

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. GUICHARD

Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 20 (1903), p. 75-132

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__75_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES
SYSTÈMES ORTHOGONAUX
ET LES
SYSTÈMES CYCLIQUES

(SUITE),

PAR M. C. GUICHARD,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND.

DEUXIÈME PARTIE.

INTRODUCTION.

Ce Mémoire forme la suite d'un travail publié dans ce Recueil en 1897 et 1898. Il contient le développement d'une partie des Notes publiées par l'Auteur dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, en 1897, 1898, 1899 et 1900.

Depuis la publication de la première Partie, les nouvelles méthodes introduites en Géométrie ont pris une extension considérable; elles ont permis, en outre, d'établir, très simplement, un grand nombre de propriétés géométriques nouvelles. De là découle naturellement la division de ce Mémoire en deux parties principales.

En premier lieu, il était nécessaire de compléter la théorie générale pour la mettre en harmonie avec les résultats acquis; c'est à ce résultat que sont consacrés les sept premiers Chapitres du précédent Mémoire.

Le Chapitre I contient les compléments à la théorie générale des réseaux et congruences.

Le Chapitre II renferme l'exposé de la loi des éléments orthogonaux. Ce nouveau principe me paraît devoir jouer, dans la Géométrie infinitésimale, un rôle aussi important que le principe de dualité dans la Géométrie algébrique.

Le Chapitre III est consacré à l'étude de certains systèmes particuliers (réseaux et congruences) dans un espace d'ordre quelconque. Quelques modifications ont été introduites à la notation adoptée dans la première Partie : ces modifications s'imposaient par la nécessité de tenir compte de la loi des éléments orthogonaux. D'autre part, il était nécessaire d'indiquer quelques propriétés des *réseaux orthogonaux singuliers*.

Les Chapitres IV, V et VI sont consacrés à l'étude de ces systèmes particuliers dans les espaces à trois, quatre ou cinq dimensions. Il nous a paru inutile de poursuivre cette étude dans d'autres espaces, attendu que les éléments que nous avons introduits suffisent pour établir les propriétés géométriques de l'espace ordinaire, ce qui est, au fond, notre but final.

Le Chapitre VII contient l'étude des systèmes de cercles et de sphères. Cette étude nous a permis de combler une lacune de notre théorie. Autrefois, notre méthode indiquait simplement les propriétés qui ne dépendent que de la direction des éléments ; c'est ainsi que dans certains problèmes nous avons signalé des réseaux qui ont même représentation sphérique qu'une surface isothermique ; mais, si l'on voulait trouver la surface isothermique elle-même, il fallait recourir aux procédés ordinaires ; de là une imperfection de la théorie, imperfection qui n'existe plus aujourd'hui.

En second lieu, il importait d'appliquer la théorie générale à des exemples. Les applications faites découlent toutes d'un problème unique : le problème des systèmes de sphères plusieurs fois C.

Nous avons montré les aspects variés sous lesquels se présente ce problème ; nous en avons déduit un certain nombre de transformations et nous avons indiqué les relations qui existent entre ces diverses transformations. Les Chapitres VIII et IX sont consacrés à l'étude générale de ce problème.

Dans le Chapitre X nous énumérons rapidement les propriétés des cas particuliers.

Le Chapitre XI est consacré à un cas particulier important : la théorie des surfaces isothermiques. Ce dernier Chapitre renferme un Paragraphe traitant de la déformation des quadriques de révolution ; on y trouvera la démonstration des résultats indiqués par l'Auteur dans une Note insérée le 20 janvier 1899 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

Dans un prochain Mémoire nous appliquerons nos théories générales à l'étude de la déformation des quadriques quelconques.

Enfin, il nous restera à déterminer, parmi les éléments de notre théorie, ceux qui correspondent à des équations intégrables par la méthode de Laplace.

Nous avons déjà donné dans les *Comptes rendus* quelques résultats relatifs à ces deux problèmes.

CHAPITRE I.

RÉSEAUX ET CONGRUENCES DANS L'ESPACE A n DIMENSIONS. COMPLÉMENTS.

SOMMAIRE.

1. Réseaux. Réseaux parallèles. — 2. Réseaux points. Coordonnées normales. — 3. Congruences. Congruences parallèles. — 4. Réseaux focaux. Congruences focales. — 5. Réseaux et congruences conjugués. — 6. Réseaux et congruences harmoniques. — 7. Relations entre les trois opérations précédentes. — 8. Propriété de deux congruences conjugués à un même réseau et de deux réseaux conjugués à une même congruence. — 9. Propriété de deux congruences harmoniques à un même réseau et de deux réseaux harmoniques à une même congruence.

I. Si x_1, x_2, \dots, x_n sont des fonctions de deux variables u et v satisfaisant à une équation de Laplace :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = P \frac{\partial x}{\partial u} + Q \frac{\partial x}{\partial v},$$

nous dirons que le point M dont les coordonnées sont x_1, x_2, \dots, x_n décrit un *réseau* dans l'espace à n dimensions.

Les droites MR et MS qui ont respectivement pour paramètres directeurs les quantités $\frac{\partial x_i}{\partial u}$ et $\frac{\partial x_i}{\partial v}$ sont les *tangentes* du réseau.

Deux points M(x_1, \dots, x_n) et N(y_1, \dots, y_n) décrivent des réseaux parallèles si les tangentes correspondantes sont parallèles, c'est-à-dire si l'on a

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial y_i}{\partial u} = H \frac{\partial x_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} = K \frac{\partial x_i}{\partial v}, \end{cases} \quad i = (1, 2, \dots, n).$$

Il y a une infinité de réseaux parallèles à un réseau donné [2] (¹).

2. Par l'origine O menons des droites Or, Os parallèles aux tangentes MR, MT du réseau; ce système de deux directions qui dépend de deux paramètres u et v forme ce que j'appelle le *réseau point* parallèle au réseau M.

Soient $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ les paramètres directeurs de Or; $\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_n$ ceux de Os. Pour que le système de deux directions Or, Os forme un réseau point, il faut et il suffit [2] que les paramètres satisfassent aux conditions

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi'_i}{\partial v} = A \xi'_i + B \eta'_i, \\ \frac{\partial \eta'_i}{\partial u} = C \xi'_i + D \eta'_i. \end{cases}$$

Posons

$$(4) \quad \xi'_i = \lambda \xi_i, \quad \eta'_i = \mu \eta_i,$$

où λ et μ sont déterminés par les équations

$$(5) \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = A, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial u} = D.$$

(¹) Les numéros entre crochets [] indiquent un envoi au numéro correspondant de la première Partie. Les numéros entre parenthèses () un renvoi à celui de la deuxième Partie.

Les relations (3) deviennent

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_i}{\partial v} = n\eta_i, \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial u} = m\xi_i. \end{cases}$$

On voit que les fonctions ξ sont déterminées à un facteur commun près qui est une fonction de u seul; les fonctions η à un facteur près, fonction de v seul.

Les quantités ξ , η ainsi définies sont les *coordonnées normales* du réseau point.

Soit alors $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un point qui décrit un réseau parallèle au réseau point donné. On devra avoir

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial u} = h\xi_i, \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} = l\eta_i. \end{cases}$$

Différentions la première de ces équations par rapport à u et la seconde par rapport à u ; on aura, en tenant compte des équations (6),

$$(8) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial h}{\partial v} \xi_i + hn\eta_i = \frac{\partial l}{\partial u} \eta_i + lm\xi_i,$$

d'où

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial v} = lm, \\ \frac{\partial l}{\partial u} = hn. \end{cases}$$

La résolution du système (9) permettra d'obtenir, à l'aide de quadratures, tous les réseaux parallèles au réseau point.

Les formules (7) et (8) montrent que les quantités x_1, x_2, \dots, x_n sont solutions de l'équation

$$(10) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Cette équation (10) est l'équation du réseau décrit par le point M .

En tenant compte des équations (6), (7) et (9) on aura

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} = h \frac{\partial \xi_i}{\partial v} + l \frac{\partial \eta_i}{\partial u}$$

et par conséquent x_i est solution de l'équation

$$(11) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{1}{\eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

Donc, toutes les coordonnées de même rang d'une série de réseaux parallèles satisfont à une même équation de Laplace.

3. Si les droites d'un espace à n dimensions dépendent de deux paramètres u et v , nous dirons que ces droites engendrent une *congruence* lorsque, l'une des quantités u ou v restant fixes, les droites correspondantes restent tangentes à une courbe.

Si l'on désigne par X_1, X_2, \dots, X_n les paramètres directeurs d'une droite d'une congruence, ces paramètres satisfont à une même équation de Laplace [3] :

$$(12) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = P \frac{\partial X}{\partial u} + Q \frac{\partial X}{\partial v} + RX.$$

Si l'on connaît n quantités X_1, \dots, X_n satisfaisant à l'équation (12) la détermination des congruences correspondantes se fait à l'aide de quadratures si l'on connaît une solution de l'équation [4],

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} + P \frac{\partial \lambda}{\partial u} + Q \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} - R \right) \lambda = 0.$$

Deux congruences sont dites *parallèles* si les droites qui se correspondent sont parallèles. Il y a lieu, toutefois, d'exclure, dans cette définition, le cas où les paramètres directeurs de la droite ne dépendent que d'une seule des variables u et v .

Si, par l'origine, on mène des droites parallèles aux droites d'une congruence, on obtient un système de droites, passant par un point fixe et dépendant de deux paramètres. Ce système peut être considéré comme la position limite d'une congruence : on l'appelle la *représentation sphérique* [4] de la congruence donnée.

4. Soit G une génératrice d'une congruence, si v reste fixe, la droite G reste tangente à une courbe en un point A; de même si u reste fixe la droite G reste tangente à une courbe en un point B. Ces points A et B sont les *foyers* de la congruence.

Quand v varie seul le point A décrit une courbe dont la tangente a pour paramètres directeurs

$$(14) \quad Y_i = \frac{\partial X_i}{\partial v} - P X_i,$$

d'où, en tenant compte de l'équation (12),

$$\frac{\partial Y_i}{\partial u} = Q \frac{\partial X_i}{\partial v} + \left(R - \frac{\partial P}{\partial u} \right) X_i,$$

On a donc

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_i}{\partial v} = Y_i + P X_i, \\ \frac{\partial Y_i}{\partial u} = Q Y_i + \left(P Q - \frac{\partial P}{\partial u} + R \right) X_i. \end{cases}$$

Ces formules (15) montrent que le point A décrit un réseau; il en est de même du point B; ces réseaux sont les *réseaux focaux* de la congruence.

La formule (14) met immédiatement en évidence le résultat suivant :

Si deux congruences sont parallèles les réseaux focaux correspondants sont parallèles.

Soit maintenant $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un point qui décrit un réseau; MT et MS ses tangentes. Un point quelconque $N(y_1, \dots, y_n)$ de la droite MT a des coordonnées de la forme

$$y_i = x_i + \rho \xi_i.$$

Dérivons par rapport à v et tenons compte des formules (6) et (7); on aura

$$\frac{\partial y_i}{\partial v} = \eta_i [l + n\rho] + \xi_i \frac{\partial \rho}{\partial v}$$

si l'on choisit ρ de telle sorte que

$$l + n\rho = 0,$$

le point N décrira, quand v varie seul, une courbe tangente à MT; il est clair, d'autre part, que si u varie seul le point M décrit une courbe tangente à MT; la droite MT décrit donc une congruence. Donc :

Les tangentes d'un réseau décrivent des congruences. Ces congruences sont les congruences focales du réseau.

Il est clair qu'on a le résultat suivant :

Si deux réseaux sont parallèles leurs congruences focales correspondantes sont parallèles.

5. Un réseau et une congruence sont *conjugués* si le point qui décrit le réseau est situé sur la droite qui décrit la congruence [3].

Si l'on coupe une congruence par un plan le point d'intersection décrit un réseau conjugué à la congruence [3].

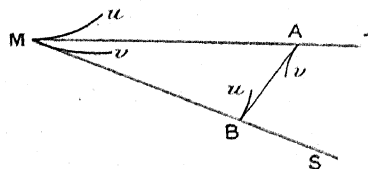
Les droites qui joignent un point fixe aux points d'un réseau décrivent une congruence limite conjuguée au réseau [4].

Si deux réseaux sont parallèles, toute congruence conjuguée à l'un est parallèle à une congruence conjuguée à l'autre [5].

