

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHARLES RIQUIER

Sur le calcul par cheminement des intégrales de certains systèmes différentiels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 20 (1903), p. 27-73

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20_27_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE
CALCUL PAR CHEMINEMENT

DES INTÉGRALES DE CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS,

PAR M. CHARLES RIQUIER,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CAEN.

Si, dans un système d'équations différentielles linéaires, résolu par rapport aux dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, on considère les intégrales particulières répondant à des conditions initiales données, on sait que toute phase singulière de quelqu'une de ces intégrales est forcément une phase singulière de quelqu'un des coefficients du système.

J'ai signalé récemment à l'Académie des Sciences (23 décembre 1901) une généralisation étendue de cette propriété : l'exposition détaillée de mes recherches sur ce point constitue l'objet du présent Mémoire.

Je ferai usage, dans ce qui suit, d'un certain nombre de termes figurant déjà dans mes travaux antérieurs, et dont il m'a semblé inutile de répéter ici la définition : le lecteur voudra bien se reporter aux travaux dont il s'agit, et notamment à mon récent Mémoire *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta Mathematica*, t. XXIII).

Systèmes phanéronomes, passifs et linéaires; rayons de convergence
des développements de leurs intégrales.

1. Soient

$$\begin{aligned} x, y, \dots, \\ u, v, \dots, \end{aligned}$$

des notations (en nombre limité) désignant, les premières diverses variables indépendantes, les autres diverses fonctions de ces variables. A chacune des quantités u, v, \dots faisons correspondre un entier quelconque (positif, nul ou négatif), que nous nommerons la *cote* de cette quantité; puis, considérant une dérivée quelconque de l'une des fonctions u, v, \dots , nommons *cote* de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote de la fonction l'ordre total de la dérivée.

Cela étant, un système différentiel où se trouvent engagées les fonctions inconnues u, v, \dots des variables indépendantes x, y, \dots sera dit *phanéronome*, si, moyennant un choix convenable des cotes attribuées à u, v, \dots , il remplit à la fois les deux conditions suivantes :

1° Le système en question se trouve résolu par rapport à certaines dérivées qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres, et ces derniers, si l'on y considère pour un instant comme autant de variables indépendantes distinctes x, y, \dots, u, v, \dots et les diverses dérivées de u, v, \dots qui y figurent, sont, dans un même domaine, tous développables par la série de Taylor.

2° Chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote tombe *au-dessous* de celle du premier membre correspondant (1).

Par exemple, l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = f(x, u)$$

(considérée dans les limites où son second membre est une fonction analytique) constitue un système phanéronome. Il en est de même de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathbf{F}\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

(1) Si, aux équations d'un pareil système, on adjoint toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations, le groupe illimité ainsi obtenu est résoluble, suivant une *loi évidente*, par rapport aux dérivées qui figurent dans ses premiers membres : c'est pourquoi j'ai attribué aux systèmes dont il s'agit la qualification de *phanérouomes*.

comme aussi de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Il en est encore de même des équations simultanées

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \Pi\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial^3 v}{\partial y^2} = \mathbf{K}\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right), \end{cases}$$

qui, moyennant l'attribution à u et v des cotes respectives 0 et 1, remplissent les conditions formulées ci-dessus.

Les systèmes phanéronomes constituent, comme il est facile de le voir, un cas très particulier de ceux que j'ai nommés *orthonomes* : il suffit, pour s'en rendre compte, d'attribuer à chacune des variables x, y, \dots une cote égale à 1, en même temps qu'on attribue aux diverses inconnues u, v, \dots les cotes respectives spécifiées dans la définition des systèmes phanéronomes. En conséquence, *tout système phanéronome passif est complètement intégrable*; on peut d'ailleurs, comme je l'ai établi d'une manière générale pour tout système complètement intégrable, fixer, par la seule considération des premiers membres, l'économie des conditions initiales qui déterminent entièrement un groupe d'intégrales particulières du système, et mettre en évidence les *fonctions* (ou constantes) *arbitraires, en nombre fini, dont dépend la solution générale* (1).

Parmi les relations, en nombre infini, que l'on peut déduire d'un système phanéronome, il convient de distinguer spécialement celles

(1) Pour la théorie des systèmes orthonomes et la méthode servant à fixer l'économie des conditions initiales dans un système complètement intégrable, voir mon Mémoire intitulé : *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta Mathematica*, t. XXIII).

Je profite de la publication du présent Mémoire pour signaler au lecteur une légère simplification dont la théorie des systèmes orthonomes est susceptible : elle consiste en ce que l'on peut, sans restreindre la généralité de leur définition, supposer égale à 1 la cote première (positive) commune à toutes les variables indépendantes. J'ai déjà eu l'occasion de présenter cette remarque dans un récent Mémoire ayant pour titre : *Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque* (*Acta Mathematica*, t. XXV).

qui, ayant pour premier membre une dérivée de quelque fonction inconnue, ne contiennent dans leur second membre, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote tombe au-dessous de celle du premier membre : nous nommerons *cote* d'une semblable relation la cote même de son premier membre. Il résulte d'ailleurs de la théorie générale des systèmes orthonomes que, *dans un système phanéronome quelconque, toutes les relations primitives et toutes les relations ultimes satisfont à la condition que nous venons d'indiquer.*

2. Les systèmes différentiels étudiés dans le présent Mémoire sont ceux qui possèdent la triple propriété d'être : 1° *phanéronomes*; 2° *passifs*; 3° *linéaires par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées*. Cette étude a d'ailleurs pour objet, comme l'indique le titre général du Mémoire, le calcul par cheminement de leurs intégrales; cela étant, il est clair que nos premières recherches doivent porter sur les rayons de convergence des développements de ces intégrales.

Or, en nommant, comme d'habitude, *coefficients* du système les fonctions des seules variables indépendantes qui figurent dans les seconds membres, soit comme multiplicateurs des inconnues ou de leurs dérivées, soit comme termes indépendants de ces quantités, on peut, comme nous allons le voir, établir la proposition suivante :

Si, dans un système différentiel possédant la triple propriété d'être :

1° *Phanéronome*;

2° *Passif*;

3° *Linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées,*

on considère les intégrales particulières répondant à des conditions initiales données, les développements de ces intégrales, effectués à partir des valeurs initiales des variables, ne peuvent manquer de converger dans les limites où convergent à la fois les développements des coefficients et ceux des fonctions données figurant dans les conditions initiales.

I. Désignons par u une fonction inconnue de x, y, \dots , par $A(x, y, \dots)$ et $A_1(x, y, \dots)$ deux fonctions connues de ces mêmes

variables, par $U_0(y, \dots)$ une fonction connue des seules variables y, \dots , et considérons, dans l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \Lambda + \Lambda_1 u,$$

l'intégrale particulière qui répond à la condition initiale

$$(2) \quad u = U_0(y, \dots) \quad \text{pour} \quad x = x_0.$$

Cela étant, si l'on suppose, d'une part, que les fonctions Λ, Λ_1 soient développables à partir des valeurs

$$(3) \quad x_0, y_0, \dots$$

avec les rayons de convergence

$$(4) \quad R_x, R_y, \dots,$$

si l'on suppose, d'autre part, que la fonction $U_0(y, \dots)$ le soit à partir des valeurs y_0, \dots avec les rayons R_y, \dots , l'intégrale de (1) déterminée par la condition initiale (2) ne peut manquer d'être développable à partir des valeurs (3) avec les rayons (4).

Effectivement, soient

$H_1(x, y, \dots)$ la fonction qui satisfait à la relation

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = \Lambda_1$$

et à la condition initiale

$$H_1 = 0 \quad \text{pour} \quad x = x_0;$$

$\Lambda_2(x, y, \dots)$ le produit Λe^{-H_1} ;

$H_2(x, y, \dots)$ la fonction qui satisfait à la relation

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} = \Lambda_2$$

et à la condition initiale

$$H_2 = 0 \quad \text{pour} \quad x = x_0.$$

Il résulte de propriétés élémentaires bien connues que les fonctions H_1, Λ_2 et H_2 sont, comme Λ et Λ_1 , développables à partir des

valeurs (3) avec les rayons (4). Cela étant, la fonction

$$u = e^{H_1} [U_0(\gamma, \dots) + H_2]$$

jouit aussi de cette même propriété, et satisfait visiblement à la condition initiale (2); on vérifie d'ailleurs par un calcul immédiat qu'elle satisfait à l'équation (1).

II. Considérons un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre, où se trouve engagée une seule fonction inconnue u des variables indépendantes x, y, \dots , et dont les seconds membres soient linéaires par rapport à cette inconnue : je dis que, *dans un pareil système, le développement d'une intégrale quelconque, effectué à partir des valeurs initiales choisies pour les variables, ne peut manquer de converger dans les limites où convergent à la fois les développements de tous les coefficients du système.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait trois variables indépendantes x, y, z , et considérons le système passif

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = A u + B, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = A' u + B', \\ \frac{\partial u}{\partial z} = A'' u + B''; \end{cases}$$

supposons en outre que les coefficients A, B, A', B', A'', B'' , développés à partir des valeurs particulières x_0, y_0, z_0 , admettent les rayons de convergence R_x, R_y, R_z : il s'agit de prouver qu'en désignant par c une constante quelconque, l'intégrale particulière répondant à la condition initiale

$$u = c \quad \text{pour} \quad x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0,$$

est développable, à partir des mêmes valeurs, avec les rayons R_x, R_y, R_z .

Introduisons, en effet, dans la dernière équation du système (5), l'hypothèse numérique

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0,$$

et désignons par $u_{0,0}$ la fonction de la seule variable z à laquelle se réduit alors l'intégrale considérée, par $A''_{0,0}$, $B''_{0,0}$ celles auxquelles se réduisent les coefficients A'' , B'' . La fonction $u_{0,0}$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial u_{0,0}}{\partial z} = A''_{0,0} u_{0,0} + B''_{0,0}$$

avec la condition initiale

$$u_{0,0} = c \quad \text{pour} \quad z = z_0;$$

et, comme les coefficients du second membre, développés à partir de z_0 , admettent tous deux le rayon R_z , il résulte de l'alinéa I que la fonction $u_{0,0}$ l'admet aussi.

Introduisons maintenant, dans la deuxième équation du système (5), l'hypothèse numérique $x = x_0$, et désignons par u_0 la fonction des seules variables y et z à laquelle se réduit alors l'intégrale considérée du système (5), par A'_0 , B'_0 celles auxquelles se réduisent les coefficients A' , B' . La fonction u_0 vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = A'_0 u_0 + B'_0$$

avec la condition initiale

$$u_0 = u_{0,0}(z) \quad \text{pour} \quad y = y_0;$$

et comme, d'une part, les coefficients du second membre, développés à partir de y_0 , z_0 , admettent les rayons R_y , R_z , comme, d'autre part, en vertu de ce qui précède, la fonction $u_{0,0}(z)$, développée à partir de z_0 , admet le rayon R_z , il résulte de l'alinéa I que la fonction u_0 admet les rayons R_y , R_z .

Finalement, l'intégrale considérée du système (5) vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A u + B$$

avec la condition initiale

$$u = u_0(y, z) \quad \text{pour} \quad x = x_0;$$

et comme, d'une part, les coefficients du second membre, développés

à partir de x_0, y_0, z_0 , admettent les rayons R_x, R_y, R_z , comme, d'autre part, en vertu de ce qui précède, la fonction $u_0(y, z)$, développée à partir de y_0, z_0 , admet les rayons R_y, R_z , il résulte de l'alinéa I que l'intégrale u admet les rayons R_x, R_y, R_z , ce qu'il s'agissait d'établir.

III. Soient

- $f(x, y, \dots)$ une fonction développable à partir de x_0, y_0, \dots avec les rayons de convergence R_x, R_y, \dots ;
- r_x, r_y, \dots des constantes positives respectivement inférieures à R_x, R_y, \dots ;
- N une constante positive supérieure à la somme L que l'on obtient en remplaçant dans le développement de $f(x, y, \dots)$, effectué à partir de x_0, y_0, \dots , tous les coefficients par leurs modules, et les différences $x - x_0, y - y_0, \dots$ par les quantités respectives r_x, r_y, \dots ;
- enfin p, q, \dots des entiers positifs.

