CH. SIMON

Mémoire sur la rotation de la lune

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 6 (1869), p. 69-84
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6__69_0>

MÉMOIRE

SUR

LA ROTATION DE LA LUNE

(DEUXIÈME MÉMOIRE),

PAR M. CH. SIMON,

PROFESSEUR AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND.

Dans ce second Mémoire (*), je me propose un double objet :

1° Déterminer exactement les conditions initiales auxquelles la Lune a dû satisfaire, pour que son mouvement de rotation devînt tel que nous l'observons;

2° Faire voir avec précision, en ayant égard à tous les faits et en respectant les lois de la Mécanique, que ces conditions sont des conséquences naturelles de la célèbre hypothèse qui termine l'*Exposition du système du monde*.

Je ne me propose rien de plus. En étudiant le phénomène de la libration réelle en latitude, j'ai rencontré, sans la chercher, une équation de condition, de forme assez compliquée, qui se rapporte à l'état initial, et qui doit être satisfaite dans toute hypothèse qu'on voudra imaginer : il était naturel d'examiner si elle est ou non satisfaite dans l'hypothèse la plus célèbre et la plus autorisée. C'est un exercice intéressant d'analyse mathématique, et je n'y vois pas autre chose. Je ne me crois pas obligé de prendre parti pour ou contre la théorie cosmogonique de Laplace; je ne cherche pas plus à la confirmer qu'à l'é-

(*) *Voyez* un premier Mémoire sur la rotation de la Lune et sur la libration réelle en latitude, inséré dans le tome III des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*.

branler. Il est vrai que j'ai été conduit, par la nature de mon sujet, à discuter la principale objection qu'on a élevée contre cette théorie, à savoir : la grande inclinaison des équateurs de plusieurs planètes sur le plan du maximum des aires ; et l'on comprend que si cette objection m'avait paru insurmontable mon travail n'aurait pas eu de base. Mais je n'ai pas la prétention d'embrasser la question dans son ensemble et de rendre compte de toutes les particularités que présente le système solaire : je désire me renfermer strictement dans le problème spécial et nettement défini que j'ai indiqué.

I. — *Des conditions initiales du mouvement de rotation de la Lune.*

Si l'on fait abstraction des oscillations périodiques, qui ne dépendent pas de l'état initial, le phénomène de la rotation de la Lune reste assujetti à ces deux lois remarquables : 1° que le mouvement de rotation est constamment égal au moyen mouvement de rotation ; 2° que le nœud ascendant de l'équateur coïncide constamment avec le nœud descendant de l'orbite. Voyons quelles sont les conséquences qui résultent de ces deux lois, relativement à l'état initial.

De la première loi on conclut qu'à l'origine du mouvement la vitesse de rotation a dû être égale à la vitesse moyenne de révolution, et que le grand axe du sphéroïde lunaire a dû être dirigé vers la position moyenne de la Terre, sinon rigoureusement, du moins à très-peu près. Car, si ces conditions n'eussent pas été remplies, on sait, par la théorie de la libration en longitude, que l'expression de cette libration renfermerait un terme de la forme (*)

$$u = Q \sin\left(nt\sqrt{3\,\frac{B-A}{C}} + F\right);$$

où Q et F désignent deux constantes arbitraires ; A, B, C, les moments principaux d'inertie du sphéroïde lunaire, rangés par ordre de grandeurs croissantes ; n le moyen mouvement de rotation ou de révolution,

(*) *Mécanique céleste,* livre V, n° 16.

et t le temps. Il en résulterait, dans le mouvement du grand axe du sphéroïde lunaire par rapport au rayon vecteur mené vers la position moyenne de la Terre, une oscillation d'amplitude arbitraire, dont la période serait égale à

$$\frac{27,3215}{\sqrt{3\frac{B-A}{C}}} \text{ jours};$$

ou à 665 jours environ, en supposant, d'après Nicollet,

$$3\frac{B-A}{C} = 0,00169.$$

Or l'observation n'a constaté, dans la libration en longitude, aucune période de ce genre.