Si deux congruences sont parallèles, tout réseau conjugué à l'une est parallèle à un réseau conjugué à l'autre [5].

6. Une congruence et un réseau sont *harmoniques* lorsque les foyers de la congruence sont situés sur les tangentes du réseau [6]. Le

Fig. 1.



système a alors la disposition indiquée par la *fig. 1* où l'on indique sur chaque courbe le paramètre qui varie quand on se déplace sur cette courbe.

Les coordonnées du point M étant x_1, x_2, \dots, x_n ; celles de A : X_1, X_2, \dots, X_n ; celles de B : Y_1, Y_2, \dots, Y_n . On aura [6]

$$(16) \quad \begin{cases} X_i = x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial u}} \frac{\partial x_i}{\partial u}, \\ Y_i = x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial v}} \frac{\partial x_i}{\partial v}, \end{cases}$$

θ étant une solution de l'équation (10) à laquelle satisfont les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n du point M qui décrit le réseau.

Si deux réseaux sont parallèles toute congruence harmonique à l'un est parallèle à une congruence harmonique à l'autre [6].

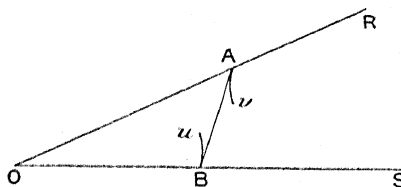
Si deux congruences sont parallèles tout réseau harmonique à l'une est parallèle à un réseau harmonique à l'autre [6].

L'intersection d'un réseau par un plan fixe décrit une congruence harmonique au réseau [6].

Si l'on joint un point fixe aux deux foyers d'une congruence on obtient un réseau point harmonique à cette congruence [6].

Soient, dans ce cas, OR(ξ_1, \dots, ξ_n), OS(η_1, \dots, η_n) les tangentes du réseau point; AB (fig. 2) la congruence harmonique. Les coordonnées

Fig. 2.



(X_1, \dots, X_n) de A et celles (Y_1, \dots, Y_n) de B peuvent être représentées par les formules :

$$(17) \quad X_i = \frac{\xi_i}{p}, \quad Y_i = \frac{\eta_i}{q}.$$

Nous allons écrire que si φ varie seul le point A décrit une courbe

tangente à AB et que si u varie seul le point B décrit une courbe tangente à AB. On devra donc avoir :

$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = \lambda \left(\frac{\xi_i}{p} - \frac{\eta_i}{q} \right), \quad \frac{\partial Y_i}{\partial u} = \mu \left(\frac{\xi_i}{p} - \frac{\eta_i}{q} \right),$$

ce qui donne :

$$-\frac{1}{p^2} \frac{\partial p}{\partial v} \xi_i + \frac{n}{p} \eta_i = \lambda \left(\frac{\xi_i}{p} - \frac{\eta_i}{q} \right),$$

d'où

$$\lambda = -\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial v}, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = nq,$$

on trouve de même

$$\mu = \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial u}, \quad \frac{\partial q}{\partial u} = mp.$$

On voit que pour obtenir les congruences harmoniques au réseau point il faut intégrer les équations

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial v} = nq \\ \frac{\partial q}{\partial u} = mp. \end{cases}$$

Les paramètres directeurs de la droite AB sont

$$(19) \quad \theta_i = q\xi_i - p\eta_i.$$

En tenant compte des équations (6) et (18) on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_i}{\partial u} &= q \frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u} \eta_i, \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial v} &= \frac{\partial q}{\partial v} \xi_i - p \frac{\partial \eta_i}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial q}{\partial v} \frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial \eta_i}{\partial v} + mn(q\xi_i - p\eta_i); \end{aligned}$$

donc les quantités θ_i sont solutions de l'équation

$$(20) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \left(mn - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial u} \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial v} \right) \theta.$$

7. Soit G une génératrice d'une congruence, A et B ses foyers, H

et K les secondes tangentes des réseaux A et B (*fig. 3*); M un point de C qui décrit un réseau conjugué à C; MR et MS les tangentes au réseau M; les foyers R et S des congruences MR et MS sont situés respectivement sur les droites H et K. Nous indiquons, dans la

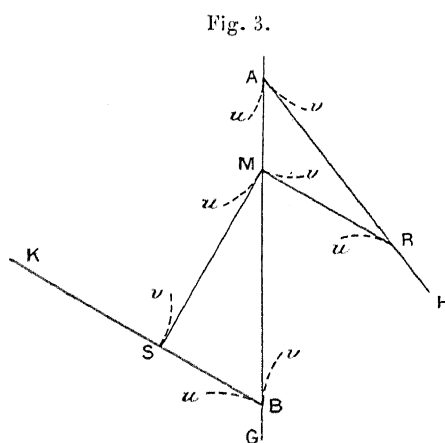


figure 3, quelles sont les tangentes des réseaux A, B, M, R, S quand une seule des quantités u ou v varie. On démontre facilement, par la Géométrie, dans le cas d'un espace à trois dimensions, par l'Analyse, dans le cas le plus général, que la disposition indiquée par la figure 3 est exacte.

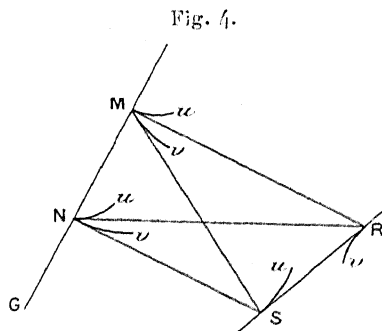
Cela posé, si l'on considère par exemple la congruence G et le réseau conjugué M, on voit que la congruence focale MR du réseau M est harmonique au réseau focal A de G. Donc :

Si un réseau et une congruence sont conjugués, une congruence focale du réseau est harmonique à un réseau focal de la congruence.

Considérons de même la congruence MR et le réseau A qui lui est harmonique; le réseau focal M de MR est conjugué à la congruence focale G de A. Donc :

Si un réseau et une congruence sont harmoniques, chaque réseau focal de la congruence est conjugué à une congruence focale du réseau.

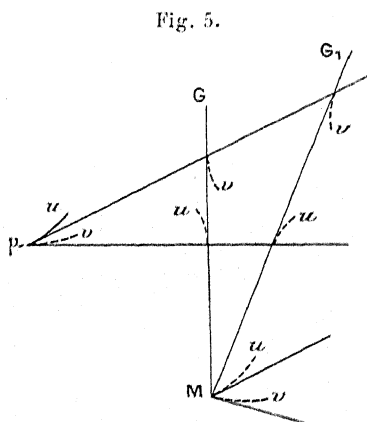
8. Soient M et N (*fig. 4*) deux réseaux conjugués à une même congruence G; les tangentes correspondantes de ces réseaux se



coupent en des points R et S; la droite RS décrit une congruence qui a pour foyers R et S [7]. Donc :

Si deux réseaux sont conjugués à une même congruence, la droite d'intersection de ces réseaux décrit une congruence harmonique à chacun d'eux.

Soient, de même, G et G_1 deux congruences conjuguées à un même



réseau M (*fig. 5*); il existera un réseau μ , harmonique aux congruences G et G_1 . Donc :

Si deux congruences sont conjuguées à un même réseau, ces deux congruences sont harmoniques à un autre réseau.

9. Soient G et G_1 deux congruences harmoniques à un même réseau μ (*fig. 5*); le point M d'intersection de G et G_1 décrit un réseau conjugué à chacune de ces congruences (7). Donc :

Si deux congruences sont harmoniques à un même réseau, le point d'intersection des droites correspondantes décrit un réseau conjugué à chacune de ces congruences.

Soient de même M et N (*fig. 4*) deux réseaux harmoniques à une même congruence RS ; la droite MN qui joint les points correspondants de ces réseaux décrit une congruence conjuguée à ces réseaux. Donc :

Si deux réseaux sont harmoniques à une même congruence, la droite qui joint les points correspondants de ces réseaux décrit une congruence conjuguée à chacun d'eux.

CHAPITRE II.

LA LOI DES ÉLÉMENTS ORTHOGONAUX.

SOMMAIRE.

10. Rappel des résultats établis. — 11. Espaces d'ordre impair. Congruences et réseaux orthogonaux. Propriétés focales. — 12. Propriété des éléments conjugués. — 13. Propriété des éléments harmoniques. — 14. Espaces d'ordre pair. Congruences orthogonales. Réseaux orthogonaux. Propriétés focales. — 15. Propriété des éléments harmoniques et conjugués — 16. Passage d'un espace à celui d'ordre moindre. — 17. Réseaux semi-orthogonaux.

10. La loi des éléments orthogonaux fait correspondre, dans les espaces d'ordre impair, un réseau à une congruence, et, inversement, dans les espaces d'ordre pair, un réseau à un réseau et une congruence à une congruence.

J'ai établi antérieurement les propriétés de cette correspondance pour l'espace ordinaire. Les propriétés des éléments focaux ont été indiquées, en 1893, dans une Note insérée aux *Comptes rendus* (*Sur certaines propriétés géométriques qui ne dépendent que de la représenta-*

tion sphérique); les propriétés des éléments conjugués ou harmoniques ont été établies dans la première Partie de ce travail [9].

Enfin, j'ai donné quelques applications de cette correspondance [Sur quelques applications de la loi de parallélisme des éléments (*Comptes rendus*, 1899)]. Nous avons donné jusqu'ici, aux éléments correspondants, le nom d'éléments parallèles. Cette terminologie ne présente aucun inconvénient pour l'espace ordinaire; mais, dans les espaces d'ordre pair, elle pourrait donner lieu à une confusion, les mots *congruences parallèles*, *réseaux parallèles* étant déjà pris dans un autre sens; c'est pourquoi, désormais, nous appellerons *éléments orthogonaux* les éléments liés par la correspondance que nous allons définir.

Au point de vue analytique, cette théorie est une application des propriétés des expressions (m, n) de M. Darboux (*Leçons*, 2^e Partie, Chap. VIII).

11. *Espaces d'ordre impair*. — Dans un espace d'ordre $n = 2p + 1$, considérons un réseau point (OR, OS); soient $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ les coordonnées normales du réseau (2); nous déterminerons à un facteur commun près n quantités x_1, x_2, \dots, x_n par les $2p$ équations linéaires suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum x \xi = 0, \\ \sum x \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum x \frac{\partial^{p-1} \xi}{\partial u^{p-1}} = 0, \\ \sum x \eta = 0, \\ \sum x \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum x \frac{\partial^{p-1} \eta}{\partial v^{p-1}} = 0. \end{array} \right.$$

Dans ces équations nous avons, pour simplifier l'écriture, représenté par $\sum AB$ la somme $\sum A_i B_i$.

Si l'on tient compte des relations qui existent entre les coordonnées normales [équation (6), Chap. I], on voit que le système (2) est équivalent au suivant :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum x \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \\ \sum x \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum x \frac{\partial^p \xi}{\partial v^p} = 0. \end{array} \right.$$

De même le système (1) est équivalent au système

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum x \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0, \\ \sum x \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum x \frac{\partial^p \eta}{\partial u^p} = 0. \end{array} \right.$$

Les quantités x définies par les équations (1) et (3) satisfont (DARBOUX, *Leçons*, deuxième Partie, n° 405) à une même équation de Laplace. Ces quantités sont les paramètres directeurs d'une droite qui décrit une congruence (G). La congruence G est dite *orthogonale* au réseau.

Des équations (1) et (3) on déduit par différentiations successives les équations

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \xi x = 0, \\ \sum \xi \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum \xi \frac{\partial^{p-1} x}{\partial u^{p-1}} = 0, \end{array} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \xi \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \\ \sum \xi \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum \xi \frac{\partial^p x}{\partial v^p} = 0. \end{array} \right.$$

Cela posé, soient (G) une congruence parallèle à la congruence (G), F le point où la droite G touche sa surface focale quand u varie seul; les coordonnées normales du réseau F sont de la forme

$$(7) \quad \xi'_i = A x_i, \quad \eta'_i = B x_i + C \frac{\partial x_i}{\partial v},$$

A, B, C étant des fonctions de u et v qu'il est inutile de calculer; les équations (5) et (6) peuvent s'écrire

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \xi \xi'_i = 0, \\ \sum \xi \frac{\partial \xi'_i}{\partial u} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum \xi \frac{\partial^{p-1} \xi'_i}{\partial u^{p-1}} = 0; \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \xi \eta'_i = 0, \\ \sum \xi \frac{\partial \eta'_i}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum \xi \frac{\partial^{p-1} \eta'_i}{\partial v^{p-1}} = 0; \end{array} \right.$$

donc toute congruence parallèle à OR est orthogonale au réseau F.

