ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE COTTON

# Application de la géométrie cayleyenne à l'étude géométrique du déplacement d'un solide autour d'un point fixe

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 20 (1903), p. 155-179

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__155_0>

# APPLICATION

DE LA

# GÉOMÉTRIE CAYLEYENNE

A L'ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE
DU DÉPLACEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE,

PAR M. ÉMILE COTTON,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE.

## INTRODUCTION.

Le Chapitre I de ce travail est consacré à des notions de Géométrie cayleyenne infinitésimale.

Je suppose connus les principes de cette Géométrie, que M. Darboux a exposés dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces*. Après avoir précisé les notations (nº 1), je définis la courbure (nº 2) et la torsion (nº 3) cayleyennes d'une courbe. Je donne ensuite (nºs 4, 5) une généralisation des formules de Frenet; les coordonnées des sommets d'un certain tétraèdre associé à un point d'une courbe gauche interviennent dans cette généralisation comme le font, dans les formules de Frenet, les cosinus directeurs des arêtes du trièdre fondamental. Je généralise enfin les théorèmes de Meusnier et d'Euler relatifs aux courbes tracées sur une surface [1] (nºs 6, 7).

Au début du Chapitre II, je considère, dans l'espace euclidien ordinaire, deux trièdres trirectangles $T_1$, T de même sommet O, et je

---

[1] Une généralisation plus étendue a été donnée par M. Bianchi, dans l'édition allemande (Teubner) de ses *Leçons de Géométrie différentielle*.

définis (n° 8) les coordonnées de T relativement à $T_1$. Ces coordonnées sont un système particulier de paramètres d'O. Rodrigues. Dans les paragraphes suivants (n$^{os}$ 9 à 12), je cherche l'influence de la substitution à l'un des trièdres T ou $T_1$ d'un autre trièdre $T'$ ou $T'_1$ invariablement lié au premier. J'établis ces formules de changement de coordonnées par un calcul direct; on pourrait les déduire également des formules de la composition des rotations.

L'interprétation géométrique de ces formules (n° 11) constitue l'idée fondamentale de ce travail.

Je considère les coordonnées de T relativement à $T_1$ comme définissant un point d'une multiplicité à trois dimensions, le *point image du système* $T_1$, T. Le trièdre T se déplaçant relativement à $T_1$, d'une façon continue, le point image décrit une figure image du déplacement. C'est une ligne ou une surface selon que le déplacement est à un ou deux paramètres.

L'étude analytique du déplacement d'un solide ayant un point fixe O se ramène à celle du déplacement relatif de deux trièdres de sommet O; l'un T est invariablement lié au solide, l'autre $T_1$ à l'espace fixe. Le choix de ces deux trièdres, et, par suite, de la figure image du déplacement est possible d'une infinité de façons; il comporte, en général, six arbitraires.

Les formules du changement de coordonnées conduisent à définir, dans la multiplicité remplie par les points images, une quadrique fondamentale et à envisager cette multiplicité comme un espace cayleyen.

*Les diverses figures images d'un même déplacement se déduisent de l'une d'entre elles par les mouvements dans cet espace cayleyen.*

Les conséquences de cette proposition sont développées dans la fin du Chapitre II.

Je passe très rapidement (n° 13) sur les déplacements algébriques, pour aborder (n$^{os}$ 14 à 16) l'étude infinitésimale d'un déplacement à un paramètre. La courbure et la torsion cayleyennes d'une courbe image d'un déplacement à un paramètre sont rattachées par des relations simples aux courbures des roulettes sphériques fixe et mobile. La courbure cayleyenne, par exemple, est le double du paramètre $k$ intervenant dans une formule analogue à celle de Savary.

J'applique enfin ($n^{os}$ 18 à 20) l'étude des courbes tracées sur une surface de l'espace cayleyen, à la recherche des propriétés infinitésimales des déplacements à un paramètre compris dans un déplacement à deux paramètres.

Il est naturel de chercher dans la théorie précédente une méthode de classification des équations linéaires aux différentielles totales auxquelles conduit l'emploi du trièdre mobile en géométrie. On peut aussi généraliser cette théorie, en considérant des groupes de transformations autres que celui des rotations autour d'un point fixe. Je me contente de signaler ici ces questions, sur lesquelles j'espère pouvoir revenir ultérieurement.

# CHAPITRE I.

## NOTIONS DE GÉOMÉTRIE CAYLEYENNE INFINITÉSIMALE (1).

1. Dans un espace cayleyen à trois dimensions, une quadrique fondamentale ou *absolu* sert à déterminer les angles et les distances. L'équation

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 0, \tag{1}$$

représentera l'absolu en coordonnées tétraédriques.

L'homogénéité des coordonnées tétraédriques serait gênante dans la suite; nous la ferons disparaître au moyen de la convention suivante :

Dans la suite de ce Travail les *coordonnées d'un point* (2) *désignent des coordonnées tétraédriques du point,* $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ *telles que l'on ait*

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1, \tag{2}$$

(1) *Voir* DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces,* Livre VII, Chap. XIV, t. III.

(2) Les avantages de ce système particulier de coordonnées sont expliqués par M. Darboux à l'endroit cité. Son emploi revient à considérer la géométrie cayleyenne d'un espace à trois dimensions comme la géométrie sur une hypersphère d'un espace euclidien à quatre dimensions.

On peut évidemment substituer $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, $-\rho$ à $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$, mais, à cette restriction près, les coordonnées d'un point réel sont bien déterminées.

La distance $\overline{mm'}$ de deux points $m$ et $m'$ est donnée, en fonction de leurs coordonnées $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ et $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$, $\rho'$ par la formule

$$\cos \overline{mm'} = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' + \rho\rho'. \tag{3}$$

L'élément linéaire de l'espace est donné par

$$ds^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 + d\rho^2. \tag{4}$$

Soient D', D'' deux droites ayant un point commun, $m$. Si $m'$ est le point de D' conjugué de $m$ par rapport à l'absolu, $m''$ étant le point analogue relatif à D'', l'angle de D' et D'' est égal à la distance $\overline{m'm''}$.

2. L'élément linéaire de l'espace étant connu, on définit immédiatement la longueur d'un arc de courbe.

Sur une courbe (C) faisons choix d'une origine et d'un sens de parcours; soit $s$ l'arc de cette courbe terminé en un point $m$. La tangente à (C) en $m$ est la droite joignant le point $m$ au point $m_1$ dont les coordonnées sont

$$\lambda_1 = \frac{d\lambda}{ds}, \qquad \mu_1 = \frac{d\mu}{ds}, \qquad \nu_1 = \frac{d\nu}{ds}, \qquad \rho_1 = \frac{d\rho}{ds}. \tag{5}$$

En dérivant les deux membres de l'identité (2) par rapport à $s$, on voit que $m$ et $m_1$ sont conjugués par rapport à l'absolu. Nous appellerons $m_1$ le *point directeur de la tangente* en $m$.