Cela étant, la fonction

$$\Psi(x, y, \dots) = \frac{N}{\left(1 - \frac{x - x_0}{r_x}\right)^p \left(1 - \frac{y - y_0}{r_y}\right)^q \dots},$$

développable à partir de x_0, y_0, \dots avec les rayons r_x, r_y, \dots , est majorante pour $f(x, y, \dots)$ relativement aux valeurs x_0, y_0, \dots , c'est-à-dire que les valeurs numériques prises, en x_0, y_0, \dots , par la fonction $\Psi(x, y, \dots)$ et toutes ses dérivées, sont positives et respectivement supérieures aux modules des valeurs correspondantes de la fonction $f(x, y, \dots)$ et de ses dérivées semblables.

Faisons suivre en effet de l'indice zéro les notations des diverses fonctions à considérer et de leurs dérivées, pour désigner leurs valeurs particulières en x_0, y_0, \dots . On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^{i+l+\dots} \Psi}{\partial x^i \partial y^l \dots}\right)_0 &= \frac{1}{r_x^i r_y^l \dots} \times N \times p(p+1) \dots (p+i-1) \\ &\quad \times q(q+1) \dots (q+l-1) \\ &\quad \times \dots \dots \dots \\ &\geq N \frac{1.2 \dots i}{r_x^i} \frac{1.2 \dots l}{r_y^l} \dots, \end{aligned}$$

et, à plus forte raison, à cause de $N > L$,

$$\left(\frac{\partial^{i+l+\dots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \dots}\right)_0 > L \frac{1.2\dots i}{r_x^i} \frac{1.2\dots l}{r_y^l} \dots$$

D'ailleurs, dans une série convergente à termes tous positifs, la somme est au moins égale à la valeur d'un terme quelconque, et l'on a par conséquent

$$L \geq \text{mod} \left(\frac{\partial^{i+l+\dots}f}{\partial x^i \partial y^l \dots}\right)_0 \frac{r_x^i}{1.2\dots i} \frac{r_y^l}{1.2\dots l} \dots$$

On en déduit immédiatement, par comparaison avec la relation précédente,

$$\left(\frac{\partial^{i+l+\dots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \dots}\right)_0 > \text{mod} \left(\frac{\partial^{i+l+\dots}f}{\partial x^i \partial y^l \dots}\right)_0,$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

IV. Désignons actuellement par ω une fonction inconnue de variables indépendantes en nombre quelconque, par exemple des trois variables x, y, z ; nommons M une constante positive quelconque, g un entier positif également quelconque, et considérons le système total du premier ordre

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{M}{(1-x)^{g+1} (1-y)^g (1-z)^g} (1+\omega), \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{M}{(1-x)^g (1-y)^{g+1} (1-z)^g} (1+\omega), \\ \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{M}{(1-x)^g (1-y)^g (1-z)^{g+1}} (1+\omega). \end{cases}$$

On voit immédiatement que ce système est passif, que ses seconds membres sont linéaires par rapport à la fonction inconnue ω , et que ses coefficients sont développables par la formule de Maclaurin avec des rayons tous égaux à 1. *Il admet donc (II) une intégrale satisfaisant à la condition initiale*

$$\omega = 0 \quad \text{pour} \quad x = y = z = 0,$$

et développable, comme les coefficients, par la formule de Maclaurin avec des rayons de convergence tous égaux à 1; d'ailleurs les dérivées de tous

ordres de cette intégrale ont, comme on le voit sans peine d'après la forme des seconds membres, des valeurs initiales toutes positives.

Nous désignerons, pour abrégé, par $\Omega(x, y, z)$ l'intégrale particulière dont il s'agit.

V. Les intégrales du système (6) jouissent d'une propriété importante que nous allons établir.

Désignons par m, n, p trois entiers, positifs ou nuls, ayant une somme au moins égale à 1, par ω une intégrale quelconque du système (6), et considérons l'expression

$$(7) \quad (1-x)^m (1-y)^n (1-z)^p \frac{\partial^{m+n+p} \omega}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p}.$$

Je dis que l'expression (7) et celle qui s'en déduit par une permutation quelconque des trois lettres m, n, p sont deux fonctions de x, y, z identiquement égales entre elles.

A. Si l'on pose, pour abrégé,

$$\frac{1}{(1-x)^a (1-y)^b (1-z)^c} = \Theta_{a,b,c}(x, y, z),$$

l'expression (7) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{r=m+n+p} A_r \Theta_{rR, rR, rR}(x, y, z) \\ & + \sum_{r=1}^{r=m+n+p} B_r \Theta_{rR, rR, rR}(x, y, z) \omega, \end{aligned}$$

où A_r, B_r désignent des constantes positives.

La chose est évidente lorsque $m+n+p$ est égal à 1; car on déduit immédiatement du système (6) que chacun des produits

$$(1-x) \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad (1-y) \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad (1-z) \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

est égal à

$$\mathbf{M} \Theta_{g,g,g}(x, y, z) + \mathbf{M} \Theta_{g,g,g}(x, y, z) \omega.$$

Il suffit donc de faire voir que, si elle est vraie pour $m+n+p = k$, elle l'est encore pour $m+n+p = k+1$.

Or, supposons $m + n + p = k + 1$: l'un des trois entiers m, n, p , par exemple m , est au moins égal à 1. Cela étant, considérons l'expression

$$(1-x)^{m-1} (1-y)^n (1-z)^p \frac{\partial^k \omega}{\partial x^{m-1} \partial y^n \partial z^p}.$$

Comme la somme $(m-1) + n + p$ est égale à k , on a, en vertu de ce qui est admis,

$$(8) \quad (1-x)^{m-1} (1-y)^n (1-z)^p \frac{\partial^k \omega}{\partial x^{m-1} \partial y^n \partial z^p} \\ = \sum_{r=1}^{r=k} A_r \Theta_{r_g, r_g, r_g}(x, y, z) + \sum_{r=1}^{r=k} B_r \Theta_{r_g, r_g, r_g}(x, y, z) \omega,$$

où A_r, B_r désignent des constantes positives. Une différentiation relative à x donne

$$(1-x)^{m-1} (1-y)^n (1-z)^p \frac{\partial^{k+1} \omega}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p} \\ = (m-1) (1-x)^{m-2} (1-y)^n (1-z)^p \frac{\partial^k \omega}{\partial x^{m-1} \partial y^n \partial z^p} \\ + \sum_{r=1}^{r=k} A_r r_g \Theta_{r_g+1, r_g, r_g}(x, y, z) + \sum_{r=1}^{r=k} B_r r_g \Theta_{r_g+1, r_g, r_g}(x, y, z) \omega \\ + \sum_{r=1}^{r=k} B_r \Theta_{r_g, r_g, r_g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Multipliant par $1-x$, il vient

$$(1-x)^m (1-y)^n (1-z)^p \frac{\partial^{k+1} \omega}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p} \\ = (m-1) (1-x)^{m-1} (1-y)^n (1-z)^p \frac{\partial^k \omega}{\partial x^{m-1} \partial y^n \partial z^p} \\ + \sum_{r=1}^{r=k} A_r r_g \Theta_{r_g, r_g, r_g}(x, y, z) + \sum_{r=1}^{r=k} B_r r_g \Theta_{r_g, r_g, r_g}(x, y, z) \omega \\ + \sum_{r=1}^{r=k} B_r \Theta_{r_g, r_g, r_g}(x, y, z) (1-x) \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Enfin, tenant compte de (8) et de la relation

$$(1-x) \frac{\partial \omega}{\partial x} = \mathbf{M} \Theta_{g, g, g}(x, y, z) (1+\omega),$$

nous avons

$$\begin{aligned} (9) \quad & (1-x)^m (1-y)^n (1-z)^p \frac{\partial^{k+1} \omega}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p} \\ &= \sum_{r=1}^{r=k} (m-1+rg) \mathbf{A}_r \Theta_{rg, rg, rg}(x, y, z) \\ &+ \sum_{r=1}^{r=k} (m-1+rg) \mathbf{B}_r \Theta_{rg, rg, rg}(x, y, z) \omega \\ &+ \sum_{r=1}^{r=k} \mathbf{M} \mathbf{B}_r \Theta_{(r+1)g, (r+1)g, (r+1)g}(x, y, z) \\ &+ \sum_{r=1}^{r=k} \mathbf{M} \mathbf{B}_r \Theta_{(r+1)g, (r+1)g, (r+1)g}(x, y, z) \omega. \end{aligned}$$

On voit donc que l'expression (7), où l'on suppose $m+n+p=k+1$, peut se représenter par une somme de termes ayant la forme voulue.

B. L'expression (7), et celle qui s'en déduit par une simple permutation de deux des lettres m, n, p , peuvent toujours se représenter par une même somme de termes ayant la forme indiquée au début de A.

La chose est évidente lorsque $m+n+p$ est égal à 1, puisque chacun des produits

$$(1-x) \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad (1-y) \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad (1-z) \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

est égal, comme nous l'avons dit, à

$$\mathbf{M} \Theta_{g, g, g}(x, y, z) + \mathbf{M} \Theta_{g, g, g}(x, y, z) \omega.$$

Il suffit donc de faire voir que, si elle est vraie pour $m+n+p=k$, elle l'est encore pour $m+n+p=k+1$.

Or, supposons $m + n + p = k + 1$, et considérons les deux expressions

$$(10) \quad (1-x)^m (1-y)^n (1-z)^p \frac{\partial^{k+1} \omega}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p},$$

$$(11) \quad (1-x)^n (1-y)^m (1-z)^p \frac{\partial^{k+1} \omega}{\partial x^n \partial y^m \partial z^p},$$

déduites l'une de l'autre par une simple permutation des lettres m et n .

Si $m = n$, le point à établir résulte immédiatement de A.

Supposons maintenant que m soit différent de n et que l'on ait, par exemple, $m > n$, auquel cas m est forcément au moins égal à 1. Les deux expressions

$$(12) \quad (1-x)^{m-1} (1-y)^n (1-z)^p \frac{\partial^k \omega}{\partial x^{m-1} \partial y^n \partial z^p},$$

$$(13) \quad (1-x)^n (1-y)^{m-1} (1-z)^p \frac{\partial^k \omega}{\partial x^n \partial y^{m-1} \partial z^p}$$

se déduisent l'une de l'autre par une simple permutation de $m-1$ avec n , et, comme la somme $(m-1) + n + p$ est égale à k , elles peuvent, en vertu de ce qui est admis, se représenter toutes deux par une même somme telle que

$$(14) \quad \sum_{r=1}^{r=k} A_r \Theta_{r_g, r_g, r_g}(x, y, z) + \sum_{r=1}^{r=k} B_r \Theta_{r_g, r_g, r_g}(x, y, z) \omega,$$

où A_r, B_r désignent des constantes positives.

Puisque l'expression (12) peut se représenter par la somme (14), le calcul déjà effectué dans A nous montre que l'expression (10) peut se représenter par le second membre de (9).