L'interprétation de la seconde loi exige un peu plus de développements. Appelons θ l'inclinaison de l'équateur lunaire sur le plan de l'écliptique, γ l'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire sur le même plan, ψ la longitude du nœud ascendant de l'équateur à partir d'une droite fixe, ω la longitude moyenne du nœud descendant de l'orbite à partir de la même droite; et enfin désignons par h un angle déterminé par l'équation

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} n \frac{C-A}{B}\left(1+\frac{\gamma}{h}\right), \tag{1}$$

dans laquelle on regarde comme données les quantités n, γ, $\frac{C-A}{B}$ et $\frac{d\omega}{dt}$. En dépouillant ψ et θ des termes périodiques qui proviennent de la longitude sélénocentrique de la Terre et de l'excentricité de l'orbite, nous avons trouvé, dans notre premier Mémoire,

$$\left\{\begin{aligned} \omega - \psi &= \frac{H}{h}\cos\left(\frac{3n\gamma}{2h}\frac{C-A}{B}t + \eta\right), \\ \theta - h &= H\sin\left(\frac{3n\gamma}{2h}\frac{C-A}{B}t + \eta\right), \end{aligned}\right. \tag{2}$$

H et η étant des constantes arbitraires qui dépendent de l'état initial. On voit par ces formules que les positions moyennes du nœud descendant de l'orbite et du nœud ascendant de l'équateur coïncident rigoureusement, et que la valeur moyenne de θ est rigoureusement égale à la valeur de h qui satisfait à l'équation (1); mais on voit en même temps que le nœud ascendant de l'équateur oscille de part et d'autre du nœud descendant de l'orbite, et que l'inclinaison θ oscille en deçà et au delà de h.

Si l'on prend pour origine du temps l'instant d'une coïncidence des nœuds, et si l'on désigne par θ_0 la valeur de θ à cet instant, les constantes H et η sont déterminées, et les formules (2) deviennent

$$(3)\qquad \begin{cases} \omega - \psi = -\dfrac{\theta_0 - h}{h}\sin\left(\dfrac{3n\gamma}{2h}\,\dfrac{C-A}{B}\,t\right), \\ \theta - h = +(\theta_0 - h)\cos\left(\dfrac{3n\gamma}{2h}\,\dfrac{C-A}{B}\,t\right). \end{cases}$$

L'amplitude des oscillations que ces formules indiquent est proportionnelle à la différence $(\theta_0 - h)$; quant à leur durée, elle a pour expression

$$\frac{4\pi h}{3n\gamma\,\dfrac{C-A}{B}},$$

ce qui donne environ 8740 jours, d'après le Mémoire déjà cité. Mais comme les observations n'ont fait connaître, ni dans l'inclinaison, ni dans la position des nœuds de l'équateur lunaire, aucune période de ce genre, il faut admettre qu'on a, sinon rigoureusement, du moins à très-peu près,

$$\theta_0 = h,$$

et par suite

$$\theta = h,$$
$$\psi = \omega.$$

Nous avons démontré d'ailleurs que la coïncidence du nœud descendant moyen de l'orbite avec le nœud ascendant moyen de l'équateur étant une fois établie, cette coïncidence se maintiendra indéfiniment, malgré les variations périodiques ou séculaires que les forces perturbatrices pourront introduire dans les éléments n, γ, θ et $\frac{d\omega}{dt}$. Concluons donc qu'au moment où la coïncidence des nœuds s'est établie la valeur de θ a dû être égale à la valeur de h que détermine l'équation (1); ou, en d'autres termes, que les éléments n, γ, θ et $\frac{d\omega}{dt}$, ont dû, à ce moment, satisfaire à l'équation

$$(4)\qquad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} n \frac{C-A}{B}\left(1+\frac{\gamma}{\theta}\right),$$

sinon rigoureusement, du moins à très-peu près. Car, si cette condition n'eût pas été à très-peu près remplie, les oscillations indiquées par les formules (3) seraient sensibles.

