ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. G. J. JACOBI

Lettres sur la théorie des fonctions elliptiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 6 (1869), p. 127-175
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6__127_0>

LETTRES

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR C.-G.-J. JACOBI.

Nous devons à l'obligeance de M. Alfred Arago la précieuse communication de onze lettres inédites de JACOBI à LEGENDRE sur la théorie des Fonctions Elliptiques. Quoique les découvertes qu'elles contiennent soient aujourd'hui bien connues des Géomètres, ils étudieront sans doute avec un vif intérêt la forme que leur donne l'illustre inventeur; on prendra plaisir à voir Jacobi, avec une modestie digne de son talent, s'incliner devant l'illustre vieillard qu'il a déjà dépassé de si loin, et saluer en même temps par de véritables cris d'admiration les premiers résultats du jeune émule qui vient tout à coup partager sa gloire. « La découverte d'Abel, dit-il, est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux. »

Jacobi seul avait le droit de prononcer un tel jugement, dont la sévérité, sous toute autre plume que la sienne, irait jusqu'à l'injustice.

J. BERTRAND.

Kœnisberg, en Prusse, le 5 août 1827.

MONSIEUR,

Un jeune Géomètre ose vous présenter quelques découvertes faites dans la théorie des Fonctions Elliptiques, auxquelles il a été conduit par l'étude assidue de vos beaux écrits. C'est à vous, Monsieur, que cette partie brillante de l'Analyse doit le haut degré de perfectionnement auquel elle a été portée, et ce n'est qu'en marchant sur les vestiges d'un si grand maître, que les Géomètres pourront parvenir à la pousser au delà des bornes qui lui ont été prescrites jusqu'ici. C'est donc à vous que je dois offrir ce qui suit comme un juste tribut d'admiration et de reconnaissance.

Je commence à exposer les moments principaux des résultats que je viens d'obtenir. Soit p un nombre impair quelconque; on remarque aisément en poursuivant les théorèmes concernant la multiplication des Fonctions Elliptiques de première espèce, proposés dans le tome I des *Exercices de Calcul intégral,* que l'on peut toujours parvenir à l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2x^2}}=\frac{p\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2z^2}}$$

au moyen d'une substitution rationnelle

$$x=\frac{z\left(A+A'z^2+A''z^4+\ldots+A^{\frac{p^2-1}{2}}z^{p^2-1}\right)}{B+B'z^2+B''z^4+\ldots+B^{\frac{p^2-1}{2}}z^{p^2-1}}.$$

J'ai observé, depuis, que cette substitution peut être remplacée par les deux autres, employées successivement :

$$x=\frac{y\left(a+a'y^2+a''y^4+\ldots+a^{\frac{p-1}{2}}y^{p-1}\right)}{b+b'y^2+b''y^4+\ldots+b^{\frac{p-1}{2}}y^{p-1}},$$

$$y=\frac{z\left(\alpha+\alpha'z^2+\alpha''z^4+\ldots+\alpha^{\frac{p-1}{2}}z^{p-1}\right)}{\beta+\beta'z^2+\beta''z^4+\ldots+\beta^{\frac{p-1}{2}}z^{p-1}}.$$

Après une première substitution, la Fonction Elliptique va être transformée dans une autre de module différent, de sorte qu'on aura

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2x^2}}=\frac{M\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2y^2}},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2x^2}}=\frac{p\,dz}{M\sqrt{1-z^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2y^2}}.$$

Or, en donnant au nombre p des valeurs différentes, on trouve le théorème remarquable, que *chaque module donné fait part d'une infinité d'échelles de modules, dans lesquels il peut être transformé par une substitution algébrique et même rationnelle.*

Aussi je suis parvenu à trouver l'expression générale de ces deux substitutions-là, que je présenterai sous la forme trigonométrique, qui me paraît la plus commode. Elles pourront être transformées aisément dans la forme algébrique mentionnée. Je commence par la substitution dernière, qui me fournit le théorème suivant :

Théorème I (*).

« Soit pris l'angle φ' de manière qu'on ait $F(\varkappa, \varphi') = \frac{1}{p} F'(\varkappa)$, et » nommons en général φ^m un angle tel que $F(\varkappa, \varphi^m) = \frac{m}{p} F'(\varkappa)$. Cher- » chons un angle ψ au moyen de la formule

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right) = \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi' - \varphi}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi' + \varphi}{2}} \, \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi''' + \varphi}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi''' - \varphi}{2}} \cdots \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi^{p-2} \pm \varphi}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi^{p-2} \mp \varphi}{2}} \left(\operatorname{tang} 45^\circ \mp \frac{\varphi}{2}\right),$$

» on aura $F(\varkappa, \varphi) = \frac{M}{p} F(\lambda, \psi)$. Le signe supérieur ou inférieur doit » être pris selon que p est de la forme $4n+1$ ou de la forme $4n-1$. » Toutefois que φ se trouve entre les limites φ^m et φ^{m+1}, il faudra » prendre l'angle ψ entre les limites $-\frac{m\pi}{2}$ et $-\frac{m-1}{2}\pi$. La détermi- » nation des constantes M, λ pourra se faire par les formules

$$M = \frac{p}{2\left(\operatorname{coséc}\varphi' - \operatorname{coséc}\varphi''' + \ldots \mp \operatorname{coséc}\varphi^{p-2} \pm \frac{1}{2}\right)},$$

$$\lambda = \frac{2\varkappa M}{p}\left(\sin\varphi' - \sin\varphi''' + \ldots \mp \sin\varphi^{p-2} \pm \frac{1}{2}\right). »$$

(*) Je me servirai ici et dans la suite des signes des *Exercices de Calc. I.*

Je passe à présent au théorème II, qui répond à l'autre substitution, par laquelle on peut passer du module λ au module $\varkappa$, et qui, joint au précédent, sert à la multiplication des Fonctions Elliptiques de première espèce.

THÉORÈME II.

« Soit $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$, soit en général ψ^m un angle tel, que

$$F(\lambda', \psi^m) = \frac{m}{p} F'(\lambda'),$$

» qu'on fasse

$$\operatorname{tang}\theta' = \operatorname{tang}\psi \operatorname{coséc}\psi', \quad \operatorname{tang}\theta''' = \operatorname{tang}\psi \operatorname{coséc}\psi''', \ldots,$$
$$\operatorname{tang}\theta^{p-2} = \operatorname{tang}\psi \operatorname{coséc}\psi^{p-2};$$

» soit enfin $\theta = 2\left(\theta' - \theta''' + \theta^{\text{v}} - \ldots \mp \theta^{p-2} \pm \frac{\psi}{2}\right)$, on aura

$$F(\varkappa, \theta) = MF(\lambda, \psi).$$

» Les angles θ', θ''', ... doivent être pris dans le même quadrant de » cercle dans lequel se trouve l'angle ψ. »

Les théorèmes I et II joints ensemble donnent $F(\delta, \theta) = pF(\varkappa, \varphi)$.

Je passe sous silence les nombreuses relations analytiques très-curieuses, que vont fournir les deux théorèmes proposés. Je n'ajouterai ici qu'une méthode, qui peut servir à l'évaluation des transcendantes $F(\varkappa, \varphi)$, la plus commode, à ce que je crois, qu'on puisse imaginer.

En effet, λ se trouvant toujours très-petit, quand même le nombre p ne surpasse 5 ou 7, on pourra négliger les termes de l'ordre λ^2. On aura donc simplement $F(\varkappa, \varphi) = \frac{M}{p}\psi$. La constante M ne différant que de l'ordre λ^2 de la quantité $\frac{2}{\pi}F'(\varkappa)$, on introduira celle ci dans le calcul au lieu de M. Par là on aura en même temps corrigé le résultat de la partie non périodique de l'erreur commise en négligeant les quantités de cet ordre. Notre formule deviendra donc $F(\varkappa, \varphi) = \frac{2}{p\pi}F'(\varkappa)\psi$, et l'erreur commise ne comportera que $-\frac{\lambda^2}{4p\pi}F'(\varkappa)\sin 2\psi$. C'est donc la correction à ajouter pour que l'erreur ne soit que de l'ordre λ^4 (*).

Soit, par exemple, $p=5$, $\varkappa=\sin 45^\circ$, je trouve dans le tome III des *Exercices*, p. 215, $\varphi'=21^\circ 0' 36'',0275443$, $\varphi'''=58^\circ 38' 10'',3140270$. Aussi la Table II du tome III me donne $F'(\varkappa)=1,8540746773\,01$, d'où résulte

$$M'=\frac{F'(\varkappa)}{5,324\,000}\,0,00000\,11444\,90541\,544.$$

On aura donc à calculer l'angle ψ'' par la formule

$$\operatorname{tang}\frac{90^\circ-\psi''}{2}=\frac{\operatorname{tang}\left(10^\circ 30' 18'',01-\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(10^\circ 30' 18'',01+\frac{\varphi}{2}\right)}\,\frac{\operatorname{tang}\left(29^\circ 19' 5'',16+\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(29^\circ 19' 5'',16-\frac{\varphi}{2}\right)}\operatorname{tang}\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right),$$

et ensuite on trouvera

$$F(\varphi)=0,00000\,11444\,90541.\psi.$$

La correction à ajouter sera $-0,00000007\,.\sin 2\psi''$.

Exemple. $\varphi=30^\circ$:

$$\log\operatorname{tang}\frac{\varphi'-\varphi}{2} = 8,89549.90$$

$$\log\operatorname{tang}\frac{\varphi'''+\varphi}{2} = 9,98966.16$$

$$\log\cot\frac{\varphi'+\varphi}{2} = 0,32140.63$$

$$\log\cot\frac{\varphi'''-\varphi}{2} = 0,59306.27\,n$$

$$\log\operatorname{tang}\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)=9,76143.94$$

$$\log\operatorname{tang}\left(45^\circ-\frac{\psi''}{2}\right)=9,56106.90\,n$$

$$45^\circ-\frac{\psi''}{2}=-20^\circ 0' 0'',473$$

(*) Si l'on exprime ψ en secondes, on aura $F(\varkappa,\varphi)=M'\psi$, étant mis $M'=\frac{F'(\varkappa)}{324\,000\,p}$.

$$\psi = \frac{468000.95}{0,53562266} (\ldots\ldots 114449054\text{I}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Corr.} = + & 0,\ldots\ldots\ldots 7 \\ \hline & 0,53562273 \end{array}$$

La Table II du tome III des *Exercices* donne 0,53562273 2822.

Cette méthode me paraît fournir la manière la plus convenable de construire des Tables pour l'évaluation des Fonctions Elliptiques de première espèce.

Il n'y a que très-peu de temps que ces recherches ont pris naissance. Cependant elles ne sont pas les seules entreprises en Allemagne sur le même objet. M. Gauss, ayant appris de celles-ci, m'a fait dire qu'il avait développé déjà en 1808 les cas de 3 sections, 5 sections et de 7 sections, et trouvé en même temps les nouvelles échelles de modules qui s'y rapportent. Cette nouvelle, à ce qui me paraît, est bien intéressante.

Depuis quelque temps j'ai fait encore quelques recherches sur la théorie des Nombres, qui m'ont conduit à des résultats assez curieux relatifs à la belle partie de cette discipline ouverte aux géomètres par votre célèbre loi de Réciprocité. En effet, en partant de la nouvelle théorie de section de cercle proposée par M. Gauss dans la huitième section de ses *Disquisitiones Arithmeticæ*, j'ai découvert une méthode qui me conduit aux théorèmes fondamentaux concernant la théorie des Résidus cubiques, biquadratiques, et même des Résidus des puissances plus élevées encore (*).

Pour en donner une idée succincte, je mets ici la démonstration du théorème fondamental relatif aux Résidus quadratiques, fondée sur ces nouveaux principes.

Soit p un nombre, soit x une racine de l'équation $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$, soit g une racine primitive de la congruence $g^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, on a

$$x - x^g + x^{g^2} - x^{g^3} + \ldots - x^{g^{p-2}} = +\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}.$$

(*) Je me sers ici dans ce qui suit des signes et des dénominations mis en usage par M. Gauss dans ses *Disq. Ar.*

On a de même en général

$$x^q - x^{qg} + x^{qg^2} - x^{qg^3} + \ldots - x^{qg^{p-2}}$$

égal à $+\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$ ou à $-\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$, selon que q est résidu quadratique ou non résidu quadratique du nombre p. Mais le nombre q étant aussi premier, on a, en négligeant les multiples de q,

$$x^q - x^{qg} + \ldots - x^{qg^{p-2}} = (x - x^g + \ldots - x^{g^{p-2}})^q = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}.$$

Donc q sera R ou N.R de p selon que $(-1)^{\frac{p-2}{2}\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}$, divisé par q, laisse $+1$ ou -1, ce qui est précisément la loi de Réciprocité, ou, d'après M. Gauss, le théorème fondamental relatif aux Résidus quadratiques.

J'ajoute plusieurs théorèmes relatifs aux Résidus cubiques, qui résultent tous d'un même théorème général. Ce sont les premiers de ce genre qui ont été proposés.

Étant donné un nombre premier p de la forme G_{n+1}, un autre nombre premier quelconque sera résidu cubique de p toutes les fois que $4p$ sera de l'une des deux formes

$$L^2 + 27q^2M^2 \quad \text{ou} \quad q^2L^2 + 27M^2.$$

Cependant il faut exclure la forme seconde dans les cas de $q = 2$ et $q = 3$.

Aussi q étant un nombre premier plus grand que 7, il sera résidu cubique de p toutes les fois que p est de la forme $(q + mM)^2 + 27M^2$, le nombre m étant donné par rapport à q au moyen de la Table suivante :

$q =$	11	13	17	19	23	29	31	...
	4	1	3	3	2	5	8	...
			9	9	8	7	3	...
					11	6	9	...
						11	7	...
							12	...
								....