Soient alors

(M) un réseau parallèle au réseau point ORS;

MR_i et MS_i ses tangentes;

(G) une congruence orthogonale au réseau point et, par conséquent, au réseau M;

F et F_i les réseaux focaux de cette congruence correspondant aux variables u et v ;

MR_i décrira une congruence orthogonale au réseau F et MS_i une congruence orthogonale au réseau F_i.

Supposons la congruence (G) donnée; soient MR_i une congruence

orthogonale à son réseau F; M le point où MR₁ touche son enveloppe quand *u* varie seul; d'après ce qui précède, la congruence G sera orthogonale au réseau M.

Ainsi, à chaque direction de congruence on fait correspondre une direction de réseau, et inversement; les réseaux et les congruences ainsi associés sont dits *orthogonaux*, et l'on a le théorème suivant, qui donne les propriétés focales des réseaux et congruences associés :

Si une congruence (G) et un réseau M sont orthogonaux, le réseau focal F de (G) qui correspond à la variable u et la congruence focale MR du réseau M qui correspond à la variable u sont orthogonaux.

Il en résulte que les diverses congruences déduites de (G) par l'application de la méthode de Laplace sont orthogonales aux réseaux de même rang déduits de (M) par la méthode de Laplace.

12. Soit M(*y*₁, *y*₂, . . . , *y*_{*n*}) un réseau parallèle au réseau point ORS; on aura [équation (7), Chap. I]

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = h\xi_i, \quad \frac{\partial y_i}{\partial v} = t\eta_i,$$

et, par conséquent, les formules (1) et (2) donnent

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum x \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \\ \sum x \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum x \frac{\partial^p y}{\partial u^p} = 0; \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum x \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \\ \sum x \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum x \frac{\partial^p y}{\partial v^p} = 0. \end{array} \right.$$

Remarquons que les quantités y_1, y_2, \dots, y_n satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v},$$

et que, par conséquent, les équations

$$(11) \quad \sum x \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \sum x \frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

entraînent l'équation

$$(12) \quad \sum x \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0.$$

Des équations (11) et (12) on déduit en différentiant

$$(13) \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

et, par conséquent, si l'on pose

$$(14) \quad \theta = \sum x y.$$

on aura

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial u} = \sum \frac{\partial x}{\partial u} y, \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial v} y, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} y. \end{array} \right.$$

Les équations (14) et (15) montrent que θ satisfait à la même équation de Laplace que les quantités x_1, x_2, \dots, x_n . Il en résulte que le point $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ dont les coordonnées sont

$$X_i = \frac{1}{\theta} x_i$$

décrit un réseau (P) conjugué à la congruence point (G) qui a pour paramètres directeurs x_1, x_2, \dots, x_n . En introduisant, au lieu de x ,

les quantités X dans les équations (9), (10) et (14), on aura

$$(16) \quad \sum X y = 1,$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum X \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \\ \sum X \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum X \frac{\partial^p y}{\partial u^p} = 0, \end{array} \right.$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum X \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \\ \sum X \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum X \frac{\partial^p y}{\partial v^p} = 0. \end{array} \right.$$

De ces équations on déduit

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum y \frac{\partial X}{\partial u} = 0, \\ \sum y \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum y \frac{\partial^p X}{\partial u^p} = 0; \end{array} \right.$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum y \frac{\partial X}{\partial v} = 0, \\ \sum y \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum y \frac{\partial^p X}{\partial v^p} = 0. \end{array} \right.$$

Les équations (19) et (20) montrent que la congruence (H), qui a pour paramètres directeurs y_1, y_2, \dots, y_n , est orthogonale au réseau (P), qui a pour coordonnées X_1, X_2, \dots, X_n . Or on obtient [5]

toutes les directions de congruences conjuguées à une direction de réseau en joignant un point fixe à un réseau parallèle à la direction donnée; donc :

Si un réseau est orthogonal à une congruence, toute congruence conjuguée au réseau est orthogonale à un réseau conjugué à la congruence.

En reprenant les calculs en sens inverse, on démontrerait que réciproquement :

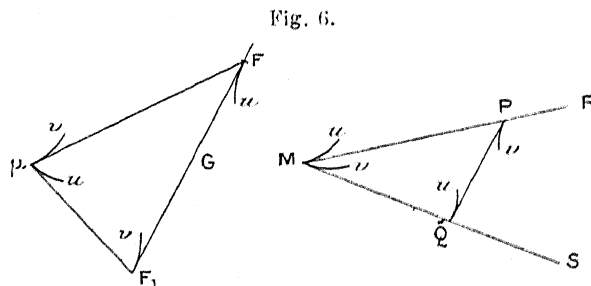
Si une congruence est orthogonale à un réseau, tout réseau conjugué à la congruence est orthogonal à une congruence conjuguée au réseau.

13. Soient

(G) une congruence, F et F_1 ses foyers (*fig. 6*);

(M) un réseau orthogonal à G, MR et MS les tangentes de ce réseau;

(μ) un réseau harmonique à (G);



on sait (7) que les tangentes du réseau (μ) sont μF_1 et μF . La congruence décrite par μF étant conjuguée au réseau (F) orthogonal à la congruence (MR), il y aura (12) sur MR un point P qui décrit un réseau orthogonal à la congruence (μF); soit PQ la tangente à ce réseau quand ν varie seul; la congruence (PQ) est harmonique au réseau (M); d'autre part, la congruence focale (PQ) du réseau P est orthogonale (11) au réseau focal (μ) de la congruence (μF), donc :

Si une congruence est orthogonale à un réseau, tout réseau harmonique à la congruence est orthogonal à une congruence harmonique au réseau.

En reprenant les raisonnements en sens inverse, on démontrera de même que :

Si un réseau est orthogonal à une congruence, toute congruence harmonique au réseau est orthogonale à un réseau harmonique à la congruence.

14. *Espaces d'ordre pair.*

Considérons un espace d'ordre $n = 2p$; soit (\mathcal{G}) une congruence de cet espace, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ les paramètres directeurs d'une droite \mathcal{G} de cette congruence; déterminer n fonctions x_1, x_2, \dots, x_n par les équations

$$(21) \quad \sum xy = 0,$$

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum x \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum x \frac{\partial^{p-1} y}{\partial u^{p-1}} = 0, \end{array} \right.$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum x \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum x \frac{\partial^{p-1} y}{\partial v^{p-1}} = 0. \end{array} \right.$$

Ces équations déterminent, *en général*, les fonctions x à un facteur commun près; ces fonctions x satisfont (DARBOUX, *Leçons*, deuxième Partie, n° 403) à une même équation de Laplace; x_1, x_2, \dots, x_n sont les paramètres directeurs d'une droite \mathcal{G} qui décrit une congruence (\mathcal{G}) .

Des équations (21), (22), (23) on déduit

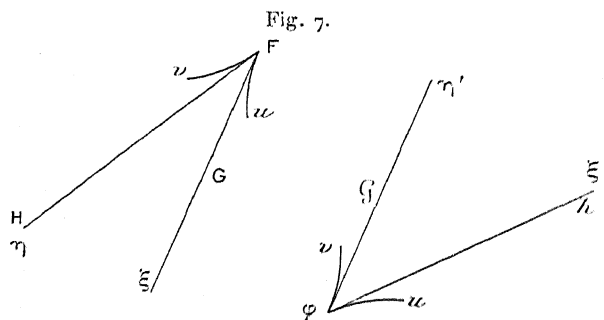
$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum y \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum y \frac{\partial^{p-1} x}{\partial u^{p-1}} = 0, \end{array} \right.$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum y \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum y \frac{\partial^{p-1} x}{\partial v^{p-1}} = 0. \end{array} \right.$$

On voit qu'il y a réciprocity entre les x et les y ou entre les con-

gruences (G) et (g). Ces congruences sont dites *orthogonales*.

Considérons le foyer F de G, qui correspond à la variable u , et le foyer φ de g qui correspond à la variable v ; soient H et h (fig. 7) les secondes tangentes des réseaux F et φ .



Mettons en évidence les coordonnées normales ξ, η du réseau F et ξ', η' du réseau φ ; les quantités x sont proportionnelles aux quantités ξ et les quantités y aux fonctions η' , de sorte que les équations précédentes peuvent s'écrire

$$(26) \quad \sum \xi \eta' = 0,$$

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \xi \frac{\partial \eta'}{\partial u} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum \xi \frac{\partial^{p-1} \eta'}{\partial u^{p-1}} = 0, \end{array} \right.$$

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \xi \frac{\partial \eta'}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum \xi \frac{\partial^{p-1} \eta'}{\partial v^{p-1}} = 0, \end{array} \right.$$

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \eta' \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum \eta' \frac{\partial^{p-1} \xi}{\partial u^{p-1}} = 0, \end{array} \right.$$

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \eta' \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum \eta' \frac{\partial^{p-1} \xi}{\partial v^{p-1}} = 0, \end{array} \right.$$

Mais la relation

$$\frac{\partial \xi'}{\partial v} = n' \eta'$$

montre que $\eta' \frac{\partial \eta'}{\partial v}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \eta'}{\partial v^{p-1}}$ sont fonctions linéaires de $\frac{\partial \xi'}{\partial v}, \frac{\partial^2 \xi'}{\partial v^2}, \dots, \frac{\partial^p \xi'}{\partial v^p}$; de sorte que les équations (26) et (28) donnent

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \xi \frac{\partial \xi'}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum \xi \frac{\partial^p \xi'}{\partial v^p} = 0. \end{array} \right.$$

La première des équations (27) donne (on suppose $m' \geq 0$)

$$(32) \quad \sum \xi \xi' = 0.$$

Les équations (31) et (32) sont équivalentes aux suivantes :

$$(33) \quad \sum \xi' \xi = 0,$$

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \xi' \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum \xi' \frac{\partial^p \xi}{\partial v^p} = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on remarque que

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = n \eta,$$

et que, par conséquent, $\frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}, \dots, \frac{\partial^p \xi}{\partial v^p}$ sont fonctions linéaires de $\eta, \frac{\partial \eta}{\partial v}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \eta}{\partial v^{p-1}}$, on pourra écrire les équations (34)

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \xi' \eta = 0, \\ \sum \xi' \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum \xi' \frac{\partial^{p-1} \eta}{\partial v^{p-1}} = 0. \end{array} \right.$$

De même, en tenant compte de

$$\frac{\partial \eta'}{\partial u} = m' \zeta',$$

on pourra écrire les équations (27)

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \xi \zeta' = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum \xi \frac{\partial^{p-2} \zeta'}{\partial u^{p-2}} = 0 \end{array} \right.$$

qui entraînent les suivantes :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \xi' \zeta = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum \xi' \frac{\partial^{p-2} \zeta}{\partial u^{p-2}} = 0. \end{array} \right.$$

Mais, à cause de la condition

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = m \zeta,$$

les équations (37) deviennent

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \xi' \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum \xi' \frac{\partial^{p-1} \eta}{\partial u^{p-1}} = 0. \end{array} \right.$$

Les équations (35) et (38) montrent que les congruences (h) et (H) sont orthogonales.

Cela posé, considérons un réseau quelconque F; soit (G) la congruence focale quand u varie, (g) une congruence orthogonale à (G); φ le réseau focal de (g) quand v varie; les réseaux F et φ sont dits *orthogonaux*.

D'après ce qui précède, on peut énoncer les résultats suivants :

Si deux congruences sont orthogonales le réseau focal u de l'une est orthogonal au réseau focal v de l'autre.

Si deux réseaux sont orthogonaux la congruence focale u de l'un est orthogonale à la congruence focale v de l'autre.