Nous avons donc déduit de l'observation et de la théorie des conditions nettement définies, qui doivent être satisfaites dans toute hypothèse cosmogonique; il nous reste à examiner si elles sont satisfaites dans l'hypothèse de Laplace. Mais, avant d'entrer dans cette discussion, il est nécessaire de remarquer que la Lune est loin d'avoir la figure qu'elle aurait si elle eût été primitivement fluide. En effet, si la Lune eût été primitivement fluide, elle eût pris, sous la double influence de son mouvement de rotation et de l'attraction de la Terre, la figure d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, ayant son grand axe dirigé vers la Terre, ce qui s'accorde avec les faits observés; mais en même temps on trouve, par un calcul fort simple (*), que le coefficient $\frac{C-A}{B}$ eût acquis une valeur tout au plus égale à 0,00004052; tandis que, selon les observations, la valeur de ce coefficient est 0,000597, c'est-à-dire environ quinze fois trop forte. A la vérité l'on pourrait imaginer que la Lune ayant été primitivement fluide, sa figure ait changé par suite d'éruptions volcaniques, de soulèvements ou d'affaissements de montagnes; mais cela reviendrait à ajouter une nouvelle hypothèse à celle que nous voulons examiner, et, comme cette nouvelle hypothèse est inutile, nous nous abstiendrons de l'introduire.

II. — *De l'hypothèse de Laplace.*

Considérons la Terre à l'époque où son atmosphère s'étendait au delà de l'orbite actuelle de la Lune. La Terre décrivait alors autour du Soleil

(*) *Mécanique céleste*, livre V, n° 18. Laplace suppose le rapport de la masse de la Terre à celle de la Lune égal à 59; nous l'avons supposé égal à 84.

une orbite de même grand axe que l'orbite actuelle, à peu près de même excentricité et à peu près dans le même plan. Elle était animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe incliné sur l'axe de l'écliptique d'une quantité arbitraire que nous désignerons par θ; de cette rotation résultait un aplatissement, et de cet aplatissement un mouvement de précession que nous allons calculer. Pour cela nous aurons recours à des formules que M. Liouville a données dans la *Connaissance des Temps* pour 1859. Quand on considère un système quelconque de points matériels sollicités par des forces quelconques, on peut toujours concevoir à un instant donné l'ellipsoïde des moments d'inertie, ayant pour centre le centre de gravité du système. Cet ellipsoïde change continuellement de position et de forme, de sorte qu'au bout du temps infiniment court dt les axes principaux OX_1, OY_1, OZ_1, ont pris une position infiniment voisine OX', OY', OZ', tandis que les moments principaux d'inertie A, B, C, ont augmenté de $\frac{dA}{dt}\,dt$, $\frac{dB}{dt}\,dt$, $\frac{dC}{dt}\,dt$; mais, quels que soient ces changements, on peut toujours passer de la première position à la seconde par trois rotations infiniment petites $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$, exécutées autour des axes OX_1, OY_1, OZ_1, et les quantités p, q, r sont liées aux variations des trois angles φ, ψ, θ, qui déterminent la position des axes mobiles par rapport à trois axes fixes, par les relations connues

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} d\theta &= p\,dt\cos\varphi - q\,dt\sin\varphi,\\ \sin\theta\, d\psi &= p\,dt\sin\varphi + q\,dt\cos\varphi,\\ d\varphi &= r\,dt - \cos\theta\, d\psi. \end{aligned}\right.$$

M. Liouville s'est proposé d'établir entre les quantités p, q, r et le temps trois équations différentielles, pour tenir lieu de celles qu'Euler a données le premier dans le cas d'un système de figure invariable.

Les formules générales auxquelles M. Liouville est parvenu sont compliquées, mais elles se simplifient beaucoup lorsque le système reste constamment symétrique par rapport aux trois plans de ses axes principaux. Nous admettrons que la Terre, à l'époque où elle était fluide, satisfaisait à cette condition, et nous supposerons de plus que sa figure était de révolution. Si nous appelons P, Q, R, les couples accélérateurs dus à l'action du Soleil, les formules de M. Liouville deviendront

$$
(6) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d(\mathrm{A}p)}{dt} + (\mathrm{C} - \mathrm{A})qr = \mathrm{P},\\
&\frac{d(\mathrm{A}q)}{dt} - (\mathrm{C} - \mathrm{A})pr = \mathrm{Q},\\
&\frac{d(\mathrm{C}r)}{dt} = \mathrm{R}.
\end{aligned}
\right.
$$