Ainsi, par exemple, le nombre 37 est résidu cubique de p toutes les fois que $4p$ sera de l'une des sept formes :

$$L^2 + 36963M^2, \qquad 1369L^2 + 27M^2,$$
$$(37z + 3M)^2 + 27M^2, \qquad (37z + 9M)^2 + 27M^2,$$
$$(37z + 7M)^2 + 27M^2, \qquad (37z + 12M)^2 + 27M^2,$$
$$(37z + 8M)^2 + 27M^2.$$

Le nombre $4p$ n'étant pas compris sous l'une des formes établies par les théorèmes précédents, le nombre q n'en saura être résidu cubique.

M. Gauss a présenté à la Société de Gœttingue, il y a environ deux ans, un premier Mémoire relatif à la théorie des Résidus biquadratiques, laquelle est beaucoup plus facile que celle des Résidus cubiques. Ce Mémoire n'a pas encore paru, mais il en a donné un extrait dans les *Annales de Gœttingue*, année 1825, vol. I. Les théorèmes qui s'y trouvent annoncés se démontrent et pourront même être généralisés par mes méthodes avec une facilité extrême; et, à ce que je crois, ce sera de même avec tout ce qu'on pourrait établir sur les Résidus des puissances. Ledit grand géomètre m'a écrit, depuis, qu'il poursuivra le même objet dans trois autres Mémoires destinés à être présentés à la Société, et il se plaint que le temps lui manque à publier ses vastes recherches sur différents objets de la plus grande importance. Je suis avec le respect le plus profond,

Monsieur,

Votre très-humble serviteur,

D[r] C.-G.-J. Jacobi,

Auprès l'Université de Kœnisberg, en Prusse.

Kœnisberg, le 12 janvier 1828.

Monsieur,

Je chercherais en vain à vous décrire quels furent mes sentiments en recevant votre lettre du 30 novembre et en même temps le numéro du *Globe* qui contient la communication que vous avez bien voulu faire à l'Académie des Sciences de mes essais. Je me sentis confus accablé de cet excès des bontés que vous m'avez eues et du sentiment que jamais de ma vie je ne saurai mériter de pareilles. Comment vous rendre grâce? Quelle satisfaction pour moi que l'homme que j'admirais tant en dévorant ses écrits a bien voulu accueillir mes travaux avec une bonté si rare et si précieuse! Tout en manquant de paroles qui soient de dignes interprètes de mes sentiments, je n'y saurai répondre qu'en redoublant mes efforts à pousser plus loin les belles théories dont vous êtes le créateur.

J'avais déjà appris il y a quelques mois que vous avez publié un nouvel ouvrage sur les Fonctions Elliptiques en deux volumes. Aussitôt j'ai donné à un libraire de Berlin l'ordre de me le faire parvenir; mais, à mon grand dépit, je ne l'ai pas encore reçu. J'attends donc avec une impatience extrême le cadeau brillant que vous m'en avez voulu faire et pour lequel je vous rends mille grâces.

Depuis ma dernière lettre, des recherches de la plus grande importance ont été publiées sur les Fonctions Elliptiques de la part d'un jeune géomètre, qui peut-être vous sera connu personnellement. C'est la première partie d'un Mémoire de M. Abel, à Christiania, qu'on m'a dit avoir été à Paris il y a deux ou trois ans, inséré dans le second cahier du second volume du *Journal des Mathématiques pures et appliquées* publié à Berlin par M. Crelle. La continuation doit avoir été publiée dans ces jours dans le cahier troisième dudit Journal; mais elle ne m'est parvenue pas encore. Comme je suppose que ce Mémoire ne vous soit pas encore connu, je vous en veux raconter les détails les plus intéressants. Mais, pour plus de commodité, j'avancerai le mode de notation dont je me sers ordinairement.

Si l'on pose $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin\varphi^2}} = \Xi$, l'angle φ étant l'amplitude de Ξ, je le désigne par $\operatorname{am}\Xi$; K étant la fonction entière $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin\varphi^2}}$, je mets, au lieu de $\operatorname{am}(\Xi - \mathrm{K})$, cette autre expression $\operatorname{coam}\Xi$ (c'est-à-dire *complementi amplitudo*). Je désigne, avec vous,

$$\sqrt{1-\varkappa^2 \sin(\operatorname{am}\Xi)^2} = \frac{d.\operatorname{am}\Xi}{d\Xi} \quad \text{par} \quad \Delta \operatorname{am}\Xi.$$

Le module sera mis à côté, si on le juge convenable; toutes les fois qu'il sera supprimé dans le suivant, les formules se rapportent au module $\varkappa$. Du reste, je désignerai le complément de $\varkappa$ par $\varkappa'$ et la fonction entière qui répond à $\varkappa'$ par K'.

M. Abel commence par donner l'expression analytique de toutes les racines des équations élevées desquelles dépend la division des Fonctions Elliptiques. En effet, soit $\sin\varphi = i\operatorname{tang}\psi$, i étant $\sqrt{-1}$, on aura

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin\varphi^2}} = \frac{i\,d\psi}{\sqrt{1-\varkappa'^2\sin\psi^2}},$$

d'où l'on tire

$$\sin\operatorname{am}(i\Xi, \varkappa) = i\operatorname{tang}\operatorname{am}(\Xi, \varkappa'),$$

théorème fondamental de M. Abel.

Je remarque encore les formules suivantes :

$$\cos\operatorname{am}(i\Xi, \varkappa) = \operatorname{séc}\operatorname{am}(\Xi, \varkappa'),$$

$$\Delta\operatorname{am}(i\Xi, \varkappa) = \frac{\Delta\operatorname{am}(\Xi, \varkappa')}{\cos\operatorname{am}(\Xi, \varkappa')} = \operatorname{coséc}\operatorname{coam}(\Xi, \varkappa').$$

Aussi on aura

$$\sin\operatorname{am}(i\mathrm{K}', \varkappa) = 0,$$

$$\sin\operatorname{am}(\Xi + i\mathrm{K}') = \frac{1}{\varkappa\sin\operatorname{am}\Xi},$$

$$\operatorname{cotam}(\Xi' + i\mathrm{K}') = i\Delta\operatorname{am}\Xi,$$

$$\Delta\operatorname{am}(\Xi + i\mathrm{K}') = i\operatorname{cotam}\Xi, \text{ etc.}$$

Comme on a

$$\operatorname{tang}\operatorname{am}(2m'\mathrm{K}', \varkappa') = 0,$$

m' étant un nombre entier, on aura aussi

$$\sin(2m'i\mathrm{K}', \varkappa) = 0,$$

d'où suit qu'on aura en général

$$\sin\operatorname{am}(\Xi + 4m\mathrm{K} + 4m'i\mathrm{K}') = \sin\operatorname{am}\Xi,$$

m et m' étant des nombres positifs ou négatifs. On voit donc que les racines de l'équation élevée qui sert à la division de la Fonction Elliptique Ξ en n parties seront de la forme $\sin\operatorname{am}\frac{\Xi + 4m\mathrm{K} + 4m'\mathrm{K}'}{n}$, formule qui embrasse toutes les racines au nombre de n^2, si l'on donne à m, m' successivement les valeurs 0, 1, 2,..., $n-1$.

M. Abel ramène ensuite la division d'une Fonction Elliptique quelconque Ξ *à la division de la Fonction Entière* K. En effet, soient α, β des racines quelconques de l'équation $x^n = 1$, l'expression

$$\left(\sum \alpha^m \beta^{m'} \sin \operatorname{am} \frac{\Xi + 4m\mathrm{K} + 4m' i \mathrm{K}'}{n}\right)^n \quad (*),$$

où l'on donne à m, m' toutes leurs valeurs 0, 1, 2,..., $n-1$, ne changera pas si l'on met, au lieu de $\sin \operatorname{am} \Xi$, une autre racine quelconque $\sin \operatorname{am} \frac{\Xi + 4\mu\mathrm{K} + 4\mu' i\mathrm{K}'}{n}$. Cette expression sera donc symétrique par rapport à ces racines et pourra, par conséquence, être exprimée par

$$\sin \operatorname{am} \Xi \quad (**).$$

A présent si l'on donne à α, β toutes leurs valeurs possibles, ce qui donne n^2 combinaisons, on tire de là les valeurs de toutes les racines. M. Abel suit une autre méthode, qui, si je ne me trompe pas, rend le problème plus compliqué qu'il n'est en lui-même.

La division de la fonction entière, laquelle dépend en général d'une équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, est ramenée à une équation du degré $n+1$, n étant un nombre premier. En effet, soit $\frac{4\mu\mathrm{K} + 4\mu'\mathrm{K}'}{n} = \omega$, g une racine primitive de la congruence $x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, $\varphi(\omega)$ une fonction trigonométrique quelconque de l'amplitude de ω, α une racine de l'équation $x^{n-1} = 1$, on y parvient en considérant l'expression

$$[\varphi(\omega) + \alpha\varphi(g\omega) + \alpha^2\varphi(g^2\omega) + \ldots + \alpha^{n-2}\varphi(g^{n-2}\omega)]^{n-1}$$

symétrique en $\varphi(\omega)$, $\varphi(g\omega)$, $\varphi(g^2\omega)$,..., $\varphi(g^{n-2}\omega)$. Or les fonctions

---

(*) On entend par $\sum$ la somme des expressions formées de ladite manière.

(**) Il faut ajouter : Et par des quantités constantes, mais irrationnelles, de la forme $\sin \operatorname{am} \frac{4m\mathrm{K} + 4m' i\mathrm{K}}{n}$.

symétriques de ces quantités ne sauront avoir que des valeurs différentes au nombre $n+1$, qui répondent à $\mu=0$, $\mu'=1$; $\mu=1$, $\mu'=0$; $\mu=1$, $\mu'=1, 2, 3,\ldots, n-1$. Donc elles seront données au moyen d'une équation algébrique du degré $n+1$. Je vais ajouter à présent les propres paroles de M. Abel, en remarquant qu'il considère dans son Mémoire les Fonctions Elliptiques sous la forme $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1+e^2x^2)}}$:

« Donc, en dernier lieu, la résolution de l'équation $P_n=0$ est réduite à celle d'une seule équation du degré $n+1$; mais cette équation ne peut pas en général être résoluble algébriquement. Néanmoins on peut la résoudre complétement dans plusieurs cas particuliers, par exemple lorsque $e=c$, $e=c\sqrt{3}$, $e=c(2\pm\sqrt{3})$, etc. Dans le cours de ce Mémoire (*), je m'occuperai de ces cas, dont le premier surtout est remarquable, tant par la simplicité de la solution, que par sa belle application dans la géométrie. En effet, entre autres, je suis parvenu à ce théorème : *On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate, par la règle et le compas seuls, en m parties égales, si m est de la forme* z^n *ou* z^n+1, *le dernier nombre étant en même temps premier; ou bien si m est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes*. Ce théorème est, comme on voit, précisément le même que celui de M. Gauss relativement au cercle. »

Connaissant les racines des équations mentionnées, M. Abel les résout en facteurs; ensuite, dans les formules qui en résultent, il pose $n=\infty$, d'où il tire des expressions très-remarquables; mais cela n'a plus aucune difficulté.

Vous m'avez permis, Monsieur, de vous communiquer l'analyse dont je me sers. Une démonstration rigoureuse du théorème général concernant les transformations s'imprime à présent dans le Journal de M. Schumacher; elle vous sera envoyée aussitôt qu'elle sera imprimée. Mes recherches ultérieures sont encore loin d'être finies; cependant j'en embrasserai une partie dans un Mémoire que je crois pouvoir publier dans peu. Il s'y trouvera, entre autres, un résultat curieux qui d'abord m'a frappé un peu; c'est le cas suivant. Si l'on peut trans-

(*) Qui n'est pas encore publié.

former un module $\varkappa$ dans un autre λ, on a entre ces deux modules une équation algébrique du degré $n+1$, si la transformation se rapporte au nombre n, qu'on suppose être premier. Ces équations symétriques en $\varkappa$ et λ sont, par exemple pour $n=3$, $n=5$:

$$u^4 - v^4 \pm 2uv(1 - u^2v^2) = 0, \quad u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) \pm 4uv(1 - u^4v^4) = 0,$$

où l'on a supposé $u = \sqrt[4]{\varkappa}$, $v = \sqrt[4]{\lambda}$. Il paraît remarquable que ces équations, qu'on pourrait appeler *équations modulaires*, ont leur forme la plus simple entre les quatrièmes racines des modules. Or toutes ces équations algébriques en nombre infini satisfont à une même équation différentielle du troisième degré, savoir :

$$\begin{gathered} 3(d\varkappa^2 d\lambda^2 - d\lambda^2 d\varkappa^2) - 2d\varkappa\, d\lambda(d\varkappa\, d^3\lambda - d\lambda\, d^3\varkappa) \\ + d\varkappa^2 d\lambda^2\left[\left(\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa - \varkappa^3}\right)^2 d\varkappa^2 - \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda - \lambda^3}\right)^2 d\lambda^2\right] = 0, \end{gathered}$$

où l'on n'a supposé constant aucun différentiel. Aussi j'ai trouvé que, dans certains cas, on retombe sur le même module, de sorte que la transformation devient multiplication ; ainsi $\varkappa$ étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on aura deux racines de l'équation $u^2 - v^2 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) - 4uv(1 - 4u^2v^2) = 0$ égales à $(1 \pm i)u^5$, d'où l'on tire $v^8 = \lambda^2 = \varkappa^2 = \frac{1}{2}$. Ce sera dans tous les cas où le nombre n est la somme de deux carrés, $n = a^2 + 4b^2$, $\varkappa$ étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$; la Fonction Elliptique se trouve alors multipliée par $a \pm 2bi$. On remarque des choses semblables dans les modules qui sont liés d'après une échelle quelconque avec $\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$. C'est un genre de multiplication qui n'a pas son analogie dans les arcs de cercle. Je suis très-curieux de savoir votre avis sur ma démonstration, laquelle à la vérité est un peu compliquée. La nouvelle d'une troisième édition de la *Théorie des Nombres* m'a charmé. Je n'ai travaillé sur cette science que très-peu de temps ; quand je m'aurai pris la liberté de vous communiquer un petit Mémoire qui va être publié sur la théorie des Résidus, vous verrez que mes idées ne méritent pas la place brillante que vous leur avez offerte. Aussi les recherches sur les Fonctions Elliptiques doivent être en quelque sorte finies avant qu'elles soient dignes de former un supplément à un ouvrage sans doute parfait dans toutes ses parties.