D'un autre côté, puisque l'expression (13) peut aussi se représenter par la somme (14), un calcul analogue nous donnera successivement

$$\begin{aligned} & (1-x)^n (1-y)^{m-1} (1-z)^p \frac{\partial^{k+1} \omega}{\partial x^n \partial y^m \partial z^p} \\ &= (m-1) (1-x)^n (1-y)^{m-2} (1-z)^p \frac{\partial^k \omega}{\partial x^n \partial y^{m-1} \partial z^p} \\ &+ \sum_{r=1}^{r=k} A_r r g \Theta_{r_g, r_{g+1}, r_g}(x, y, z) + \sum_{r=1}^{r=k} B_r r g \Theta_{r_g, r_{g+1}, r_g}(x, y, z) \omega \\ &+ \sum_{r=1}^{r=k} B_r \Theta_{r_g, r_g, r_g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial y}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
 & (1-x)^n (1-y)^m (1-z)^p \frac{\partial^{k+1} \omega}{\partial x^n \partial y^m \partial z^p} \\
 &= (m-1) (1-x)^n (1-y)^{m-1} (1-z)^p \frac{\partial^k \omega}{\partial x^n \partial y^{m-1} \partial z^p} \\
 &+ \sum_{r=1}^{r=k} A_r r g \Theta_{r g, r g, r g}(x, y, z) + \sum_{r=1}^{r=k} B_r r g \Theta_{r g, r g, r g}(x, y, z) \omega \\
 &+ \sum_{r=1}^{r=k} B_r \Theta_{r g, r g, r g}(x, y, z) (1-y) \frac{\partial \omega}{\partial y};
 \end{aligned}$$

remplaçant enfin, dans le second membre, $(1-y) \frac{\partial \omega}{\partial y}$ par sa valeur tirée de la deuxième équation (6), et l'expression (13) par la somme (14), il nous vient

$$\begin{aligned}
 & (1-x)^n (1-y)^m (1-z)^p \frac{\partial^{k+1} \omega}{\partial x^n \partial y^m \partial z^p} \\
 &= \sum_{r=1}^{r=k} (m-1+r g) A_r \Theta_{r g, r g, r g}(x, y, z) \\
 &+ \sum_{r=1}^{r=k} (m-1+r g) B_r \Theta_{r g, r g, r g}(x, y, z) \omega \\
 &+ \sum_{r=1}^{r=k} M B_r \Theta_{(r+1) g, (r+1) g, (r+1) g}(x, y, z) \\
 &+ \sum_{r=1}^{r=k} M B_r \Theta_{(r+1) g, (r+1) g, (r+1) g}(x, y, z) \omega,
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'expression (11) peut se représenter, comme l'expression (10), par le second membre de (9).

C. Considérons maintenant les diverses expressions que l'on peut déduire de l'expression (7) en effectuant dans cette dernière toutes les permutations possibles entre les lettres m, n, p . Ces expressions peuvent être rangées à la suite les unes des autres dans un ordre tel que deux expressions voisines quelconques puissent se déduire l'une de l'autre par une permutation effectuée entre deux lettres seulement. En vertu de B, deux expressions voisines sont donc des fonctions de x, y, z identiquement égales : il en résulte que toutes les expres-

sions considérées sont aussi des fonctions de x, y, z identiquement égales.

VI. Désignons par T un système différentiel jouissant des diverses propriétés suivantes :

1° *Le système T est phanéronome, et ses premiers membres ont tous la même cote (n° 1);*

2° *Il est linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées, et ses coefficients sont développables par la formule de Maclaurin avec des rayons de convergence tous plus grands que 1;*

3° *En choisissant, pour les variables indépendantes, des valeurs initiales toutes nulles, il admet un groupe d'intégrales répondant à des déterminations initiales identiquement nulles.*

Cela étant, nous nous proposons d'établir que *les développements de ces intégrales par la formule de Maclaurin admettent des rayons de convergence tous égaux à 1.*

Nous supposons, pour fixer les idées, qu'il y a trois variables indépendantes x, y, z ; trois fonctions inconnues u, v, w , affectées, les deux premières de la cote 0, la dernière de la cote 2; et que les premiers membres du système sont tous de cote 3. Il y aura donc, dans les premiers membres, certaines dérivées troisièmes de u et de v , et certaines dérivées premières de w ; quant aux seconds membres, ce seront des fonctions linéaires par rapport à l'ensemble que forment les inconnues u, v, w et les dérivées premières et secondes de u et v .

A. Du système (6), qui est un système total du premier ordre contenant ω dans chacun de ses seconds membres, je déduirai d'abord un système total du second ordre contenant

$$\omega, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

dans chacun de ses seconds membres; de ce dernier je déduirai ensuite un système total du troisième ordre contenant

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

dans chacun de ses seconds membres; et les deux systèmes dont il s'agit seront linéaires, comme (6), par rapport à l'ensemble que forment la fonction ω et ses dérivées.

Différentions la première équation (6) par rapport à x , puis par rapport à y , puis par rapport à z ; la deuxième par rapport à y , puis par rapport à z ; la troisième par rapport à z . Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= M(g+1) \Theta_{g+2, g, g}(x, y, z) (1+\omega) + M \Theta_{g+1, g, g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} &= M g \Theta_{g+1, g+1, g}(x, y, z) (1+\omega) + M \Theta_{g+1, g, g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} &= M g \Theta_{g+1, g, g+1}(x, y, z) (1+\omega) + M \Theta_{g+1, g, g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= M(g+1) \Theta_{g, g+2, g}(x, y, z) (1+\omega) + M \Theta_{g, g+1, g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z} &= M g \Theta_{g, g+1, g+1}(x, y, z) (1+\omega) + M \Theta_{g, g+1, g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} &= M(g+1) \Theta_{g, g, g+2}(x, y, z) (1+\omega) + M \Theta_{g, g, g+1}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial z}. \end{aligned}$$

Or, en ayant égard aux relations

$$(1-x) \frac{\partial \omega}{\partial x} = (1-y) \frac{\partial \omega}{\partial y} = (1-z) \frac{\partial \omega}{\partial z},$$

on déduit des équations précédentes :

$$(16) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= M(g+1) \Theta_{g+2, g, g}(x, y, z) (1+\omega) + \frac{M}{3} \Theta_{g+1, g, g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ &\quad + \frac{M}{3} \Theta_{g+2, g-1, g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{M}{3} \Theta_{g+2, g, g-1}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} &= M g \Theta_{g+1, g+1, g}(x, y, z) (1+\omega) + \frac{M}{3} \Theta_{g, g+1, g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ &\quad + \frac{M}{3} \Theta_{g+1, g, g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{M}{3} \Theta_{g+1, g+1, g-1}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} &= M g \Theta_{g+1, g, g+1}(x, y, z) (1+\omega) + \frac{M}{3} \Theta_{g, g, g+1}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ &\quad + \frac{M}{3} \Theta_{g+1, g-1, g+1}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{M}{3} \Theta_{g+1, g, g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

$$(16) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= M(g+1) \Theta_{g, g+2, g}(x, y, z) (1 + \omega) + \frac{M}{3} \Theta_{g-1, g+2, g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ &+ \frac{M}{3} \Theta_{g, g+1, g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{M}{3} \Theta_{g, g+2, g-1}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z} &= M g \Theta_{g, g+1, g+1}(x, y, z) (1 + \omega) + \frac{M}{3} \Theta_{g-1, g+1, g+1}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ &+ \frac{M}{3} \Theta_{g, g, g+1}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{M}{3} \Theta_{g, g+1, g}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} &= M(g+1) \Theta_{g, g, g+2}(x, y, z) (1 + \omega) + \frac{M}{3} \Theta_{g-1, g, g+2}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ &+ \frac{M}{3} \Theta_{g, g-1, g+2}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{M}{3} \Theta_{g, g, g+1}(x, y, z) \frac{\partial \omega}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Du système (16) je vais déduire maintenant un système total du troisième ordre.

En différentiant la première équation (16) par rapport à x , le second membre de l'équation résultante contiendra les quantités (15) à l'exception des dérivées secondes de ω qui n'intéressent pas la variable x , c'est-à-dire à l'exception de

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}.$$

Or il est facile, en vertu de V, d'exprimer chacune des trois dérivées absentes à l'aide d'une dérivée seconde intéressant la variable x ; on a, en effet,

$$(17) \left\{ \begin{aligned} (1-y)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= (1-x)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \\ (1-y)(1-z) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z} &= (1-y)(1-x) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x} \\ \text{ou} \\ (1-z) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z} &= (1-x) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x}, \\ (1-z)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} &= (1-x)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \end{aligned} \right.$$

En conséquence, la première équation (16) nous donnera d'abord

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} = & \mathbf{M}(g+1)(g+2)\Theta_{g+3,g,g}(x,y,z)(1+\omega) + \mathbf{M}(g+1)\Theta_{g+2,g,g}(x,y,z)\frac{\partial \omega}{\partial x} \\ & + \frac{\mathbf{M}}{3}(g+1)\Theta_{g+2,g,g}(x,y,z)\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\mathbf{M}}{3}(g+2)\Theta_{g+3,g-1,g}(x,y,z)\frac{\partial \omega}{\partial y} \\ & + \frac{\mathbf{M}}{3}(g+2)\Theta_{g+3,g,g-1}(x,y,z)\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\mathbf{M}}{3}\Theta_{g+1,g,g}(x,y,z)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ & + \frac{\mathbf{M}}{3}\Theta_{g+2,g-1,g}(x,y,z)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\mathbf{M}}{3}\Theta_{g+2,g,g-1}(x,y,z)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z}, \end{aligned}$$

puis, tenant compte de (17),

$$\begin{aligned} (18) \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} = & \mathbf{M}(g+1)(g+2)\Theta_{g+3,g,g}(x,y,z)(1+\omega) + \mathbf{M}(g+1)\Theta_{g+2,g,g}(x,y,z)\frac{\partial \omega}{\partial x} \\ & + \frac{\mathbf{M}}{3}(g+1)\Theta_{g+2,g,g}(x,y,z)\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\mathbf{M}}{3}(g+2)\Theta_{g+3,g-1,g}(x,y,z)\frac{\partial \omega}{\partial y} \\ & + \frac{\mathbf{M}}{3}(g+2)\Theta_{g+3,g,g-1}(x,y,z)\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\mathbf{M}}{3.3}\Theta_{g+1,g,g}(x,y,z)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ & + \frac{\mathbf{M}}{3.3}\Theta_{g+3,g-2,g}(x,y,z)\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\mathbf{M}}{3.3}\Theta_{g+3,g,g-2}(x,y,z)\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \\ & + \frac{\mathbf{M}}{3.2}\Theta_{g+2,g-1,g}(x,y,z)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\mathbf{M}}{3.2}\Theta_{g+3,g-1,g-1}(x,y,z)\frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z} \\ & + \frac{\mathbf{M}}{3}\Theta_{g+2,g,g-1}(x,y,z)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z}. \end{aligned}$$

Cette équation (18) provient, comme nous venons de le voir, d'une différentiation relative à x exécutée sur la première équation (16). Nous différentierons maintenant la première équation (16) par rapport à y et par rapport à z ; la deuxième par rapport à y et z ; la troisième par rapport à z ; la quatrième par rapport à y et z ; la cinquième et la sixième par rapport à z . Puis, nous reportant à V , nous effectuerons dans chaque second membre les opérations voulues pour que *toutes* les quantités (15) y figurent. Nous aurons ainsi, y compris l'équation (18), un système de dix équations, Σ , ayant pour premiers membres respectifs les diverses dérivées troisièmes de ω et pour seconds membres des expressions de forme entièrement analogue au second membre de (18).

B. Je rappellerai que nous avons désigné par $\Omega(x,y,z)$ l'intégrale particulière du système (6) qui s'annule pour $x = y = z = 0$. Cette

fonction satisfait, comme toute intégrale de (6), au système de dix équations, Σ , que nous avons formé ci-dessus. Posant maintenant

$$(19) \quad u = v = \Omega(x, y, z), \quad \omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2},$$

nous allons déduire du système Σ un autre système ayant pour premiers membres toutes les dérivées troisièmes de u et v et toutes les dérivées premières de ω ; quant aux seconds membres de ce nouveau système, ils contiendront, avec u , v , ω , toutes les dérivées premières et secondes de u et v , et seront d'ailleurs de forme entièrement analogue au second membre de (18).