Or, on a évidemment $\mathrm{R} = 0$, et par suite

$$\mathrm{C}r = \text{const.} = \mathrm{F}.$$

On trouve ensuite, en désignant par n' le moyen mouvement géocentrique du Soleil, et en supprimant les termes qui dépendent de la longitude de cet astre,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P} &= -\frac{3}{2} n'^2(\mathrm{C} - \mathrm{A})\sin\theta\cos\theta\cos\varphi,\\
\mathrm{Q} &= +\frac{3}{2} n'^2(\mathrm{C} - \mathrm{A})\sin\theta\cos\theta\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

On peut admettre que l'aplatissement est proportionnel au carré de la vitesse de rotation, et poser

$$\mathrm{A} = \mathrm{C}(1 - \varepsilon r^2), \quad \mathrm{C} - \mathrm{A} = \varepsilon\,\mathrm{C}r^2,$$

ε désignant un coefficient positif très-petit. Si l'on néglige les termes qui sont multipliés par le produit des trois facteurs très-petits ε, $\frac{dr}{dt}$, p ou q, les deux premières équations (6) prennent la forme

$$
(7) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&(1 - \varepsilon r^2)\frac{d(\mathrm{C}p)}{dt} = -\varepsilon r^3(\mathrm{C}q) - \frac{3}{2} n'^2\varepsilon\mathrm{F}r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi,\\
&(1 - \varepsilon r^2)\frac{d(\mathrm{C}q)}{dt} = +\varepsilon r^3(\mathrm{C}p) + \frac{3}{2} n'^2\varepsilon\mathrm{F}r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour les intégrer (abstraction faite des termes qui dépendent de l'état initial), supposons $d\varphi = r\,dt$, et faisons

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}p &= \frac{3}{2} n'^2\mathrm{F}(\mathrm{M}\sin\varphi - \mathrm{N}\cos\varphi),\\
\mathrm{C}q &= \frac{3}{2} n'^2\mathrm{F}(\mathrm{M}\cos\varphi + \mathrm{N}\sin\varphi);
\end{aligned}
$$

M et N étant des fonctions de r et de θ, qui devront satisfaire aux équations différentielles

$$\mathrm{M}r - \frac{d\mathrm{N}}{dt}(1-\varepsilon r^2) + \varepsilon r \sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$\mathrm{N}r + \frac{d\mathrm{M}}{dt} = 0.$$

On aura ensuite, par les deux premières formules (5),

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{2}n'^2\mathrm{N}r,$$

$$\sin\theta\frac{d\psi}{dt} = +\frac{3}{2}n'^2\mathrm{M}r.$$

On satisfait à ces équations en posant

$$\mathrm{N} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \mathrm{M} = -\varepsilon\sin\theta\cos\theta,$$

et il serait aisé de faire voir qu'on ne peut pas y satisfaire autrement. On a donc

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} &\theta = \text{const.},\\ &\frac{d\psi}{dt} = -\frac{3}{2}n'^2\varepsilon r\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ainsi, l'inclinaison moyenne de l'équateur sur l'écliptique reste constante, mais la vitesse du mouvement de précession croît en même temps que la rotation.

Or, dans la conception de Laplace, la Terre (pour ne parler que de cette seule planète) étant issue du Soleil, les équateurs de ces deux astres ont dû être primitivement peu inclinés sur le plan du maximum des aires, et par suite sur le plan de l'écliptique. Nous venons de voir que l'inclinaison de l'équateur terrestre sur l'écliptique ne change pas par le seul fait de la condensation; la grandeur de l'inclinaison actuelle paraît donc inexplicable. Si cette objection était insoluble, l'hypothèse de Laplace devrait être rejetée.