Adieu, Monsieur, daignez recevoir les respects les plus profonds que m'inspirent la supériorité de vos lumières et la générosité de vos sentiments. Jamais de ma vie je n'oublierai cette bonté de père avec laquelle vous avez voulu m'encourager dans la carrière des sciences.

Votre dévoué serviteur,

C.-G.-J. Jacobi.

P. S. Le troisième cahier du *Journal de Crelle*, que je viens de recevoir, ne contient pas encore la suite du Mémoire de M. Abel.

Monsieur,

Il me faut vous faire de grandes excuses d'avoir retardé aussi longtemps la réponse à votre aimable lettre, pleine de vos bontés, qui font la plus douce récompense de mes efforts et un grand bonheur de ma vie. En effet, j'avais espéré de jour en jour pouvoir vous mander la fin d'un premier Mémoire qui devait embrasser la plupart de mes recherches. Cependant la difficulté de la matière, de même que les nouvelles vues qui se sont ouvertes dans le cours même du travail, me font éprouver de si grands retards, que peut-être il ne vous sera pas désagréable si je vous fais part des résultats principaux trouvés jusqu'ici, et qui me paraissent dignes de votre intérêt. Veuillez les accueillir avec la bonté dont vous m'avez donné des preuves si éclatantes et qui seront gravées à jamais dans mon cœur.

Soit d'après ma notation $\omega = \frac{m\mathrm{K} + 2m'i\mathrm{K}'}{n}$ (n est un nombre impair), m et m' désignant des nombres entiers quelconques, mais tels qu'un même nombre ne saura être diviseur des trois, m, m', n. Vous verrez aisément que la démonstration de mon théorème s'applique mot à mot au cas même qu'on met partout $\operatorname{am}\omega$ au lieu de $\operatorname{am}\frac{K}{n}$. En mettant successivement

$$\omega = \frac{K}{n}, \quad \frac{2iK'}{n}, \quad \frac{K \pm 2iK'}{n}, \quad \frac{K \pm 4iK'}{n}, \ldots, \quad \frac{K \pm (n-1)iK'}{n},$$

on tire de là un nombre $n+1$ de transformations attachées au nombre n et analogues à celle que j'ai donnée relativement à $\omega = \frac{K}{n}$. Elles embrassent toutes les possibles quand n est premier; aussi dans les cas de $n = 3$, $n = 5$, j'ai montré que les équations modulaires montent au quatrième et sixième degré, comme cela doit être. De ces modules, au nombre de $n+1$, il n'y a que deux qui soient réels, savoir : ceux qui répondent à $\omega = \frac{K}{n}$ et à $\omega = \frac{2iK'}{n}$. La dernière transformation, savoir : celle qui répond à $\omega = \frac{2iK'}{n}$, est précisément la même qui fournit le théorème complémentaire. Pour démontrer ceci, il faut remonter aux formules analytiques concernant la multiplication, données la première fois par M. Abel. J'en cite les trois suivantes, présentées d'après la forme sous laquelle vous considérez les Fonctions Elliptiques, et dans laquelle j'ai eu soin de vous suivre :

♀

$$\left\{\begin{aligned}
&(1)\quad \sin\operatorname{am}(n\xi, \varkappa) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varkappa^{\frac{n^2-1}{2}} \prod \sin\operatorname{am}\left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right),\\
&(2)\quad \frac{1}{K^{n^2-1}} = \prod \sin^4 \operatorname{coam} \frac{2mK + 2m'iK'}{n},\\
&(3)\quad \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} = \prod \frac{\sin^2 \operatorname{coam} \frac{2mK + 2m'iK'}{n}}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{2mK + 2m'iK'}{n}}.
\end{aligned}\right.$$

Les produits désignés par $\prod$ embrassent tous les facteurs *différents entre eux* que l'on obtient en donnant à m, m' des valeurs en nombres entiers positifs ou négatifs.

Les trois formules principales relatives à la transformation complémentaire sont :

$$
(1)\left\{\begin{aligned}
&\operatorname{sinam}(n\xi, \varkappa)\\
&=\sqrt{\frac{\lambda^n}{\varkappa}}\operatorname{sinam}\frac{\xi}{M}\operatorname{sinam}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{4i\Lambda'}{n}\right)\operatorname{sinam}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{8i\Lambda'}{n}\right)\cdots\operatorname{sinam}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{4(n-1)i\Lambda'}{n}\right)\ (\text{mod.}\,\lambda)\\
&=\frac{nMy\left(1+\dfrac{y^2}{\operatorname{tang}^2\operatorname{am}\frac{2\Lambda'}{n}}\right)\left(1+\dfrac{y^2}{\operatorname{tang}^2\operatorname{am}\frac{4\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left[1+\dfrac{y^2}{\operatorname{tang}^2\operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}\right]}{\left(1+\lambda^2\operatorname{tang}^2\operatorname{am}\frac{2\Lambda'}{n}y^2\right)\left(1+\lambda^2\operatorname{tang}^2\operatorname{am}\frac{4\Lambda'}{n}y^2\right)\cdots\left[1+\lambda^2\operatorname{tang}^2\operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}y^2\right]}\ (\text{mod.}\,\lambda'),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(2)\left\{\begin{aligned}
\varkappa'&=\lambda'^n\left[\operatorname{sin\,coam}\frac{2i\Lambda'}{n}\operatorname{sin\,coam}\frac{4i\Lambda'}{n}\operatorname{sin\,coam}\frac{6i\Lambda'}{n}\cdots\operatorname{sin\,coam}\frac{(n-1)i\Lambda'}{n}\right]^4\ (\text{mod.}\,\lambda)\\
&=\frac{y^n}{\left[\Delta\operatorname{am}\frac{2\Lambda'}{n}\,\Delta\operatorname{am}\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\Delta\operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}\right]^4}\ (\text{mod.}\,\lambda'),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(3)\left\{\frac{1}{nM}=\left[\frac{\operatorname{sin\,coam}\frac{2\Lambda'}{n}\operatorname{sin\,coam}\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\operatorname{sin\,coam}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}{\operatorname{sinam}\frac{2\Lambda'}{n}\operatorname{sinam}\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\operatorname{sinam}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}\right]^2\ (\text{mod.}\,\lambda'),\right.
$$

où l'on a mis

$$
y=\operatorname{sinam}\left(\frac{\xi}{M},\lambda\right),\quad \Lambda=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}},
$$

$$
\Lambda'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda'^2\sin^2\varphi}},\quad \lambda^2+\lambda'^2=1.
$$

Il faut ajouter que la théorie de la première transformation donne $\Lambda=\frac{K}{nM}$, $\Lambda'=\frac{K'}{M}$. Démontrons la première de ces formules.

Si, dans la formule suivante, qui concerne la première transformation :

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sinam}\left(\frac{\xi}{M},\lambda\right)\\
&=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{\varkappa^n}{\lambda}}\operatorname{sinam}\xi\operatorname{sinam}\left(\xi+\frac{4K}{n}\right)\operatorname{sinam}\left(\xi+\frac{8K}{n}\right)\cdots\operatorname{sinam}\left(\xi+\frac{4(n-1)K}{n}\right),
\end{aligned}
$$

on met $\xi + \frac{2m'iK'}{n}$ au lieu de ξ, $\frac{\xi}{M}$ devenant $\frac{\xi}{M} + \frac{2m'iK'}{nM} = \frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}$, on a

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}, \lambda\right) = \sqrt{\frac{\varkappa^n}{\lambda}} \prod \sin\operatorname{am}\left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right),$$

où l'on donne à m les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \frac{n-1}{n}$. Dans cette formule, mettant successivement $m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n-1}{n}$, et formant le produit, on a

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod \sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}, \lambda\right) = \sqrt{\frac{\varkappa^{n^2}}{\lambda^n}} \prod \sin\operatorname{am}\left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right).$$

Mais la formule désignée par ♀ (1) donne

$$\sin\operatorname{am} n\xi = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varkappa^{\frac{n^2-1}{2}} \prod \sin\operatorname{am}\left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right),$$

d'où l'on tire

$$\sin\operatorname{am}(n\xi, \varkappa) = \sqrt{\frac{\lambda^n}{\varkappa}} \prod \sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}, \lambda\right),$$

ce qui est la formule à démontrer. De la même manière on démontre les deux autres au moyen des formules ♀ (1), (2). La formule dont j'ai fait mention dans ma première lettre résulte des mêmes principes.

Si l'on met dans ces deux transformations $i\xi$ au lieu de ξ, on a la transformation du module $\varkappa'$ dans le module λ', et *vice versâ*. Nommant λ_1 le second module réel dans lequel on sait transformer le module $\varkappa$ et qui répond à $\omega = \frac{2iK'}{n}$, on verra que λ dépend de la même manière de $\varkappa$ que $\varkappa$ de λ_1, λ'_1 de $\varkappa'$ et $\varkappa'$ de λ', λ'_1 étant le complément de λ_1. Donc si l'on forme d'après la même loi deux échelles relatives à $\varkappa$ et $\varkappa'$, trois termes consécutifs seront dans l'une...λ, $\varkappa$, λ_1,... et dans l'autre...λ'_1, $\varkappa'$, λ'..., théorème que vous avez démontré dans les cas de $n = 2$ et de $n = 3$.

On pourrait d'une manière analogue passer à la multiplication par le moyen du module λ_1, de même que par le moyen des autres modules imaginaires.

Faisons $\xi = \frac{u}{n}$, $n = \infty$, on aura dans cette limite $\lambda = 0$, et par conséquent $\Lambda = \frac{\pi}{2}$; les formules $\Lambda = \frac{K}{nM}$, $\Lambda' = \frac{K'}{M}$ donnent $nM = \frac{2K}{\pi}$, $\frac{\Lambda'}{n} = \frac{K'}{nM} = \frac{\pi K'}{2K}$; on aura de plus

$$y = \sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M}, \lambda\right) = \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{nM}, \lambda\right) = \sin\frac{\pi u}{nK}.$$

La formule (1) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sin\operatorname{am}(n\xi, \varkappa)$$
$$= \frac{nMy\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{2i\Lambda'}{n}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{4i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left[1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{(n-1)\Lambda'}{n}}\right]}{\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{i\Lambda'}{n}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{3i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left[1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{(n-2)i\Lambda'}{n}}\right]} \quad (\text{mod. } \lambda).$$

De là on tire, dans le cas de $n = \infty$,

$$\sin\operatorname{am} u = \frac{\dfrac{nKy}{\pi}\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{i\pi K'}{K}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{2i\pi K'}{K'}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{3i\pi K'}{K}}\right)\cdots}{\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{i\pi K}{2K}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{3i\pi K'}{2K}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{5i\pi K}{2K}}\right)\cdots},$$

y étant $\sin\frac{\pi u}{2K}$. Soit $e^{\frac{i\pi u}{2K}} = U$, $e = q$; cette formule se transforme dans celle-ci

$$\sin\operatorname{am}(u, \varkappa)$$
$$= \frac{2K}{\pi}A\left(\frac{U - U^{-1}}{2}\right)\frac{[(1-q^2U^2)(1-q^4U^2)(1-q^6U^2)\ldots][(1-q^2U^2)(1-q^4U^{-2})(1-q^6U^{-2})\ldots]}{[(1-qU^2)(1-q^3U^2)(1-q^5U^2)\ldots][(1-qU^2)(1-q^3U^{-2})(1-q^5U^{-2})\ldots]},$$

où l'on a mis $A = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}\right]^2$. Si l'on met dans cette formule $u + iK'$ au lieu de u, U deviendra $\sqrt{q}\,U$; de là on tire, en remarquant que $\sin\operatorname{am}(u+iK') = \frac{1}{\varkappa \sin\operatorname{am} u}$, la valeur de $A = \frac{\pi \sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa K}}$. De la même manière on trouve au moyen des expressions semblables pour $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$, etc., les valeurs des produits suivants :

$$[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^6 = \frac{2\varkappa'\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}},$$

$$[(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots]^6 = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa\varkappa'}},$$

$$[(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots]^6 = \frac{2\varkappa\varkappa' K^3}{\sqrt{q}\,\pi^3},$$

$$[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^6 = \frac{K}{4\sqrt{\varkappa'}\sqrt{q}};$$

....

sommations très-remarquables, ce me semble.

Comme on a $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K}$, $\frac{\Lambda'_1}{\Lambda_1} = \frac{1}{n}\frac{K'}{K}$, on voit qu'en mettant seulement q^n ou $q^{\frac{1}{n}}$ au lieu de q, on tire de ces formules aussitôt les expressions semblables relatives aux modules transformés λ, λ_1. Ainsi on aura, par exemple,

$$\varkappa = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4, \quad \lambda = 4\sqrt{q^n}\left[\frac{(1+q^{2n})(1+q^{4n})(1+q^{6n})\ldots}{(1+q^n)(1+q^{3n})(1+q^{5n})\ldots}\right]^4.$$

On ne saura guère reconnaître de la nature de ces produits que ces deux expressions dépendent *algébriquement* l'une de l'autre. Je remarque encore que, comme on a

$$\varkappa' = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4, \quad \varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1,$$

on aura aussi

$$[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^8 + 16q[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^8$$
$$= [(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots]^8,$$

équation difficile à prouver au moyen des méthodes connues. On y saura ajouter nombre d'autres.