Observons en effet qu'en vertu de (19) les fonctions u , v et leurs dérivées premières, secondes et troisièmes sont respectivement identiques à la fonction Ω et à ses dérivées semblables, et, de même, que ω , $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$, $\frac{\partial \omega}{\partial z}$ sont respectivement identiques à $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 \Omega}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 \Omega}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 \Omega}{\partial x^2 \partial z}$. En conséquence, nous tirerons de l'équation (18), vérifiée pour $\omega = \Omega$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \frac{\partial \omega}{\partial x} = & \mathbf{M} (g+1)(g+2) \Theta_{g+3, g, g}(x, y, z) \\ & + \frac{\mathbf{M}}{2} (g+1)(g+2) \Theta_{g+3, g, g}(x, y, z) u \\ & + \frac{\mathbf{M}}{2} (g+1)(g+2) \Theta_{g+3, g, g}(x, y, z) v \\ & + \frac{\mathbf{M}}{2} (g+1) \Theta_{g+2, g, g}(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} \\ & + \frac{\mathbf{M}}{2} (g+1) \Theta_{g+2, g, g}(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial x} \\ & + \frac{\mathbf{M}}{3 \cdot 2} (g+1) \Theta_{g+2, g, g}(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} \\ & + \frac{\mathbf{M}}{3 \cdot 2} (g+1) \Theta_{g+2, g, g}(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial x} \\ & + \frac{\mathbf{M}}{3 \cdot 2} (g+2) \Theta_{g+3, g-1, g}(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} \\ & + \frac{\mathbf{M}}{3 \cdot 2} (g+2) \Theta_{g+3, g-1, g}(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{M}{3.2} (g+2) \Theta_{g+2, g, g-1}(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} \\
& + \frac{M}{3.2} (g+2) \Theta_{g+2, g, g-1}(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial z} \\
& + \frac{M}{3.3.3} \Theta_{g+1, g, g} (x, y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& + \frac{M}{3.3.3} \Theta_{g+1, g, g} (x, y, z) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
& + \frac{M}{3.3.3} \Theta_{g+1, g, g} (x, y, z) \omega \\
& + \frac{M}{3.3.2} \Theta_{g+3, g-2, g} (x, y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
& + \frac{M}{3.3.2} \Theta_{g+3, g-2, g} (x, y, z) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
& + \frac{M}{3.3.2} \Theta_{g+3, g, g-2} (x, y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
& + \frac{M}{3.3.2} \Theta_{g+3, g, g-2} (x, y, z) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
& + \frac{M}{3.2.2} \Theta_{g+2, g-1, g} (x, y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
& + \frac{M}{3.2.2} \Theta_{g+2, g-1, g} (x, y, z) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
& + \frac{M}{3.2.2} \Theta_{g+3, g-1, g-1}(x, y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\
& + \frac{M}{3.2.2} \Theta_{g+3, g-1, g-1}(x, y, z) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \\
& + \frac{M}{3.2} \Theta_{g+2, g, g-1} (x, y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\
& + \frac{M}{3.2} \Theta_{g+2, g, g-1} (x, y, z) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}
\end{aligned}$$

Et nous formerons de même des équations ayant pour premiers membres les diverses dérivées troisièmes de u , les diverses dérivées troisièmes de v , et les diverses dérivées premières de ω , avec des seconds membres entièrement analogues à celui de l'équation précédente.

C. Considérons enfin le système que nous venons de former, et qui a pour premiers membres toutes les dérivées troisièmes de u , toutes les dérivées troisièmes de v , et toutes les dérivées premières de w : parmi les équations de ce système, nous retiendrons exclusivement celles qui ont les mêmes premiers membres respectifs que les équations du système T. Nommons T' le système auxiliaire obtenu par cette sélection, et attribuons à l'entier positif g une valeur suffisamment grande pour que toutes les fonctions Θ qui figurent dans les seconds membres du système T' aient leurs indices positifs : il résulte immédiatement de III qu'en attribuant ensuite à la constante positive M une valeur suffisamment grande, le système T' ne différera de T qu'en ce que chaque coefficient de T se trouvera remplacé par une majorante relative aux valeurs 0, 0, 0 des trois variables indépendantes. L'entier g et la constante M étant ainsi fixés, les relations ultimes de T' ne différeront des relations ultimes de T qu'en ce que les coefficients de T et leurs dérivées partielles se trouveront remplacés par les majorantes des coefficients de T et les dérivées semblables de ces majorantes.

Observons maintenant que les intégrales dont nous admettons, d'après notre énoncé, l'existence dans le système T, ont, ainsi que leurs dérivées paramétriques, des valeurs initiales toutes nulles, tandis que les intégrales

$$u = \Omega, \quad v = \Omega, \quad w = \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x^2},$$

du système T' ont, ainsi que leur dérivées semblables, des valeurs initiales positives (ou nulles) (IV). Si donc on se reporte à ce qui vient d'être dit sur les relations ultimes de l'un et de l'autre système, on voit que les intégrales considérées de T' et leurs dérivées, paramétriques ou principales, de tous ordres, ont des valeurs initiales positives (ou nulles), supérieures (ou égales) aux modules des valeurs initiales que possèdent les intégrales considérées de T et leurs dérivées semblables; et comme les premières admettent, ainsi qu'il résulte de IV, des rayons de convergence tous égaux à 1, il en sera de même, à plus forte raison, des dernières.

VII. Désignons par T_1 un système différentiel possédant les diverses propriétés suivantes :

1° *Le système T_1 est phanéronome, et ses premiers membres ont tous la même cote ;*

2° *Il est linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées, et ses coefficients sont développables par la formule de Taylor, à partir des valeurs particulières x_0, y_0, \dots , avec les rayons de convergence R_x, R_y, \dots ;*

3° *En choisissant pour les variables indépendantes les valeurs initiales x_0, y_0, \dots , il admet un groupe d'intégrales répondant à des déterminations initiales identiquement nulles.*

Cela étant, nous nous proposons d'établir que les développements de ces intégrales par la formule de Taylor, à partir de x_0, y_0, \dots , admettent les rayons de convergence R_x, R_y, \dots .

En désignant par r_x, r_y, \dots des quantités positives respectivement inférieures aux rayons R_x, R_y, \dots , mais aussi rapprochées de ceux-ci qu'on le voudra, il suffit évidemment de prouver que les intégrales considérées de T_1 admettent les rayons de convergence r_x, r_y, \dots . Or, par le changement de variables

$$(20) \quad \frac{x - x_0}{r_x} = x', \quad \frac{y - y_0}{r_y} = y', \quad \dots,$$

tout développement entier en $x - x_0, y - y_0, \dots$ devient un développement entier en x', y', \dots : si le développement primitif admet les rayons R_x, R_y, \dots , le nouveau admettra les rayons $\frac{R_x}{r_x}, \frac{R_y}{r_y}, \dots$, tous supérieurs à 1, et réciproquement ; si le premier admet les rayons r_x, r_y, \dots , le second admettra les rayons 1, 1, \dots , et réciproquement. Si donc on effectue dans le système T_1 la transformation (20), on se trouve ramené à la proposition qui fait l'objet de l'alinéa VI.

VIII. Revenons maintenant à la proposition qui fait l'objet de notre énoncé général.

A. Désignons par S le système (phanéronome, passif et linéaire) donné, par Γ la cote maxima de ses premiers membres, et par (S) le système (évidemment phanéronome et linéaire, mais en général non passif) que forment les diverses relations primitives de cote Γ (n° 1) ;

dans ces deux systèmes, les dérivées principales et paramétriques des fonctions inconnues sont respectivement les mêmes, à cela près que *les dérivées principales du système S dont la cote tombait au-dessous de Γ sont devenues paramétriques dans le système (S)*. Si donc on impose, d'une part aux intégrales de S les conditions initiales choisies, d'autre part à celles de (S) des conditions initiales identiques, en ayant soin seulement de prendre, pour les anciennes dérivées principales, en nombre fini, qui sont devenues paramétriques, les valeurs initiales calculées à l'aide des relations primitives de S de cote inférieure à Γ , on obtient évidemment de part et d'autre les mêmes intégrales. On observera d'ailleurs : 1° que les coefficients de (S) ne peuvent manquer de converger dans les limites où convergent à la fois ceux de S; 2° que les diverses fonctions (ou constantes) figurant dans les conditions initiales que nous venons d'imposer aux intégrales de (S), ne sont autres, avec quelques constantes en plus, que les fonctions figurant dans les conditions initiales imposées aux intégrales de S, et qu'elles convergent dès lors dans les mêmes limites. En conséquence, il suffit d'établir l'exactitude de notre énoncé pour les intégrales de S répondant aux conditions initiales que nous venons d'indiquer.

B. On peut maintenant, moyennant un changement de fonctions des plus simples, faire en sorte que les déterminations initiales des inconnues soient toutes identiquement nulles.

Effectivement, soient I_u, I_v, \dots les déterminations initiales respectives des inconnues u, v, \dots dans le système (S). Parmi les dérivées de I_u, I_v, \dots , celles qui sont respectivement semblables aux dérivées principales de u, v, \dots ont toutes zéro pour valeur initiale; elles sont, par suite, identiquement nulles, puisque leurs propres dérivées, nécessairement semblables à des dérivées principales de u, v, \dots , ont toutes aussi pour valeur initiale zéro. D'ailleurs, si l'on a égard à la nature des opérations par lesquelles les déterminations initiales I_u, I_v, \dots peuvent se déduire des conditions initiales imposées aux intégrales de (S) (¹), on verra sans peine que I_u, I_v, \dots ne peuvent

(¹) Voir à ce sujet la première partie de mon Mémoire intitulé : *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta Mathematica*, t. XXIII).

manquer de converger dans les limites où convergent à la fois les diverses fonctions qui figurent dans ces conditions initiales.

Cela posé, effectuons dans le système (S) la transformation

$$\begin{cases} u = I_u + u', \\ v = I_v + v', \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

où u', v', \dots désignent de nouvelles fonctions inconnues, et soit (S)' le système ainsi obtenu : il va sans dire que, dans cette transformation, nous attribuons aux nouvelles fonctions inconnues les mêmes cotes respectives qu'aux anciennes correspondantes. Pour passer du système (S) au système (S)', il suffit évidemment, en vertu d'une remarque faite ci-dessus, de remplacer les dérivées (principales) de u, v, \dots qui figurent dans les premiers membres de (S) par les dérivées semblables de u', v', \dots ; puis de remplacer, dans les seconds membres, les fonctions u, v, \dots et leurs dérivées paramétriques par les sommes $I_u + u', I_v + v', \dots$ et les dérivées semblables de ces sommes. On voit dès lors immédiatement : 1° que le système (S)' est phanéronome, et que ses premiers membres sont tous de cote Γ ; 2° que les deux systèmes ne diffèrent l'un de l'autre que par la notation des fonctions inconnues et par les coefficients indépendants qui figurent dans leurs seconds membres; que d'ailleurs les développements des coefficients de (S)' ne peuvent manquer de converger dans les limites où convergent à la fois les développements des coefficients de (S) et ceux des fonctions qui figurent dans les conditions initiales imposées aux intégrales de (S). Finalement, il résulte des formules de transformation qu'aux intégrales considérées de (S) correspondent, dans (S)', des intégrales à déterminations initiales identiquement nulles, et que les développements de celles-ci se déduisent des développements de celles-là par la simple suppression des portions de développements I_u, I_v, \dots .

Cela étant, la proposition qu'il s'agit d'établir découle, comme conséquence immédiate, de l'alinéa VII.

**Systemes phaneronomes, passifs et linéaires; calcul par cheminement
de leurs intégrales.**

3. Supposant indifféremment (comme nous l'avons fait jusqu'ici) qu'il s'agisse, soit de la théorie des fonctions de n variables *réelles*, soit de la théorie des fonctions de n variables *imaginaires*, nous nommerons *point analytique* tout système de valeurs respectivement attribuées à ces n variables x, y, \dots , *coordonnées analytiques* du point les n valeurs ainsi associées, et *espace analytique* l'ensemble de tous les points analytiques : l'espace analytique sera désigné par la notation

$$[[x, y, \dots]].$$

Dans cet espace, on a souvent à considérer, à l'exclusion de tous les autres points, ceux dont les coordonnées satisfont à certaines conditions, d'une nature quelconque d'ailleurs : l'ensemble des points ainsi définis constitue ce que l'on nomme une *région* de l'espace analytique.