Mais les résultats précédents se rapportent à l'époque où toute la matière qui constitue aujourd'hui la Terre formait une seule masse fluide. Le mouvement de rotation continuant à s'accélérer, il a du arriver plusieurs fois que la force centrifuge à l'équateur ait fait équilibre à la pesanteur; la Terre a dû abandonner successivement, dans le plan de son équateur, plusieurs zones ou anneaux de vapeurs dont nous ne retrouvons plus la trace. Sous des conditions très-particulières, il aurait pu se faire que chacune de ces zones eût acquis une figure permanente : les anneaux de Saturne nous offrent un exemple curieux de ce phénomène. Sous d'autres conditions, chaque zone s'étant rompue en plusieurs fragments aurait donné naissance à autant de satellites, qui eussent continué à circuler autour de la planète dans des orbites peu différentes les unes des autres : telle est peut-être l'origine des nombreux astéroïdes qui circulent autour du Soleil entre Mars et Jupiter. Mais la constitution générale du système du monde prouve que ces circonstances ne se sont présentées qu'exceptionnellement. On ne peut pas supposer en général que chacune des molécules qui constituent un anneau fluide se comporte comme si elle était soumise uniquement aux actions de la pesanteur, et l'on se rapprochera davantage des conditions de la nature en imaginant que chaque anneau se contracte en se refroidissant (à peu près comme ferait un anneau solide, qu'on aurait porté d'abord à une haute température, et qu'on abandonnerait ensuite dans une enceinte de température basse et constante), et qu'il finit par se précipiter à la surface de la planète (*). Étudions dans cette hypothèse le mouvement d'un pareil anneau.

Nous ne pouvons pas appliquer la théorie précédente au système formé par le noyau central et par ses anneaux, parce qu'il ne serait plus permis de supposer $\frac{C-A}{C}$ proportionnel à r^2; mais nous pouvons encore appliquer les formules (6) à chaque anneau considéré séparément, et troublé par le Soleil. La troisième de ces formules donne d'abord

$$Cr = \text{const.} = F.$$

Bien que chaque zone, vue du centre de la Terre, puisse avoir plusieurs degrés de largeur, il est permis, lorsqu'on ne se préoccupe que des

(*) Les plus récentes observations des anneaux de Saturne semblent confirmer cette manière de voir.

résultats moyens, de la traiter comme un anneau très-mince. Nous aurons donc

$$C = 2A, \quad C - A = A = \frac{F}{2r},$$

et les deux premières équations (6) deviendront

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{d\left(\frac{p}{r}\right)}{dt} = -q - \dfrac{3}{2} n'^2 \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{r} \cos\varphi, \\ \dfrac{d\left(\frac{q}{r}\right)}{dt} = +p + \dfrac{3}{2} n'^2 \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{r} \sin\varphi. \end{cases}$$

Posons

$$\frac{p}{r} = \frac{3}{2} n'^2 (M \sin\varphi - N\cos\varphi),$$

$$\frac{q}{r} = \frac{3}{2} n'^2 (M \cos\varphi + N\sin\varphi),$$

les fonctions M et N devront satisfaire aux équations différentielles

$$(10) \quad \begin{cases} 2Mr - \dfrac{dN}{dt} + \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{r} = 0, \\ 2Nr + \dfrac{dM}{dt} = 0; \end{cases}$$

et le mouvement de précession de l'anneau que nous considérons sera déterminé par les formules

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{3}{2} n'^2 N r = +\dfrac{3}{4} n'^2 \dfrac{dM}{dt}, \\ \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} = +\dfrac{3}{2} n'^2 M r. \end{cases}$$

Si l'on suppose d'abord cet anneau de figure invariable, r est contant, et l'on tire des équations (10) et (11)

$$N = 0,$$

$$M = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{2r^2} = \text{const.},$$

$$\theta = \text{const.},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{3}{4} n'^2 \frac{\cos\theta}{r}.$$

Il est facile de voir que ces formules représentent le mouvement de précession de l'orbe d'un satellite dont la moyenne distance à la planète serait égale au rayon de l'anneau, pourvu toutefois que, si l'on appelle a cette moyenne distance et m la masse de la Terre, on ait $r^2 a^3 = fm$. Pour appliquer ces formules à l'orbe lunaire, il suffirait d'y remplacer, d'après les notations que nous avons adoptées, θ par γ, ψ par ω, r par n, et d'y supposer $\cos\gamma = 1$. On aurait ainsi

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\gamma = \text{const.},\\ &\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n},\end{aligned}\right.$$

ce qui s'accorde avec les résultats de la *Mécanique céleste*. Si nous avions conservé les termes qui dépendent de la longitude du Soleil, en appelant v' cette longitude comptée du nœud ascendant de l'anneau, nous aurions obtenu les formules connues

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\gamma\sin 2v',\\ &\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}(1-\cos 2v'),\end{aligned}\right.$$

et nous aurions retrouvé ainsi la nutation de Tycho-Brahé.