Si l'on met $u + \frac{4mK}{n}$ au lieu de u, U change en αU, où $\alpha^n = 1$.

De là se déduit de la formule pour $\sin\operatorname{am} u$ une nouvelle vérification assez facile de ma première transformation. Je passe à d'autres recherches.

Soit

$$\begin{aligned}\left(\frac{U - U^{-1}}{2}\right) &[(1 - q^2U^2)(1 - q^4U^2)(1 - q^6U^2)\ldots] \\ &\times [(1 - q^2U^{-2})(1 - q^4U^{-2})(1 - q^6U^{-2})\ldots] \\ &= a'(U - U^{-1}) + a''(U^3 - U^{-3}) + a'''(U^5 - U^{-5}) + \ldots.\end{aligned}$$

Si l'on met dans ce produit qU au lieu de U, il sera multiplié par $\left(\frac{qU - q^{-1}U^{-1}}{U - U^{-1}}\right)\left(\frac{1 - U^2}{1 - q^2U^2}\right) = \frac{1}{qU^2}$. De là suit :

$$a'' = -q^2a', \quad a''' = -q^4a'', \quad a^{\text{IV}} = q^6a''', \ldots,$$

ou

$$\frac{a''}{a'} = -q^2, \quad \frac{a'''}{a'} = -q^{2\cdot 3}, \quad \frac{a^{\text{IV}}}{a'} = -q^{3\cdot 4}, \quad \frac{a^{\text{V}}}{a'} = -q^{4\cdot 5}, \ldots;$$

de sorte qu'on aura ce produit égal à

$$a'[U - U^{-1} - q^2(U^3 - U^{-1}) + q^6(U^5 - U^{-5}) - q^{12}(U^7 - U^{-7}) + q^{20}(U^9 - U^{-9}) - \ldots].$$

De la même manière on trouve

$$\begin{aligned}&[(1 - qU^2)(1 - q^3U^2)(1 - q^5U^2)\ldots][(1 - qU^{-2})(1 - q^3U^{-2})(1 - q^5U^{-2})\ldots] \\ &\quad = b[1 - q(U^2 + U^{-2}) + q^4(U^4 + U^{-4}) - q^9(U^6 - U^{-6}) + q^{16}(U^8 + U^{-8})\ldots],\end{aligned}$$

a' et b désignant des constantes.

On aura donc

$$\sin\operatorname{am}(u) = C\,\frac{U - U^{-1} - q^2(U^3 - U^{-3}) + q^6(U^5 - U^{-5}) - q^{12}(U^7 - U^{-7}) + \ldots}{1 - q(U^2 + U^{-2}) + q^4(U^4 + U^{-4}) - q^9(U^6 + U^{-6}) + q^{16}(U^8 + U^{-8}) - \ldots}.$$

La constante C se détermine encore au moyen de la formule

$$\sin\operatorname{am}(u + iK') = \frac{1}{\sin\operatorname{am} u},$$

en remarquant que U change en $\sqrt{q}U$ en même temps que u devient

$u + iK'$. On la trouve égale à $\frac{\sqrt[4]{q}}{i\sqrt{\varkappa}}$, de sorte qu'il vient, en mettant $u = \frac{2Kx}{\pi}$.

$$(1)\quad \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\,\frac{q^{\frac{1}{4}}\sin x - q^{\frac{9}{4}}\sin 3x + q^{\frac{25}{4}}\sin^5 x - q^{\frac{49}{4}}\sin^7 x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x - \ldots}.$$

J'y ajoute les trois semblables :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\\ &\quad = 2\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\,\frac{q^{\frac{1}{4}}\cos x + q^{\frac{9}{4}}\cos 3x + q^{\frac{25}{4}}\cos 5x + q^{\frac{49}{4}}\cos 7x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x - \ldots},\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\varkappa'}\,\frac{1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x - \ldots},$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\\ &\quad = \frac{\sin\frac{x}{2} + q\sin\frac{3x}{2} - q^3\sin\frac{5x}{2} - q^6\sin\frac{7x}{2} + q^{10}\sin\frac{9x}{2} + q^{15}\sin\frac{11x}{2} - \ldots}{\cos\frac{x}{2} - q\cos\frac{3x}{2} - q^3\cos\frac{5x}{2} + q^6\cos\frac{7x}{2} + q^{10}\cos\frac{9x}{2} - q^{15}\cos\frac{11x}{2} - \ldots},\end{aligned}\right.$$

....

Je remarque encore les formules suivantes :

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots,$$

$$\sqrt{\varkappa} = \frac{2\left(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + q^{\frac{49}{4}} + \ldots\right)}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots},$$

$$\sqrt{\varkappa'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots},$$

.................................,

dont la première est la plus remarquable.

Quant à l'importance de ces formules, vous la sentirez mieux que je ne pourrais le dire. Aussi elles ne seront pas sans intérêt pour les célèbres géomètres qui s'occupent du mouvement de la chaleur; les numérateurs et les dénominateurs des fractions par lesquelles on a exprimé les fonctions trigonométriques de l'amplitude étant souvent rencontrés dans ladite question. Je finirai ici l'exposition rapide des résultats principaux trouvés jusqu'ici.

Vous auriez voulu que j'eusse donné la chaîne des idées qui m'a conduit à mes théorèmes. Cependant la route que j'ai suivie n'est pas susceptible de rigueur géométrique. La chose étant trouvée, on pourra y substituer une autre sur laquelle on aurait pu y parvenir rigoureusement. Ce n'est donc que pour vous, Monsieur, que j'ajoute le suivant :

La première chose que j'avais trouvée (dans le mars 1827), c'était l'équation $T = \frac{V\,dU}{dx} - \frac{U\,dV}{dx}$; de là je reconnus que, pour un nombre n quelconque, la transformation était un problème d'Analyse algébrique *déterminé*, le nombre des constantes arbitraires égalant toujours celui des conditions. Au moyen des coefficients indéterminés, je formai les transformations relatives aux nombres 3 et 5. L'équation du quatrième degré à laquelle me mena la première ayant presque la même forme que celle qui sert à la trisection, j'y soupçonnais quelque rapport. Par un tâtonnement heureux, je remarquais dans ces deux cas l'autre transformation complémentaire pour la multiplication. Là j'écrivis ma première lettre à M. Schumacher, la méthode étant générale et vérifiée par des exemples. Depuis, examinant plus de proche les deux substitutions $z = \frac{ay + by^3}{1 + cy^2}$, $y = \frac{a'x + b'x^3}{1 + c'x^2}$ sous la forme présentée dans ma première lettre, je vis qu'étant mis $x = \sin\operatorname{am}\frac{2K}{3}$, z devra s'évanouir, et comme, dans ladite forme, $\frac{b}{a}$ était positif, j'en conclus que y devra s'évanouir aussi. De cette manière je trouvai par induction la résolution en facteurs, laquelle étant confirmée par des exemples, je donnai le théorème général dans ma seconde lettre à M. Schumacher. Ensuite, ayant remarqué l'équation $\sin\operatorname{am}(i\xi, \varkappa) = i \operatorname{tang}\operatorname{am}(\xi, \varkappa')$, j'en tirai la transformation de $\varkappa'$ en λ'. J'avais donc deux transformations différentes, l'une de $\varkappa$ dans un module plus petit λ, l'autre de $\varkappa'$ dans un module plus grand λ'. De là, je fis la conjecture qu'en échangeant entre eux $\varkappa'$ et λ, $\varkappa$ et λ', on aurait l'expression analytique de la transformation complémentaire. Tout étant confirmé par des exemples, j'eus la hardiesse de vous adresser une première lettre (*), qui a été accueillie de vous avec tant de candeur. Les démonstrations n'ont été trouvées que ci-après.

Le 14 février dernier, j'ai enfin reçu votre excellent cadeau par la bonté de M. de Humboldt, qui me l'a fait parvenir aussitôt qu'il arriva à Berlin. Il fera l'étude de ma vie.

M. Schumacher m'a donné connaissance de ce que vous lui avez écrit du théorème complémentaire; je me suis donc empressé de faire partir cette lettre, et je l'en avertirai. Il faut m'excuser, Monsieur, si la bonne opinion que vous avez bien voulu avoir pour moi me rend un peu timide à présenter des choses trop imparfaites à un si grand maître.

M. Crelle m'a écrit que la continuation du Mémoire de M. Abel s'imprime déjà. Je l'attends avec impatience. Quant à M. Gauss, il n'a rien encore publié sur les Fonctions Elliptiques, mais il est certain qu'il a eu de jolies choses. S'il a été prévenu et peut être surpassé, c'est une juste peine de ce qu'il a répandu un voile mystique sur ses travaux. Je ne le connais pas personnellement, ayant étudié la philologie à Berlin, où il n'y a pas des géomètres de distinction.

Daignez accueillir l'assurance de mon respect le plus profond.

Votre dévoué

C.-S.-J. JACOBI.

Kœnisberg, 12 avril 1828.

Kœnisberg, 9 septembre 1828.

MONSIEUR,

La lettre dans laquelle vous m'aviez mandé votre maladie de l'hyver passé m'a causé de grandes peines, et j'ai attendu avec la plus vive inquiétude la nouvelle de l'amélioration de votre santé qui m'est enfin parvenue. L'avis que vous avez voulu me donner en même temps de

(*) Je l'avais donnée à un jeune marchand que je ne connaissais pas personnellement; on m'avait dit qu'il allait droitement à Paris; mais il a passé plusieurs mois dans les capitales de l'Allemagne. De là s'est fait, à mon grand dépit, le retard de cette lettre.

votre départ pour le midi de la France a causé le retard de ma réponse. Fasse le ciel que ce voyage vous ait entièrement satisfait !

Ma dernière lettre a été écrite un peu à la hâte ; sans cela je n'aurais pas cru que l'on doit supposer connues les formules de multiplication pour la démonstration du théorème complémentaire. Aussi il avait été trouvé et communiqué à vous sans la connaissance de celles-ci. En effet, l'équation $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K}$ montre que $\varkappa$ dépend de la même manière de λ que λ' de $\varkappa'$; d'où il suit qu'en appliquant au module λ la même transformation qui sert à parvenir du module $\varkappa'$ au module λ', il faut retomber sur le module $\varkappa$.

Vous aurez reçu sans doute deux Mémoires de M. Abel, l'un inséré dans le *Journal de M. Crelle*, l'autre dans les *Nouvelles Astronomiques* de M. Schumacher. Vous y aurez vu que M. Abel a trouvé de son côté la théorie générale de la Transformation, dans la publication de laquelle je l'ai prévenu de six mois. Le second Mémoire, inséré dans le Recueil de M. Schumacher, n° 138, contient une *déduction* rigoureuse des théorèmes de transformation, dont le défaut s'était fait sentir dans mes annonces sur le même objet. Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux.

Dans le même cahier du *Journal de M. Crelle* (3 vol., 2 cah.) où se trouvent les premiers travaux de M. Abel sur la transformation, j'avais fait insérer la remarque que toutes les transformations attachées au nombre n sont au nombre $n+1$, lorsque n est premier, et que l'on trouvait tous les modules transformés qui s'y rapportent en mettant, dans la formule $\sqrt{\varkappa} = \frac{2\sqrt[8]{q} + 2\sqrt[8]{q^9} + \sqrt[8]{q^{25}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots}$, q^n et $\sqrt[n]{q}$ au lieu de q, $\sqrt[n]{q}$ ayant n valeurs différentes. M. Abel verra donc que les transformations imaginaires ne m'étaient pas échappées. Que n soit premier ou non, le nombre des transformations sera en général égal à la somme des facteurs de n ; on trouve tous les modules transformés en mettant $\sqrt[a]{q^{a'}}$ au lieu de q, aa' étant $= n$. Cette théorie est complète de sorte qu'on ne saura y ajouter. Toutes les racines des équations modulaires se trouvent par là développées dans des séries d'une élégance et d'une convergence sans exemple dans l'Analyse. Je remarque encore que, n étant un nombre carré, on aura une seule fois $a = a'$; donc un seul des modules transformés sera dans ce cas égal à celui d'où l'on est parti, ce qui fournit la multiplication.