Lorsque $m$ décrit (C), $m_1$ décrit une courbe ($C_1$). Prenons sur ($C_1$) un sens de parcours tel que la dérivée $\frac{d\sigma}{ds}$ de l'arc $\sigma$ de ($C_1$) par rapport à l'arc $s$ de (C) soit positive. On va voir que l'équation

$$\frac{1}{\sin\delta} = \frac{d\sigma}{ds} \tag{6}$$

admet une racine réelle $\delta$ comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. (On suppose la courbe (C) réelle). Nous donnerons à cette racine $\delta$ le nom de *rayon de courbure* et nous appellerons *courbure* l'expression $\frac{1}{\mathcal{R}} = \cot\delta$.

Pour vérifier l'assertion précédente, on établit d'abord la formule

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \frac{\Sigma(d^2\lambda\, d\mu - d^2\mu\, d\lambda)^2}{ds^6} \tag{7}$$

où la sommation s'étend aux six combinaisons des lettres $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ prises deux à deux.

On observe ensuite que l'on peut choisir le système de coordonnées de telle façon que $m$ soit le point o, o, o, 1, que la tangente en $m$ soit $\lambda = \mu = 0$, et que le plan osculateur au même point soit $\lambda = 0$. En supposant la courbe donnée par l'expression des coordonnées d'un point en fonction d'un paramètre $t$ dont la valeur zéro corresponde à $m$, on a, au voisinage de ce point (¹),

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu &= \qquad\quad \beta_2 t^2 + \ldots, \\ \nu &= \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \ldots, \\ \rho &= 1 - \frac{\gamma_1^2}{2} t^2 + \ldots, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur à deux.

La formule (7) donne alors, pour le point $m$,

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \frac{\gamma_1^4 + 4\beta^2}{\gamma_1^4}; \tag{9}$$

on trouve bien pour $\sin\delta$ une valeur comprise entre zéro et un.

On voit aisément, à l'aide des formules (8) et (9) par exemple, qu'il existe un cercle cayleyen osculateur en un point $m$ de la courbe (C). Le rayon de ce cercle est égal au rayon de courbure, son centre sera dit centre de courbure.

3. Soit $b$ le pôle, par rapport à l'absolu, du plan osculateur à (C) en $m$. Nous dirons que $mb$ est la *binormale* et que $b$ est le point directeur de la binormale. Lorsque $m$ décrit (C), $b$ décrit une courbe (C');

---

(¹) Nous limitons notre étude aux courbes et surfaces réelles et analytiques.

nous désignerons par $\tau$ l'arc de (C') compté à partir d'une origine quelconque, positivement dans un sens qui sera précisé plus loin.

On calcule $\frac{d\tau}{ds}$ de la façon suivante. On part de l'équation du plan osculateur en $m$ :

$$\mathrm{A}\Lambda + \mathrm{BM} + \mathrm{CN} + \mathrm{DP} = 0,$$

($\Lambda$, M, N, P désignent les coordonnées courantes), et l'on obtient sans difficulté

$$d\tau^2 = \frac{\Sigma(\mathrm{A}\,d\mathrm{B} - \mathrm{B}\,d\mathrm{A})^2}{(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2)^2},$$

la sommation s'étendant aux combinaisons de A, B, C, D deux à deux.

Pour transformer cette expression, on considère le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu & \rho \\ d\lambda & d\mu & d\nu & d\rho \\ d^2\lambda & d^2\mu & d^2\nu & d^2\rho \\ d^3\lambda & d^3\mu & d^3\nu & d^3\rho \end{vmatrix},$$

et l'on prend

$$\mathrm{A} = \frac{\partial\Delta}{\partial d^3\lambda}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\partial\Delta}{\partial d^3\nu}, \qquad \mathrm{C} = \frac{\partial\Delta}{\partial d^3\nu}, \qquad \mathrm{D} = \frac{\partial\Delta}{\partial d^3\rho};$$

alors on a

$$d\mathrm{A} = -\frac{\partial\Delta}{\partial d^2\lambda}, \qquad d\mathrm{B} = -\frac{\partial\Delta}{\partial d^2\mu}, \qquad d\mathrm{C} = -\frac{\partial\Delta}{\partial d^2\nu}, \qquad d\mathrm{D} = -\frac{\partial\Delta}{\partial d^2\rho}.$$

On transforme les binomes $\mathrm{A}\,d\mathrm{B} - \mathrm{B}\,d\mathrm{A}$, ... au moyen d'une identité connue relative aux mineurs d'un déterminant, et l'on obtient ainsi

$$d\tau^2 = \frac{\Delta^2}{(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2)^2}\Sigma(\lambda\,d\mu - \mu\,d\lambda)^2.$$

Le second facteur est $ds^2$, il vient donc

$$\frac{d\tau}{ds} = \pm\frac{\Delta}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2}.$$

Le sens de parcours resté indéterminé étant choisi de façon que le signe $-$ soit nécessaire, nous poserons

$$\frac{1}{\mathfrak{T}} = \frac{d\tau}{ds} = -\frac{\Delta}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2}. \tag{10}$$

L'expression $\frac{1}{\mathfrak{S}}$ sera appelée *torsion*.

4. Soit $n$ le pôle du plan $mm_1b$ par rapport à l'absolu; le tétraèdre $mm_1bn$ conjugué par rapport à l'absolu sera appelé *tétraèdre fondamental* relatif à la courbe (C) et au point $m$. Nous appellerons $mn$ la *normale principale* et $n$ le point directeur de la normale principale.

Dans ce qui suit, $\lambda, \mu, \nu, \rho$; $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1$; $\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \rho_2$; et $\lambda_3, \mu_3, \nu_3, \rho_3$ désignent respectivement des coordonnés de $m, m_1, n$ et $b$. Mais on observera que, dans les formules qui suivent, on ne peut multiplier par $-1$ les coordonnées de l'un des points sans modifier convenablement celles des autres.

Nous allons déterminer les dérivées de ces coordonnées par rapport à l'arc $s$ de la courbe (C).

Les formules (5) donnent les dérivées de $\lambda, \mu, \nu, \rho$.

Le point $m'_1$, dont les coordonnées sont

$$a = \frac{d\lambda_1}{d\sigma}, \qquad b = \frac{d\mu_1}{d\sigma}, \qquad c = \frac{d\nu_1}{d\sigma}, \qquad d = \frac{d\rho_1}{d\sigma},$$

est le point directeur de la tangente à la courbe ($C_1$), lieu de $m_1$. On vérifie aisément que $m'_1$ est situé sur la normale principale $mn$. En utilisant les deux points $m, m'_1$ de cette normale pour en déterminer le point directeur $n$, et observant que $a = \frac{d\lambda_1}{ds}\sin\delta, \ldots$, on vérifie que l'on peut prendre (¹) $\lambda_2 = \left(\lambda + \frac{d\lambda_1}{ds}\right)\operatorname{tang}\delta, \ldots$. Par suite :

$$(11) \qquad \frac{d\lambda_1}{ds} = \frac{\lambda_2}{\mathfrak{R}} - \lambda, \qquad \frac{d\mu_1}{ds} = \frac{\mu_2}{\mathfrak{R}} - \mu, \qquad \frac{d\nu_1}{ds} = \frac{\nu_2}{\mathfrak{R}} - \nu, \qquad \frac{d\rho_1}{ds} = \frac{\rho_2}{\mathfrak{R}} - \rho.$$