Lorsque l'anneau se contracte en se refroidissant, r croît avec le temps, et l'on ne peut plus satisfaire aux équations (10) et (11) dans l'hypothèse d'une inclinaison constante; car cette hypothèse entraîne

$$N = 0, \quad \frac{dM}{dt} = 0, \quad M = \text{const.},$$

et d'autre part la première équation (10) donne

$$M = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{2r^2},$$

ce qui est contradictoire. Ainsi la dérivée $\frac{dM}{dt}$ n'est pas nulle. Pour reconnaître son signe, observons que, si la vitesse de rotation était constante, on aurait $M = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{2r^2}$; on peut donc admettre que l'expression générale de M se compose de ce premier terme, qui subsiste seul lorsque r est constant, et d'une suite de termes qui deviennent nuls avec $\frac{dr}{dt}$. On a donc

$$M = -\frac{\sin 2\theta}{4r^2} + \frac{dr}{dt} f(r, \theta);$$

d'où l'on tire, en négligeant les termes du second ordre devant ceux du premier,

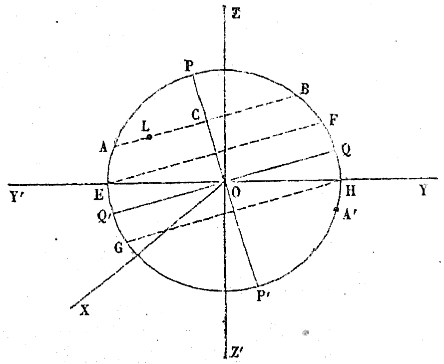
$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\cos 2\theta}{2r^2}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\sin 2\theta}{2r^3}\frac{dr}{dt};$$

et, en remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par sa valeur (11),

$$\frac{dM}{dt}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{n'^2}{r^2}\cos 2\theta\right) = \frac{\sin 2\theta}{2r^3}\frac{dr}{dt}.$$

Le coefficient $\frac{3}{8}\frac{n'^2}{r^2}$ est toujours plus petit que l'unité; donc, si l'on suppose $\theta < 90°$, ce qui suffit pour notre objet, la dérivée $\frac{dM}{dt}$ est positive, et il en est de même par conséquent de $\frac{d\theta}{dt}$. Ainsi l'inclinaison des anneaux sur l'écliptique croît avec le temps; et, si l'on admet que ces anneaux finissent par se précipiter à la surface de la planète, on conçoit qu'il résulte de ce phénomène un accroissement de l'inclinaison de l'équateur terrestre sur le même plan. On doit observer d'ailleurs que des causes analogues ont dû faire varier l'inclinaison de l'équateur solaire sur le plan du maximum des aires.

Revenons maintenant à l'époque où l'atmosphère terrestre, ayant déjà commencé à se condenser, s'étendait au delà de l'orbite actuelle de la Lune, mais très-peu au delà. Il est permis, par ce qui précède, de supposer que l'inclinaison θ de l'équateur de cette masse fluide sur le plan de l'écliptique était alors très-petite, et l'on doit admettre, conformément aux idées de Laplace, que la vitesse de rotation était à très-peu près égale au moyen mouvement actuel de la Lune autour de la Terre. Nous représenterons par OZ l'axe de l'écliptique dirigé vers le pôle boréal, par OP l'axe de rotation, par QQ' l'équateur, et par OX la ligne des équinoxes dirigée vers le nœud ascendant de l'équateur sur l'écliptique, c'est-à-dire vers l'équinoxe d'automne. Dans la masse fluide, mais près de la surface et près de l'équateur, flottait un noyau solide L, de figure quelconque, qui plus tard est devenu la Lune. Ce noyau décrivait, en un jour sidéral, un cercle AB parallèle à l'équateur;