Vous ne m'avez dit dans deux de vos lettres pas un seul mot sur ces séries remarquables sommées par les Fonctions Elliptiques, dans lesquelles les exposants suivent la loi des nombres carrés, et dont celle-ci : $\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \ldots$ me paraît être l'un des résultats les plus brillants de toute la théorie. Tout ce qui regarde la décomposition des nombres en nombres carrés devient, par ces séries, du ressort des Fonctions Elliptiques. Les développements de celles-ci me donnent, par exemple :

$$\begin{aligned}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 &= 1 + \frac{8q}{1-q} + \frac{16q^2}{1+q^2} + \frac{24q^3}{1-q^3} + \frac{32q^4}{1-q^4} + \ldots \\ &= 1 + \frac{8q}{(1-q)^2} + \frac{8q^2}{(1+q^2)^2} + \frac{8q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{8q^4}{(1+q^4)^2} + \ldots \\ &= 1 + 8\sum \varphi(p)(q^p + 3q^{2p} + 3q^{4p} + 3q^{8p} + 3q^{16p} + 3q^{32p} + \ldots),\end{aligned}$$

p étant un nombre impair quelconque, et $\varphi(p)$ la somme des facteurs de p. Comme dans cette série il ne manque aucune puissance de q et qu'on a en même temps

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots)^4,$$

il suit comme corollaire de cette formule le fameux théorème de Fermat, que chaque nombre est la somme de quatre carrés. Les théorèmes relatifs aux nombres qui sont la somme de deux carrés découlent de la formule suivante :

$$\begin{aligned}\frac{2K}{\pi} &= (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots)^2 = 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1-q^3} + \frac{4q^5}{1-q^5} - \frac{4q^7}{1-q^7} + \ldots \\ &= 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1+q^2} - \frac{4q^6}{1+q^3} + \frac{4q^{10}}{1-q^4} + \frac{4q^{15}}{1-q^5} - \frac{4q^{21}}{1+q^6} - \ldots\end{aligned}$$

Parmi d'autres formules, je trouve encore la suivante, digne de vous être communiquée :

$$\begin{aligned}&(q - q^{5.5} - q^{7.7} + q^{11.11} + q^{13.13} - q^{17.17} - q^{19.19} + q^{23.23} + \ldots)^3 \\ &= q^3 - 3q^{3.3.3} + 5q^{3.5.5} - 7q^{3.7.7} + 9q^{3.9.9} - 11q^{3.11.11} + \ldots,\end{aligned}$$

dont vous saisirez aisément la loi. Elle résulte de la transformation attachée au nombre 3.

Ne vous fait-il pas de plaisir, Monsieur, de voir se rapprocher l'une à l'autre deux théories si hétérogènes en apparence et qui se datent en quelque sorte de vos travaux?

Je vais ajouter quelques remarques isolées telles qu'elles se présentent à mon esprit. Rappelons la formule donnée dans ma dernière lettre :

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x+\ldots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\ldots}.$$

Il m'a paru d'importance de pouvoir exprimer à part le numérateur et le dénominateur de cette expression au moyen des Fonctions Elliptiques, ce qui n'est pas facile.

En me servant de vos signes et mettant F' au lieu de K, $\varphi=\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, et par conséquent $\frac{2Kx}{\pi}=F$, je trouve

$$\begin{aligned}&1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\ldots\\&\quad=\sqrt{\frac{2K'F'}{\pi}}\,e^{\int\frac{F'E-E'F}{F'\Delta(\varphi)}},\end{aligned}$$

l'intégrale étant prise depuis o jusqu'à φ.

L'un de vos plus beaux théorèmes est que l'expression

$$\int\frac{\varkappa^2\sin A\cos A\,\Delta(A)\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1-\varkappa^2\sin^2 A\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}-\frac{F(\varphi)}{F'}[F'E(A)-E'F(A)]$$

ne change pas de valeur si l'on échange entre eux les angles φ et A. Or étant mis $A=\operatorname{am}\frac{2K\alpha}{\pi}$, $\varphi=\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, je la trouve égale à

$$\frac{1}{2}\log\left[\frac{1-2q\cos 2(x-\alpha)+2q^4\cos 4(x-\alpha)-2q^9\cos 6(x-\alpha)+2q^{16}\cos 8(x-\alpha)-\ldots}{1-2q\cos 2(x+\alpha)+2q^4\cos 4(x+\alpha)-2q^9\cos 6(x+\alpha)-2q^{16}\cos 8(x+\alpha)+\ldots}\right],$$

formule symétrique en x et α. *D'ailleurs elle montre que les Fonctions Elliptiques de troisième espèce dans lesquelles entrent trois variables se ramènent à d'autres transcendantes qui n'en ont que deux,* découverte qui vous intéressera beaucoup.

Mes recherches seront rassemblées dans un petit Ouvrage d'environ 200 pages in-4 qui sera imprimé à part et dont l'impression vient d'être commencée. Il aura pour titre : *Fundamenta nova Theoriæ Functionum Ellipticarum*. Peut-être je serai assez heureux de vous le présenter moi-même.

Il faut avouer, Monsieur, que je suis un peu fatigué de la matière, qui m'a occupé pendant dix-huit mois presque jour et nuit. Cependant la fin de mon Ouvrage ne doit pas être celle de mes recherches; il en reste encore d'une grande importance, mais aussi d'une grande difficulté, Je vous prie instamment de me donner des nouvelles de vous et surtout de votre santé. Vous pourriez compter sur une prompte réponse.

Votre très-humble et très-dévoué,

C.-G.-J. Jacobi.

M. Bessel vous rend grâce de vos civilités; je vous prie d'en faire de ma part à M. Cauchy, dont j'ai toujours estimé de préférence les écrits ingénieux et d'une rare subtilité. Les formules analytiques qui renferment le théorème de Fermat ne seront pas sans intérêt pour ce Géomètre, qui a tant de mérite dans cette partie de la théorie des Nombres.

Kœnisberg, le 18 janvier 1829.

Monsieur,

Il faut que vous soyez assez fâché de moi à cause du grand retard de ma réponse à votre dernière lettre, et je ne saurai à peine m'excuser si ce n'est que j'ai voulu finir, avant de vous répondre, plusieurs travaux très-difficiles sur les Fonctions Elliptiques, pour pouvoir vous en mander les résultats. Je ne veux vous parler à présent que du Problème le plus important de ceux que je suis parvenu à résoudre dans ces derniers temps : c'est la résolution algébrique et générale de l'équation du degré n^2, de laquelle dépend la division de la Fonction Elliptique en n parties égales. Je vous prie, Monsieur, de me permettre d'entrer là-dessus dans un grand détail.

Après que vous aviez résolu le premier l'équation du neuvième degré, de laquelle dépend la trisection des Fonctions Elliptiques, nous remarquâmes en même temps, M. Abel et moi, que l'on peut généralement réduire l'équation algébrique du degré n^2, de laquelle dépend la $n^{ième}$ section, à deux équations du $n^{ième}$ degré seulement. Ce résultat était une conséquence de la remarque que j'avais faite que l'on peut parvenir à la multiplication en appliquant à la Fonction Elliptique deux transformations l'une après l'autre. En lisant avec attention le premier *Mémoire* de M. Abel *sur les Fonctions Elliptiques*, on reconnaît aisément qu'il a effectivement suivi la même route, sans cependant soupçonner, lors du temps qu'il compose son Mémoire, que c'était le *medium* des transformations par lequel il passa. Soit $z = \sin\mathrm{am}(nu)$, $x = \sin\mathrm{am}(u)$, n étant un nombre impair quelconque, si l'on a

$$z = \frac{b'y + b'''y^3 + \ldots + b^{(n)}y^n}{b + b''y^2 + \ldots + b^{(n-1)}y^{n-1}}, \tag{1}$$

$$y = \frac{a'x + a'''x^3 + \ldots + a^{(n)}x^n}{a + a''x^2 + \ldots + a^{(n-1)}x^{n-1}}, \tag{2}$$

y étant le *sinus amplitude* de la fonction transformée, il faut, d'après ce que je viens de dire, pour avoir x en z, exprimer en premier lieu x en y, en résolvant algébriquement l'équation (2); puis, en résolvant encore l'équation (1), il faut exprimer par z toutes les fonctions de q qui se trouveront sous les radicaux. Or comme on a toujours plusieurs transformations qui répondent à un même nombre n, on trouvera de cette manière différentes formules algébriques pour la $n^{ième}$ section d'après les différentes transformations par lesquelles on est passé à la multiplication. On pouvait cependant soupçonner qu'il y avait une manière d'exprimer x en z plus simple et qui n'était qu'unique. J'ai fait connaître cette forme la plus simple sous laquelle on peut présenter les expressions algébriques pour la $n^{ième}$ section dans une petite *Addition* faite au premier *Mémoire* de M. Abel *sur les Fonctions Elliptiques*, et laquelle se trouve dans le 3^e vol. du *Journal de M. Crelle*. Elle est fondée sur une formule très-remarquable, et dont je veux vous parler en peu de mots.

Partons des deux formules connues pour la transformation des Fonctions Elliptiques, qui donnent ensemble la multiplication :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) \\ &\quad = \sin\operatorname{am}(u) + \sin\operatorname{am}\left(u + \frac{4K}{n}\right) + \sin\operatorname{am}\left(u + \frac{8K}{n}\right) + \ldots \\ &\qquad + \sin\operatorname{am}\left(u + \frac{4(n-1)K}{n}\right), \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{n\varkappa M}{\lambda}\sin\operatorname{am}(nu) \\ &\quad = \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M} + \frac{4iK'}{nM}, \lambda\right) + \ldots \\ &\qquad + \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M} + \frac{4(n-1)iK'}{nM}, \lambda\right), \end{aligned}\right.$$

i étant $\sqrt{-1}$. Au moyen de l'équation (1) on tire de la formule (2) celle qui suit :

$$(3)\qquad n\sin\operatorname{am}(nu) = \sum \sin\operatorname{am}\left(u + \frac{mK + m'iK'}{n}\right),$$

en donnant à m, m' les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Cette dernière formule a été déjà donnée par M. Abel.

Dans le cas de n premier, le seul que nous considérerons pour plus de simplicité, on a $n+1$ formules analogues à la formule (1) et qui répondent aux diverses transformations du module K attachées au nombre n. Elles sont contenues toutes sous la formule générale :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) \\ &\quad = \sin\operatorname{am}(u) + \sin\operatorname{am}(u + 4\omega) + \sin\operatorname{am}(u + 8\omega) + \ldots \\ &\qquad + \sin\operatorname{am}[u + 4(n-1)\omega], \end{aligned}\right.$$

ω ayant une des $n+1$ valeurs suivantes :

$$\frac{K}{n},\ \frac{iK'}{n},\ \frac{iK'}{n} + \frac{2K}{n},\ \frac{iK'}{n} + \frac{4K}{n}, \ldots,\ \frac{iK'}{n} + \frac{2(n-1)K}{n},$$

et les quantités λ, M étant déterminées de la même manière, par ω, qu'elles sont déterminées par $\frac{K}{n}$ dans la formule (1). Nommons les valeurs de λ, M qui répondent à ces différentes valeurs de ω :

$$\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \ldots,\ \lambda_n;\quad M,\ M_1,\ M_2,\ M_3, \ldots,\ M_n,$$

si l'on ajoute ensemble les $n+1$ quantités suivantes :

$$\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right),\quad \frac{\lambda_1}{\varkappa M_1}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_1},\lambda_1\right),\quad \frac{\lambda_2}{\varkappa M_2}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2},\lambda_2\right),\ldots,$$
$$\frac{\lambda_n}{\varkappa M_n}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_n},\lambda_n\right),$$

en substituant pour chacune sa valeur tirée de l'équation générale (4), on trouve :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\frac{\lambda_1}{\varkappa M_1}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_1},\lambda_1\right)+\ldots+\frac{\lambda_n}{\varkappa M_n}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_n},\lambda_n\right)\\ &\quad= n\sin\mathrm{am}(u)+\sum\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{4m\mathrm{K}+4m'i\mathrm{K}'}{n}\right)\\ &\quad= n\sin\mathrm{am}(u)+n\sin\mathrm{am}(nu).\end{aligned}\right.$$

En effet, on voit aisément qu'il se trouve dans la somme dont on parle tous les termes de l'expression $\sum\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{4m\mathrm{K}+4m'i\mathrm{K}'}{n}\right)$ et qu'ils ne s'y trouvent qu'une seule fois, excepté seulement le terme $\sin\mathrm{am}(u)$, qui s'y trouve $n+1$ fois. De l'équation (5) on tire celle qui suit :

$$(6)\quad \sin\mathrm{am}(u)=\frac{\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\frac{\lambda_1}{\varkappa M_1}\sin\left(\frac{u}{M_1},\lambda_1\right)+\ldots+\frac{\lambda_n}{\varkappa M_n}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_n},\lambda_n\right)-n\sin\mathrm{am}(nu)}{n}.$$

C'est la formule remarquable dont j'ai parlé, et qui est de la plus grande importance dans la théorie de la division des Fonctions Elliptiques. En effet, lorsqu'il s'agit d'exprimer $\sin\mathrm{am}(u)$ par $\sin\mathrm{am}(nu)$, on n'a plus qu'à exprimer par $\sin\mathrm{am}(nu)$ les quantités $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_p},\lambda_p\right)$, ce qui se fait par la résolution d'équations algébriques du $n^{ième}$ degré seulement. Je vais rapporter à présent les expressions algébriques et générales des racines de ces dernières.

Soit toujours $\sin\mathrm{am}(nu)=z$ et désignons par $\Phi(nu,\omega)$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned}&\Phi(nu,\omega)\\ &\quad=(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}4\omega.z^2)(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}8\omega.z^2)\ldots[1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}2(n-1)\omega.z^2];\end{aligned}$$

nommons de plus $A^{(p)}$ l'expression suivante :

$$A^{(p)} = \frac{\Phi(4p\omega, \omega)\,\Phi(nu, \omega)}{\Phi(nu + 4p\omega, \omega)},$$

je dis qu'on a

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\lambda}{\varkappa M} \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) \\ &\quad = \sin \operatorname{am}(nu) + \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega)\sqrt[n]{A'} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega)\sqrt[n]{A''} + \ldots \\ &\qquad + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega]\sqrt[n]{A^{(n-1)}}. \end{aligned} \right.$$

Les quantités $A^{(p)}$ seront de la forme $P + Q\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}$, P et Q étant des fonctions rationnelles de z.

Voici une formule entièrement nouvelle pour la transformation des Fonctions Elliptiques, et laquelle ne pourra être *déduite* d'aucune façon des formules connues jusqu'ici, quoiqu'une fois trouvée, on peut la *vérifier* par les premiers éléments de la théorie des Fonctions Elliptiques, et même sans supposer connues les formules de transformation ordinaires. La découverte de cette formule m'a coûté beaucoup de peine, et c'est peut-être pourquoi je voudrais la compter pour le résultat le plus important de tout ce que j'ai trouvé jusqu'ici.

