ \dfrac{\partial^3 \lambda_3}{\partial x\, \partial y^2} = 2\dfrac{\partial^3 \mu_1}{\partial x\, \partial y\, \partial z} - \dfrac{\partial^3 \lambda_2}{\partial x\, \partial z^2} & \ldots. \end{cases}$$

Les seconds membres de ces six relations ne contiennent d'autres dérivées principales du troisième ordre que

$$(83) \qquad \frac{\partial^3 \lambda_1}{\partial y^2\, \partial z}, \quad \frac{\partial^3 \lambda_1}{\partial y\, \partial z^2}, \quad \frac{\partial^3 \lambda_2}{\partial x\, \partial z^2}.$$

Exécutons alors sur les équations (80) toutes les différentiations propres à amener dans les premiers membres l'une ou l'autre des dérivées (83); il vient ainsi

$$(84)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^3\lambda_1}{\partial y^2\,\partial z} &= \frac{\partial^3\mu_2}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial^3\mu_3}{\partial x\,\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^3\mu_1}{\partial x^2\,\partial y} \qquad \ldots,\\
\frac{\partial^3\lambda_1}{\partial y\,\partial z^2} &= \frac{\partial^3\mu_2}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^3\mu_3}{\partial x\,\partial z^2} - \frac{\partial^3\mu_1}{\partial x^2\,\partial z} \qquad \ldots,\\
\frac{\partial^3\lambda_2}{\partial x\,\partial z^2} &= \frac{\partial^3\mu_3}{\partial y\,\partial z^2} + \frac{\partial^3\mu_1}{\partial x\,\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^3\mu_2}{\partial y^2\,\partial z} \qquad \ldots,
\end{aligned}\right.$$

relations dont les seconds membres ne contiennent plus aucune dérivée principale du troisième ordre. Cela étant, si, dans les seconds membres de (82), on remplace les dérivées principales (83) par leurs valeurs tirées de (84), on constate que les deux expressions obtenues pour l'une quelconque des dérivées cardinales (81) ont les mêmes termes du troisième ordre.

Ainsi, les conditions de passivité du système (80) sont bien, comme nous l'avions annoncé, du second ordre au plus. Je dis, en outre, qu'elles sont vérifiées *identiquement*, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs *numériques* attribuées aux six quantités λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, à leurs dérivées du premier ordre et à leurs dérivées paramétriques du second ordre.

Effectivement, les relations dont il s'agit sont, au point de vue de l'intégration, des conséquences nécessaires du système (80), et il suffit dès lors, pour prouver qu'elles sont identiquement vérifiées au point de vue algébrique, d'établir que *le système* (80) *admet certainement quelque groupe d'intégrales où les inconnues* λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, *leurs dérivées premières et leurs dérivées paramétriques secondes prennent, pour des valeurs numériques données de* x, y, z, *des valeurs numériques données :* dans cette démonstration, on devra supposer, puisque les expressions Φ_x, Φ_y, Φ_z, Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z ont comme dénominateur commun le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_3 & \mu_2 \\ \mu_3 & \lambda_2 & \mu_1 \\ \mu_2 & \mu_1 & \lambda_3 \end{vmatrix},$$

que, pour les valeurs numériques assignées à λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, la forme quadratique (31) est décomposable en une somme algébrique de trois carrés indépendants.

Cela étant, considérons les six équations [(28, 29)], les dix-huit équations du second ordre qui s'en déduisent par différentiations premières, et les trente-six équations du troisième ordre qui s'en déduisent par différentiations secondes : comme au n° 15, nous désignerons ces trois groupes d'équations respectivement par S_1, S_1', S_1''. Si, dans les équations S_1, on remplace les λ et les μ par les valeurs numériques qui leur sont assignées d'avance, on pourra trouver pour les neuf quantités

$$(85)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \dfrac{\partial w}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}, & \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \dfrac{\partial w}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}, & \dfrac{\partial v}{\partial z}, & \dfrac{\partial w}{\partial z}, \end{array}\right.$$