On détermine $\lambda_3, \mu_3, \nu_3, \rho_3$ par les relations

$$(12) \qquad \frac{\lambda_3}{A} = \frac{\mu_3}{B} = \frac{\nu_3}{C} = \frac{\rho_3}{D} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}},$$

(¹) On pourrait prendre aussi bien $\lambda_2 = -\left(\lambda + \frac{d\lambda_1}{ds}\right)\operatorname{tang}\delta, \ldots$. Le signe choisi est tel que les coordonnées du centre de courbure soient $\lambda_2 \sin\delta + \lambda\cos\delta$, $\mu_2\sin\delta + \mu\cos\delta, \ldots$

Si l'on change le sens positif sur la courbe (C), en prenant $s' = -s$ au lieu de $s$, il faut substituer $-\lambda_1, -\mu_1, -\nu_1 -\rho_1$ à $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1$, mais $\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \rho_2$ ne changent pas.

où A, B, C, D ont même signification qu'au n° 3, et où $\varepsilon$ est égal à $+1$ ou à $-1$ et choisi de façon que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu & \rho \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & \rho_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & \rho_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 & \rho_3 \end{vmatrix}$$

soit positif. On vérifie, en calculant son carré, que ce déterminant a pour valeur $+1$.

Les formules (12) et les identités relatives aux mineurs d'un déterminant donnent

$$d\lambda_3 = \frac{-\Delta}{A^2+B^2+C^2+D^2} \begin{vmatrix} \mu & \nu & \rho \\ d\mu & d\nu & d\rho \\ \mu_3 & \nu_3 & \rho_3 \end{vmatrix};$$

on en déduit $\frac{d\lambda_3}{ds} = \frac{\lambda_2}{\mathfrak{T}}$; on a donc

$$(13) \qquad \frac{d\lambda_3}{ds} = \frac{\lambda_2}{\mathfrak{T}}, \qquad \frac{d\mu_3}{ds} = \frac{\mu_2}{\mathfrak{T}}, \qquad \frac{d\nu_3}{ds} = \frac{\nu_2}{\mathfrak{T}}, \qquad \frac{d\rho_3}{ds} = \frac{\rho_2}{\mathfrak{T}}.$$

En dérivant par rapport à $s$ l'identité $\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2+\rho_2^2=1$, et les identités liant $\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \rho_2$ à $\lambda, \mu, \nu, \rho$; $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1$; $\lambda_3, \mu_3, \nu_3, \rho_3$, on a quatre équations déterminant $\frac{d\lambda_2}{ds}$ et les dérivées analogues. Voici le résultat :

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{ds} &= -\frac{\lambda_1}{\mathfrak{R}} - \frac{\lambda_3}{\mathfrak{T}}, & \frac{d\mu_2}{ds} &= -\frac{\mu_1}{\mathfrak{R}} - \frac{\mu_3}{\mathfrak{T}}, \\ \frac{d\nu_2}{ds} &= -\frac{\nu_1}{\mathfrak{R}} - \frac{\nu_3}{\mathfrak{T}}, & \frac{d\rho_2}{ds} &= -\frac{\rho_1}{\mathfrak{R}} - \frac{\rho_3}{\mathfrak{T}}. \end{aligned} \right.$$

Les formules (5), (11), (13) et (14) sont analogues aux formules de Frenet.

5. Le résultat précédent permet de développer, suivant les puissances de $s$, les coordonnées d'un point de la courbe voisin du point $s=0$, dès que l'on connaît les fonctions $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{T}$ de la variable $s$. Supposant que $s=0$ donne le point $0, 0, 0, 1$; que la tangente et le plan osculateur en ce point soient respectivement $\lambda=\mu=0$, et $\mu=0$, on

obtient

$$(15)\qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{s^2}{2\mathcal{R}_0} - \dfrac{\left(\dfrac{d\mathcal{R}}{ds}\right)_0}{6\mathcal{R}_0^2} s^3 + \ldots, \\ \mu = \dfrac{s^3}{6\mathcal{R}_0\mathcal{C}_0} + \ldots, \\ \nu = s - \dfrac{\mathcal{R}_0^2 + 1}{6\mathcal{R}_0^2} s^3 + \ldots, \\ \rho = 1 - \dfrac{s^2}{2} + \ldots; \end{cases}$$

les termes non écrits sont d'ordre au moins égal à 4; $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{C}_0$, $\left(\dfrac{d\mathcal{R}}{ds}\right)_0$ sont les valeurs de $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ et $\dfrac{d\mathcal{R}}{ds}$ pour $s = 0$.

6. Définissons une surface (S) par les expressions des coordonnées $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ d'un point en fonction de deux paramètres variables $u$ et $v$.

L'équation du plan tangent au point $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ est, en désignant par $\Lambda$, M, N, P les coordonnées courantes,

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} \Lambda & M & N & P \\ \lambda & \mu & \nu & \rho \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} & \dfrac{\partial\mu}{\partial u} & \dfrac{\partial\nu}{\partial u} & \dfrac{\partial\rho}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} & \dfrac{\partial\mu}{\partial v} & \dfrac{\partial\nu}{\partial v} & \dfrac{\partial\rho}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ les coefficients de $\Lambda$, M, N, P dans le développement de ce déterminant; posons

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 + \mathcal{D}^2 = \mathcal{H}$$

et

$$(17)\qquad l = \frac{\varepsilon\mathcal{A}}{\sqrt{\mathcal{H}}}, \qquad m = \frac{\varepsilon\mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{H}}}, \qquad n = \frac{\varepsilon\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{H}}}, \qquad r = \frac{\varepsilon\mathcal{D}}{\sqrt{\mathcal{H}}};$$

la détermination du radical est choisie une fois pour toutes; mais nous prendrons, suivant les cas, $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$. Le point $l$, $m$, $n$, $r$ est le pôle du plan tangent par rapport à l'absolu, la droite joignant les points $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$; $l$, $m$, $n$, $r$ est la normale à la surface au point considéré.

Remplaçons, dans l'élément linéaire (4) de l'espace, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ par les fonctions correspondantes des variables $u$ et $v$, nous obtenons l'élément linéaire de la surface

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2. \tag{18}$$

L'importance de cette expression est bien connue.

7. Une courbe (C) tracée sur (S) est déterminée par les expressions de $u$ et de $v$ en fonction d'un même paramètre; prenons pour ce paramètre l'arc $s$ de (C).

En conservant les notations antérieures on obtient

$$\lambda_1 = \frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = \frac{\lambda_2}{\mathcal{R}} - \lambda = \frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{d^2v}{ds^2},$$

et les formules analogues. Il vient alors

$$\frac{\cos\theta}{\mathcal{R}} = \frac{l\lambda_2 + m\mu_2 + n\nu_2 + r\rho_2}{\mathcal{R}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mathcal{H}}}\,\frac{\mathrm{E}_1\,du^2 + 2\mathrm{F}_1\,du\,dv + \mathrm{G}_1\,dv^2}{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2}. \tag{19}$$

Dans cette formule, $\mathrm{E}_1\,du^2 + 2\mathrm{F}_1\,du\,dv + \mathrm{G}_1\,dv^2$ est le résultat de la substitution dans le déterminant (16) de

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2\lambda}{\partial v^2}dv^2, \;\ldots,$$

à A, M, N, P; $\theta$ est l'angle, compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, de la normale principale à (C) et de la normale à (S). On choisit donc $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$, selon que $\frac{\mathrm{E}_1\,du^2 + 2\mathrm{F}_1\,du\,dv + \mathrm{G}_1\,dv^2}{\sqrt{\mathcal{H}}}$ est positif ou négatif.