Les formules (6) et (7) donnent aussitôt les formules algébriques et générales pour exprimer $\sin \operatorname{am}(u)$ par $\sin \operatorname{am}(nu)$. Nommons pour cet effet $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ les différentes valeurs de ω qui répondent aux différents modules transformés $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et soit $A_m^{(p)}$ une expression qui dépend de la manière de ω_m que $A^{(p)}$ dépend de ω, on trouve

$$\begin{aligned} &n \sin \operatorname{am}(u) \\ &\;= \sin \operatorname{am}(nu) \\ &\quad + \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega)\sqrt[n]{A'} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega)\sqrt[n]{A''} + \ldots + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega]\sqrt[n]{A^{(n-1)}} \\ &\quad + \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega_1)\sqrt[n]{A'_1} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega_1)\sqrt[n]{A''_1} + \ldots + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega_1]\sqrt[n]{A_1^{(n-1)}} \\ &\quad + \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega_2)\sqrt[n]{A'_2} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega_2)\sqrt[n]{A''_2} + \ldots + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega_2]\sqrt[n]{A_2^{(n-1)}} \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega_n)\sqrt[n]{A'_n} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega_n)\sqrt[n]{A''_n} + \ldots + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega_n]\sqrt[n]{A_n^{(n-1)}}. \end{aligned}$$

C'est l'expression algébrique pour la $n^{\text{ième}}$ section des Fonctions Elliptiques, laquelle est composée, comme on voit, de $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$

$n^{\text{ièmes}}$ racines; les quantités qui se trouvent sous les radicaux sont toutes de la forme $P + Q\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}$, P et Q étant des fonctions rationnelles de z. Vous trouverez ce résultat parmi d'autres dans le *Journal de M. Crelle;* du nombre de ces derniers sont *les formules générales pour la transformation des Fonctions Elliptiques de la seconde et de la troisième espèce*. Les limites d'une lettre ne me permettent pas d'entrer dans ce moment dans un plus grand détail. Je vous entretiendrai une autre fois de la manière dont je suis parvenu à la formule (7), laquelle pourra paraître assez étrangère, comme elle est fondée sur la considération des séries et surtout sur les propriétés remarquables de mes nouveaux transcendants H, Θ, au milieu desquels on peut exprimer rationnellement tous les radicaux. Ainsi, par exemple, ω étant $= \frac{K}{n}$, on a

$$\sqrt[n]{A^{(p)}} = \frac{\Theta(o)\Theta\left(nu + \frac{4pK}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{4pK}{n}\right)\Theta(nu)}, \quad \Theta(u) \text{ étant } \sqrt{\frac{2\varkappa' K}{\pi}}\, e^{\int_0^{\varphi} d\varphi \frac{F'E - E'F}{F'\Delta}}, \quad \varphi = am(u).$$

Cependant, comme je l'ai dit, on peut aussi vérifier la formule (7) en quantités finies.

A cause de l'extension inattendue qu'ont prise mes travaux, je partagerai mon Ouvrage en deux Parties, dont la première sera publiée dans trois mois environ : je vous en ferai hommage dès que son impression sera achevée. Dans des Notes et des Additions jointes à la première Partie, j'exposerai ce qui est particulier à M. Abel, en rapprochant les méthodes de cet Auteur de celles dont j'ai fait usage moi-même.

Il faut vous rendre encore mille grâces pour l'envoi de votre premier Supplément; tout ce qu'il contient vous appartient sous tant de titres que ce n'est que votre bonté qui m'y a fait prendre tant de part. C'est encore à vous, Monsieur, que je suis redevable de la place de Professeur dont vous êtes assez obligeant de me féliciter. Une gazette de Berlin ayant fait mention de la communication que vous avez faite à votre Académie de mes travaux, l'autorité de votre nom a été la cause que le Ministre m'a placé.

Vous m'avez donné de grandes inquiétudes sur votre santé dans votre dernière lettre; il faut que vous m'en arrachiez sitôt qu'il vous soit possible : je vous en prie instamment.

Ce serait trop me punir pour le retard de ma réponse par un retard de votre côté; c'est la division des Fonctions Elliptiques qu'il faut accuser là-dessus.

Votre entièrement dévoué serviteur,

C.-G.-J. JACOBI.

Je vous prie, Monsieur, de faire parvenir la lettre ci-adjointe au célèbre orientaliste M. Klaproth; veuillez me pardonner si j'ose vous faire tant de peine.

Kœnisberg, ce 14 mars 1828.

MONSIEUR,

Je vous remercie mille fois de votre lettre du 9 février, et, comme vous m'y proposez diverses questions, je veux chercher à y répondre. Vous supposez que j'ai trouvé des moyens à exprimer algébriquement les fonctions trigonométriques des amplitudes que vous désignez par α_m, en ajoutant que sans cela ma formule contiendrait des coefficients que je ne pourrai déterminer. Mais, Monsieur, ce que vous désirez est une chose *tout à fait impossible* dans le cas général, et qui ne s'exécute que pour des valeurs spéciales du module.

Ma formule qui donne l'expression algébrique de $\sin\mathrm{am}(u)$ au moyen de $\sin\mathrm{am}(nu)$ suppose connue la section de la fonction entière. C'est ainsi qu'on savait résoudre algébriquement depuis plus d'un siècle les équations qui se rapportent à la division d'un arc de cercle, toutefois en supposant connue celle de la circonférence entière, cette dernière n'étant donnée généralement que dans ces derniers temps par les travaux de M. Gauss.

M. Abel a traité, dans son premier *Mémoire sur les Fonctions Elliptiques*, le Problème en question pour la première fois d'une manière générale; il a montré qu'il est toujours possible de réduire la division de la fonction indéfinie à celle de la fonction entière; ensuite il a montré que l'équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, de laquelle dépend cette dernière, se réduit à une équation du degré $\frac{n-1}{2}$ dont les coefficients dépendent d'une autre équation du degré $n+1$, n étant premier. En effet, l'équation du degré n^2 entre $\sin\mathrm{am}(u)$ et $\sin\mathrm{am}(nu)$ a pour racines les n^2 expressions contenues sous la forme $\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{2m\mathrm{K}+2im'\mathrm{K}'}{n}\right)$, où l'on donne à m, m' les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

En supposant $u=0$, une racine devenant $\sin\mathrm{am}(u)=0$ et les autres devenant égales deux à deux, mais de signes opposés, l'expression $\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2m\mathrm{K}+2im'\mathrm{K}'}{n}\right)$ ne dépend plus que d'une équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, comme vous l'avez montré par des exemples dans vos Traités.

Supposons n premier, et soit $\frac{m\mathrm{K}+m'i\mathrm{K}'}{n}=\omega$, on prouve aisément qu'une fonction symétrique quelconque de $\sin^2\mathrm{am}(2\omega)$, $\sin^2\mathrm{am}(4\omega), \ldots$, $\sin^2\mathrm{am}[(n-1)\omega]$, par exemple celle-ci :

$$\sin^4\mathrm{coam}\,2\omega.\sin^4\mathrm{coam}\,4\omega\ldots\sin^4\mathrm{coam}(n-1)\omega\left(=\frac{h}{\mathrm{K}^n}\right),$$

ne peut obtenir plus que $n+1$ valeurs différentes, en mettant pour $\sin^2\mathrm{am}(2\omega)$ une quelconque des racines de l'équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$. Ces valeurs différentes répondent aux valeurs de $\omega=\mathrm{K}$, $i\mathrm{K}'$, $\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$, $2\mathrm{K}+i\mathrm{K}', \ldots, (n-1)\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$. En effet, toutes les racines de l'équation $\frac{n^2-1}{2}$ étant contenues sous la forme $\sin^2\mathrm{am}(2p\omega)$, où l'on donne à p les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, à ω les $n+1$ valeurs mentionnées, et le système des quantités $\sin^2\mathrm{am}\,2\omega, \ldots, \sin^2\mathrm{am}(n-1)\omega$ pouvant être remplacé par le système de celles-ci : $\sin^2\mathrm{am}(2p\omega)$, $\sin^2\mathrm{am}(4p\omega), \ldots$, $\sin^2\mathrm{am}[(n-1)p\omega]$, il suit que les fonctions géométriques de ces quantités ne sauront obtenir que les $n+1$ valeurs que l'on obtient en mettant pour ω des valeurs différentes et *incommensurables* entre elles. Donc elles dépendent d'une équation algébrique du degré $n+1$. C'est donc aussi le degré de l'équation dont les racines sont les différents modules transformés attachés au nombre n supposé premier, et que j'appelle *æquatio modularis*, ces modules étant contenus sous la forme

$$h = \chi^n [\sin \operatorname{coam} 2\omega . \sin \operatorname{coam} 4\omega \ldots \sin \operatorname{coam}(n-1)\omega]^4.$$

Vous voyez donc, Monsieur, que M. Abel a prouvé ce théorème important, comme vous le nommez, dans son premier *Mémoire sur les Fonctions Elliptiques*, quoiqu'il n'y ait pas traité de la transformation, et qu'il ne paraît pas même avoir songé, du temps qu'il le composa, que ses formules et ses théorèmes trouveront une pareille application. Quant à moi, je n'ai pas trouvé nécessaire de reproduire cette démonstration dans les écrits que j'ai publiés jusqu'ici sur cette matière, car il me reste trop à faire pour ne pas épargner mon temps le plus que possible.

Mais peut-être, Monsieur, vous aurez à faire des objections à cette démonstration. Dans ce cas, vous m'obligerez de beaucoup en me les communiquant, car lorsque je traiterai de mes théories nouvelles il faudra en parler.

Étant connue une seule des fonctions symétriques de $\sin^2 \operatorname{am}(2\omega), \ldots$, la théorie générale des équations algébriques nous apprend, et M. Abel l'a remarqué, qu'il est possible d'exprimer par celle-ci toute autre fonction symétrique des mêmes quantités. C'est la cause de ce que vous avez pu exprimer rationnellement en fonctions des deux modules les coefficients des transformations attachées aux nombres 3 et 5, et il sera de même pour tout autre nombre. Vous trouverez même dans le 2ᵉ cahier du vol. IV du *Journal de M. Crelle* une formule à différences partielles très-remarquable qui sert à exprimer *généralement* ces coefficients par ces deux modules, en supposant connue l'équation aux modules; de sorte que la formation algébrique des substitutions à faire pour parvenir à une transformation quelconque est entièrement réduite à la recherche des équations aux modules, formule qui donne en même temps comme cas spécial les expressions algébriques et générales pour la multiplication par un nombre n quelconque *indéfini* : chose très-difficile et dont vous avez dû remarquer les premiers exemples dans le 4ᵉ cahier du vol. III dudit Recueil. Il sera de même si l'on fait tout dépendre de l'équation dont les racines donnent les valeurs de ce que vous appelez le *régulateur*, et cela conviendra peut-être encore mieux, ces dernières semblant être plus simples. Aussi j'ai découvert une propriété tout à fait singulière de ces équations, dont les racines sont les régulateurs, comme vous l'aurez lu dans le 3e cahier du vol. III : c'est qu'on peut exprimer linéairement leurs *racines carrées* au moyen de la moitié de leur nombre, propriété qui m'est d'autant plus remarquable que je ne l'ai trouvée que par les développements en séries qui me sont propres, et que je ne vois pas comment on peut la prouver en quantités finies, ce qui pourtant doit être possible. Cette propriété servira sans doute à approfondir un jour la vraie nature de ces équations du degré $n+1$.

J'ai été convaincu, et M. Abel l'a confirmé, qu'il n'est pas possible de résoudre algébriquement ces équations du degré $n+1$; aussi, comme M. Abel sait établir des critères nécessaires et suffisants pour qu'une équation algébrique peut être résolue, il pourra sans doute prouver cela avec toute la rigueur analytique. Quant aux cas spéciaux, comme M. Abel a promis en plusieurs lieux d'en traiter, je ne me suis pas encore occupé beaucoup de cet objet, sans doute très-intéressant. Je ne veux ni reproduire ni prévenir les travaux de M. Abel : presque tout ce que j'ai publié dans ces derniers temps sur les Fonctions Elliptiques contient des vues nouvelles; ce ne sont pas des amplifications de matières dont M. Abel a traité ou même promis de s'en occuper.

Le module transformé ou, ce qui revient au même, le régulateur qui y répond étant supposé connu, il faut encore résoudre une équation du degré $\frac{n-1}{2}$ pour parvenir aux quantités $\sin^2 \operatorname{am}(2p\omega)$, ou à la section de la fonction entière. Donc vous n'aviez eu qu'à résoudre une équation du second degré dans le cas de $n=5$. M. Abel a prouvé que la méthode de M. Gauss s'applique presque mot à mot à la résolution de ces équations, de sorte que ce ne sont que les équations aux modules qu'on ne sait pas résoudre algébriquement. J'ai trouvé le théorème remarquable, et je l'ai annoncé dans le 2e cahier du vol. IV du Journal mentionné, qu'étant supposées connues *toutes les racines* de l'équation aux modules, ou tous les régulateurs qui répondent au nombre n, on peut exprimer les quantités $\sin \alpha_m$ *sans avoir besoin de résoudre encore aucune équation algébrique*. La méthode de M. Abel ne suppose connu qu'un seul module transformé pour trouver, par la résolution d'une équation algébrique du $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ième}}$ degré, les quantités $\sin \alpha_m$ qui répondent à ce module; la connaissance de *tous* les modules transformés remplacera donc la résolution de cette équation.