considérées comme autant de variables indépendantes distinctes, des valeurs numériques qui vérifient les équations S_1; pour ces valeurs numériques, le déterminant des quantités (85) est d'ailleurs nécessairement différent de zéro. Si maintenant, dans les dix-huit équations S_1', on remplace les dérivées premières des λ et des μ par les valeurs numériques qui leur sont assignées d'avance, et les quantités (85) par les valeurs numériques précédemment trouvées, on pourra déterminer, pour les dix-huit dérivées secondes de u, v, w, considérées comme autant de variables indépendantes distinctes, des valeurs numériques qui vérifient ces dix-huit équations. Calculons finalement, à l'aide des équations (80), les valeurs numériques que doivent prendre les dérivées principales secondes des λ et des μ quand on donne aux λ, aux μ, à leurs dérivées premières et à leurs dérivées paramétriques secondes les valeurs numériques assignées d'avance, puis remplaçons, dans les trente-six équations S_1'', les dérivées paramétriques secondes des λ et des μ par les valeurs numériques assignées d'avance, leurs dérivées principales secondes par les valeurs numériques ainsi calculées, et les dérivées premières et secondes de u, v, w par les valeurs numériques précédemment trouvées : les trente-six équations résultantes seront alors, en vertu du calcul exécuté au n° 16, résolubles sans incompatibilité par rapport aux trente dérivées troisièmes de u, v, w, et fourniront, pour ces dernières, des valeurs numériques déterminées.

Cela fait, choisissons à volonté pour x, y, z des valeurs initiales x_0, y_0, z_0, puis prenons pour u, v, w trois fonctions de x, y, z arbitrairement choisies sous les seules restrictions que les valeurs initiales de leurs dérivées premières, secondes et troisièmes soient celles qui viennent d'être calculées successivement. Formons enfin, à l'aide des trois fonctions dont il s'agit, les six expressions

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}:$$

les six fonctions de x, y, z ainsi obtenues et leurs dérivées premières et secondes ont alors comme valeurs initiales les valeurs numériques qui sont assignées d'avance aux λ, aux μ, à leurs dérivées premières, à leurs dérivées paramétriques secondes, et celles que le système (80) détermine alors pour leurs dérivées principales secondes.

Cela étant, remplaçons dans le système [(28, (29)] les seconds membres λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 par les six fonctions dont il s'agit : il est clair que le système résultant sera identiquement vérifié par les trois fonctions u, v, w formées précédemment; comme le déterminant différentiel de ces trois fonctions est différent de zéro, les conditions de possibilité ne peuvent manquer d'être satisfaites, et dès lors les six fonctions que nous venons de choisir pour seconds membres du système [(28), (29)] ne peuvent manquer de fournir un groupe d'intégrales de (80) : or, pour les valeurs initiales x_0, y_0, z_0, assignées d'avance à x, y, z, elles prennent bien, ainsi que leurs dérivées premières et leurs dérivées paramétriques secondes, les valeurs initiales assignées d'avance.

22. Le système orthonome (80), étant passif, admet un groupe d'intégrales répondant à des conditions initiales arbitrairement choisies. Ces conditions sont de la forme

$$\mu_1 = F(x, y, z);$$
$$\mu_2 = H(x, y, z);$$
$$\mu_3 = K(x, y, z);$$

$$(86)\quad \left\{\begin{array}{lll} \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = L(x, y) \\ \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial z} = M(x, z) \end{array}\right. & \begin{array}{l} \text{pour} \\ \text{pour} \end{array} & \begin{array}{r} z - z_0 = 0, \\ y - y_0 = 0; \end{array} \\ \left\{\begin{array}{l} \lambda_2 = N(y, z) \\ \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial x} = P(y) \end{array}\right. & \begin{array}{l} \text{pour} \\ \text{pour} \end{array} & \begin{array}{r} x - x_0 = 0, \\ x - x_0 = z - z_0 = 0; \end{array} \\ \left\{\begin{array}{l} \lambda_3 = Q(z) \\ \dfrac{\partial \lambda_3}{\partial x} = R(z) \\ \dfrac{\partial \lambda_3}{\partial y} = S(z) \end{array}\right\} & \text{pour} & x - x_0 = y - y_0 = 0, \end{array}\right.$$

où x_0, y_0, z_0 désignent les valeurs initiales choisies pour x, y, z, et F, H, K, L, M, N, P, Q, R, S autant de fonctions arbitraires, dépendant respectivement de divers groupes de variables.