Nous nommerons *domaine* toute région définie par un système de relations de la forme

$$\text{mod}(x - x_0) < R_x, \quad \text{mod}(y - y_0) < R_y, \dots,$$

où (x_0, y_0, \dots) désigne un point fixe, et R_x, R_y, \dots des constantes *positives* (> 0); ces constantes seront elles-mêmes les *rayons* du domaine, le point (x_0, y_0, \dots) en sera le *centre*.

4. Une série entière en $x - x_0, y - y_0, \dots$, admettant, autour du centre (x_0, y_0, \dots) , quelque domaine de convergence, définit, comme on sait, une fonction de x, y, \dots dans l'intérieur d'un pareil domaine. Donnons à ce développement la forme de Taylor; puis, désignant par (x_1, y_1, \dots) un point intérieur au domaine, introduisons, dans ce développement et dans toutes ses dérivées, l'hypothèse numérique $x = x_1, y = y_1, \dots$. Le calcul des sommes de ces divers développements, une fois effectué, nous permettra évidemment de construire celui de notre fonction à partir des nouvelles valeurs initiales $x_1,$

y_1, \dots : ce deuxième développement de Taylor, entier en $x - x_1$, $y - y_1, \dots$, admettra certainement quelque domaine de convergence, et nous dirons, pour abrégé, qu'il *se raccorde* avec le précédent.

Cela posé, considérons un *chemin brisé* ayant pour *sommets* successifs

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, y_0, \dots), (x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots), \dots, \\ (x_g, y_g, \dots), (X, Y, \dots). \end{array} \right.$$

Si, à partir de ces sommets successifs, on peut construire autant de développements dont chacun se raccorde avec le précédent, et dont le premier ne soit autre que le développement donné, le chemin brisé (21) sera dit *praticable* relativement à celui-ci. D'après cela, il faudra donc, pour que le chemin (21) soit praticable, que le développement donné admette des rayons de convergence respectivement supérieurs aux modules des différences $x_1 - x_0, y_1 - y_0, \dots$, ce qui permettra de construire, à partir des valeurs x_1, y_1, \dots , un deuxième développement se raccordant avec le premier; il faudra ensuite que ce nouveau développement admette des rayons de convergence supérieurs aux modules des différences $x_2 - x_1, y_2 - y_1, \dots$, ce qui permettra de construire, à partir de x_2, y_2, \dots , un troisième développement se raccordant avec le second; et ainsi de suite jusqu'au développement construit à partir de x_g, y_g, \dots , qui doit admettre des rayons de convergence supérieurs aux modules des différences $X - x_g, Y - y_g, \dots$, afin qu'un dernier développement puisse être finalement construit à partir de X, Y, \dots .

Nous nommerons série ou développement *fondamental* ⁽¹⁾ la série entière en $x - x_0, y - y_0, \dots$ choisie comme base des calculs précédents, et nous affecterons de la même qualification les premières valeurs, x_0, y_0, \dots , des variables indépendantes, ainsi que le point (x_0, y_0, \dots) dont elles sont les coordonnées analytiques.

En supposant, comme de raison, que le développement fondamental admette quelque domaine de convergence, tout chemin brisé tracé, à partir du point fondamental, intérieurement à un domaine concen-

⁽¹⁾ Dénomination employée par M. Méray dans ses *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques* (première Partie, p. 133).

trique de rayons moindres, et de telle façon que deux sommets consécutifs soient suffisamment rapprochés, est praticable; d'ailleurs tous les chemins de cette espèce ayant même sommet final conduisent au même développement final. Mais, lorsqu'on franchit les limites de convergence du développement fondamental, on n'a plus, en général, aucune certitude à cet égard, et si l'on considère deux chemins brisés partant du point fondamental et aboutissant au même sommet final, ces deux chemins, à supposer qu'ils soient l'un et l'autre praticables par rapport au développement fondamental, peuvent conduire, comme on sait, soit à un même développement final, soit au contraire à deux développements distincts.

Nous dirons, en conséquence, qu'un développement fondamental donné (admettant quelque domaine de convergence) définit, non pas une fonction, mais une *pseudo-fonction* ⁽¹⁾ de x, y, \dots : pour plus de simplicité toutefois, nous remplacerons souvent, dans ce qui suit, le mot *pseudo-fonction* par le mot *fonction*, auquel nous attacherons implicitement le même sens.

Si à un développement fondamental quelconque on substitue sa dérivée d'ordres partiels p, q, \dots , tout chemin brisé praticable relativement aux anciennes données l'est encore relativement aux nouvelles, et les développements successifs obtenus dans le second cas sont les dérivées d'ordres p, q, \dots de ceux que l'on obtient dans le premier. Cette deuxième pseudo-fonction se nomme la *dérivée d'ordres partiels* p, q, \dots de la proposée.

Enfin, si l'on considère simultanément diverses pseudo-fonctions de x, y, \dots , définies par un même point fondamental et divers développements fondamentaux, une expression de forme entière par rapport aux sommes de ces développements et de leurs dérivées d'ordres quelconques définit évidemment une nouvelle pseudo-fonction; et tout chemin brisé praticable à la fois pour les diverses pseudo-fonctions données ne peut manquer de l'être aussi pour la nouvelle.

5. Considérons actuellement, d'une part, une pseudo-fonction de x, y, \dots définie, conformément aux explications qui précèdent,

(1) Le terme de *pseudo-fonction* est encore emprunté à M. Méray (*Ibidem*).

par un point fondamental, (x_0, y_0, \dots) , et un développement fondamental; d'autre part, une région, \mathfrak{R} , extraite de l'espace analytique $[[x, y, \dots]]$, et comprenant le point (x_0, y_0, \dots) . Nous dirons que la pseudo-fonction dont il s'agit est *calculable par cheminement dans la région* \mathfrak{R} , si, moyennant un choix convenable de la constante positive r , la pseudo-fonction et la région remplissent conjointement les conditions formulées ci-après.

En premier lieu, deux points pris à volonté dans la région \mathfrak{R} peuvent toujours être considérés comme les sommets extrêmes de quelque chemin brisé possédant la double propriété : 1° que tous les sommets intermédiaires se trouvent, eux aussi, dans la région \mathfrak{R} ; 2° que les différences entre les coordonnées analytiques semblables de deux sommets consécutifs quelconques présentent des modules tous inférieurs à r .

En second lieu, si l'on considère un chemin brisé quelconque ayant son origine au point fondamental et tous ses sommets dans la région \mathfrak{R} , tel d'ailleurs que les différences entre les coordonnées analytiques semblables de deux sommets consécutifs quelconques présentent des modules tous inférieurs à r , un pareil chemin est praticable pour la pseudo-fonction proposée, et conduit à des développements successifs admettant des rayons de convergence au moins égaux à r .

Ces conditions étant supposées satisfaites, la constante positive r s'appellera, pour abrégé, *rayon de convergence de la pseudo-fonction dans la région* \mathfrak{R} .

6. Soit S un système différentiel possédant la triple propriété d'être : 1° *phanéronome*; 2° *passif*; 3° *linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées*. Construisons un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes du système S , et les colonnes aux fonctions arbitraires qui figurent dans les conditions initiales; puis, dans l'une quelconque de ces colonnes, noircissons à l'aide de hachures les cases des diverses variables dont ne dépend pas la fonction arbitraire correspondante. En répétant cette opération successivement dans toutes les colonnes, nous obtiendrons une sorte de damier où les cases blanches et noires

pourront offrir des dispositions relatives variées. Finalement, partageons les variables indépendantes en groupes, suivant que, dans le Tableau ainsi construit, leurs lignes offrent ou n'offrent pas la même disposition de cases blanches et noires; c'est-à-dire mettons dans un même groupe les variables dont les lignes offrent la même disposition, dans des groupes différents les variables dont les lignes offrent des dispositions différentes. En supposant, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq variables indépendantes, x, y, z, s, t , et sept fonctions arbitraires dépendant respectivement des variables

$$t; \quad x, t; \quad z, s, t; \quad x, z, s, t; \quad y, t; \quad x, y, t; \quad y, z, s, t,$$

la considération d'un pareil Tableau nous conduira à partager les variables en quatre groupes comprenant, le premier la variable x , le

x	■	□	■	□	■	□	■
y	■	■	■	■	□	□	□
z	■	■	□	□	■	■	□
s	■	■	□	□	■	■	□
t	□	□	□	□	□	□	□

deuxième la variable y , le troisième les variables z et s , le quatrième la variable t .

Considérons maintenant, dans le système S, un groupe d'intégrales répondant à des conditions initiales déterminées, et regardons désormais comme fondamentales les valeurs initiales, x_0, y_0, z_0, s_0, t_0 , choisies pour les variables indépendantes. Considérons ensuite, dans les espaces analytiques

$$[[x]], \quad [[y]], \quad [[z, s]], \quad [[t]],$$

des régions

$$\mathfrak{R}_x, \quad \mathfrak{R}_y, \quad \mathfrak{R}_{z, s}, \quad \mathfrak{R}_t,$$

comprenant respectivement les points

$$x_0, \quad y_0, \quad (z_0, s_0), \quad t_0;$$

il va sans dire que la considération simultanée de deux de ces régions, par exemple de \mathfrak{N}_x et de $\mathfrak{N}_{z,s}$, en fournit une, $(\mathfrak{N}_x, \mathfrak{N}_{z,s})$, extraite de l'espace analytique $[[x, z, s]]$, et contenant le point (x_0, z_0, s_0) ; que la considération simultanée de trois d'entre elles, par exemple de \mathfrak{N}_x , de $\mathfrak{N}_{z,s}$ et de \mathfrak{N}_t , en fournit une, $(\mathfrak{N}_x, \mathfrak{N}_{z,s}, \mathfrak{N}_t)$, extraite de l'espace analytique $[[x, z, s, t]]$, et contenant le point (x_0, z_0, s_0, t_0) ; enfin, que la considération simultanée des quatre régions en fournit une, $(\mathfrak{N}_x, \mathfrak{N}_y, \mathfrak{N}_{z,s}, \mathfrak{N}_t)$, extraite de l'espace analytique $[[x, y, z, s, t]]$, et contenant le point $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$.

Cela posé, si, d'une part, les coefficients du système S sont tous calculables par cheminement dans la région

$$(\mathfrak{N}_x, \mathfrak{N}_y, \mathfrak{N}_{z,s}, \mathfrak{N}_t),$$

si, d'autre part, on a choisi, pour les sept arbitraires qui figurent dans les conditions initiales, des fonctions respectivement calculables dans les régions

$$\begin{aligned} &\mathfrak{N}_t, (\mathfrak{N}_x, \mathfrak{N}_t), (\mathfrak{N}_{z,s}, \mathfrak{N}_t), (\mathfrak{N}_x, \mathfrak{N}_{z,s}, \mathfrak{N}_t), \\ &(\mathfrak{N}_y, \mathfrak{N}_t), (\mathfrak{N}_x, \mathfrak{N}_y, \mathfrak{N}_t), (\mathfrak{N}_y, \mathfrak{N}_{z,s}, \mathfrak{N}_t), \end{aligned}$$

les intégrales correspondantes ne peuvent manquer d'être elles-mêmes calculables dans la région

$$(\mathfrak{N}_x, \mathfrak{N}_y, \mathfrak{N}_{z,s}, \mathfrak{N}_t).$$

D'après ce que nous savons d'une manière générale sur l'économie des conditions initiales dans un système complètement intégrable, celles que nous venons d'imposer aux intégrales de S ont la structure suivante : dans leurs premiers membres figurent les diverses inconnues du système S et quelques-unes de leurs dérivées; dans leurs seconds membres figurent les sept fonctions dont on a fait choix pour les arbitraires; et chaque premier membre est assujéti à se réduire identiquement au second membre correspondant, lorsqu'on y remplace par les valeurs initiales choisies celles d'entre les variables indépendantes dont ne dépend pas l'arbitraire du second membre.