Je ne crois pas que la formule que j'ai eu l'honneur de vous communiquer dans ma dernière lettre perdra à vos yeux à présent où vous voyez qu'elle contient des coefficients que je ne sais pas déterminer, mais en même temps qu'il est impossible de les déterminer algébriquement.

L'impression de mon Ouvrage s'est retardée, puisqu'il s'imprime à 500 lieues de Kœnigsberg; sans cela, il serait déjà dans vos mains; cependant j'espère pouvoir vous le faire parvenir dans très-peu de temps. Il ne contiendra que les fondements de mes travaux; je publierai le reste dans des Mémoires isolés, puisque cela paraît être plus conforme à vos vœux.

Quelle découverte de M. Abel que cette généralisation de l'intégrale d'Euler! A-t-on jamais vu pareille chose! Mais comment s'est-il fait que cette découverte, peut-être la plus importante de ce qu'a fait dans les Mathématiques le siècle dans lequel nous vivons, étant communiquée à votre Académie il y a deux ans, elle a pu échapper à l'attention de vous et de vos confrères?

Vos lettres, Monsieur, font époque dans le cours de mes travaux. Veuillez donc me daigner honorer bientôt d'une réponse, et, comme j'irai voir mes parents à *Postdam*, je vous prie de l'adresser à cette ville. Je vous prie aussi de vouloir bien excuser mille inconvénients qui naissent de ce qu'il faut que j'écris dans une langue qui m'est étrangère.

Votre dévoué serviteur,

C.-G.-J. JACOBI.

Postdam, le 23 mai 1829.

MONSIEUR,

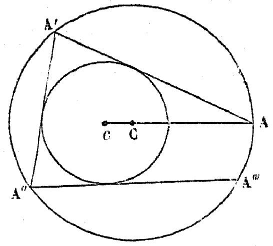
Je vous rends grâce de votre lettre du 8 avril qui me mande la publication d'un Supplément, que j'attends avec une grande impatience. Vos deux Suppléments embrasseront sans doute la plupart de ce qui se trouvera de nouveau et d'intéressant dans mon Ouvrage et beaucoup d'autres choses qui ne s'y trouvent pas. L'impression de celui-ci étant achevée, je me suis empressé de vous le faire parvenir, et je vous prie de l'accueillir avec cette bonté dont vous m'avez donné des preuves si éclatantes. Cependant je crains qu'il ne soit beaucoup au-dessous de la bonne opinion que vous avez voulu concevoir de mes travaux, et je crains cela d'autant plus, puisqu'il ne contient que les fondements de mes recherches et qu'il me faut encore une longue série de travaux pour établir aux yeux des Géomètres leur ensemble.

En ce qui regarde les Intégrales Elliptiques de la troisième espèce à paramètre circulaire, vous avez complétement raison; elles ne jouissent pas d'une réduction analogue à celle de l'autre espèce logarithmique. Si j'ai annoncé une pareille chose, comme vous le dites dans votre lettre, cela n'a pu être que dans le sens général et analytique, où l'on ne distingue pas entre les valeurs réelles et imaginaires, et qu'on fait abstraction de l'évaluation numérique. Sous ce point de vue, une même formule embrasse tous les cas, de sorte qu'on n'a pas besoin de distinguer entre les espèces, ce qui devient nécessaire aussitôt qu'on veut appliquer les formules qui s'y rapportent au calcul numérique ou qu'on ne veut considérer que des quantités réelles. Toutefois cette sorte d'inconvénient, qui tient à la nature intime de l'objet, et nullement à un défaut de notre part, me paraît ajouter de mérite à votre division des Intégrales Elliptiques de la troisième espèce en deux classes, auxquelles se ramènent tous les autres cas. En effet, ces deux classes diffèrent essentiellement entre elles, le paramètre et l'amplitude dans l'une d'entre elles pouvant être réunis dans une seule variable, et l'autre pouvant être rapportée en même temps au module donné et à son complément. Je pourrais vous parler davantage sur cette matière, mais j'aime mieux voir auparavant votre second Supplément.

J'ai déjà communiqué à M. Crelle, pour le faire insérer dans son Journal, un premier Mémoire qui fait partie d'une suite de Mémoires dans lesquels je veux exposer, avec les démonstrations et les développements nécessaires, les différents résultats auxquels je suis parvenu, et dont j'ai déjà annoncé la plupart sans démonstration. Vous y trouverez les formules générales qui se rapportent à la transformation des Intégrales Elliptiques de la seconde et de la troisième espèce, présentées sous une forme commode et élégante. Vous y trouverez aussi les formules générales qui donnent leurs valeurs dans le cas que $F(\varphi)$ est commensurable avec la fonction entière F^1, ou plus généralement $= \dfrac{mF^1(\varkappa)+nF^1(\varkappa')\sqrt{-1}}{p}$, m, n, p étant des nombres entiers. Mais le but principal de ce premier Mémoire est de préparer tout ce qui est nécessaire pour que je puisse établir dans les Mémoires suivants, avec toute la rigueur nécessaire et en partant des premiers éléments, cette théorie des Transformations irrationnelles ou inverses et de la section des Fonctions Elliptiques, qui me paraît être le comble de toutes mes recherches sur cette matière.

Dans un Mémoire écrit en allemand, et qui a été inséré dans le 3e volume du *Journal de M. Crelle*, j'ai donné une construction *plane* de la multiplication des Fonctions Elliptiques.

Soit $AA'A''A'''\ldots$ une partie d'un polygone inscrit au cercle C et cir-



conscrit au cercle c, A étant situé dans le prolongement de Cc ou de la droite qui joint les deux centres : si l'on met $AA'=2\varphi_1$, $AA''=2\varphi_2$, $AA'''=2\varphi_3,\ldots$, on aura

$$F(\varphi_2)=2F(\varphi_1),\quad F(\varphi_3)=3F(\varphi_1),\ldots.$$

Le module se détermine par la distance du centre C à la sécante idéale commune aux deux cercles. Donc si l'on veut trouver un angle φ_n tel que $F(\varphi_n)=nF(\varphi)$, on n'a qu'à décrire un cercle c, qui touche la droite AA' et qui a une sécante idéale donnée commune avec le cercle C; ensuite on mène au cercle c les tangentes $A'A''$, $A''A'''$, $A'''A^{\text{IV}},\ldots$; les points A'', A''', $A^{\text{IV}},\ldots$ étant situés tous dans la périphérie du cercle C; la $n^{\text{ième}}$ tangente étant $A^{(n-1)}A^{(n)}$, on aura $AA_n=2\varphi_n$. Les arcs de cercles peuvent devenir plus grands que 360 degrés, de sorte que cette construction n'a point des limites, comme celle de Lagrange. On voit ainsi que la théorie générale des polygones inscriptibles et circonscriptibles en même temps à un cercle dépend des Fonctions Elliptiques, comme celle des polygones réguliers des Fonctions Circulaires.

Pardonnez-moi si j'ose vous faire remarquer qu'il me semble que, dans votre premier Supplément, vous avez présenté d'une manière incomplète ma démonstration de mon premier théorème. Il me semble que de la seule circonstance que y se change en $\frac{1}{hy}$, x étant changé en $\frac{1}{kx}$, vous concluez que la valeur de y, qu'on a supposée, satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-n^2x^2)}},$$

puisqu'on peut faire dans celle-ci cette substitution.

Mais je n'ai pas fait, moi, cette conclusion, que vous reconnaîtrez aisément être fautive, puisqu'on peut former *ad libitum* des expressions qui jouissent de cette propriété et qui ne satisfont pas à l'équation différentielle.

Vous m'obligerez beaucoup, Monsieur, si vous voulez avoir la bonté de faire parvenir à MM. Poisson, Fourier et Cauchy les exemplaires de mon Ouvrage qui se trouvent auprès de celui dont je vous fais hommage. Comme je resterai encore quelque temps à Postdam, je vous prie d'y adresser une réponse que j'attends avec une vive impatience.

Votre entièrement dévoué,

C.-G.-J. Jacobi.

Postdam, le 14 juin 1829.

Monsieur,

Conformément à ce que vous avez la bonté de m'écrire dans votre lettre du 4 juin, je vous envoie un quatrième exemplaire pour l'Académie. Je l'ai adressé à M. le Baron de Fourier, Secrétaire perpétuel de l'Académie, puisque j'ignore le nom du Président. Veuillez bien le lui faire parvenir et excuser la peine que je vous fais. Votre bonté envers moi et votre générosité sont telles, que je ne sais vous en rendre de grâces dignes.

Peu de jours après l'envoi de ma dernière lettre, j'appris la triste nouvelle de la mort d'Abel. Notre Gouvernement l'avait appelé à Berlin, mais l'appel ne l'a pas trouvé parmi les vivants. L'espérance que j'avais conçue de le trouver à Berlin a été si cruellement déçue. Les vastes problèmes qu'il s'était proposés, d'établir des critères suffisants et nécessaires pour qu'une équation algébrique quelconque soit résoluble, pour qu'une intégrale quelconque puisse être exprimée en quantités finies, son invention admirable de la propriété générale qui embrasse toutes les fonctions qui sont des intégrales de fonctions algébriques quelconques, etc., etc., marquent un genre de questions tout à fait particulier, et que personne avant lui n'a osé imaginer. Il s'en est allé, mais il a laissé un grand exemple.

Je vous rends mille grâces de votre second Supplément, qui avait fait le grand détour par Kœnigsberg. Les démonstrations différentes de celles que vous trouverez dans mon petit Ouvrage et les développements que vous avez ajoutés à plusieurs points importants me l'ont rendu fort intéressant. Quant au calcul numérique des Intégrales elliptiques de troisième espèce à paramètre circulaire, je vous demande pardon d'avoir fait naître en vous une espérance qui n'a pas été réalisée depuis. Cependant je crois que vous n'avez pas à regretter trop l'inconvénient que ces fonctions ne peuvent être réduites en tables à double entrée. Les moyens que vous avez indiqués pour leur évaluation dans le second Supplément sont tels, qu'on doit considérer ces fonctions tout à fait comme des quantités finies. Je crois même qu'au moyen de quelques tables à simple entrée on peut faciliter tellement leur calcul, que la peine de les calculer au moyen de mes séries devienne plus petite que celle qu'exige l'interpolation dans une table à double entrée.

Ce qui regarde la démonstration que j'ai donnée de mon théorème I dans le *Journal de M. Schumacher*, elle repose sur le théorème qu'« étant » trouvées trois fonctions entières et rationnelles de x quelconques U, » V et T, telles que

$$(U^2 - V^2)(U^2 - \lambda^2 V^2) = (1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)\,T^2,$$

» on aura toujours, en mettant $y = \frac{U}{V}$,

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{1-x^2)(1-n^2x^2)}},$$

» M désignant une constante »; théorème fondamental qui a été prouvé au commencement de ma démonstration, et dont il ne se trouve pas fait mention dans le premier Supplément. Dans mon Ouvrage, j'ai désigné ce théorème sous le nom de *principe de la transformation des Fonctions Elliptiques*. En effet, ce principe suffit pour qu'on puisse établir la théorie générale de la transformation, en réduisant cette dernière à un problème algébrique qu'on peut toujours résoudre, les constantes indéterminées étant en nombre suffisant pour remplir les conditions du problème. Pour compléter ma démonstration, telle qu'elle se trouve dans le premier Supplément, il suffira d'ajouter en peu de mots la démonstration du théorème mentionné. La double substitution vous fournissant les valeurs de $U \pm V$, $U \pm \lambda V$ résolues en facteurs, et telles qu'on a

$$U - V = (1-x)A^2, \quad U - \lambda V = (1-nx)C^2,$$
$$U + V = (1+x)B^2, \quad U + \lambda V = (1+\varkappa x)D^2,$$

A, B, C, D étant des fonctions entières, tout se trouvera prouvé rigoureusement. Abel s'est servi du même principe, de sorte que nos démonstrations sont au fond les mêmes. Vous êtes le premier, Monsieur, qui avez montré qu'on peut s'en passer, en effectuant la substitution elle-même au moyen de la résolution en fractions simples. Aussi je n'ai pas tardé à exposer dans mon Ouvrage cette démonstration, qui vous est propre et qui donne une excellente vérification. A présent, je suis en possession d'un nombre assez grand de démonstrations différentes. Je remarque, à cette occasion, que le mérite principal d'Abel, dans la théorie de la Transformation, consiste dans sa démonstration que *nos formules embrassent toutes les substitutions algébriques possibles*, ce qui donne un haut degré de perfection à cette théorie.

Vous vous plaignez des infirmités de votre âge. Ah! Monsieur, ces excellents Suppléments que vous venez de composer, en partant de quelques légères notices que j'avais données sans démonstration, montrent que c'est encore la vigueur et l'énergie de la jeunesse qui vous animent, et font concevoir l'espérance que le Ciel conservera encore longtemps une vie aussi chère.

Mes parents m'ont prié de vous faire leurs civilités et vous rendent grâces des bontés que vous avez bien voulu avoir pour moi. Soyez assuré, Monsieur, que je n'oublierai jamais ces bontés, et que je suis avec le respect le plus profond

Votre tout dévoué,

C.-G.-J. JACOBI.

Je ne retournerai à Kœnisberg que cet hiver.

Francfort, le 19 avril 1829.

MONSIEUR,

Dans un voyage que j'ai entrepris en Allemagne, étant arrivé près des rivages du Rhin, je ne puis résister au désir de vous voir à Paris. J'y partirai donc dans quelques jours pour y passer plusieurs semaines. Je ne saurais mieux profiter de la permission que le Gouvernement m'a voulu accorder pour ce semestre pour pouvoir jouir d'une récréation de mes études. Je brûle du désir de voir l'homme auquel je suis le plus redevable des bontés qu'il a voulu avoir pour moi, et de lui témoigner tous les sentiments que peuvent inspirer l'admiration et la reconnaissance.