Le système (80), composé de *six équations* et impliquant *six inconnues*, présente donc, comme on le voit, cette particularité, que *trois convenablement choisies des six inconnues restent entièrement arbitraires dans la solution générale.*

Il était facile de le prévoir. Si l'on considère, en effet, le système [(28), (29)] comme impliquant *neuf fonctions inconnues*, λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, u, v, w, des variables indépendantes x, y, z, on obtient une première forme monoïque et passive de ce système en le résolvant par rapport aux six premières inconnues, puis une deuxième en adjoignant aux équations R_1 et R_2 du n° 15 les conditions de possibilité mises sous forme orthonome passive. Cela étant, si, après avoir fixé pour chacune des deux formes l'économie des conditions initiales, on se borne pour chacune d'elles à la considération exclusive des arbitraires où le nombre des variables indépendantes est maximum, il résulte des principes exposés dans un Mémoire antérieur ([1]) que ces arbitraires doivent dépendre de part et d'autre du même nombre de variables et être de part et d'autre en même nombre : or, puisque la première forme, examinée à ce point de vue, comporte manifestement trois fonctions arbitraires de trois variables indépendantes, il en est forcément de même pour la seconde.

23. Du résultat précédent on déduit sans peine le degré de généralité du système d'équations aux dérivées partielles

$$(87)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}=\mu_1,\\ &\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}=\mu_2,\\ &\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}=\mu_3,\end{aligned}\right.$$

où μ_1, μ_2, μ_3 désignent trois fonctions données des variables indépendantes x, y, z, et u, v, w trois fonctions inconnues assujetties à ce que leur déterminant différentiel soit différent de zéro. A cet effet, on désignera par λ_1, λ_2, λ_3 trois inconnues auxiliaires adjointes à u, v, w, et l'on posera

$$(88)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2=\lambda_1,\\ &\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2=\lambda_2,\\ &\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2=\lambda_3.\end{aligned}\right.$$

Ces inconnues auxiliaires devront satisfaire au système (79) ou (80), et l'on pourra leur imposer des conditions initiales, arbitrairement choisies, de la forme (86); leur détermination une fois opérée, celle

([1]) *Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque* (*Acta mathematica*, t. XXV).

des inconnues primitives u, v, w s'effectue par l'intégration du système [(87), (88)], dont la solution générale dépend de six constantes arbitraires.

En se bornant donc, conformément aux indications données plus haut (n° 22, *in fine*), à la considération des arbitraires pour lesquelles le nombre des variables indépendantes est maximum, on peut dire que la solution générale du système (87) dépend de trois fonctions arbitraires de deux variables indépendantes : il importe toutefois de ne jamais perdre de vue la signification essentiellement relative que nous attachons à cette expression.

24. Il convient d'ajouter, en terminant, que la forme (80) n'est pas la seule forme orthonome passive sous laquelle on puisse mettre le système (79). On peut, en effet, le résoudre comme il suit :

$$(89)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial x^2} &= 2\frac{\partial^2\mu_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial y^2} - 2\Phi_z;\\
\frac{\partial^2\mu_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2\mu_2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\mu_3}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial y\,\partial z} - 2\Psi_x,\\
\frac{\partial^2\mu_1}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2\lambda_2}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2\mu_3}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2\mu_2}{\partial y^2} + 2\Psi_y;\\
\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial x^2} &= 2\frac{\partial^2\mu_2}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial z^2} - 2\Phi_y,\\
\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2\mu_1}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2\mu_2}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\mu_3}{\partial z^2} - 2\Psi_z,\\
\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial y^2} &= 2\frac{\partial^2\mu_1}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\lambda_2}{\partial z^2} - \Phi_x.
\end{aligned}\right.$$

Or, le système (89) ainsi obtenu ne contient dans ses seconds membres aucune dérivée principale, et il suffit, pour en constater la nature orthonome, d'attribuer aux variables indépendantes et aux inconnues les cotes respectives suivantes :

	x	y	z	λ_1	λ_2	λ_3	μ_1	μ_2	μ_3
Cotes premières	1	1	1	0	0	0	0	0	0
Cotes secondes	0	0	0	−1	0	2	1	−1	−1

Si l'on observe d'ailleurs que les systèmes (80) et (89) sont algébriquement équivalents, que les dérivées principales d'un même ordre quelconque y sont de part et d'autre en même nombre, et que le système (80), indéfiniment prolongé par différentiations, détermine sans incompatibilité les valeurs des dérivées principales de tous ordres, on voit immédiatement que le système (89), indéfiniment prolongé, jouit de la même propriété.