On voit ainsi que toutes les courbes tracées sur la surface passant en un même point, ayant même plan osculateur en ce point, ont aussi même courbure.

En désignant le second membre de (19) par $\frac{1}{\mathcal{R}'}$, on a :

$$\frac{\cos\theta}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}'}. \tag{20}$$

Ce résultat constitue ce que nous appellerons la *généralisation du théorème de Meusnier.*

On est ainsi ramené à l'étude de la courbure des sections planes normales.

Pour une pareille section, $\cos\theta = 1$, et $\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \rho_2$ sont égaux à $l, m, n, r$. On évite toute discussion en considérant le centre de courbure, au lieu de la courbure dont l'expression contient encore $\varepsilon$.

On sait (n° 4, Note) que les coordonnées de ce point sont

$$\lambda\cos\delta + \lambda_2\sin\delta = \lambda\cos\delta + l\sin\delta, \ \ldots$$

En prenant $\delta = \varepsilon\varphi$ et

$$l' = \varepsilon l = \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{\mathcal{H}}}, \qquad m' = \varepsilon m = \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{H}}}, \qquad n' = \varepsilon n = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{H}}}, \qquad r' = \varepsilon r = \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{\mathcal{H}}},$$

on a les coordonnées du centre de courbure :

$$\lambda\cos\varphi + l'\sin\varphi, \qquad \mu\cos\varphi + m'\sin\varphi, \qquad \nu\cos\varphi + n'\sin\varphi, \qquad \rho\cos\varphi + r'\sin\varphi.$$

L'angle $\varphi$ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ est donné par

$$\cot\mathrm{g}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}}\,\frac{E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv^2 + G_1\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{21}$$

Nous dirons que $\frac{1}{[\mathcal{R}]} = \cot\varphi$ est la *courbure algébrique* de la section normale considérée.

Égalant à zéro le jacobien des formes quadratiques figurant au numérateur et au dénominateur de la formule (21), on obtient, en général, deux tangentes rectangulaires que nous appellerons *tangentes aux lignes de courbure.* Elles déterminent les sections normales pour lesquelles $[\mathcal{R}]$ est maximum ou minimum; soient $[\mathcal{R}_1]$ et $[\mathcal{R}_2]$ les valeurs correspondantes de $[\mathcal{R}]$.

Désignons par $\alpha$ l'angle de la direction $du, dv$ avec la tangente corres pondant à $[\mathcal{R}_1]$. On établit aisément la formule :

$$\frac{1}{[\mathcal{R}]} = \frac{\cos^2\alpha}{[\mathcal{R}_1]} + \frac{\sin^2\alpha}{[\mathcal{R}_2]}. \tag{22}$$

C'est la *généralisation du théorème d'Euler*.

## CHAPITRE II.

### DÉPLACEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

8. Rappelons d'abord la signification géométrique des paramètres d'Olinde Rodrigues servant à définir un changement de coordonnées ou une rotation [1].

Soient $T_1(Ox_1y_1z_1)$ et $T(Oxyz)$ deux trièdres trirectangles de même sommet. Sur l'axe de la rotation amenant $T_1$ à coïncider avec T, choisissons une direction OI, et posons

$$\alpha = \cos(IOx) = \cos(IOx_1), \qquad \beta = \cos(IOy) = \cos(IOy_1),$$
$$\gamma = \cos(IOz) = \cos(IOz_1).$$

Désignons par $\theta$ l'angle de la rotation.

Les nombres

$$\lambda = \alpha\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \mu = \beta\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \nu = \gamma\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \rho = \cos\frac{\theta}{2}, \tag{1}$$

constituent un système de paramètres d'Olinde Rodrigues.

Ils satisfont à la relation :

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1. \tag{2}$$

Nous dirons que $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ sont les *coordonnées du trièdre* T *relativement au trièdre* $T_1$.

---

[1] *Voir* les Notes de M. Darboux : Note V de ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces;* Note I des *Leçons de Cinématique* de M. Kœnigs.

Il est clair que l'on peut remplacer $\theta$ par $2\pi + \theta$, et, par suite, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$, par $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, $-\rho$.

Les coordonnées de $T_1$ relativement à $T$ sont manifestement $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, $\rho$ ou, ce qui revient au même, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $-\rho$.

Soient $x, y, z$ et $x_1, y_1, z_1$ les coordonnées d'un même point M de l'espace relativement à T et $T_1$. M. Darboux (*loc. cit.*) a établi les relations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \rho x - \nu y + \mu z &= \rho x_1 + \nu y_1 - \mu z_1 \\ \nu x + \rho y - \lambda z &= -\nu x_1 + \rho y_1 + \lambda z_1 \\ -\mu x + \lambda y + \rho z &= \mu x_1 - \lambda y_1 + \rho z_1 \\ \lambda x + \mu y + \nu z &= \lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1. \end{aligned}\right.$$

Trois seulement de ces relations sont indépendantes. En les résolvant en $x, y, z$, on obtient les formules d'Olinde Rodrigues.

9. Un procédé analogue permet de résoudre le problème suivant :

Soient T, $T_1$, $T_0$ ($Oxyz$, $Ox_1y_1z_1$, $Ox_0y_0z_0$) trois trièdres trirectangles de même sommet O.

*Connaissant les coordonnées* $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ *de* T *relativement à* $T_1$, *les coordonnées* $\lambda_0$, $\mu_0$, $\nu_0$, $\rho_0$ *de* $T_1$ *relativement à* $T_0$, *trouver les coordonnées* $\Lambda$, M, N, P *de* T *relativement à* $T_0$.

Désignons par $x, y, z$; $x_1, y_1, z_1$; $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées d'un même point M par rapport aux trois trièdres.