Comme j'écris ceci en hâte, je ne puis répondre que quelques mots aux réponses que vous m'avez faites dans votre dernière lettre, et pour lesquelles je vous rends grâce mieux encore que pour les éloges que vous m'avez prodigués et que j'ai si peu mérités. Il me fallait absolument une dénomination pour les fonctions sin. am., cos. am., etc., dont les propriétés répondent parfaitement à celles des fonctions sin., cos. dites *circulaires*. D'un autre côté, l'application importante qu'on fait de la théorie des Fonctions Elliptiques au Calcul intégral rendait nécessaires les distinctions et les dénominations que vous avez introduites dans l'Analyse, et qui ont été accueillies par tous les Géomètres. J'ai donc trouvé convenable d'appeler les intégrales auxquelles vous donnez le nom de *Fonctions Elliptiques de la première, seconde, troisième espèce, Intégrales Elliptiques de la première, seconde, troisième espèce*, et d'étendre ou d'attribuer de préférence la dénomination de *Fonctions Elliptiques* aux sin. am., cos. am. Δ am., analogiquement comme on nomme *Fonctions Circulaires* les sinus, cosinus, etc. Si cela vous déplaît, toute autre dénomination me sera agréable. Dans tous les cas, je crois que nous deviendrons aisément d'accord sur cet objet.

Votre tout dévoué serviteur,

C.-G.-J. Jacobi.

Kœnisberg, le 2 juillet 1830.

Monsieur,

Je vous prie de vouloir bien m'excuser de ne vous avoir pas plus tôt donné des nouvelles de moi, car c'aurait dû être pour moi un devoir que de vous rendre grâce des bontés que vous m'avez eues pendant mon séjour à Paris et de vous dire que je compte le temps que vous m'avez permis de passer avec vous parmi les moments les plus heureux de ma vie. Les distractions d'un long voyage et d'autres circonstances ayant interrompu le cours de mes travaux, je n'ai su reprendre sitôt le fil de mes recherches ordinaires; et j'étais trop accoutumé à vous parler mathématiques et à vous raconter quelque chose de nouveau qui pouvait mériter votre indulgence pour remplir une lettre avec les seuls sentiments de ma reconnaissance. Mais, après avoir reçu le cadeau précieux que vous venez de me faire par l'envoi de la troisième édition de votre Ouvrage sur les Nombres, je ne veux pousser plus loin un délai peu excusable. La partie la plus grande du tome II de votre Ouvrage étant entièrement nouvelle, j'ai eu occasion d'y admirer de nouveau cette rigueur d'esprit qui fait vaincre les difficultés et surpasser, même dans un âge avancé, les efforts des jeunes Géomètres auxquels votre vie glorieusement sacrée aux progrès de la science sera pour toujours un modèle d'émulation. J'ai vu aussi avec plaisir que vous avez voulu profiter de ma remarque relative à la loi de Réciprocité. J'avais espéré de trouver dans l'exemplaire que vous m'avez adressé quelques lignes de votre main qui me parlaient de vous et de la santé de M^me Legendre; mais je l'ai feuilleté inutilement et me voilà puni pour ma négligence assez sévèrement.

Pour ne pas laisser cette lettre sans les signes de calcul, je vais vous faire une observation relative à l'équation $4\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right) = Y^2 \pm nZ^2$. Pour trouver Y, votre Ouvrage donne la règle de développer $2(x-1)^{\frac{n-1}{2}}$ et de remplacer les coefficients par les *plus petits* résidus qu'ils laissent étant divisés par n. Cette règle, qui se trouve déjà dans la seconde édition, n'est cependant juste que pour des nombres premiers peu grands. Les valeurs exactes de Y et de Z sont données dans chaque cas par les formules connues qui expriment les coefficients d'une équation au moyen des sommes des puissances de ses racines, sommes qui, dans notre cas, sont ou $\frac{-1+\sqrt{\pm n}}{2}$ ou $\frac{-1-\sqrt{\pm n}}{2}$. C'est ainsi qu'on trouve, qu'étant posé

$$Y = n(x-r)(x-r^4)(x-r^9)\ldots\left[x-r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\right] = nx^{\frac{n-1}{2}} + a_1 x^{\frac{n-3}{2}} + a_2 x^{\frac{n-5}{2}} + \ldots,$$

la règle est exacte pour les trois premiers coefficients a_1, a_2, a_3, mais qu'elle cesse de l'être pour les suivants dès que n surpasse une certaine limite, de sorte que les coefficients de Y et de Z peuvent surpasser $\frac{1}{2}n$ et même n et les puissances de n. Soit par exemple n de l'une des quatre formes :

(1)	$24\mu+1$,	on aura $a_4 =$ (1)	$\frac{(n-1)(n-105)}{192}+n$,
(2)	$24\mu+5$,	(2)	$\frac{(n-5)(n-21)}{192}$,
(3)	$24\mu+13$,	(3)	$\frac{(n+3)(n+35)}{192}$,
(4)	$24\mu+17$,	(4)	$\frac{(n+7)(n+15)}{192}$,

expressions qui pour de grands n sont de l'ordre $\frac{n^2}{192}$ et peuvent surpasser n de beaucoup.

Généralement on trouve que, pour de grands n, a_{2m} et a_{2m+1} sont de l'ordre $\frac{1}{3.4.5\ldots 2m}\left(\frac{n}{4}\right)^m$. Peut-être vous jugerez convenable de faire une addition de quelques lignes à votre Ouvrage pour limiter l'énoncé de la règle mentionnée.

J'ai lu avec plaisir le Rapport de M. Poisson sur mon Ouvrage, et je crois pouvoir en être très-content; il me paraît avoir très-bien présenté les deux transformations, qui, étant jointes entre elles, conduisent à la multiplication des Fonctions Elliptiques, en quoi il a été guidé sensiblement par vos Suppléments. Mais M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son Rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce dernier nous fait des reproches, à Abel et à moi, de ne nous pas être occupés de préférence du mouvement de la Chaleur. Il est vrai qne M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question des nombres vaut autant qu'une question du système du monde. Quoi qu'il en soit on doit vivement regretter que M. Fourier n'ait pu achever son Ouvrage sur les équations, et de tels hommes sont trop rares aujourd'hui, même en France, pour qu'il soit facile de les remplacer.

En ce qui regarde mes propres occupations, j'ai entrepris un bon nombre de recherches sur différentes matières et que je voudrais avoir finies avant de retourner aux Fonctions Elliptiques et aux transcendants d'un ordre supérieur qui sont de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x}}$. Je crois entrevoir à présent que tous ces transcendants jouissent des propriétés admirables et inattendues auxquelles on peut être conduit par le théorème d'Abel qui établit une relation entre plusieurs de ces transcendants qui répondent à différentes valeurs de x. J'ai réfléchi aussi de temps en temps sur une méthode nouvelle de traiter les perturbations célestes, méthodes dans lesquelles doivent entrer les théories nouvelles des Fonctions Elliptiques.

Je vous prie, Monsieur, de me rappeler à la mémoire de M^{me} Legendre, qui a voulu participer avec tant de bienveillance aux bontés que vous m'avez eues; je vous prie en même temps de faire mes civilités à M^{lle} Sophie Germain, dont je me félicite d'avoir fait la connaissance, et de me dire des nouvelles de sa santé, si vous daignez me répondre.

Agréez, Monsieur, les assurances de mon entier dévouement.

Votre très-humble serviteur,

C.-G.-J. Jacobi.

Kœnisberg, ce 27 mai 1832.

Monsieur,

Je ne sais comment excuser le long intervalle de temps qui s'est écoulé sans que je vous ai donné quelque témoignage de mon dévouement, et sans que je vous aie rendu compte de mes travaux, comme j'avais coutume d'après votre permission bienveillante dans le premier temps où je m'occupais des Fonctions Elliptiques. J'aurais bien voulu pouvoir vous avertir de l'achèvement de quelque ouvrage plus étendu, mais pendant tout ce temps-ci je n'ai pu regagner ni le goût ni l'énergie de jadis. Ce n'auraient été que des ouvrages commencés ou même seulement projetés dont j'aurais pu faire mention à vous, qui ne cessez de publier des ouvrages également distingués par leur étendue et par leur riche teneur, et cela presque dans l'âge où se trouvait Oughtred lorsque Wallis lui dédia son *Arithmetica Infinitorum*. J'ai lu le troisième Supplément qui finit le troisième volume de votre grand Ouvrage sur les Fonctions Elliptiques à Postdam où je me suis rendu pour voir mon père malade, qui mourut huit jours après mon arrivée, à l'âge pas même accompli de cinquante-neuf ans. Je lui devais la reconnaissance la plus haute. Ce furent ses assistances libérales qui m'ont mis en état de me vouer entièrement aux sciences, et l'étendue de mes obligations envers lui me rendit ce triste événement plus amer encore. Dans ce temps d'une douleur profonde, Monsieur, c'était l'étude de votre Ouvrage, qui m'a été communiqué par M. Crelle, qui fit mon soulagement et en quelque sorte ma consolation. Dans une annonce que j'en ai faite à la fin du huitième volume de M. Crelle, j'ai cherché à relever les mérites impérissables du Géomètre qui, outre les découvertes nombreuses et importantes dont il a enrichi la science, est parvenu à fonder deux disciplines grandes et étendues par les travaux glorieux de sa vie, lesquelles formeront désormais l'α et l'ω de toute étude mathématique. J'ai profité en même temps de cette occasion pour parler d'Abel et de son grand théorème, que vous avez encore le mérite d'avoir approfondi le premier, et d'avoir montré à la postérité que son développement est la grande tâche qui lui reste à remplir.

Les limites d'une lettre ne permettent pas de vous parler de mes travaux sur les Perturbations célestes. En attendant j'ai éprouvé moi-même des perturbations pas moins célestes et qui ont fini par un mariage heureux. L'intérêt que vous avez bien voulu me témoigner me fait croire que vous prendrez quelque part à ce qui fait le bonheur et le charme de ma vie. Depuis les huit mois de mon mariage j'ai repris mes occupations ordinaires avec un zèle redoublé, et j'espère que les années suivantes me dédommageront en quelque sorte du peu de fruit que m'ont porté les trois précédentes. Je ne veux vous dire que deux mots d'un nouveau résultat obtenu par mes recherches sur les Nombres, à la publication desquelles je n'ai encore pu parvenir: c'est *la résolution trigonométrique du problème de Pell*. En effet j'exprime généralement par $\cos\frac{2m\pi}{a}$ et $\sin\frac{2m\pi}{a}$ deux nombres entiers x et y tels que $x^2 - ay^2 = 1$. J'ai trouvé même une généralisation du problème de Pell qui me paraît être très-remarquable et qui se rapporte au cas où a est le produit de deux ou de plusieurs facteurs. En effet supposons que a soit le produit des deux facteurs b et c, on peut d'une infinité de manières trouver quatre nombres entiers u, v, w, x tels, que le produit des quatre facteurs

$$(u+v\sqrt{b}+w\sqrt{c}+x\sqrt{bc})(u+v\sqrt{b}-w\sqrt{c}-x\sqrt{bc})$$
$$\times(u-v\sqrt{b}+w\sqrt{c}-x\sqrt{bc})(u-v\sqrt{b}-w\sqrt{c}+x\sqrt{bc}),$$

soit égal à l'unité. On donne aisément à ce produit les trois formes : y^2-bz^2, $y'^2-cz'^2$, $y''^2-az''^2$; donc a étant $=b$, on peut faire dépendre les six nombres y, z, y', z', y'', z'', lesquels donnent $y^2-bz^2=1$, $y'^2-cz'^2=1$, $y''^2-az''^2=1$, des quatre nombres plus simples u, v, w, x. Vous voyez aisément comment cela doit être étendu au cas où a est le produit d'un nombre quelconque de facteurs. Dans tous les cas, je donne les nombres $u, v, w, x, \ldots$ par des formules générales et trigonométriques. Si vous le jugez convenable, et s'il ne vous fait pas de peine en aucune sorte, vous pourriez communiquer à l'Académie des Sciences la Notice que je viens de vous donner sur cette nouvelle manière de résoudre le fameux problème de Pell. Je remarque en outre qu'il doit exister des algorithmes, analogues aux fractions continues, qui pourront servir à trouver les nombres u, v, w, x et leurs analogues dans le cas d'un plus grand nombre de facteurs de a, et je crois que la recherche de ces algorithmes sera une chose de quelque importance pour la science des Nombres.

Les Fonctions Elliptiques et la science des Nombres ne devraient pas manquer à l'avenir dans les leçons données aux élèves de l'École Polytechnique, si l'on veut que ces leçons soient conformes aux progrès du temps. Quant à moi, je donne des leçons régulières sur ces belles théories et je vois avec plaisir les élèves de notre Université s'emparer avec empressement de ces matières. Vous verrez plusieurs fruits de leurs travaux dans les volumes suivants du *Journal de M. Crelle*. Ce sont encore, Monsieur, les fruits de vos travaux que ces branches de la science, jadis peu connues, vont devenir la possession commune des Géomètres.

De mon retour à Kœnigsberg, j'y trouvais votre bel Ouvrage dont votre bonté a bien voulu me gratifier, et je m'empresse de vous dire mes remercîments de ce que votre générosité l'a voulu emporter sur ma négligence. Ajoutez, Monsieur, à cette générosité quelques lignes de votre main, qui m'ont toujours été si précieuses et qui pourront me donner l'assurance de ce que vous n'êtes pas fâché de moi.

Je vous prie, Monsieur, de recommander Marie Jacobi aux bonnes grâces de M^{me} Legendre, et de vouloir bien agréer les assurances de mon dévouement le plus parfait.

Votre serviteur très-humble,

C.-G.-J. Jacobi.