15. Soient ORS (ξ, η) ; OR'S' (ξ', η') deux réseaux points orthogonaux; M (y_1, y_2, \dots, y_n) un réseau parallèle à OR'S', de sorte que l'on a

$$\frac{\partial y}{\partial u} = h\xi', \quad \frac{\partial y}{\partial v} = t\eta'.$$

En tenant compte de ces relations on peut écrire, de la façon suivante, les conditions d'orthogonalité des réseaux :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sum \xi \frac{\partial y}{\partial u} = 0, & \sum \xi \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \sum \xi \frac{\partial^{p-1} y}{\partial u^{p-1}} = 0, & \sum \xi \frac{\partial^p y}{\partial v^p} = 0, \end{array} \right.$$

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sum \eta \frac{\partial y}{\partial u} = 0, & \sum \eta \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \sum \eta \frac{\partial^p y}{\partial u^p} = 0, & \sum \eta \frac{\partial^{p-1} y}{\partial v^{p-1}} = 0. \end{array} \right.$$

Cela posé, si l'on fait

$$(41) \quad \Lambda = \sum \xi \eta, \quad B = \sum \eta y,$$

on aura

$$(42) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial v} = n B, \quad \frac{\partial B}{\partial u} = m \Lambda.$$

Posons maintenant

$$(43) \quad x = B\xi - \Lambda\eta,$$

On aura évidemment

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sum xy = 0, \\ \sum x \frac{\partial y}{\partial u} = 0, & \sum x \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \sum x \frac{\partial^{p-1} y}{\partial u^{p-1}} = 0, & \sum x \frac{\partial^{p-1} y}{\partial v^{p-1}} = 0. \end{array} \right.$$

Ces équations montrent que les congruences $G(x_1, \dots, x_n)$ et $\mathcal{G}(y_1, \dots, y_n)$ sont orthogonales. Or la congruence G est harmonique au premier réseau (6); la congruence \mathcal{G} est conjuguée au second; en choisissant convenablement le réseau M on peut obtenir une direction quelconque de congruence conjuguée au second réseau. Il faut démontrer aussi que l'on obtient ainsi toutes les congruences harmoniques au premier. Il suffit pour cela de vérifier que, si A et B sont des solutions du système (42), les n valeurs de γ déterminées par les équations

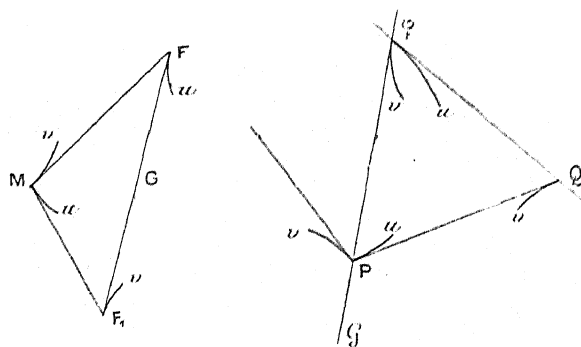
$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \sum \xi \gamma, \quad B = \sum \eta \gamma, \\ \frac{\partial A}{\partial u} = \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \gamma, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = \sum \frac{\partial \eta}{\partial v} \gamma, \\ \dots, \dots, \\ \frac{\partial^{p-1} A}{\partial u^{p-1}} = \sum \frac{\partial^{p-1} \xi}{\partial u^{p-1}} \gamma, \quad \frac{\partial^{p-1} B}{\partial v^{p-1}} = \sum \frac{\partial^{p-1} \eta}{\partial v^{p-1}} \gamma \end{array} \right.$$

satisfont aux conditions (38) et (48); cette vérification est facile; donc :

Si deux réseaux sont orthogonaux toute congruence conjuguée à l'un est orthogonale à une congruence harmonique à l'autre et inversement.

Soit maintenant G et \mathcal{G} deux congruences orthogonales; le réseau F

Fig. 8.



de G est orthogonal au réseau \mathcal{z} de \mathcal{G} (fig. 8); soit M un réseau quelconque harmonique à G ; la congruence focale φ de M passe par F et

est conjuguée au réseau F; donc il existera une congruence (PQ) harmonique à φ et orthogonale à (MF); les réseaux focaux (M) et (P) de ces congruences sont orthogonaux, or P est conjuguée à \mathcal{G} . En faisant les raisonnements en sens inverse, on montrerait que tout réseau P conjugué à \mathcal{G} est orthogonal à un réseau M harmonique à G; donc :

Si deux congruences sont orthogonales tout réseau conjugué à l'une est orthogonal à un réseau harmonique à l'autre, et inversement.

16. Prenons dans un espace d'ordre $n = 2p + 1$ une congruence $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ orthogonale à un réseau ORS $(\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_n)$; soit θ une solution de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les quantités x_1, x_2, \dots, x_n ; posons

$$X_i = \frac{x_i}{\theta}.$$

Les équations (5) et (6) et les équations analogues obtenues en remplaçant ξ par η donnent

$$(46) \quad \begin{cases} \sum \xi \frac{\partial X}{\partial v} = 0, & \sum \eta \frac{\partial X}{\partial u} = 0, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \sum \xi \frac{\partial^p X}{\partial v^p} = 0, & \sum \eta \frac{\partial^p X}{\partial u^p} = 0. \end{cases}$$

Si l'on suppose $\theta = x_n, X_n = 1$; dans les sommes (46) le terme qui correspond à la coordonnée d'ordre n est nul; on peut donc supposer que les sommes (46) sont effectuées sur les $(n - 1)$ premières coordonnées; sous cette forme les équations montrent que le point M qui a pour coordonnées $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ décrit un réseau orthogonal à celui qui a pour coordonnées normales $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}; \eta_1, \dots, \eta_{n-1})$; donc :

Si dans un espace d'ordre $2p + 1$ une congruence G et un réseau R sont orthogonaux, la trace de la congruence G dans un espace d'ordre $2p$ et la projection du réseau R dans le même espace forment deux réseaux orthogonaux.

On démontre de même les résultats suivants que nous nous bornons à énoncer :

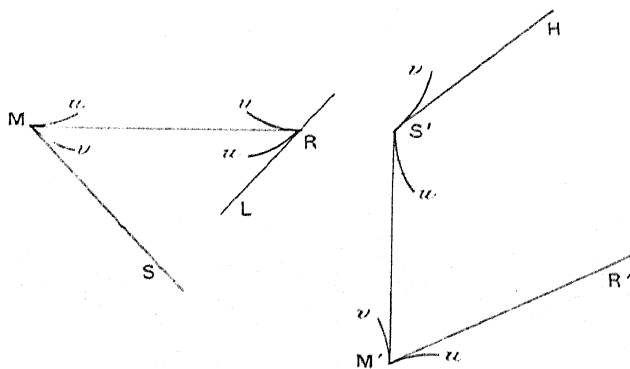
Si dans un espace d'ordre $2p + 1$ une congruence G et un réseau R sont orthogonaux, la projection de G sur un espace d'ordre $2p$ et la trace de R sur le même espace forment deux congruences orthogonales.

Si dans un espace d'ordre $2p$ deux congruences sont orthogonales, la projection de l'une sur un espace d'ordre $2p - 1$ et la trace de l'autre sur le même espace forment une congruence et un réseau orthogonaux.

Si dans un espace d'ordre $2p$ deux réseaux sont orthogonaux, la trace de l'un sur un espace d'ordre $2p - 1$ et la projection de l'autre sur le même espace forment une congruence et un réseau orthogonaux.

17. Deux réseaux $M(x_1, \dots, x_n)$ et $M'(x'_1, \dots, x'_n)$ sont dits *semi-orthogonaux* si la tangente de paramètre u de l'un est perpendiculaire à la tangente de paramètre v de l'autre (*fig. 9*).

Fig. 9.



Si $\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_n$ sont les paramètres normaux des tangentes MR, MS du premier réseau; $\xi'_1, \dots, \xi'_n; \eta'_1, \dots, \eta'_n$ ceux des tangentes $M'R', M'S'$ du second, on aura :

$$(47) \quad \sum \xi \eta' = 0, \quad \sum \eta \xi' = 0.$$

On en déduit par différentiation, en tenant compte des équations

$$(48) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial v} = n \eta, & \frac{\partial \eta}{\partial u} = m \xi, \\ \frac{\partial \xi'}{\partial v} = n' \eta', & \frac{\partial \eta'}{\partial u} = m' \xi', \end{cases}$$

$$(49) \quad \begin{cases} \sum \eta' \frac{\partial \xi}{\partial u} = -m' \sum \xi \xi', \\ \sum \xi \frac{\partial \eta'}{\partial v} = -n \sum \eta \eta', \\ \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \eta'}{\partial v} = -\frac{\partial m'}{\partial v} \sum \xi \xi' - \frac{\partial n}{\partial u} \sum \eta \eta'. \end{cases}$$

Soient (R) et (S') les seconds réseaux focaux des congruences (MR) et (M'S'), je vais démontrer que ces réseaux sont semi-orthogonaux; les tangentes RM et S'M' de ces réseaux sont déjà perpendiculaires; il reste à établir qu'il en est de même des tangentes RL et S'H.

Or les coordonnées (y_1, \dots, y_n) du point R peuvent s'écrire

$$y = x + \rho \xi.$$

En différentiant on trouve

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u} = \xi \left(h + \frac{\partial \rho}{\partial u} \right) + \rho \frac{\partial \xi}{\partial u}, \\ \frac{\partial y}{\partial v} = \xi \frac{\partial \rho}{\partial v} + \eta (l + n \rho). \end{cases}$$

Pour obtenir le foyer R il faut supposer

$$l + n \rho = 0.$$

En différentiant cette équation par rapport à u on aura

$$(51) \quad n \left(h + \frac{\partial \rho}{\partial u} \right) + \rho \frac{\partial n}{\partial u} = 0.$$

La comparaison de la première équation (50) et de l'équation (51) montre que les paramètres directeurs de RL sont proportionnels :

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} \quad \frac{\partial n}{\partial u}$$

On voit de même que ceux de S'H sont proportionnels :

$$m' \frac{\partial \eta'}{\partial v} - \frac{\partial m'}{\partial v} \eta'.$$

Il faut donc vérifier que

$$\sum \left(n \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial n}{\partial u} \xi \right) \left(m' \frac{\partial \eta'}{\partial v} - \frac{\partial m'}{\partial v} \eta' \right) = 0,$$

ce qui est immédiat, en tenant compte des équations (47) et (49).

En particulier, si le réseau M est orthogonal, il est semi-orthogonal à lui-même; donc les seconds réseaux focaux (R) et (S) de ses congruences focales sont semi-orthogonaux.

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS COMMUNES A TOUS LES ESPACES.

SOMMAIRE.

18. Réseaux rectangulaires. — 19. Réseaux O, p , O. — 20. Réseaux nuls. Réseaux applicables. — 21. Congruences I, p , I. — 22. Congruences G, p , G. — 23. Congruences nulles. Congruences applicables. — 24. Réseaux conjugués aux congruences p , I. Congruences conjuguées aux réseaux p , O. — 25. Congruences harmoniques aux réseaux p , O. Réseaux harmoniques aux congruences p , G. — 26. Congruences harmoniques aux réseaux applicables. Réseaux harmoniques aux congruences p , I. — 27. Congruences conjuguées aux réseaux applicables. Réseaux conjugués aux congruences applicables.

18. Un point $M(X_1, \dots, X_n)$ décrit un réseau *rectangulaire* lorsque les tangentes à ce réseau sont perpendiculaires; soient alors $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$; $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ les paramètres normaux des tangentes MR, MS du réseau; on devra avoir

$$(1) \quad \sum \xi_i \eta_i = 0.$$

On aura ensuite

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u} = h\xi, & \frac{\partial X}{\partial v} = t\eta, \\ \frac{\partial h}{\partial v} = lm, & \frac{\partial l}{\partial u} = hn, \end{cases}$$

et par conséquent

$$(3) \quad \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = 0.$$

Les coordonnées X_1, \dots, X_n satisfont à l'équation

$$(4) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}.$$

L'équation (3) est équivalente à la propriété suivante :

L'équation (4) admet la solution

$$(5) \quad \rho = \sum X^2.$$

Cette propriété caractérise donc les réseaux rectangulaires.

De l'équation (1) on déduit :

$$\frac{\partial}{\partial v} \sum \xi^2 = 2n \sum \xi \eta = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \sum \eta^2 = 2m \sum \xi \eta = 0,$$

et par conséquent

$$(6) \quad \sum \xi^2 = U, \quad \sum \eta^2 = V,$$

U étant fonction de u seul et V de v seul; si U et V ne sont pas nuls, on pourra (2) réduire, par un changement de variables, ces fonctions à l'unité. Dans le cas général, on pourra supposer

$$(7) \quad \sum \xi^2 = 1, \quad \sum \eta^2 = 1,$$

et par suite

$$(8) \quad \sum dX^2 = h^2 du^2 + l^2 dv^2.$$

Si, au contraire, U est ^{nul} nul, on aura

$$\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 = 0.$$

Les courbes u du réseau sont des courbes de longueur nulle.