Nos conditions initiales sont donc de la forme :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \gamma_0(t) \text{ pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = 0; \\ \Delta = \delta_0(x, t) \text{ pour } y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = 0; \\ \Theta = \theta_0(z, s, t) \text{ pour } x - x_0 = y - y_0 = 0; \\ \Lambda = \lambda_0(x, z, s, t) \text{ pour } y - y_0 = 0; \\ \Phi = \varphi_0(y, t) \text{ pour } x - x_0 = z - z_0 = s - s_0 = 0; \\ \Psi = \psi_0(x, y, t) \text{ pour } z - z_0 = s - s_0 = 0; \\ \Omega = \omega_0(y, z, s, t) \text{ pour } x - x_0 = 0, \end{array} \right.$$

où l'ensemble des sept quantités

$$(23) \quad \Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda, \Phi, \Psi, \Omega$$

comprend toutes les inconnues du système proposé S avec quelques-unes de leurs dérivées.

Cela étant, nous désignerons par r une quantité positive assez petite pour que les coefficients de S et les seconds membres de (22) soient calculables avec le rayon r dans les régions qui leur sont respectivement assignées, et nous établirons que les fonctions (23) sont calculables avec ce même rayon dans la région

$$(\mathfrak{U}_x, \mathfrak{U}_y, \mathfrak{U}_{z,s}, \mathfrak{U}_t).$$

I. Soient

$$\begin{array}{l} x, \quad y, \quad \dots, \\ z, \quad s, \quad \dots \end{array}$$

des variables indépendantes partagées en deux groupes qui en contiennent chacun un nombre quelconque.

A. Si une fonction est calculable, par cheminement direct, de

$$(x_0, y_0, \dots, z_0, s_0, \dots)$$

en

$$(x_0, y_0, \dots, z_1, s_1, \dots)^{(1)},$$

(1) Nous voulons dire que le point $(x_0, y_0, \dots, z_1, s_1, \dots)$ se trouve dans les limites de convergence du développement construit à partir de $(x_0, y_0, \dots, z_0, s_0, \dots)$, de telle sorte qu'on peut, sans introduire aucun sommet intermédiaire, cheminer *directement* du sommet $(x_0, y_0, \dots, z_0, s_0, \dots)$ au sommet $(x_0, y_0, \dots, z_1, s_1, \dots)$.

et si, après l'avoir ainsi calculée, on introduit dans le développement résultant l'hypothèse numérique

$$(24) \quad x - x_0 = y - y_0 = \dots = 0,$$

on peut, sans changer le résultat final, procéder dans l'ordre inverse, c'est-à-dire introduire dans le développement initial l'hypothèse numérique (24), et effectuer ensuite un cheminement direct de

$$(z_0, s_0, \dots)$$

en

$$(z_1, s_1, \dots).$$

B. Si une fonction est calculable, par cheminement direct, de

$$(x_0, y_0, \dots, z_0, s_0, \dots)$$

en

$$(x_1, y_1, \dots, z_1, s_1, \dots),$$

et si, après l'avoir ainsi calculée, on introduit dans le développement résultant l'hypothèse numérique

$$(25) \quad x - x_1 = y - y_1 = \dots = 0,$$

on peut, sans changer le résultat final, cheminer de

$$(x_0, y_0, \dots, z_0, s_0, \dots)$$

en

$$(x_0, y_0, \dots, z_1, s_1, \dots),$$

et introduire dans le développement résultant l'hypothèse numérique (25).

C. Les variables indépendantes étant, comme ci-dessus, partagées en deux groupes, désignons par (x_0, y_0, \dots) un point de l'espace analytique $[[x, y, \dots]]$; par $\mathfrak{R}_{z,s,\dots}$ une région de l'espace analytique $[[z, s, \dots]]$, et par (z_0, s_0, \dots) un point de cette région; par F une fonction de x, y, \dots, z, s, \dots calculable avec le rayon r dans la région

$$(x_0, y_0, \dots, \mathfrak{R}_{z,s,\dots})$$

à partir de $(x_0, y_0, \dots, z_0, s_0, \dots)$; enfin par (z_1, s_1, \dots) un point de $\mathfrak{R}_{z,s,\dots}$ tel que les différences $z_1 - z_0, s_1 - s_0, \dots$ soient toutes de

module inférieur à r . Cela posé, si l'on calcule la fonction dont il s'agit par cheminement direct de

$$(x_0, y_0, \dots, z_0, s_0, \dots)$$

en

$$(x_0, y_0, \dots, z_1, s_1, \dots),$$

qu'on ordonne par rapport à $z - z_1, s - s_1, \dots$ le développement résultant, et que l'on attribue à x, y, \dots des valeurs numériques vérifiant les relations

$$(36) \quad \text{mod}(x - x_0) < r, \quad \text{mod}(y - y_0) < r, \quad \dots,$$

la fonction ainsi obtenue est calculable avec le rayon r dans la région $\mathbf{U}_{z, s, \dots}$ à partir de (z_1, s_1, \dots) .

Considérons en effet un chemin brisé,

$$(37) \quad (z_1, s_1, \dots), (z_2, s_2, \dots), \dots, (z_n, s_n, \dots), (Z, S, \dots),$$

commençant en (z_1, s_1, \dots) , ayant tous ses sommets dans la région $\mathbf{U}_{z, s, \dots}$, et tel que les différences

$$\begin{array}{ccccccc} z_2 - z_1, & z_3 - z_2, & \dots, & Z - z_n, \\ s_2 - s_1, & s_3 - s_2, & \dots, & S - s_n, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{array}$$

soient toutes de module inférieur à r . Il résulte évidemment de nos hypothèses que le chemin

$$\begin{array}{l} (x_0, y_0, \dots, z_0, s_0, \dots), \\ (x_0, y_0, \dots, z_1, s_1, \dots), \\ (x_0, y_0, \dots, z_2, s_2, \dots), \\ \dots, \\ (x_0, y_0, \dots, z_n, s_n, \dots), \\ (x_0, y_0, \dots, Z, S, \dots) \end{array}$$

est praticable pour la fonction F , et conduit à des développements successifs admettant des rayons (au moins) égaux à r . Cela étant, calculons F de $(x_0, y_0, \dots, z_0, s_0, \dots)$ en $(x_0, y_0, \dots, z_1, s_1, \dots)$, et, une fois parvenu en ce dernier sommet, considérons le développement correspondant comme fondamental : nous avons alors une

Tout revient à prouver que ce dernier chemin est praticable pour les fonctions (23), et conduit, pour chacune d'elles, à des développements successifs admettant des rayons égaux à r .

Effectivement, il résulte de nos hypothèses, d'une part, que les coefficients du système S sont calculables avec le rayon r dans la région (28) à partir du point $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$; d'autre part, que les seconds membres des conditions initiales (22), relatives à ce point, sont calculables, avec ce même rayon r ,

$$(30) \left\{ \begin{array}{l} \text{Le premier dans la région } \mathfrak{R}_t \text{ à partir de } t_0; \\ \text{Le deuxième dans la région } (x_0, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (x_0, t_0); \\ \text{Le troisième dans la région } (z_0, s_0, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (z_0, s_0, t_0); \\ \text{Le quatrième dans la région } (x_0, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (x_0, z_0, s_0, t_0); \\ \text{Le cinquième dans la région } (y_0, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (y_0, t_0); \\ \text{Le sixième dans la région } (x_0, y_0, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (x_0, y_0, t_0); \\ \text{Le septième dans la région } (y_0, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (y_0, z_0, s_0, t_0). \end{array} \right.$$

En vertu du n° 2, les fonctions (23) admettent donc, en

$$(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0),$$

des rayons de convergence égaux à r , et l'on peut calculer par cheminement direct, du premier sommet de (29) au deuxième, tant les coefficients du système S que les fonctions (23). Ce premier pas étant fait, il est clair que les coefficients du système S sont des fonctions calculables avec le rayon r dans la région (28) à partir du point

$$(x_0, y_0, z_0, s_0, t_1);$$

nous allons prouver en outre que les seconds membres des conditions initiales *relatives à ce dernier point* sont calculables, avec ce même rayon r ,

$$(31) \left\{ \begin{array}{l} \text{Le premier dans la région } \mathfrak{R}_t \text{ à partir de } t_1; \\ \text{Le deuxième dans la région } (x_0, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (x_0, t_1); \\ \text{Le troisième dans la région } (z_0, s_0, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (z_0, s_0, t_1); \\ \text{Le quatrième dans la région } (x_0, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (x_0, z_0, s_0, t_1); \\ \text{Le cinquième dans la région } (y_0, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (y_0, t_1); \\ \text{Le sixième dans la région } (x_0, y_0, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (x_0, y_0, t_1); \\ \text{Le septième dans la région } (y_0, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (y_0, z_0, s_0, t_1). \end{array} \right.$$

Quand nous aurons établi cette dernière propriété, nous nous trouverons, vis-à-vis du deuxième sommet de (29), dans la situation où nous étions il y a un instant vis-à-vis du premier; les fonctions (23) y admettront donc encore des rayons égaux à r , et nous pourrons calculer par cheminement direct, du deuxième sommet de (29) au troisième, tant les coefficients du système S que les fonctions (23).

Et le même raisonnement pourra se continuer jusqu'au dernier sommet du chemin (29), où les fonctions (23) admettront encore des rayons égaux à r .

Ainsi, tout revient à établir le point formulé dans (31).

Or, pour avoir les seconds membres des conditions initiales relatives au deuxième sommet $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_1)$ du chemin (29), il faut, après avoir calculé par cheminement les sept fonctions (23) du premier sommet de (29) au deuxième, introduire dans les développements obtenus certaines hypothèses numériques, savoir :

Dans le premier, $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = 0$;

Dans le deuxième, $y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = 0$;

Dans le troisième, $x - x_0 = y - y_0 = 0$;

Dans le quatrième, $y - y_0 = 0$;

Dans le cinquième, $x - x_0 = z - z_0 = s - s_0 = 0$;

Dans le sixième, $z - z_0 = s - s_0 = 0$;

Dans le septième, $x - x_0 = 0$.

Mais, au lieu d'opérer comme il vient d'être dit, c'est-à-dire de calculer *d'abord* les fonctions (23) du premier sommet de (29) au deuxième, et de faire *ensuite* les hypothèses numériques ci-dessus indiquées, on peut (I, A) procéder dans l'ordre inverse, c'est-à-dire considérer les fonctions qui figurent dans les seconds membres de (22), et les calculer par cheminement,

La première de t_0 en t_1 ;

La deuxième de (x_0, t_0) en (x_0, t_1) ;

La troisième de (z_0, s_0, t_0) en (z_0, s_0, t_1) ;

La quatrième de (x_0, z_0, s_0, t_0) en (x_0, z_0, s_0, t_1) ;

La cinquième de (y_0, t_0) en (y_0, t_1) ;

La sixième de (x_0, y_0, t_0) en (x_0, y_0, t_1) ;

La septième de (y_0, z_0, s_0, t_0) en (y_0, z_0, s_0, t_1) .

Cela étant, puisque les seconds membres des conditions initiales (22), relatives au sommet $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, sont calculables avec le rayon r comme nous l'avons indiqué dans (30), il est clair que les seconds membres des conditions initiales relatives au sommet $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_1)$ le sont, avec ce même rayon, comme nous l'avons indiqué dans (31). C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

III. *Les fonctions (23) sont calculables avec le rayon r dans la région*

$$(32) \quad (\mathfrak{R}_x, y_0, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$$

à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$.