Écrivons le système analogue à (3), relatif au système $T_1$, $T_0$,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \rho_0 x_1 - \nu_0 y_1 + \mu_0 z_1 &= \rho_0 x_0 + \nu_0 y_0 - \mu_0 z_0 \\ \nu_0 x_1 + \rho_0 y_1 - \lambda_0 z_1 &= -\nu_0 x_0 + \rho_0 y_0 + \lambda_0 z_0 \\ -\mu_0 x_1 + \lambda_0 y_1 + \rho_0 z_1 &= \mu_0 x_0 - \lambda_0 y_0 + \rho_0 z_0 \\ \lambda_0 x_1 + \mu_0 y_1 + \nu_0 z_1 &= \lambda_0 x_0 + \mu_0 y_0 + \nu_0 z_0. \end{aligned}\right.$$

Multiplions les deux membres des équations (3) par $\pm\lambda_0$, $\pm\mu_0$, $\pm\nu_0$, $\pm\rho_0$ respectivement, et ajoutons, les signes étant choisis de façon que le coefficient de $x$ soit $\rho\rho_0 - \lambda\lambda_0 - \mu\mu_0 - \nu\nu_0$, il vient :

$$(5)\quad \begin{aligned} &x(\rho\rho_0 - \lambda\lambda_0 - \mu\mu_0 - \nu\nu_0) + y(-\nu\rho_0 - \rho\nu_0 + \lambda\mu_0 - \mu\lambda_0) + z(\mu\rho_0 + \lambda\nu_0 + \rho\mu_0 - \nu\lambda_0) \\ &= x_1(\rho\rho_0 + \nu\nu_0 + \mu\mu_0 - \lambda\lambda_0) + y_1(\nu\rho_0 - \rho\nu_0 - \lambda\mu_0 - \mu\lambda_0) + z_1(-\mu\rho_0 - \lambda\nu_0 + \rho\mu_0 - \nu\lambda_0). \end{aligned}$$

Combinons de même les équations (4) de telle sorte que le coefficient de $x_0$ soit encore $\rho\rho_0 - \lambda\lambda_0 - \mu\mu_0 - \nu\nu_0$, il vient :

$$(6)\quad \begin{aligned} &x_1(\rho\rho_0 + \nu\nu_0 + \mu\mu_0 - \lambda\lambda_0) + y_1(-\rho\nu_0 + \nu\rho_0 - \mu\lambda_0 - \lambda\mu_0) + z_1(\rho\mu_0 - \nu\lambda_0 - \mu\rho_0 - \lambda \\ &= x_0(\rho\rho_0 - \lambda\lambda_0 - \mu\mu_0 - \nu\nu_0) + y_0(\rho\nu_0 + \nu\rho_0 + \mu\lambda_0 - \lambda\mu_0) + z_0(-\rho\mu_0 + \nu\lambda_0 - \mu\rho_0 - \lambda \end{aligned}$$

Dans les équations (5) et (6) les termes en $x_1$, $y_1$, $z_1$, sont les mêmes, ce qui permet d'éliminer ces variables. En faisant jouer ensuite à $y$ et $y_0$, puis à $z$ et $z_0$ le rôle de $x$ et $x_0$ dans les combinaisons précédentes, on obtient trois équations ne contenant plus $x_1$, $y_1$, $z_1$. Ces équations peuvent s'écrire :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P}x - \mathrm{N}y + \mathrm{M}z &= \mathrm{P}x_0 + \mathrm{N}y_0 - \mathrm{M}z_0, \\ \mathrm{N}x + \mathrm{P}y - \Lambda z &= -\mathrm{N}x_0 + \mathrm{P}y_0 + \Lambda z_0, \\ -\mathrm{M}x + \Lambda y + \mathrm{P}z &= \mathrm{M}x_0 - \Lambda y_0 + \mathrm{P}z_0, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \Lambda &= \rho\lambda_0 + \lambda\rho_0 - \mu\nu_0 + \nu\mu_0, \\ \mathrm{M} &= \rho\mu_0 + \mu\rho_0 - \nu\lambda_0 + \lambda\nu_0, \\ \mathrm{N} &= \rho\nu_0 + \nu\rho_0 - \lambda\mu_0 + \mu\lambda_0, \\ \mathrm{P} &= \rho\rho_0 - \lambda\lambda_0 - \mu\mu_0 - \nu\nu_0. \end{aligned} \right.$$

On a d'ailleurs

$$\Lambda^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 + \mathrm{P}^2 = 1.$$

Les formules (8) donnent donc les coordonnées demandées.

10. Considérons T comme mobile par rapport à $\mathrm{T}_1$; autrement dit, regardons $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ comme des variables liées par la seule relation (2).

On voit alors que la substitution au trièdre T d'un trièdre T′ invariablement lié à T se traduit analytiquement par les formules

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda' &= r\lambda + l\rho - m\nu + n\mu, \\ \mu' &= r\mu + m\rho - n\lambda + l\nu, \\ \nu' &= r\nu + n\rho - l\mu + m\lambda, \\ \rho' &= r\rho - l\lambda - m\mu - n\nu. \end{aligned} \right.$$

où $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$, $\rho'$ sont les coordonnées de T′ relativement à $\mathrm{T}_1$, et où les constantes $l$, $m$, $n$, $r$ désignent les coordonnées de T′ relativement à T.

De même la substitution au trièdre $\mathrm{T}_1$ d'un trièdre $\mathrm{T}'_1$ invariablement lié à $T_1$, se traduit par la substitution linéaire

$$(10) \qquad \begin{cases} \lambda'_1 = r_1\lambda + l_1\rho + m_1\nu - n_1\mu, \\ \mu'_1 = r_1\mu + m_1\rho + n_1\lambda - l_1\nu, \\ \nu'_1 = r_1\nu + n_1\rho + l_1\mu - m_1\lambda, \\ \rho'_1 = r_1\rho - l_1\lambda - m_1\mu - n_1\nu, \end{cases}$$

où les variables $\lambda'_1$, $\mu'_1$, $\nu'_1$, $\rho'_1$ et les constantes $l_1$, $m_1$, $n_1$, $r_1$ désignent respectivement les coordonnées de T relativement à $T'_1$ et celles de $T_1$ relativement à $T'_1$.

On reconnaît là des substitutions linéaires dont la composition donne la substitution linéaire la plus générale transformant en elle-même la forme $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2$ (¹).

11. Soient $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ les coordonnées d'un trièdre T relativement à un trièdre à $T_1$. Considérons, dans un espace à trois dimensions E, le point P dont les coordonnées tétraédriques sont $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$. Nous dirons que le *point* P est l'*image du système* ($T_1$, T).

Substituons aux trièdres $T_1$, T des trièdres $T'_1$ et T' invariablement liés, le premier à $T_1$, le second à T ; le point P' image du système ($T'_1$, T') se déduit du point P par une transformation homographique laissant invariable la quadrique

$$(11) \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 0.$$

Inversement une pareille transformation homographique correspond à un changement de trièdres de la nature précédente.

*Prenons pour absolu, dans l'espace* E, *la quadrique* (11), *les transformations précédentes sont celles qui conservent les angles et les distances de l'espace cayleyen ainsi défini, en d'autres termes, sont les déplacements dans cet espace cayleyen.*

Deux points P, P' ont un invariant et un seul relatif au groupe des déplacements cayleyens, à savoir leur distance. Il est facile de l'interpréter.

---

(¹) *Voir* le cours autographié de KLEIN : *Nicht Euclidische Geometrie*, t. II, p. 119 et 120.

Pour cela, considérons deux trièdres T, T′ dont les coordonnées relativement à un même trièdre initial $T_1$ soient $\lambda, \mu, \nu, \rho$; $\lambda', \mu', \nu', \rho'$; appelons P, P′ les points images de $(T_1, T)$ et $(T_1, T')$. Observons que les coordonnées de $T_1$ relativement à T sont $-\lambda, -\mu, -\nu, \rho$; les formules (8), (1) et (I, 3) [1] montrent que *la distance cayleyenne* $\overline{PP'}$ *représente la moitié de l'angle de la rotation amenant* T *à coïncider avec* T′.