D'une manière plus générale il peut arriver que

$$(9) \quad \begin{cases} \sum \xi^2 = 0, & \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 = 0, & \dots, & \sum \left(\frac{\partial^{p-1} \xi}{\partial u^{p-1}}\right)^2 = 0, \\ \sum \eta^2 = 0, & \sum \left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2 = 0, & \dots, & \sum \left(\frac{\partial^{q-1} \eta}{\partial v^{q-1}}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

On en déduit facilement

$$(10) \quad \begin{cases} \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = 0, & \sum \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\right)^2 = 0, & \dots, & \sum \left(\frac{\partial^p X}{\partial u^p}\right)^2 = 0, \\ \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = 0, & \sum \left(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\right)^2 = 0, & \dots, & \sum \left(\frac{\partial^q X}{\partial v^q}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Ces réseaux particuliers sont des réseaux rectangulaires *singuliers*.

19. Un réseau O est un réseau rectangulaire *non-singulier*.

Pour un tel réseau on peut poser :

$$\begin{aligned} \sum \xi^2 = 1, & \quad \sum \xi \eta = 0, & \quad \sum \eta^2 = 1, \\ \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 \leq 0, & \quad \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = 0, & \quad \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

A chaque réseau O on peut faire correspondre (première Partie, Chap. II) un déterminant orthogonal, qui est le même pour tous les réseaux O parallèles.

Nous avons indiqué, dans la première Partie de ce travail, le moyen de former, pour les espaces d'ordre quelconque, les déterminants orthogonaux et les réseaux O. La méthode indiquée permet aussi, on le voit, de former ainsi, de proche en proche, les réseaux rectangulaires singuliers.

Un réseau (M) de l'espace à n dimensions est p , O s'il est la projection d'un réseau O de l'espace $n + p - 1$ dimensions. Soit alors x_1, x_2, \dots, x_n les coordonnées du point M, on devra pouvoir trouver $p - 1$ fonctions, y_1, y_2, \dots, y_{p-1} , satisfaisant à l'équation du réseau, et telle que

$$(11) \quad \begin{cases} \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \sum \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \\ \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \sum \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 \leq 0, & \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \sum \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 \leq 0. \end{cases}$$

Les fonctions y_1, y_2, \dots, y_{p-1} sont dites les *coordonnées complémentaires* du réseau (M).

Si $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ sont les paramètres normaux du réseau point parallèle à (M), on aura

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = h \xi_i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = l \eta_i;$$

on pourra déterminer des quantités $\xi'_1, \dots, \xi'_{p-1}; \eta'_1, \dots, \eta'_{p-1}$ par les équations

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = h \xi'_i, \quad \frac{\partial y_i}{\partial v} = l \eta'_i.$$

On aura, par conséquent, par un choix convenable de variables u et v (19),

$$(12) \quad \begin{cases} \sum \xi \eta + \sum \xi' \eta' = 0, \\ \sum \xi^2 + \sum \xi'^2 = 1, \quad \sum \eta^2 + \sum \eta'^2 = 0. \end{cases}$$

Les quantités $\xi'_1, \dots, \xi'_{p-1}; \eta'_1, \dots, \eta'_{p-1}$ sont les *paramètres complémentaires* du réseau point p, O .

20. Un réseau *nul* est un réseau rectangulaire dans lequel les courbes du réseau sont des lignes de longueur nulle, mais qui ne présente pas de particularité d'ordre plus élevé.

Si x_1, \dots, x_n sont les coordonnées d'un point M qui décrit un réseau nul, on aura

$$(13) \quad \begin{cases} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 0, & \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0, & \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 0, \\ \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2 \geq 0, & \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)^2 \geq 0. \end{cases}$$

Si l'on introduit les paramètres normaux $\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_n$ du réseau point correspondant, on aura

$$(14) \quad \begin{cases} \sum \xi^2 = 0, & \sum \xi \eta = 0, & \sum \eta^2 = 0, \\ \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 \geq 0, & \sum \left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2 \geq 0. \end{cases}$$

Un réseau $M(x_1, \dots, x_n)$ est dit *applicable* sur un réseau (y_1, \dots, y_p) si l'on a

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum dx^2 = \sum dy^2, \\ \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right)^2 \geq \sum \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right)^2, \quad \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \right)^2 \leq \sum \left(\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right)^2. \end{array} \right.$$

Il en résulte que le point Q de l'espace à $n + p$ dimensions qui a pour coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n, iy_1, iy_2, \dots, iy_p$ décrit un réseau nul.

21. Une congruence est *I* lorsque les paramètres directeurs X_1, \dots, X_n de la droite qui le décrit satisfont aux conditions

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum X^2 = 0, \\ \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 \geq 0, \quad \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 \leq 0. \end{array} \right.$$

La première équation (16) donne facilement, en tenant compte de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les fonctions X_1, \dots, X_n , la relation

$$(17) \quad \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = 0.$$

On peut remarquer que les conditions (16) subsistent quand on multiplie les quantités X par un même facteur.

Une congruence est *p, I* quand elle est la projection d'une congruence *I* dans l'espace à $n + p - 1$ dimensions.

Si X_1, X_2, \dots, X_n sont les paramètres directeurs de la droite qui décrit une congruence *p, I*, on pourra trouver $p - 1$ fonctions Y_1, Y_2, \dots, Y_{p-1} , satisfaisant à la même équation de Laplace que les fonctions X_1, X_2, \dots, X_n et telles que l'on ait

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum X^2 + \sum Y^2 = 0, \\ \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 \geq 0, \quad \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 + \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)^2 \leq 0. \end{array} \right.$$

Les quantités Y_1, Y_2, \dots, Y_{p-1} sont dites les *paramètres complémentaires* de la congruence p, I .

22. Une congruence est C lorsque, entre l'équation de Laplace, à laquelle satisfont ces paramètres directeurs X_1, X_2, \dots, X_n

$$(19) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + RX,$$

et les paramètres directeurs eux-mêmes, existe la relation

$$(20) \quad \sum X^2 = h^2 U^2 + l^2 V^2,$$

U et V étant respectivement des fonctions de u seul et de v seul, ces fonctions ne se réduisant pas à zéro.

On voit facilement que la condition imposée ne dépend pas du facteur par lequel on peut multiplier les fonctions X_1, X_2, \dots, X_n .

Une congruence de l'espace à n dimensions est p, C si elle peut être considérée comme la projection d'une congruence C dans l'espace à $n + p - 1$ dimensions.

Il en résulte que si X_1, X_2, \dots, X_n sont les paramètres directeurs d'une droite qui décrit une congruence p, C , on pourra trouver $p - 1$ fonctions Y_1, Y_2, \dots, Y_{p-1} satisfaisant à l'équation (19) comme les quantités X_1, \dots, X_n et telles que :

$$(21) \quad \sum X^2 + \sum Y^2 = h^2 U^2 + l^2 V^2,$$

U et V étant respectivement des fonctions de u seul et de v seul qui ne sont pas nulles.

Les fonctions Y_1, Y_2, \dots, Y_{p-1} sont dites les *paramètres complémentaires* de la congruence p, C .

23. Une congruence est dite *nulle* lorsque les paramètres directeurs X_1, X_2, \dots, X_n des droites de la congruence satisfont aux con-

ditions :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum X^2 = 0, \\ \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 = 0, \quad \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 = 0, \\ \sum \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right)^2 \leq 0, \quad \sum \left(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right)^2 \geq 0. \end{array} \right.$$

On vérifie facilement que ces conditions restent satisfaites si l'on multiplie tous les paramètres X par un même facteur.

Une congruence (6) de l'espace à n dimensions ayant pour paramètres directeurs X_1, X_2, \dots, X_n est *applicable* sur une congruence H de l'espace à p dimensions, ayant pour paramètres directeurs Y_1, Y_2, \dots, Y_p , si les quantités Y satisfont à la même équation de Laplace que les quantités X et si en outre

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum X^2 = \sum Y^2, \\ \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2, \quad \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)^2, \\ \sum \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right)^2 \geq \sum \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} \right)^2, \quad \sum \left(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right)^2 \leq \sum \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} \right)^2. \end{array} \right.$$

Il en résulte que, dans l'espace à $n + p$ dimensions, la congruence qui a pour paramètre directeur $X_1, X_2, \dots, X_n, iY_1, iY_2, \dots, iY_p$ est une congruence nulle.

24. *Tout réseau conjugué à une congruence I est O.*

En effet soient X_1, X_2, \dots, X_n les paramètres directeurs d'une congruence I , θ une solution quelconque de l'équation à laquelle satisfont les quantités X . Le point M qui a pour coordonnées (x_1, \dots, x_n) , $x_i = \frac{X_i}{\theta}$, décrit un réseau conjugué à la congruence point et l'on a : (16) et (17)

$$\begin{aligned} \sum x^2 &= \frac{1}{\theta^2} \sum X^2 = 0, \\ \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 &= \frac{1}{\theta^2} \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 \geq 0, \quad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 = \frac{1}{\theta^2} \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 \leq 0, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{1}{\theta^2} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = 0, \end{aligned}$$

donc le point M décrit un réseau O . Tous les réseaux conjugués à la congruence I sont parallèles aux réseaux $M(4)$, ce qui démontre le théorème.

Soient maintenant X_1, \dots, X_n les paramètres d'une congruence $2I$, Y_1 le paramètre complémentaire, θ une solution de l'équation des paramètres; posons

$$x_i = \frac{X_i}{\theta}, \quad y_1 = \frac{Y_1}{\theta}.$$

Le point (x_1, \dots, x_n, y_1) décrit dans l'espace à $n + 1$ dimensions un réseau O . Si $\theta = Y_1$ la coordonnée y_1 est constante, le point M de coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n décrit un réseau O ; si θ est quelconque, ce point M décrit un réseau $2O$, la coordonnée complémentaire étant y_1 ; donc :

A une congruence $2I$ est conjuguée une série parallèle de réseaux O ; les autres réseaux conjugués sont $2O$.

Soit de même X_1, \dots, X_n les paramètres d'une congruence pI ; Y_1, \dots, Y_{p-1} les coordonnées complémentaires, θ une solution de l'équation des paramètres; posons

$$x_i = \frac{X_i}{\theta}, \quad y_i = \frac{Y_i}{\theta}.$$

Le point $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{p-1})$ décrit dans l'espace à $n + p - 1$ dimensions un réseau O .

Si θ est quelconque, il n'y a pas de relation linéaire entre les y ; le réseau $M(x_1, \dots, x_n)$ sera p, O , les coordonnées complémentaires étant y_1, y_2, \dots, y_{p-1} .

Si θ est une fonction linéaire, *non isotrope*, des y , c'est-à-dire si

$$\theta = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_{p-1} Y_{p-1}, \quad \sum a_i^2 \neq 0,$$

on pourra réduire les coordonnées complémentaires à $p - 2$: le réseau M est $p - 1, O$.

Si θ est une fonction *linéaire isotrope* des Y , c'est-à-dire si

$$\theta = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_{p-1} Y_{p-1}, \quad \sum a_i^2 = 0,$$

on pourra réduire de deux unités le nombre des coordonnées complémentaires : le réseau M est $p - 2, 0$; donc

Parmi les réseaux conjugués à une congruence p, 1 il y a :

∞^{p-3} réseaux $p - 2, 0$.

∞^{p-2} réseaux $p - 1, 0$.

Tous les autres sont $p, 0$.

Considérons maintenant un réseau 0; pour obtenir les directions de toutes les congruences conjuguées à ce réseau on joint l'origine A à un point quelconque M(x_1, \dots, x_n) (4) qui décrit un réseau parallèle au réseau donné. Posons alors

$$X_i = x_i, \quad Y_1 = \frac{i}{2} \left(\sum x^2 + 1 \right), \quad Y_2 = \frac{1}{2} \left(\sum x^2 - 1 \right),$$

on aura alors

$$\begin{aligned} \sum X^2 + Y_1^2 + Y_2^2 &= 0, \\ \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 &= \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \geq 0, \\ \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 + \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)^2 &= \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2$ sont les paramètres d'une congruence I dans l'espace à $n + 2$ dimensions. Cela posé :

Si $\sum x^2 = 0$ on peut supprimer les paramètres Y_1 et Y_2 , la congruence (G) de paramètres X_1, \dots, X_n est I. On sait (première Partie, Chap. II) qu'il existe ∞^{n-4} réseaux pour lesquels $\sum x^2$ est nul.