Imaginons en effet, à partir de (x_0, t_0) , un chemin brisé,

$$(x_0, t_0), (x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_H, t_H), (\mathbf{X}, \mathbf{T}),$$

ayant tous ses sommets dans $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_t)$, et tel que les différences

$$\begin{aligned} x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \quad \dots, \quad \mathbf{X} - x_H, \\ t_1 - t_0, \quad t_2 - t_1, \quad \dots, \quad \mathbf{T} - t_H \end{aligned}$$

soient toutes de module inférieur à r . A ce chemin correspond, dans la région (32), le chemin

$$(33) \quad \left(\begin{array}{l} (x_0, y_0, z_0, s_0, t_0), \\ (x_1, y_0, z_0, s_0, t_1), \\ (x_2, y_0, z_0, s_0, t_2), \\ \dots, \\ (x_H, y_0, z_0, s_0, t_H), \\ (\mathbf{X}, y_0, z_0, s_0, \mathbf{T}). \end{array} \right)$$

Tout revient à prouver que ce dernier chemin est praticable pour les fonctions (23), et conduit, pour chacune d'elles, à des développements successifs admettant des rayons égaux à r .

Effectivement, il résulte de nos hypothèses, d'une part, que les coefficients du système S sont calculables avec le rayon r dans la région (32) à partir du point $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$; d'autre part, que les seconds membres des conditions initiales (22), relatives à ce point,

sont calculables, avec ce même rayon r ,

- (34) {
- Le premier dans la région \mathfrak{R}_t à partir de t_0 ;
 - Le deuxième dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_0, t_0) ;
 - Le troisième dans la région $(z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (z_0, s_0, t_0) ;
 - Le quatrième dans la région $(\mathfrak{R}_x, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_0, z_0, s_0, t_0) ;
 - Le cinquième dans la région (y_0, \mathfrak{R}_t) à partir de (y_0, t_0) ;
 - Le sixième dans la région $(\mathfrak{R}_x, y_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_0, y_0, t_0) ;
 - Le septième dans la région $(y_0, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (y_0, z_0, s_0, t_0) .

En vertu du n° 2, les fonctions (23) admettent donc, en

$$(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0),$$

des rayons égaux à r , et l'on peut calculer, par cheminement direct, du premier sommet de (33) au deuxième, tant les coefficients du système S que les fonctions (23). Ce premier pas étant fait, il est clair que les coefficients du système S sont des fonctions calculables avec le rayon r dans la région (32) à partir du point $(x_1, y_0, z_0, s_0, t_1)$, et tout revient alors à établir que les seconds membres des conditions initiales relatives à ce dernier point sont calculables, avec ce même rayon r ,

- (35) {
- Le premier dans la région \mathfrak{R}_t à partir de t_1 ;
 - Le deuxième dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_1, t_1) ;
 - Le troisième dans la région $(z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (z_0, s_0, t_1) ;
 - Le quatrième dans la région $(\mathfrak{R}_x, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_1, z_0, s_0, t_1) ;
 - Le cinquième dans la région (y_0, \mathfrak{R}_t) à partir de (y_0, t_1) ;
 - Le sixième dans la région $(\mathfrak{R}_x, y_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_1, y_0, t_1) ;
 - Le septième dans la région $(y_0, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (y_0, z_0, s_0, t_1) ;

car, cette dernière propriété une fois établie, on se trouvera, vis-à-vis du deuxième sommet de (33), dans la situation où l'on était il y a un instant vis-à-vis du premier.

Or, pour avoir les seconds membres des conditions initiales relatives au deuxième sommet $(x_1, y_0, z_0, s_0, t_1)$ du chemin (33), il faut, après avoir calculé par cheminement les sept fonctions (23) du premier sommet de (33) au deuxième, introduire dans les développe-

ments obtenus certaines hypothèses numériques, savoir :

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dans le premier } x - x_1 = y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = 0; \\ \text{Dans le deuxième } y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = 0; \\ \text{Dans le troisième } x - x_1 = y - y_0 = 0; \\ \text{Dans le quatrième } y - y_0 = 0; \\ \text{Dans le cinquième } x - x_1 = z - z_0 = s - s_0 = 0; \\ \text{Dans le sixième } z - z_0 = s - s_0 = 0; \\ \text{Dans le septième } x - x_1 = 0. \end{array} \right.$$

Mais on peut, au lieu de cela, procéder d'une façon un peu différente.

Considérons d'abord Δ , Λ et Ψ (deuxième, quatrième et sixième fonctions). Au lieu de les calculer *d'abord* du premier sommet de (33) au deuxième, et de faire *ensuite* les hypothèses numériques ci-dessus indiquées, on peut (I, A) procéder dans l'ordre inverse, c'est-à-dire considérer les fonctions

$$(37) \quad \delta_0(x, t), \quad \lambda_0(x, z, s, t), \quad \psi_0(x, y, t),$$

et les calculer par cheminement :

$$\begin{array}{l} \delta_0(x, t) \text{ de } (x_0, t_0) \text{ en } (x_1, t_1); \\ \lambda_0(x, z, s, t) \text{ de } (x_0, z_0, s_0, t_0) \text{ en } (x_1, z_0, s_0, t_1); \\ \psi_0(x, y, t) \text{ de } (x_0, y_0, t_0) \text{ en } (x_1, y_0, t_1). \end{array}$$

Cela étant, puisque les fonctions (37) sont calculables avec le rayon r comme l'indiquent les deuxième, quatrième et sixième lignes de (34), il est clair qu'après les cheminements respectifs que nous venons d'indiquer, elles le sont, avec ce même rayon, comme l'indiquent les deuxième, quatrième et sixième lignes de (35).

Considérons maintenant Γ , Θ , Φ , Ω (première, troisième, cinquième et septième fonctions). Au lieu de calculer ces fonctions du premier sommet de (33) au deuxième et d'introduire dans les développements résultants les hypothèses numériques respectivement indiquées dans les première, troisième, cinquième et septième lignes de (36), il revient au même (I, B) de cheminer de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ en $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_1)$ et d'introduire dans les développements résultants les hypothèses dont il s'agit. D'ailleurs, les fonctions Γ , Θ , Φ , Ω étant, en vertu de II, calculables avec le rayon r dans la région

$(x_0, y_0, z_0, s_0, \mathbf{u}_t)$ à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, celles qu'on obtient par cette dernière suite d'opérations sont calculables (I, C) avec le rayon r comme l'indiquent les première, troisième, cinquième et septième lignes de (35).

IV. Les fonctions (23) sont calculables avec le rayon r dans la région

$$(x_0, \mathbf{u}_y, z_0, s_0, \mathbf{u}_t)$$

à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$.

Même démonstration.

V. Les fonctions (23) sont calculables avec le rayon r dans la région

$$(x_0, y_0, \mathbf{u}_{z,s}, \mathbf{u}_t)$$

à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$.

Même démonstration.

VI. Les fonctions (23) sont calculables avec le rayon r dans la région

$$(38) \quad (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, z_0, s_0, \mathbf{u}_t)$$

à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$.

Imaginons en effet, à partir de (x_0, y_0, t_0) , un chemin brisé,

$$(x_0, y_0, t_0), (x_1, y_1, t_1), (x_2, y_2, t_2), \dots, (x_g, y_g, t_g), (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{T}),$$

ayant tous ses sommets dans $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_t)$, et tel que les différences

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 - x_0, & x_2 - x_1, & \dots, & \mathbf{X} - x_g, \\ y_1 - y_0, & y_2 - y_1, & \dots, & \mathbf{Y} - y_g, \\ t_1 - t_0, & t_2 - t_1, & \dots, & \mathbf{T} - t_g \end{array}$$

soient toutes de module inférieur à r . A ce chemin correspond, dans la région (38), le chemin

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, y_0, z_0, s_0, t_0), \\ (x_1, y_1, z_0, s_0, t_1), \\ (x_2, y_2, z_0, s_0, t_2), \\ \dots, \\ (x_g, y_g, z_0, s_0, t_g), \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, z_0, s_0, \mathbf{T}). \end{array} \right.$$

Tout revient à prouver que ce dernier chemin est praticable pour les fonctions (23), et conduit, pour chacune d'elles, à des développements successifs admettant des rayons égaux à r .

Effectivement, il résulte de nos hypothèses, d'une part, que les coefficients du système S sont calculables avec le rayon r dans la région (38) à partir du point $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$; d'autre part, que les seconds membres des conditions initiales (22), relatives à ce point, sont calculables, avec ce même rayon r ,

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} \text{Le premier dans la région } \mathbf{R}_t \text{ à partir de } t_0; \\ \text{Le deuxième dans la région } (\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_t) \text{ à partir de } (x_0, t_0); \\ \text{Le troisième dans la région } (z_0, s_0, \mathbf{R}_t) \text{ à partir de } (z_0, s_0, t_0); \\ \text{Le quatrième dans la région } (\mathbf{R}_x, z_0, s_0, \mathbf{R}_t) \text{ à partir de } (x_0, z_0, s_0, t_0); \\ \text{Le cinquième dans la région } (\mathbf{R}_y, \mathbf{R}_t) \text{ à partir de } (y_0, t_0); \\ \text{Le sixième dans la région } (\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_t) \text{ à partir de } (x_0, y_0, t_0); \\ \text{Le septième dans la région } (\mathbf{R}_y, z_0, s_0, \mathbf{R}_t) \text{ à partir de } (y_0, z_0, s_0, t_0). \end{array} \right.$$

En vertu du n° 2, les fonctions (23) admettent donc, en $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, des rayons égaux à r , et l'on peut calculer par cheminement direct, du premier sommet de (39) au deuxième, tant les coefficients du système S que les fonctions (23). Ce premier pas étant fait, il est clair que les coefficients du système S sont des fonctions calculables avec le rayon r dans la région (38) à partir du point $(x_1, y_1, z_0, s_0, t_1)$, et tout revient alors à établir que les seconds membres des conditions initiales *relatives à ce dernier point* sont calculables, avec ce même rayon r ,

$$(41) \left\{ \begin{array}{l} \text{Le premier dans la région } \mathbf{R}_t \text{ à partir de } t_1; \\ \text{Le deuxième dans la région } (\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_t) \text{ à partir de } (x_1, t_1); \\ \text{Le troisième dans la région } (z_0, s_0, \mathbf{R}_t) \text{ à partir de } (z_0, s_0, t_1); \\ \text{Le quatrième dans la région } (\mathbf{R}_x, z_0, s_0, \mathbf{R}_t) \text{ à partir de } (x_1, z_0, s_0, t_1); \\ \text{Le cinquième dans la région } (\mathbf{R}_y, \mathbf{R}_t) \text{ à partir de } (y_1, t_1); \\ \text{Le sixième dans la région } (\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_t) \text{ à partir de } (x_1, y_1, t_1); \\ \text{Le septième dans la région } (\mathbf{R}_y, z_0, s_0, \mathbf{R}_t) \text{ à partir de } (y_1, z_0, s_0, t_1). \end{array} \right.$$

Or, pour avoir les seconds membres des conditions initiales relatives au deuxième sommet, $(x_1, y_1, z_0, s_0, t_1)$, du chemin (39), il

faut, après avoir calculé par cheminement les sept fonctions (23) du premier sommet de (39) au deuxième, introduire dans les développements obtenus certaines hypothèses numériques, savoir :

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dans le premier } x - x_1 = y - y_1 = z - z_0 = s - s_0 = 0; \\ \text{Dans le deuxième } y - y_1 = z - z_0 = s - s_0 = 0; \\ \text{Dans le troisième } x - x_1 = y - y_1 = 0; \\ \text{Dans le quatrième } y - y_1 = 0; \\ \text{Dans le cinquième } x - x_1 = z - z_0 = s - s_0 = 0; \\ \text{Dans le sixième } z - z_0 = s - s_0 = 0; \\ \text{Dans le septième } x - x_1 = 0. \end{array} \right.$$

Mais on peut, au lieu de cela, procéder d'une façon un peu différente.