**12.** Soit $\Sigma$ un solide [2] ayant un point fixe O. La représentation analytique habituelle d'un déplacement continu de $\Sigma$ relativement à l'espace fixe $\Sigma_1$ consiste à choisir deux trièdres $T_1$, T liés invariablement, le premier à $\Sigma_1$, le second à $\Sigma$ et à considérer les coordonnées de T relativement à $T_1$ comme fonctions d'un ou de deux paramètres.

Le point P image du système $(T_1, T)$ décrit une courbe (C) ou une surface (S) selon que le déplacement est à un ou deux paramètres. Nous dirons que cette figure, courbe ou surface, est l'*image* du déplacement de $\Sigma$.

Mais le choix des trièdres $T_1$ et T est possible d'une infinité de façons; il y a donc une infinité de figures images d'un même déplacement.

On peut dire, d'après ce qui précède :

*Un même déplacement de $\Sigma$ relativement à $\Sigma_1$ a pour image l'une quelconque des figures, lignes ou surfaces, se déduisant d'une figure donnée par un déplacement cayleyen* [3].

Nous utiliserons souvent l'arbitraire que comporte le choix de la figure image du déplacement, pour donner à cette figure une position simple relativement au tétraèdre de référence; nous obtiendrons, en même temps, une représentation analytique commode du déplacement.

---

(1) Nous indiquerons ainsi les formules du Chapitre I.

(2) Le mot *solide* est employé ici pour faciliter l'intuition du déplacement de deux espaces euclidiens superposés.

(3) Pour abréger, nous dirons que ces figures sont égales entre elles.

13. Appliquons ceci à quelques exemples de déplacements algébriques.

Toutes les droites de l'espace cayleyen sont égales à la droite

$$\lambda = \mu = 0. \tag{12}$$

Un point de la droite (12) est l'image d'un système $(T_1, T)$ de trièdres ayant en commun l'axe $Oz_1$. Il en résulte qu'*une droite quelconque est l'image d'une rotation continue autour d'un axe fixe*.

Un *plan* cayleyen est égal au plan $\rho = 0$. Deux trièdres formant un système ayant pour image un point de ce plan se déduisent l'un de l'autre par un renversement. Un plan quelconque est donc l'image d'un déplacement à deux paramètres que l'on peut définir de la façon suivante : *Les diverses positions occupées par le solide mobile $\Sigma$ se déduisent d'un solide fixe $\Sigma_1$ par les renversements autour des droites passant par le point fixe* O.

On pourrait dire également que les diverses positions de $\Sigma$ se déduisent de l'une d'elles par les *rotations autour des axes, passant par* O, *situés dans un même plan.*

Une *courbe plane* de l'espace cayleyen est égale à une courbe du plan $\rho = 0$. Soient

$$\begin{cases} \rho = 0, \\ \varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

les équations d'une telle courbe. Cette courbe est l'image du déplacement d'un trièdre T relativement à un trièdre $T_1$. Mais, puisque $\rho = 0$, les systèmes $(T, T_1)$ et $(T_1, T)$ ont même point image, et le déplacement de $T_1$ relativement à T a encore pour image la courbe (13).

On parvient ainsi au résultat suivant.

*Une courbe plane de l'espace cayleyen est l'image d'un déplacement à un paramètre où les cônes roulettes fixe et mobile sont égaux; le roulement se fait de telle sorte que deux génératrices homologues de ces cônes égaux se confondent au cours du déplacement.*

D'ailleurs l'équation

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = 0 \tag{14}$$

représente un cône (les axes de coordonnées sont les arêtes de $T_1$). Les diverses positions de T se déduisent de $T_1$ par les renversements autour des génératrices de ce cône. La combinaison de deux renversements infiniment voisins donne la rotation infiniment petite permettant de passer d'une position du trièdre mobile à une position infiniment voisine. Ceci montre que *le cône roulette fixe est supplémentaire du cône* (14).

Les résultats précédents, appliqués aux *cercles cayleyens*, montrent que ces lignes sont les images des déplacements où les cônes roulettes sont des cônes de révolution égaux.

Il serait aisé de multiplier les exemples. L'étude des déplacements algébriques autour d'un point fixe serait assurément intéressante; mais elle sort du cadre que nous nous sommes fixé. Nous ne la poursuivrons pas; et nous abordons les propriétés infinitésimales des déplacements à un paramètre.

14. Soient (C) une courbe de l'espace cayleyen, $m$ et $m'$ deux points de cette courbe. (C) est l'image du déplacement à un paramètre d'un trièdre T relativement à un trièdre $T_1$. Désignons par ($\Gamma$) ce déplacement, par $t$ et $t'$ les positions de T correspondant à $m$ et $m'$.

Il existe une rotation autour d'un axe fixe faisant passer un trièdre mobile par les positions $t$ et $t'$. Le déplacement de ce second trièdre, relativement à $T_1$, a évidemment pour image la droite $mm'$.

Supposons $m'$ infiniment voisin de $m$.

La différentielle de l'arc cayleyen de la courbe (C) s'interprète, au point de vue du déplacement ($\Gamma$), en se rappelant que la distance cayleyenne $\overline{mm'}$ est la moitié de l'angle de la rotation amenant $t$ à coïncider avec $t'$.

Nous voyons ensuite que *la tangente en un point $m$ de la courbe* (C) *est l'image de la rotation tangente, pour la position $t$ du trièdre mobile, au déplacement* ($\Gamma$).

Deux courbes (C), (C') ayant un point commun $m$ sont les images de deux déplacements ($\Gamma$), ($\Gamma'$) rapportés au même trièdre fixe $T_1$, et dans chacun desquels le trièdre mobile vient coïncider avec un trièdre $t$.

Pour interpréter l'angle de (C) et (C') au point $m$, il suffit de se limiter au cas où (C) et (C′) sont des droites. En supposant que les coordonnées de $m$ soient o, o, o, 1, et achevant de déterminer les droites par leurs traces sur le plan $\rho = 0$, on voit que :

*L'angle cayleyen de deux courbes en un point m est égal à l'angle des axes des rotations tangentes aux déplacements correspondants (pour la position t du trièdre mobile correspondant à m).*

15. Nous allons chercher les éléments qui correspondent, dans un déplacement (Γ), à la courbure et à la torsion cayleyennes de la courbe image (C).