Si $\sum x^2$ est constant, on peut réduire les deux coordonnées complémentaires Y_1, Y_2 à une seule : la congruence G est 2I.

Si $\sum x^2$ n'est pas constant, il n'y a pas de relation linéaire homogène entre Y_1 et Y_2 : la congruence G est 3I; donc

Parmi les congruences conjuguées à un réseau 0 il y a :

∞^{n-4} congruences I.

∞^{n-3} congruences 2I.

Les autres sont 3I.

En remarquant maintenant qu'un réseau $p, 0$ peut être considéré

comme la projection d'un réseau O de l'espace à $n + p - 1$ dimensions, on arrivera aux résultats suivants :

Parmi les congruences conjuguées à un réseau p , O il y a :

∞^{n+p-3} congruences p , I.

∞^{n+p-4} congruences $(p + 1)$, I.

Les autres sont $(p + 2)$, I.

25. *Toute congruence harmonique à un réseau O est C.*

En effet, soient $\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_n$ les paramètres normaux des tangentes à un réseau O . Les paramètres X_1, \dots, X_n d'une congruence harmonique sont donnés (6) par les formules

$$X_i = q\xi_i - p\eta_i,$$

et les quantités X sont relations de l'équation

$$(24) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \left(mn - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial u} \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial v} \right) X.$$

En tenant compte des équations (1) et (7) on trouve

$$\sum X^2 = q^2 + p^2,$$

et par conséquent (22) la congruence est cyclique.

Si x_1, x_2, \dots, x_n sont les coordonnées du point M qui décrit un réseau O , θ une solution de l'équation du réseau, les foyers de la congruence harmonique sont donnés par les formules (16) (Chap. I); les paramètres directeurs Z_1, Z_2, \dots, Z_n de la congruence C harmonique seront :

$$(25) \quad Z_i = \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

Supposons maintenant que le point $M(x_1, \dots, x_n)$ décrive un réseau $2O$ et soit γ la coordonnée complémentaire. Posons

$$Z_i = \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v}, \quad Y = \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \gamma}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \gamma}{\partial v}.$$

D'après ce qui précède Z_1, Z_2, \dots, Z_n et Y sont les paramètres direc-

teurs d'une congruence G dans l'espace à $(n + 1)$ dimensions. Si $\theta = \gamma + \text{const.}$ Y est nul et, par conséquent, la congruence G qui a pour paramètres directeurs Z_1, Z_2, \dots, Z_n décrit une congruence C ; si θ est quelconque G décrira une congruence $2C$, le paramètre complémentaire étant Y ; donc

Parmi les congruences harmoniques à un réseau $2O$ il y a une série de congruences C .

Toutes les autres sont $2C$.

Supposons maintenant que le point $M(x_1, \dots, x_n)$ décrive un réseau p, O ; soit $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-1}$ les coordonnées complémentaires; posons

$$X_i = \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v}, \quad Y_i = \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \gamma_i}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \gamma_i}{\partial v}.$$

D'après ce qui précède $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{p-1}$ sont les paramètres directeurs d'une congruence G dans l'espace à $n + p - 1$ dimensions.

Si, à une constante près, θ est une fonction *linéaire isotrope* de $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ on pourra supprimer deux paramètres Y ; la congruence G qui a pour paramètres X_1, X_2, \dots, X_n est $p - 2, G$.

Si θ est une fonction linéaire non isotrope de $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ on pourra faire disparaître un seul des paramètres Y , et par conséquent G décrit une congruence $p - 1, G$.

Si θ est quelconque, il n'existe pas de relation linéaire entre les quantités Y et par suite G décrit une congruence p, c ; donc :

Parmi les congruences harmoniques à un réseau p, O il y a :

∞^{p-3} congruences $(p - 2), G$.

∞^{p-2} congruences $(p - 1), G$.

Les autres sont p, G .

Considérons maintenant une congruence C ayant pour foyers A et B ; nous avons démontré (première Partie, nos 23 et 24) qu'il existe ∞^{n-2} réseaux O harmoniques à cette congruence; soit M l'un de ces réseaux; pour tous ces réseaux le triangle MAB a la même forme; nous avons montré de plus qu'il existe ∞^{n-3} réseaux $2O$ harmoniques, enfin que les autres réseaux harmoniques sont $3O$.

En remarquant enfin qu'une congruence p , C est la projection d'une congruence C de l'espace à $n + p - 1$ dimensions on arrive aux résultats suivants :

Parmi les réseaux harmoniques à une congruence p , C il y a :

∞^{n+p-3} réseaux p , O.

∞^{n+p-2} réseaux $p + 1$, O.

Les autres sont $p + 2$, O.

26. *Toute congruence harmonique à un réseau nul est I.*

En effet, en désignant par $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ les paramètres normaux des tangentes à un réseau nul, par X_1, \dots, X_n ceux d'une congruence harmonique, on aura :

$$(26) \quad \begin{cases} X_i = q\xi_i - p\eta_i, \\ \frac{\partial X_i}{\partial u} = q \frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u} \eta_i, & \frac{\partial X_i}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v} \xi_i - p \frac{\partial \eta_i}{\partial v}. \end{cases}$$

En tenant compte des équations (14) et des suivantes qui s'en déduisent par différentiation :

$$(27) \quad \sum \eta_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0, \quad \sum \xi_i \frac{\partial \eta_i}{\partial v} = 0,$$

on trouvera

$$(28) \quad \begin{cases} \sum X_i^2 = 0, \\ \sum \left(\frac{\partial X_i}{\partial u} \right)^2 = q^2 \sum \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u} \right)^2 \geq 0, & \sum \left(\frac{\partial X_i}{\partial v} \right)^2 = p^2 \sum \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial v} \right)^2 \geq 0, \end{cases}$$

et par conséquent la congruence de paramètres X_1, \dots, X_n est I.

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait au numéro précédent pour les congruences harmoniques à un réseau p , O permet d'énoncer les résultats suivants :

Si un réseau $M(x_1, \dots, x_n)$ est applicable sur un réseau $N(y)$ de l'espace à une dimension, il y a parmi les congruences harmoniques à M :

Une série de congruences I correspondant à $0 = y + \text{const.}$

Les autres sont 21.

Si le réseau M est applicable sur un réseau $N(y_1, y_2)$ de l'espace à deux dimensions, il y a parmi les congruences harmoniques à M :

Deux séries de congruences I correspondant à $\theta = y_1 \pm iy_2 + \text{const.}$

∞^1 congruences $2I$ correspondant à $\theta = \alpha y_1 + \beta y_2 + \text{const.}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$

Les autres sont $3I$.

Si le réseau M est applicable sur un réseau $N(y_1, \dots, y_p)$ de l'espace à p dimensions, il y a, parmi les congruences harmoniques à M :

∞^{p-2} congruences $(p-1)I$ correspondant à $\theta = a_1 y_1 + \dots + a_p y_p + \text{const.},$

$$a_1^2 + \dots + a_p^2 = 0;$$

∞^{p-1} congruences pI correspondant à $\theta = a_1 y_1 + \dots + a_p y_p + \text{const.},$

$$a_1^2 + \dots + a_p^2 \neq 0.$$

Tous les autres réseaux sont $(p+1)I$.

Inversement, soit (G) une congruence I ; (M) un réseau harmonique à (G) . J'ai démontré dans la première partie de ce travail (18) que le réseau (M) peut être soit un réseau nul, soit un réseau applicable sur un réseau à 1 dimension, soit un réseau applicable sur un réseau de l'espace à 2 dimensions. En se reportant aux résultats qui ont été établis alors, on peut énoncer les conclusions suivantes :

Parmi les réseaux harmoniques à une congruence I , il y a :

∞^{n-6} réseaux nuls.

∞^{n-5} réseaux applicables sur un réseau à 1 dimension.

Les autres sont applicables sur un réseau à 2 dimensions.

En remarquant qu'une congruence p, I est la projection d'une congruence I dans l'espace à $n+p-1$ dimensions, on arrive aux conclusions suivantes :

Parmi les réseaux harmoniques à une congruence p, I ; il y a :

∞^{n+p-7} réseaux applicables sur un réseau à $p-1$ dimensions.

∞^{n+p-6} réseaux applicables sur un réseau à p dimensions.

Les autres sont applicables sur un réseau à $p+1$ dimensions.

27. Tout réseau conjugué à une congruence nulle est un réseau nul.

En effet, soient X_1, X_2, \dots, X_n les paramètres d'une congruence, θ une

solution de l'équation du paramètre; $M(x_1, \dots, x_n)$ le point qui a pour coordonnées

$$x_i = \frac{X_i}{\theta}.$$

Tous les réseaux conjugués à la congruence sont parallèles à un réseau (M). On aura

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = \frac{\theta \frac{\partial X_i}{\partial u} - X_i \frac{\partial \theta}{\partial u}}{\theta^2}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = \frac{\theta \frac{\partial X_i}{\partial v} - X_i \frac{\partial \theta}{\partial v}}{\theta^2},$$

Des formules (22) on déduira les suivantes :

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 &= 0, & \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} &= 0, & \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 &= 0, \\ \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \right)^2 &\geq 0, & \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \right)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que le point M décrit un réseau nul.

Considérons maintenant une congruence $G(X_1, \dots, X_n)$ applicable sur une congruence $H(Y_1, \dots, Y_p)$; les deux réseaux $M(x_1, \dots, x_n)$ et $N(y_1, \dots, y_p)$

$$x_i = \frac{X_i}{\theta}, \quad y_i = \frac{Y_i}{\theta}$$

sont applicables; donc en répétant un raisonnement analogue à celui qui a été fait au n° 24, on arrive aux conclusions suivantes :

Parmi les réseaux conjugués à une congruence applicable sur une congruence de l'espace à une dimension il y a :

Un réseau nul correspondant à $\theta = Y_1$.

Les autres sont applicables sur l'espace à une dimension.

Parmi les réseaux conjugués à une congruence applicable sur une congruence de l'espace à deux dimensions, il y a :

Deux réseaux nuls correspondant à $\theta = Y_1 \pm iY_2$.

∞ réseaux applicables sur l'espace à une dimension, correspondant à $\theta = \alpha Y_1 + \beta Y_2$.

Les autres réseaux sont applicables sur l'espace à deux dimensions.

D'une manière générale :

Parmi les réseaux conjugués à une congruence applicable sur une congruence de l'espace à p dimensions, il y a :

∞^{p-2} réseaux applicables sur un réseau de l'espace à $(p-2)$ dimensions.

Ils correspondent à $\theta = a_1 Y_1 - \dots + a_p Y_p, a_1^2 + \dots + a_p^2 = 0$.

∞^{p-1} réseaux applicables sur un réseau de l'espace à $(p-1)$ dimensions.

Ils correspondent à $\theta = a_1 Y_1 + \dots + a_p Y_p, a_1^2 + \dots + a_p^2 \geq 0$.

Les autres sont applicables sur un réseau de l'espace à p dimensions.

Considérons maintenant un réseau nul; pour avoir les directions des congruences conjuguées on joint l'origine à un point $M(x_1, \dots, x_n)$ qui décrit un réseau parallèle au réseau donné. Posons alors

$$X_i = x_i, \quad Y_1 = \frac{i}{2} \left(\sum x^2 + 1 \right), \quad Y_2 = \frac{1}{2} \left(\sum x^2 - 1 \right).$$

Les quantités X et Y satisfont à l'équation du réseau, et l'on a, en tenant compte des formules (13),

$$\begin{aligned} \sum X^2 + \sum Y^2 &= 0, \\ \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 &= 0, & \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 + \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)^2 &= 0, \\ \sum \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right)^2 + \sum \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} \right)^2 &\geq 0, & \sum \left(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right)^2 + \sum \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} \right)^2 &\geq 0; \end{aligned}$$

donc la droite, qui a pour paramètres $X_1, \dots, X_n, Y_1, Y_2$, décrit dans l'espace à $n+2$ dimensions une congruence nulle. Cela posé :

Si $\Sigma x^2 = 0$, on peut supprimer Y_1 et Y_2 , et la congruence G qui a pour paramètres X_1, \dots, X_n est nulle. La condition $\Sigma x^2 = 0$ ne peut être réalisée, pour un réseau nul, qu'à partir de $n = 8$; on voit donc que ce n'est qu'à partir de l'espace à 8 qu'il peut y avoir des congruences nulles. Pour les espaces d'ordre supérieur le nombre des réseaux pour lesquels $\Sigma x^2 = 0$ est ∞^{n-8} .