Considérons d'abord Ψ (sixième fonction). Au lieu de la calculer *d'abord* du premier sommet de (39) au deuxième, et de faire *ensuite* l'hypothèse numérique $z - z_0 = s - s_0 = 0$, on peut (I, A) procéder dans l'ordre inverse, c'est-à-dire considérer la fonction $\psi_0(x, y, t)$ et la calculer par cheminement de (x_0, y_0, t_0) en (x_1, y_1, t_1) . Cela étant, puisque la fonction $\psi_0(x, y, t)$ est calculable avec le rayon r dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_0, y_0, t_0) [voir (40)], il est clair qu'après le cheminement que nous venons d'indiquer, elle l'est, avec ce même rayon, dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_1, y_1, t_1) : c'est là précisément la conclusion requise par la sixième ligne de (41).

Considérons maintenant les cinq premières des fonctions (23) et la septième. Au lieu de les calculer du premier sommet de (39) au deuxième, et d'introduire dans les développements résultants les hypothèses numériques respectivement indiquées dans les cinq premières lignes de (42) et dans la septième, on peut (I, B) opérer comme il suit :

1° En ce qui concerne les fonctions Γ et Θ , il revient au même de cheminer de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ en $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_1)$, et d'introduire dans les développements résultants les hypothèses numériques voulues, savoir :

$$\begin{array}{l} \text{Dans l'un, } x - x_1 = y - y_1 = z - z_0 = s - s_0 = 0, \\ \text{Dans l'autre, } x - x_1 = y - y_1 = 0. \end{array}$$

D'ailleurs, les fonctions Γ et Θ étant, en vertu de II, calculables avec le

rayon r dans la région $(x_0, y_0, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, celles qu'on obtient par cette dernière suite d'opérations sont calculables (I, C) avec le rayon r ,

L'une dans la région \mathfrak{R}_t à partir de t_1 ,

L'autre dans la région $(z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (z_0, s_0, t_1) .

2° En ce qui concerne les fonctions Δ et Λ , il revient au même de cheminer de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ en $(x_1, y_0, z_0, s_0, t_1)$, et d'introduire dans les développements résultants les hypothèses numériques voulues, savoir :

Dans l'un, $y - y_1 = z - z_0 = s - s_0 = 0$,

Dans l'autre, $y - y_1 = 0$.

D'ailleurs les fonctions Δ et Λ étant, en vertu de III, calculables avec le rayon r dans la région $(\mathfrak{R}_x, y_0, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, celles qu'on obtient par cette dernière suite d'opérations sont calculables (I, C) avec le rayon r ,

L'une dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_1, t_1) ,

L'autre dans la région $(\mathfrak{R}_x, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_1, z_0, s_0, t_1) .

3° En ce qui concerne les fonctions Φ et Ω , il revient au même de cheminer de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ en $(x_0, y_1, z_0, s_0, t_1)$, et d'introduire dans les développements résultants les hypothèses numériques voulues, savoir :

Dans l'un, $x - x_1 = z - z_0 = s - s_0 = 0$,

Dans l'autre, $x - x_1 = 0$.

D'ailleurs les fonctions Φ et Ω étant, en vertu de IV, calculables avec le rayon r dans la région $(x_0, \mathfrak{R}_y, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, celles qu'on obtient par cette dernière suite d'opérations sont calculables (I, C) avec le rayon r ,

L'une dans la région $(\mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (y_1, t_1) ,

L'autre dans la région $(\mathfrak{R}_y, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$, à partir de (y_1, z_0, s_0, t_1) .

Ainsi se trouve établi tout ce que nous avons annoncé dans (41).

VII. Les fonctions (23) sont calculables avec le rayon r dans la région

$$(\mathfrak{U}_x, \mathfrak{Y}_0, \mathfrak{U}_{z,s}, \mathfrak{U}_t)$$

à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$.

Même démonstration.

VIII. Les fonctions (23) sont calculables avec le rayon r dans la région

$$(x_0, \mathfrak{U}_y, \mathfrak{U}_{z,s}, \mathfrak{U}_t)$$

à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$.

Même démonstration.

IX. Les fonctions (23) sont calculables avec le rayon r dans la région

$$(43) \quad (\mathfrak{U}_x, \mathfrak{U}_y, \mathfrak{U}_{z,s}, \mathfrak{U}_t)$$

à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, conformément à notre énoncé général.

Imaginons en effet, à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, un chemin brisé,

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, y_0, z_0, s_0, t_0), \\ (x_1, y_1, z_1, s_1, t_1), \\ (x_2, y_2, z_2, s_2, t_2), \\ \dots, \\ (x_g, y_g, z_g, s_g, t_g), \\ (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}), \end{array} \right.$$

ayant tous ses sommets dans la région (43), et tel que les différences

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 - x_0, & x_2 - x_1, & \dots, & \mathfrak{X} - x_g, \\ y_1 - y_0, & y_2 - y_1, & \dots, & \mathfrak{Y} - y_g, \\ z_1 - z_0, & z_2 - z_1, & \dots, & \mathfrak{Z} - z_g, \\ s_1 - s_0, & s_2 - s_1, & \dots, & \mathfrak{S} - s_g, \\ t_1 - t_0, & t_2 - t_1, & \dots, & \mathfrak{T} - t_g \end{array}$$

soient toutes de module inférieur à r . Tout revient à prouver que le chemin (44) est praticable pour les fonctions (23), et conduit, pour chacune d'elles, à des développements successifs admettant des rayons égaux à r .

Effectivement, il résulte de nos hypothèses, d'une part, que les coefficients du système \mathfrak{S} sont calculables avec le rayon r dans la

région (43) à partir du point $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$; d'autre part, que les seconds membres des conditions initiales (22), relatives à ce point, sont calculables, avec ce même rayon r ,

- Le premier dans la région \mathfrak{R}_t à partir de t_0 ;
- Le deuxième dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_0, t_0) ;
- Le troisième dans la région $(\mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (z_0, s_0, t_0) ;
- Le quatrième dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_0, z_0, s_0, t_0) ;
- Le cinquième dans la région $(\mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (y_0, t_0) ;
- Le sixième dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_0, y_0, t_0) ;
- Le septième dans la région $(\mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (y_0, z_0, s_0, t_0) .

En vertu du n° 2, les fonctions (23) admettent donc, en

$$(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0),$$

des rayons égaux à r , et l'on peut calculer, par cheminement direct, du premier sommet de (44) au deuxième, tant les coefficients du système S que les fonctions (23). Ce premier pas étant fait, il est clair que les coefficients du système S sont des fonctions calculables avec le rayon r dans la région (43) à partir du point $(x_1, y_1, z_1, s_1, t_1)$, et tout revient alors à établir que les seconds membres des conditions initiales *relatives à ce dernier point* sont calculables, avec ce même rayon r ,

- (45) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Le premier dans la région } \mathfrak{R}_t \text{ à partir de } t_1; \\ \text{Le deuxième dans la région } (\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (x_1, t_1); \\ \text{Le troisième dans la région } (\mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (z_1, s_1, t_1); \\ \text{Le quatrième dans la région } (\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (x_1, z_1, s_1, t_1); \\ \text{Le cinquième dans la région } (\mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (y_1, t_1); \\ \text{Le sixième dans la région } (\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (x_1, y_1, t_1); \\ \text{Le septième dans la région } (\mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t) \text{ à partir de } (y_1, z_1, s_1, t_1). \end{array} \right.$

Or, pour avoir les seconds membres des conditions initiales relatives au deuxième sommet $(x_1, y_1, z_1, s_1, t_1)$, du chemin (44), il faut, après avoir calculé par cheminement les sept fonctions (23) du premier sommet de (44) au deuxième, introduire dans les développe-

ments obtenus certaines hypothèses numériques, savoir :

Dans le premier $x - x_1 = y - y_1 = z - z_1 = s - s_1 = 0$;

Dans le deuxième $y - y_1 = z - z_1 = s - s_1 = 0$;

Dans le troisième $x - x_1 = y - y_1 = 0$;

Dans le quatrième $y - y_1 = 0$;

Dans le cinquième $x - x_1 = z - z_1 = s - s_1 = 0$;

Dans le sixième $z - z_1 = s - s_1 = 0$;

Dans le septième $x - x_1 = 0$.

Mais on peut, au lieu de cela, procéder d'une manière un peu différente.

1° En ce qui concerne la fonction Γ , il revient au même (I, B) de cheminer de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ en $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_1)$, et de faire ensuite

$$x - x_1 = y - y_1 = z - z_1 = s - s_1 = 0.$$

D'ailleurs, la fonction Γ étant, en vertu de II, calculable avec le rayon r dans la région $(x_0, y_0, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, celle qu'on obtient par cette dernière suite d'opérations est calculable (I, C) avec le rayon r dans la région \mathfrak{R}_t à partir de t_1 .

2° En ce qui concerne la fonction Δ , il revient au même (I, B) de cheminer de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ en $(x_1, y_0, z_0, s_0, t_1)$, et de faire ensuite

$$y - y_1 = z - z_1 = s - s_1 = 0.$$

D'ailleurs, la fonction Δ étant, en vertu de III, calculable avec le rayon r dans la région $(\mathfrak{R}_x, y_0, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, celle qu'on obtient par cette dernière suite d'opérations est calculable (I, C) avec le rayon r dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_1, t_1) .

3° En ce qui concerne la fonction Θ , il revient au même (I, B) de cheminer de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ en $(x_0, y_0, z_1, s_1, t_1)$, et de faire ensuite

$$x - x_1 = y - y_1 = 0.$$

D'ailleurs, la fonction Θ étant, en vertu de V, calculable avec le rayon r dans la région $(x_0, y_0, \mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t)$ à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, celle qu'on obtient par cette dernière suite d'opérations est calculable (I, C) avec le rayon r dans la région $(\mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (z_1, s_1, t_1) .

4° En ce qui concerne la fonction Λ , il revient au même (I, B) de cheminer de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ en $(x_1, y_1, z_1, s_1, t_1)$ et de faire ensuite $y - y_1 = 0$. D'ailleurs, la fonction Λ étant, en vertu de VII, calculable avec le rayon r dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_z, \mathfrak{R}_s, \mathfrak{R}_t)$ à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, celle qu'on obtient par cette dernière suite d'opérations est calculable (I, C) avec le rayon r dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_z, \mathfrak{R}_s, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_1, z_1, s_1, t_1) .

5° En ce qui concerne la fonction Φ , il revient au même (I, B) de cheminer de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ en $(x_1, y_1, z_0, s_0, t_1)$, et de faire ensuite

$$x - x_1 = z - z_1 = s - s_1 = 0.$$

D'ailleurs, la fonction Φ étant, en vertu de IV, calculable avec le rayon r dans la région $(x_0, \mathfrak{R}_y, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, celle qu'on obtient par cette dernière suite d'opérations est calculable (I, C) avec le rayon r dans la région $(\mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (y_1, t_1) .

6° En ce qui concerne la fonction Ψ , il revient au même (I, B) de cheminer de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ en $(x_1, y_1, z_0, s_0, t_1)$, et de faire ensuite

$$z - z_1 = s - s_1 = 0.$$

D'ailleurs, la fonction Ψ étant, en vertu de VI, calculable avec le rayon r dans la région $(\mathfrak{R}_z, \mathfrak{R}_y, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t)$ à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, celle qu'on obtient par cette dernière suite d'opérations est calculable (I, C) avec le rayon r dans la région $(\mathfrak{R}_z, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (x_1, y_1, t_1) .

7° En ce qui concerne la fonction Ω , il revient au même (I, B) de cheminer de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ en $(x_0, y_1, z_1, s_1, t_1)$ et de faire ensuite $x - x_1 = 0$. D'ailleurs, la fonction Ω étant, en vertu de VIII, calculable avec le rayon r dans la région $(x_0, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_z, \mathfrak{R}_s, \mathfrak{R}_t)$ à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, celle qu'on obtient par cette dernière suite d'opérations est calculable (I, C) avec le rayon r dans la région $(\mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_z, \mathfrak{R}_s, \mathfrak{R}_t)$ à partir de (y_1, z_1, s_1, t_1) .

Ainsi se trouve établi tout ce que nous avons annoncé dans (45).