Déterminons d'abord les cônes roulettes fixe et mobile. Le déplacement (Γ) et la courbe (C) sont déterminés par les expressions en fonction d'un paramètre $u$ des coordonnées $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ du trièdre mobile $T(Oxyz)$ relativement à un trièdre $T_1(Ox_1y_1z_1)$. L'axe de la rotation instantanée s'obtient à l'aide des formules (8) [1]. On trouve ainsi, pour paramètres directeurs (relatifs à $Oxyz$) de cet axe

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \rho\frac{d\lambda}{du} - \lambda\frac{d\rho}{du} + \nu\frac{d\mu}{du} - \mu\frac{d\nu}{du},\\ \eta &= \rho\frac{d\mu}{du} - \mu\frac{d\rho}{du} + \lambda\frac{d\nu}{du} - \nu\frac{d\lambda}{du},\\ \zeta &= \rho\frac{d\nu}{du} - \nu\frac{d\rho}{du} + \mu\frac{d\lambda}{du} - \lambda\frac{d\mu}{du}.\end{aligned}\right.$$

Les formules précédentes prennent une forme plus élégante, si l'on utilise les relations

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1,$$

$$\lambda\frac{d\lambda}{du} + \mu\frac{d\mu}{du} + \nu\frac{d\nu}{du} + \rho\frac{d\rho}{du} = 0.$$

On trouve, en effet,

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{ds^2}{du^2},$$

$s$ étant l'arc cayleyen de (C), et, par suite :

*Les cosinus directeurs, relatifs à $Oxyz$, de l'une des directions que l'on*

---

(1) *Voir* la Note V des *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV, de M. Darboux.

*peut choisir sur l'axe de la rotation tangente sont donnés par*

$$(16)\qquad \begin{cases} P = \rho\lambda_1 - \lambda\rho_1 + \nu\mu_1 - \mu\nu_1, \\ Q = \rho\mu_1 - \mu\rho_1 + \lambda\nu_1 - \nu\lambda_1, \\ R = \rho\nu_1 - \nu\rho_1 + \mu\lambda_1 - \lambda\mu_1, \end{cases}$$

$\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1$ désignant, comme au n° 2, les dérivées $\frac{d\lambda}{ds}, \frac{d\mu}{ds}, \frac{d\nu}{ds}, \frac{d\rho}{ds}$.

Les formules (15) ou (16) déterminent bien le cône roulette mobile.

Pour trouver le cône roulette fixe, on cherche $P_1, Q_1, R_1$ cosinus directeurs de la direction précédente, relatifs à $Ox_1y_1z_1$. On emploie, à cet effet, les relations (16) et les formules d'O. Rodrigues. On peut aussi utiliser le déplacement inverse. Voici le résultat :

$$(17)\qquad \begin{cases} P_1 = \rho\lambda_1 - \lambda\rho_1 - \nu\mu_1 + \mu\nu_1, \\ Q_1 = \rho\mu_1 - \mu\rho_1 - \lambda\nu_1 + \nu\lambda_1, \\ R_1 = \rho\nu_1 - \nu\rho_1 - \mu\lambda_1 + \lambda\mu_1. \end{cases}$$

16. Nous supposerons maintenant que les coordonnées $\lambda, \mu, \nu, \rho$ sont données en fonction de l'arc $s$ de (C) pris comme paramètre par les séries (I, 15), et que le point au voisinage duquel on étudie (C) correspond à $s = 0$.

Les formules (16) et (17) donnent, dans ce cas,

$$(18)\qquad \begin{cases} P = \dfrac{s}{\mathcal{R}_0} - \dfrac{\left(\dfrac{d\mathcal{R}}{ds}\right)_0}{2\mathcal{R}_0} s^2 + \ldots, \\ Q = \dfrac{s^2}{2\mathcal{R}_0}\left(\dfrac{1}{\mathcal{T}_0} - 1\right) + \ldots, \\ R = 1 - \dfrac{s^2}{2\mathcal{R}_0^2} + \ldots, \end{cases}$$

$$(19)\qquad \begin{cases} P_1 = \dfrac{s}{\mathcal{R}_0} - \dfrac{\left(\dfrac{d\mathcal{R}}{ds}\right)_0}{2\mathcal{R}_0} s^2 + \ldots, \\ Q_1 = \dfrac{s^2}{2\mathcal{R}_0}\left(\dfrac{1}{\mathcal{T}_0} + 1\right) + \ldots, \\ R_1 = 1 - \dfrac{s^2}{2\mathcal{R}_0^2} + \ldots, \end{cases}$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur au second.

Lorsque $s$ varie, le point dont les coordonnées, relatives à $Oxyz$, sont P, Q, R décrit une courbe tracée sur une sphère de rayon égal à l'unité ayant l'origine pour centre. Cette courbe est la *roulette sphérique mobile;* on définit de même la *roulette sphérique fixe*.

Pour $s = 0$, le trièdre mobile coïncide avec le trièdre fixe, et les deux courbes précédentes sont tangentes au point A (0, 0, 1).

Soient $O\omega_f$, $O\omega_m$ les axes des cercles osculateurs en A aux roulettes sphériques fixe et mobile; désignons par $r_f$, $r_m$ les angles $AO\omega_f$, $AO\omega_m$, comptés positivement dans le sens de $Oz_1$ vers $Oy_1$. On a aisément les équations de ces axes et par suite les *formules*

$$(20)\qquad \begin{cases} \cot r_f = \mathcal{R}_0\left(\dfrac{1}{\mathfrak{T}_0} + 1\right), \\ \cot r_m = \mathcal{R}_0\left(\dfrac{1}{\mathfrak{T}_0} - 1\right), \end{cases}$$

*donnant les courbures des roulettes sphériques en fonction de la courbure et de la torsion cayleyenne;* le problème posé au début du n° 15 est ainsi résolu.

Les formules (20) donnent

$$(21)\qquad 2\mathcal{R}_0 = \cot r_f - \cot r_m.$$

On voit que $2\mathcal{R}_0$ est la constante $\frac{1}{k}$ qui figure dans la formule analogue, pour les déplacements considérés, à la formule de Savary relative aux déplacements d'une figure plane [1].

17. On trouve facilement, au moyen des formules (16) et (I, 11),

$$\frac{dP}{ds} = \frac{1}{\mathcal{R}}(\rho\lambda_2 - \lambda\rho_2 + \nu\mu_2 - \mu\nu_2)$$

et des expressions analogues pour $\dfrac{dQ}{ds}$, $\dfrac{dR}{ds}$.

On observera que ces expressions ne changent pas : 1° si l'on multiplie $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ par $-1$ (il faut alors, d'après la remarque du n° 4, multiplier aussi $\lambda_2$, $\mu_2$, $\nu_2$, $\rho_2$ par $-1$); 2° si l'on prend partout $s' = -s$

[1] *Voir* Koenigs, *Leçons de Cinématique*, p. 190.

au lieu de $s$ (*voir* n° 4, note). La même propriété appartient à $\mathcal{R}^2\frac{dP}{ds}$, $\mathcal{R}^2\frac{dQ}{ds}$, $\mathcal{R}^2\frac{dR}{ds}$.

Nous appellerons *point associé à la position t du trièdre mobile dans le déplacement* (Γ) le point B dont les coordonnées, relatives à $t$, sont $\mathcal{R}^2\frac{dP}{ds}$, $\mathcal{R}^2\frac{dQ}{ds}$, $\mathcal{R}^2\frac{dR}{ds}$.