Si $\Sigma x^2 = \text{const.}$, on peut réduire les deux paramètres Y_1 et Y_2 à un seul; la congruence G est applicable sur une congruence de l'espace à une dimension.

Si Σx^2 n'est pas constant, il n'existe pas de relation linéaire entre Y_1 et Y_2 , la congruence G est applicable sur une congruence de l'espace à deux dimensions; donc

Parmi les congruences conjuguées à un réseau nul, il y a :

∞^{n-8} congruences nulles.

∞^{n-7} congruences applicables sur l'espace à une dimension.

Toutes les autres sont applicables sur l'espace à deux dimensions.

En remarquant qu'un réseau applicable sur un autre de l'espace à p est la projection d'un réseau nul de l'espace à $n + p$, on arrive aux conclusions suivantes :

Parmi les congruences conjuguées à un réseau applicable sur un réseau de l'espace à p dimensions, il y a :

∞^{n+p-8} réseaux applicables sur un réseau de l'espace à p dimensions.

∞^{n+p-9} réseaux applicables sur un réseau de l'espace à $p + 1$ dimensions.

Les autres sont applicables sur un réseau de l'espace à $p + 2$ dimensions.

CHAPITRE IV.

ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

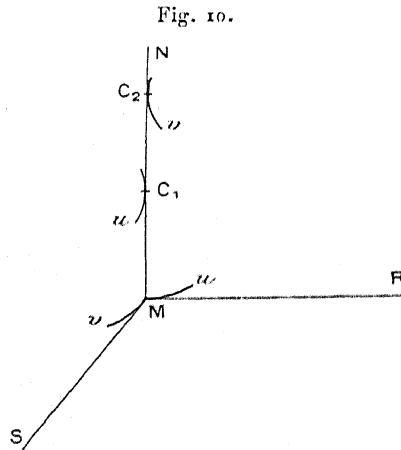
SOMMAIRE.

28. Réseaux et congruences O, pO . — 29. Réseaux et congruences C, pC . — 30. Réseaux et congruences K, pK . — 31. Tableau des propriétés de ces systèmes.

28. Il n'y a pas lieu, dans l'espace à trois dimensions, de considérer les congruences I (une de leurs focales est le cercle de l'infini, de tels systèmes font partie de ceux qui sont intégrables par la méthode de Laplace, systèmes que nous avons exclus de cette étude). Une congruence $2I$ est formée par les normales à une surface; une telle congruence sera appelée *congruence O* ; d'une manière générale une

congruence $p + 1$, I sera appelée *congruence* p , O. (On verra tout à l'heure pourquoi.)

Soit $M(y_1, y_2, y_3)$ un point qui décrit un réseau O, c'est-à-dire le réseau formé par les lignes de courbure de la surface M; désignons par x_1, x_2, x_3 (*fig. 10*) les cosinus directeurs de la normale MN, par



ξ_1, ξ_2, ξ_3 ceux de la tangente MR, et par η_1, η_2, η_3 ceux de la tangente MS.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}$$

est un déterminant orthogonal; on a les formules connues

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = a\xi, & \frac{\partial \xi}{\partial u} = -ax - m\eta, & \frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = b\eta, & \frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta, & \frac{\partial \eta}{\partial v} = -bx - n\xi, \end{cases}$$

avec la condition

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial v} = bm \\ \frac{\partial b}{\partial u} = an \end{cases} \quad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + ab = 0.$$

On voit que le point x_1, x_2, x_3 décrit sur la sphère de rayon 1 un réseau parallèle au réseau M; c'est la représentation sphérique des lignes de courbure de la surface M.

On a ensuite

$$(3) \quad \frac{\partial y}{\partial u} = h\xi, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = l\eta,$$

$$(4) \quad \frac{\partial h}{\partial v} = lm, \quad \frac{\partial l}{\partial u} = hu.$$

Les rayons de courbure $R_1 = MC_1$, $R_2 = MC_2$ sont donnés par les formules

$$(5) \quad R_1 = -\frac{h}{a}, \quad R_2 = -\frac{l}{b}.$$

Le réseau N et la congruence MN forment manifestement un réseau et une congruence orthogonale, donc :

Toute congruence orthogonale à un réseau O est O et inversement.

Je dis que d'une manière générale :

Toute congruence orthogonale à un réseau p, O est p, O et inversement.

Il suffit, pour le démontrer, d'établir que, si la propriété indiquée a lieu jusqu'au nombre p , elle est vraie encore pour le nombre $p + 1$.

Soit, en effet, (a) un réseau $p + 1, O$; il existe, parmi les congruences conjuguées à (a), une congruence (B) (24) qui est p, O . Le réseau (b) orthogonal à la congruence (B) sera, par hypothèse, p, O ; il y a (12) une congruence (A) conjuguée à (b) qui est orthogonale au réseau (a); cette congruence (A) sera (24) $p - 1, O$; p, O ou $p + 1, O$. Les deux premières hypothèses sont incompatibles avec la supposition que la loi indiquée est vraie jusqu'à l'ordre p ; donc (A) est $(p + 1), O$. En faisant les raisonnements en sens inverse, on démontrerait de même que, si une congruence (A) est $p + 1, O$, son réseau orthogonal (a) est aussi $p + 1, O$; donc la loi est générale.

29. Il n'existe pas de réseaux nuls dans un espace qui a moins de six dimensions. (Nous éliminons toujours les systèmes intégrables par la méthode de Laplace.) Il en résulte que si un réseau de l'espace à

trois dimensions est applicable sur un autre réseau, ce réseau appartient à un espace dont l'ordre est au moins égal à 3. Nous appellerons réseau C un réseau applicable sur un réseau de l'espace à trois dimensions et, d'une manière générale, réseau p, C , un réseau applicable sur un autre situé dans l'espace à $p + 2$ dimensions.

Nous allons établir le résultat suivant :

Tout réseau p, C est orthogonal à une congruence p, C et inversement.

Soit d'abord (G) une congruence C; il existe un réseau (a) harmonique à C, qui est O (25); soit (A) une congruence orthogonale au réseau (a); cette congruence sera O ou 2I. Il existera un réseau (g) orthogonal à (G) et harmonique à A (13); ce réseau (g) sera (26) applicable à un réseau situé dans un espace à 1, 2 ou 3 dimensions. Ici les deux premières hypothèses sont à rejeter, donc (g) est un réseau C. En reprenant les raisonnements en sens inverse, on voit que si le réseau (g) est C, sa congruence orthogonale (G) est aussi C.

Le théorème démontré dans le cas de $p = 1$ s'étend au cas général, par un raisonnement analogue à celui du numéro précédent.

30. Il n'existe pas de congruence nulle dans un espace de moins de huit dimensions. Il en résulte que si une congruence de l'espace à trois dimensions est applicable sur une autre congruence, cette dernière est située dans un espace qui a au moins cinq dimensions. Nous appellerons *congruence K* une congruence applicable sur une congruence à cinq dimensions et, d'une manière générale, *congruence p, K* une congruence applicable sur une congruence à $p + 4$ dimensions.

Un *réseau sera K* s'il est orthogonal à une congruence K; d'une manière générale, un réseau est p, K s'il est orthogonal à une congruence p, K .

Une congruence conjuguée à un réseau C est applicable (27) sur une congruence de l'espace à 3, 4 ou 5 dimensions. Ici les deux premières hypothèses doivent être rejetées, donc :

Toute congruence conjuguée à un réseau C est K.

En appliquant la loi d'orthogonalité des éléments :

Tout réseau conjugué à une congruence C est K.

Inversement, d'après ce qui a été établi au n° 27 :

Les réseaux conjugués à une congruence K peuvent être C, 2C ou 3C.

Par suite, à cause de la loi des éléments orthogonaux :

Les congruences conjuguées à un réseau K peuvent être C, 2C, 3C.

Ces propriétés permettent de caractériser les réseaux K. Considérons, en effet, un réseau K; parmi les réseaux qui lui sont parallèles il existera des réseaux M(x_1, x_2, x_3) tels que la droite qui joint le point M à un point fixe O (l'origine) décrive une congruence C. On aura alors

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = h\xi, & \frac{\partial x}{\partial v} = l\eta, \\ \frac{\partial h}{\partial v} = lm, & \frac{\partial l}{\partial u} = hn, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(7) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$$

et

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} = l \frac{\partial m}{\partial u} + mn h, \\ \frac{\partial^2 l}{\partial u \partial v} = h \frac{\partial n}{\partial v} + mn l. \end{cases}$$

Pour que la congruence (OM) soit C il faut que, par un choix convenable des variables u et v , on ait (22) :

$$(9) \quad \sum x^2 = h^2 + l^2,$$

d'où l'on déduit

$$(10) \quad \begin{cases} \sum x \frac{\partial x}{\partial u} = h \frac{\partial h}{\partial u} + l \frac{\partial l}{\partial u}, \\ \sum x \frac{\partial x}{\partial v} = h \frac{\partial h}{\partial v} + l \frac{\partial l}{\partial v}; \end{cases}$$

$$(11) \quad \sum x \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = h \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + l \frac{\partial^2 l}{\partial u \partial v} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial l}{\partial v}.$$

En tenant compte des équations qui précèdent, cette dernière éga-

lité devient

$$(12) \quad \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \left(h \frac{\partial h}{\partial u} + l \frac{\partial l}{\partial u} \right) + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \left(h \frac{\partial h}{\partial v} + l \frac{\partial l}{\partial v} \right) + hl \sum \xi \eta \\ = h \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + l \frac{\partial^2 l}{\partial u \partial v} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial l}{\partial v}.$$

Après simplification :

$$(13) \quad \frac{l}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial l}{\partial u} + \frac{h}{l} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial l}{\partial v} + hl \sum \xi \eta = h \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + l \frac{\partial^2 l}{\partial u \partial v},$$

ou, en remplaçant les expressions par leurs valeurs :

$$(14) \quad l^2 mn + h^2 mn + hl \sum \xi \eta = hl \frac{\partial m}{\partial u} + mn h^2 + hl \frac{\partial n}{\partial v} + mnl^2,$$

on arrive finalement à la formule

$$(15) \quad \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{\partial n}{\partial v} = \sum \xi \eta.$$

On voit de même que, si un réseau est p, K , on pourra adjoindre aux paramètres normaux $\xi_1, \xi_2, \xi_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3$ les paramètres complémentaires $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{p-1}; \eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_{p-1}$, et que l'on aura, par un choix convenable des variables u et v :

$$(16) \quad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} = \sum \xi \eta + \sum \xi' \eta'.$$

31. Nous indiquons, dans le Tableau suivant, les propriétés des systèmes introduits dans ce Chapitre. Il est inutile de distinguer les réseaux et les congruences, la loi d'orthogonalité des éléments et les notations choisies permettant d'intervertir ces deux groupes d'éléments :

<i>Systèmes 0.</i>		<i>Systèmes harmoniques.</i>	
Systèmes conjugués.		Tous	C
1.....	0		
Les autres.....	20		
 <i>Systèmes 20.</i>		 <i>Systèmes harmoniques.</i>	
Systèmes conjugués.		1.....	C
2.....	0		
∞^1	20	Les autres.....	2C
Les autres.....	30		

Systèmes 3O.

Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
∞^1	2O	2.....	C
∞^2	3O	∞^1	2C
Les autres.....	4O	Les autres.....	3C

Systèmes p, O.

Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
∞^{p-2}	$(p-1), O$	∞^{p-3}	$(p-2), C$
∞^{p-1}	p, O	∞^{p-2}	$(p-1), C$
Les autres.....	$(p+1), O$	Les autres.....	p, C

Systèmes C.

Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
Tous.....	K	∞^1	O
		∞^2	2O
		Les autres.....	3O

Systèmes 2C.

Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
1.....	K	∞^2	2O
Les autres.....	2K	∞^3	3O
		Les autres.....	4O

Systèmes 3C.

Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
2.....	K	∞^3	3O
∞^1	2K	∞^4	4O
Les autres.....	3K	Les autres.....	5O

Systèmes p, C.

Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
∞^{p-3}	$(p-2), K$	∞^p	p, O
∞^{p-2}	$(p-1), K$	∞^{p-1}	$p+1, O$
Les autres.....	p, K	Les autres.....	$p+2, O$

Systèmes K.

Systèmes conjugués.	
∞^2	C
∞^3	2C
Les autres.....	3C

Systèmes p, K.