Ce point est déterminé sans ambiguïté dès que (Γ) et $t$ sont connus; on peut le définir géométriquement de la façon suivante : il est situé dans le plan tangent commun aux deux cônes roulettes, sur la perpendiculaire à l'axe de la rotation tangente menée par le sommet O de ces cônes, à une distance du sommet $OB = \mathcal{R} = \frac{1}{2k}$. Voici, enfin, comment on précise le sens OB : en déplaçant le trièdre fixe de manière à amener $ox_1$ sur OB, $oz_1$ sur une direction OA arbitrairement choisie sur l'axe de la rotation tangente, il faut que les angles $r_m = \mathrm{AO}\omega_m$, $r_f = \mathrm{AO}\omega_f$, évalués algébriquement comme au n° 16, donnent pour la différence $\cot r_f - \cot r_m$ une valeur positive.

18. Interprétons maintenant les propriétés infinitésimales des surfaces.

Soit (S) une surface, (C) une courbe tracée sur cette surface, $m$ un point de cette courbe.

La surface (S) est l'image d'un déplacement à deux paramètres (Σ); la courbe (C) est celle d'un déplacement à un paramètre (Γ) *compris* dans le précédent, c'est-à-dire tel que toutes les positions occupées par le trièdre mobile au cours du second déplacement peuvent être obtenues au moyen du premier. Enfin à $m$ correspond une position $t$ du trièdre mobile.

La tangente à (C) en $m$ est l'image de la rotation tangente à (Γ) pour la position $t$ du trièdre mobile. Soit OA l'axe de cette rotation. (C) variant en passant toujours par $m$, la tangente précédente décrit un plan. On sait (n° 13) que, dans ces conditions, l'axe OA de la rotation tangente décrit un plan (passant par O) que nous appellerons *plan des rotations tangentes* relatif à $t$ et à (Σ).

**19.** Les propriétés infinitésimales du second ordre [1] sont résumées dans les formules (I, 19) et (I, 22). Pour les interpréter, considérons la surface (S) et le déplacement ($\Sigma$) déterminés par les expressions des coordonnées $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ en fonction de deux paramètres $u$, $v$; supposons que le point $m$, au voisinage duquel on étudie la surface, soit $0, 0, 0, 1$, que le plan tangent en ce point soit $\nu = 0$, et que les tangentes aux lignes de courbure soient $\lambda = \nu = 0$ et $\mu = \nu = 0$. On peut prendre alors $l' = m' = r' = 0$, $n' = 1$.

Le plan des rotations instantanées relatif à ($\Sigma$) et $t$ (correspondant à $m$) est $z = 0$.

La tangente en $m$ à une courbe (C) tracée sur (S) est située dans le plan $\nu = 0$; le point directeur de cette tangente est situé dans le même plan et dans le plan polaire de $m$ par rapport à l'absolu; donc $\nu_1 = \rho_1 = 0$. Comme $\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 + \rho_1^2 = 1$, on peut poser

$$\lambda_1 = \cos\alpha \qquad \mu_1 = \sin\alpha.$$

Des considérations analogues montrent que $\rho_2 = 0$, et que

$$\lambda_2 \cos\alpha + \mu_2 \sin\alpha = 0.$$

Posons

$$\lambda_2 = -\sin\alpha \sin\varphi, \qquad \mu_2 = \cos\alpha \sin\varphi, \qquad \nu_2 = \cos\varphi.$$

Les éléments précédents suffisent à déterminer la courbure de (C) en $m$. Nous la désignerons par $\frac{1}{\mathcal{R}_{\alpha,\varphi}}$, en supprimant le dernier indice lorsque $\varphi = 0$. Le plan osculateur à (C) en $m$ est alors normal à (S).

Désignons par $OA_\alpha$ l'axe de la rotation tangente à ($\Gamma$) pour la position $t$ du trièdre mobile; cet axe ne dépend que de $\alpha$ ou de la valeur de $\frac{du}{dv}$ correspondant à la tangente à (C) en $m$.

On a d'abord

$$\cos\theta = \varepsilon \cos\varphi. \tag{22}$$

Cherchons ensuite le point $B_{\alpha,\varphi}$ associé à ($\Gamma$) et $t$ (n° 17). Il a pour

---

[1] *Voir* le n° 7.

coordonnées, relativement à $t$,

$$-\mathcal{R}_{\alpha,\varphi}\sin\alpha\sin\varphi, \qquad \mathcal{R}_{\alpha,\varphi}\cos\alpha\sin\varphi, \qquad \mathcal{R}_{\alpha,\varphi}\cos\varphi.$$

Le plan perpendiculaire en $B_{\alpha,\varphi}$ à $OB_{\alpha,\varphi}$ coupe $Oz$ en un point $B_\alpha$ dont le $z$ a pour valeur $\frac{\mathcal{R}_{\alpha,\varphi}}{\cos\varphi}$. Mais si $\varphi$ varie seul, $\frac{du}{dv}$ est constant, et les formules (I, 20) et (22) montrent que

$$\frac{\mathcal{R}_{\alpha,\varphi}}{\cos\varphi} = \varepsilon\,\mathcal{R}_\alpha = [\mathcal{R}_\alpha],$$

en désignant toujours par $\frac{1}{[\mathcal{R}_\alpha]}$ la courbure algébrique de la section plane normale de (S) correspondant à $\frac{du}{dv}$.

On a donc le résultat suivant :

Considérons un déplacement à deux paramètres ($\Sigma$) et une position particulière $t$ du trièdre mobile. Soit ($\Gamma$) un déplacement à un paramètre compris dans le précédent, faisant passer le trièdre mobile par la position $t$, et tel que l'axe de la rotation tangente correspondant à $t$ soit une droite donnée $OA_\alpha$ (située dans le plan des rotations tangentes correspondant à ($\Sigma$) et $t$).

Les cônes roulettes fixe et mobile correspondant à ($\Gamma$) se touchent suivant $OA_\alpha$, lorsque le trièdre mobile occupe la position $t$. Leur plan tangent commun $OA_\alpha B_{\alpha\varphi}$ varie suivant le déplacement ($\Gamma$) considéré. *Le point* $B_{\alpha\varphi}$ *associé à* ($\Gamma$) *et* $t$ *est la projection sur ce plan tangent d'un point fixe* $B_\alpha$ situé sur la normale $OI$ au plan des rotations instantanées correspondant à ($\Sigma$) et à $t$.

Ce qui précède est la traduction du théorème de Meusnier généralisé, dans le langage de la géométrie du déplacement.

20. Remarquons maintenant que les rotations correspondant aux tangentes aux lignes de courbure en $m$ ($\lambda = \nu = 0$ et $\mu = \nu = 0$) ont précisément pour axes $Oy$ et $Ox$. L'angle $\alpha$ du numéro précédent peut donc être considéré comme identique à l'angle $\alpha$ du n° 7. Donc :

La loi de variation du point $B_\alpha$ sur la perpendiculaire au plan des rotations instantanées lorsque le plan $OB_\alpha A_\alpha$ tourne autour de cette perpendiculaire est identique à celle du centre de courbure d'une section plane normale d'une surface dans l'espace euclidien ordinaire, lorsque le plan de la section tourne autour d'une normale déterminée.

On peut observer, en définitive, que, $\alpha$ et $\varphi$ variant, $B_{\alpha,\varphi}$ décrit une surface qui est le lieu des centres de courbure, relatifs à un point donné, des courbes tracées sur une surface de l'espace euclidien.