Systèmes conjugués.	
∞^{p+1}	p, C
∞^{p+2}	$(p+1), C$
Les autres.....	$(p+2), C$

CHAPITRE V.

ESPACE A QUATRE DIMENSIONS.

SOMMAIRE.

32. Réseaux O. — 33. Réseaux L, p, L. — 34. Congruences orthogonales aux congruences I et 21.
 — 35. Orthogonalité des réseaux p, O et p, L; des congruences p, I et p, L. — 36. Congruences K
 et p, K. — 37. Orthogonalité des congruences p, C et p, K. — 38. Tableau des propriétés de
 ces systèmes.

32. A chaque réseau O de l'espace à quatre dimensions on fait correspondre un déterminant orthogonal de cet espace (première Partie, 11 et 35). Soit

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}$$

ce déterminant; on aura (35)

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = a\xi, & \frac{\partial y}{\partial u} = e\xi, & \frac{\partial \xi}{\partial u} = -ax - ey - m\eta, & \frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = b\eta, & \frac{\partial y}{\partial v} = f\eta, & \frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta, & \frac{\partial \eta}{\partial v} = -bx - fy - n\xi, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial v} = bm, & \frac{\partial e}{\partial v} = fm \\ \frac{\partial b}{\partial u} = an, & \frac{\partial f}{\partial u} = en \end{cases} \quad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + ab + ef = 0.$$

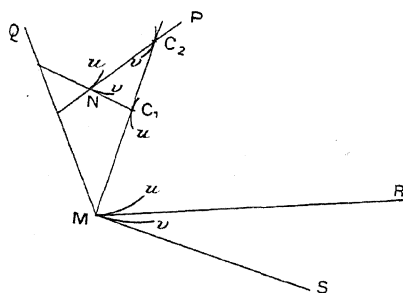
Soit alors M(X_1, X_2, X_3, X_4) un point qui décrit le réseau O; on aura

$$(3) \quad \frac{\partial X}{\partial u} = h\xi, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = l\eta,$$

$$(4) \quad \frac{\partial h}{\partial v} = lm, \quad \frac{\partial l}{\partial u} = hn.$$

Par le point M menons les quatre droites suivantes : $MR(\xi_1, \dots, \xi_4)$, $MS(\eta_1, \dots, \eta_4)$, $MP(x_1, \dots, x_4)$, $MQ(y_1, \dots, y_4)$ (*fig. 11*). Ces

Fig. 11.



droites décrivent des congruences. Les points C_1 et C_2 , foyers de la congruence MP, sont déterminés par les formules [première Partie, 14, et Mémoire *Sur la déformation des surfaces* (*Journal de Mathématiques*, 1896, p. 160)]:

$$MC_1 = -\frac{h}{a}, \quad MC_2 = -\frac{l}{b}.$$

Les droites MP et MQ décrivent des congruences $\mathfrak{2}I$, conjuguées au réseau M; il en est de même de celles qui ont pour paramètres directeurs

$$x_i \cos \theta + y_i \sin \theta.$$

Enfin les droites qui ont pour paramètres directeurs $x_k \pm iy_k$ décrivent des congruences I conjuguées au réseau M.

Il résulte, d'ailleurs, des propriétés du cas général que l'on obtient ainsi toutes les congruences I et $\mathfrak{2}I$ de l'espace à quatre dimensions.

33. Si un réseau de l'espace à quatre dimensions est applicable sur un autre réseau, ce dernier appartient à un espace qui a au moins deux dimensions. Nous appellerons *réseaux L* les réseaux de l'espace à quatre dimensions, applicables sur un réseau de l'espace à deux; d'une manière générale, un *réseau p, L* est un réseau applicable sur un autre réseau de l'espace à $p + 1$ dimensions.

Je rappelle ici le moyen de former les réseaux L [*Mémoire Sur la*

déformation des surfaces (*Journal de Mathématiques*, 1896, p. 162), et première Partie de ce travail, n° 18].

Soit $N(Y_1, \dots, Y_4)$ un point du plan PQM normal au réseau O décrit par le point M (*fig. 10*). On aura

$$(5) \quad Y = X + rx + \rho y$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial u} &= x \frac{\partial r}{\partial u} + y \frac{\partial \rho}{\partial u} + \xi (h + ar + e\rho), \\ \frac{\partial Y}{\partial v} &= x \frac{\partial r}{\partial v} + y \frac{\partial \rho}{\partial v} + \eta (l + br + f\rho). \end{aligned}$$

Si l'on détermine r et ρ par les équations

$$(6) \quad \begin{cases} h + ar + e\rho = 0, \\ l + br + f\rho = 0, \end{cases}$$

qui entraînent, en tenant compte des équations (2) et (4),

$$(7) \quad \begin{cases} a \frac{\partial r}{\partial v} + e \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0, \\ b \frac{\partial r}{\partial u} + f \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0, \end{cases}$$

on aura

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial u} = x \frac{\partial r}{\partial u} + y \frac{\partial \rho}{\partial u}, \\ \frac{\partial Y}{\partial v} = x \frac{\partial r}{\partial v} + y \frac{\partial \rho}{\partial v}, \end{cases}$$

En différentiant, et en tenant compte des équations (1) et (7), on aura

$$(9) \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} = x \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} + y \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v};$$

ce qui montre que les fonctions Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 satisfont à la même équation de Laplace que les quantités r et ρ ; par conséquent, le point N ainsi déterminé décrit un réseau; d'autre part, les équations (8) montrent que

$$(10) \quad \sum dY^2 = dr^2 + d\rho^2;$$

donc le réseau (N) est applicable sur le réseau de l'espace à deux dimensions qui a pour coordonnées r et ρ . Il en résulte que le réseau (N) est L. J'ai démontré, dans le Mémoire cité plus haut, qu'on obtient ainsi tous les réseaux L.

Si l'on se reporte aux équations (7) et (8), on voit que les tangentes du réseau (N) ont leurs paramètres directeurs proportionnels aux quantités

$$fx - by \quad \text{et} \quad ex - ay$$

On vérifie, très facilement, que les réseaux (M) et (N) sont orthogonaux; donc :

Tout réseau orthogonal à un réseau O est L et inversement.

34. Toute congruence I peut être obtenue en partant d'un réseau O et en prenant la congruence qui a pour paramètres directeurs

$$z = x \pm iy.$$

En tenant compte des formules (1) on voit que l'on aura

$$(11) \quad \sum z^2 = 0, \quad \sum z \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad \sum z \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

donc :

Toute congruence I est orthogonale à elle-même.

Prenons maintenant une congruence 2 I, on peut toujours supposer que c'est la congruence MP introduite au numéro 32. Cette congruence a pour paramètres directeurs x_1, x_2, x_3, x_4 ; on a, en tenant compte des formules (1) :

$$(12) \quad \sum xy = 0, \quad \sum x \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \sum x \frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

Ce qui montre que les congruences (MP) et (MQ) (*fig. 10*) sont deux congruences orthogonales; donc

Toute congruence orthogonale à une congruence 2 I est 2 I.

35. Il est facile de déduire, de ce qui précède, la loi d'orthogonalité des systèmes O, L et I. Je dis que d'une manière générale :

Tout réseau orthogonal à un réseau p , O est p , L et inversement.

Toute congruence orthogonale à une congruence $p + 1$, I est $p + 1$, L.

D'après ce qui précède, le théorème est établi pour $p = 1$. Il suffit de montrer qu'il est venu jusqu'à une certaine valeur de p , il est encore vrai pour la valeur $p + 1$.

Soit donc (M) un réseau $p + 1$, O. Parmi les congruences conjuguées il y aura (24) une congruence (G) qui sera $(p + 1)$, I. La congruence (g) orthogonale à (G) sera, par hypothèse, $p + 1$, I. Le réseau (M) étant conjugué à (G) sera orthogonal (15) à un réseau (μ) harmonique à (G). Ce réseau (μ) sera (26) $p - 1$, L, p , L, ou $p + 1$, L. En vertu des hypothèses faites, ce réseau ne peut être que $p + 1$, L.

En reprenant les raisonnements, en sens inverse, on démontrerait de même que tout réseau orthogonal à un réseau $p + 1$, L est $p + 1$, O.

Soit de même (G) une congruence $p + 2$, I; parmi les réseaux conjugués il y aura (24) un réseau (M) qui est p , O; par hypothèse, le réseau (μ) orthogonal à (M) sera p , L; il y aura une congruence g harmonique à μ et orthogonale à G; cette congruence sera (26) p , I; $p + 1$, I ou $p + 2$, I; d'après les hypothèses faites G ne peut pas être p , I ou $p + 1$, I; donc G est $p + 2$, I.

36. Si une congruence de l'espace à quatre dimensions est applicable sur une autre congruence, cette dernière appartient à un espace qui a au moins quatre dimensions; nous appellerons *congruence K* toute congruence applicable sur une autre de l'espace à quatre dimensions; d'une manière générale *congruence p , K* une congruence applicable sur une autre de l'espace $p + 3$ dimensions.

Toute congruence conjuguée à un réseau L est K.

En effet, cette congruence sera applicable sur une autre située dans un espace à 2, 3 ou 4 dimensions (27); ici les deux premières hypothèses sont à rejeter, donc la congruence conjuguée est bien K.

Les réseaux conjugués à une congruence K sont L, 2L ou 3L (27).

37. *Toute congruence orthogonale à une congruence C est K et inversement.*

En effet, soit (G) une congruence C; parmi les réseaux harmoniques il y a un réseau (M) qui est O; le réseau (μ) qui est orthogonal à (M) est L, parmi les congruences conjuguées à (μ), il y en a une (ρ) qui est orthogonale à (G). Cette congruence (ρ) sera K (36).

On voit de même qu'inversement, toute congruence orthogonale à une congruence K est C.

Enfin, un raisonnement analogue à celui qui a été fait bien des fois permet d'énoncer le résultat général.

Toute congruence orthogonale à une congruence p, C est p, K et inversement.

38. Nous allons, pour terminer ce Chapitre, donner un Tableau indiquant les propriétés des éléments qui viennent d'être définis.

<i>Réseaux O.</i>			
Congruences conjuguées.		Congruences harmoniques.	
α	1	Toutes sont.....	C
α^1	2I		
Les autres.....	3I		
<i>Réseaux L.</i>			
Congruences conjuguées.		Congruences harmoniques.	
Toutes sont.....	K	α	I
		α^1	2I
		Les autres.....	3I
<i>Réseaux αO.</i>			
Congruences conjuguées.		Congruences harmoniques.	
α^1	2I	α	C
α^2	3I	Les autres.....	2C
Les autres.....	4I		
<i>Réseaux αL.</i>			
Congruences conjuguées.		Congruences harmoniques.	
α	K	α^1	2I
Les autres.....	2K	α^2	3I
		Les autres.....	4I

Réseaux p, O.

Congruences conjuguées.		Congruences harmoniques.	
α^{p-1}	p, I	α^{p-3}	$p-2, C$
α^p	$p+1, I$	α^{p-2}	$p-1, C$
Les autres	$p+2, I$	Les autres	p, C

Réseaux p, L.

Congruences conjuguées.		Congruences harmoniques.	
α^{p-3}	$p-2, K$	α^{p-1}	p, I
α^{p-2}	$p-1, K$	α^{p-2}	$p+1, I$
Les autres	p, K	Les autres	$p+2, I$

Congruences I.

Réseaux conjugués.		Réseaux harmoniques.	
Tous	O	Tous	I

Congruences 2I.

Réseaux conjugués.		Réseaux harmoniques.	
I	O	I	I
Les autres	2O	Les autres	2I

Congruences 3I.

Réseaux conjugués.		Réseaux harmoniques.	
2	O	2	I
α^1	2O	α^1	2I
Les autres	3O	Les autres	3I

Congruences p, I.

Réseaux conjugués.		Réseaux harmoniques.	
α^{p-3}	$p-2, O$	α^{p-3}	$p-2, L$
α^{p-2}	$p-1, O$	α^{p-2}	$p-1, L$
Les autres	p, O	Les autres	p, L

Congruences p, G.

Réseaux harmoniques.	
α^{p+1}	p, O
α^{p+2}	$p+1, O$
Les autres	$p+2, O$

Congruences p, K.

Réseaux conjugués.	
α^{p+1}	p, L
α^{p+2}	$p+1, L$
Les autres	$p+2, L$

(A suivre)