il était nécessairement doué d'un mouvement de rotation, autour d'un axe parallèle à OP, égal à son mouvement de révolution, sans quoi sa surface eût éprouvé, de la part du milieu ambiant, des frottements qui eussent bientôt amené cette égalité et ce parallélisme. D'ailleurs toutes ses oscillations périodiques, sauf celles qui appartenaient à la masse fluide tout entière, devaient nécessairement être éteintes par la résistance du milieu. Ainsi le noyau L a dû prendre spontanément une position telle que l'axe du plus grand moment d'inertie fût parallèle à OP, et que l'axe du plus petit moment d'inertie fût dirigé vers le point C, centre du cercle AB.

Bientôt l'atmosphère terrestre, continuant à se condenser, atteint l'orbite actuelle de la Lune; la force centrifuge à l'équateur devient égale à la pesanteur, et la Terre abandonne une zone de vapeurs dans laquelle le noyau L est compris. Cette zone, devenue libre, se contracte en se refroidissant; sa vitesse de rotation, son inclinaison et son mouvement de précession acquièrent des valeurs croissantes avec le temps; mais à l'origine son inclinaison est égale à θ, sa vitesse de rotation est égale à n, et le mouvement de son plan équatorial est déterminé par les formules (13), pourvu qu'on y remplace γ par θ. Tant que le noyau L reste compris dans cette zone, sa vitesse de rotation et sa vitesse de révolution restent égales à la vitesse de rotation de la zone, et le plan de son équateur reste parallèle au plan équatorial de la zone; de sorte que, si l'on imagine par le point L un plan parallèle à l'écliptique, et si l'on désigne par $\frac{d\psi}{dt}$ le mouvement de précession de l'équateur lunaire sur ce plan, on a constamment

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Mais le noyau solide L ne fait pas partie de la zone de vapeurs qui l'enveloppe, et, lorsque cette zone se contracte, il s'en détache en devenant un satellite indépendant. Il conserve encore sa vitesse de rotation et sa vitesse de révolution, qui étaient égales et qui restent égales, mais il commence à décrire autour du foyer O une orbite, dont le plan est déterminé par ce point O et par la tangente à sa trajectoire au moment où la rupture a eu lieu. Remarquons sur-le-champ qu'il faut écarter le cas où le noyau L, au moment de la rupture, aurait été compris entre les deux tropiques EF, GH, car l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique aurait été alors tout au plus égale à 2θ, tandis que nous savons, par les observations, que cette inclinaison est plus grande que 2θ. Appelons λ la latitude géocentrique du noyau L, au moment où il se sépare de son anneau, et supposons en valeur absolue $\lambda > \theta$, en laissant arbitraire le signe de cette latitude. Si la Terre ne tournait pas en présence du Soleil, nous ne pourrions assigner aucune raison pour que la séparation se fût produite en un point plutôt qu'en un autre de la trajectoire; ce phénomène eût été déterminé par des causes secondaires, telles que le défaut d'homogénéité de la matière et la distribution inégale de la chaleur dans ses différentes parties. Mais la différence des actions du Soleil sur le point O et sur le point L constitue une cause prépondérante, qui a dû déterminer le phénomène dont il s'agit; et tandis qu'il existe entre les molécules de l'anneau fluide une cohésion qui les empêche d'obéir individuellement aux actions de la pesanteur, l'adhésion réciproque du fluide et du noyau L est nulle ou insensible (*).

(*) C'est ce qui résulte de ce fait que la Lune n'a point d'atmosphère. Si l'on voulait admettre que cet astre est doué d'une atmosphère très-rare, il faudrait prendre la surface limite de cette atmosphère pour surface limite du noyau L.

Il est donc vraisemblable que la rupture a eu lieu lorsque le Soleil se trouvait le plus près possible du zénith ou du nadir du point L, c'est-à-dire au moment de l'une des syzygies et dans le voisinage de l'un des solstices : le noyau L étant, par exemple, en A si sa latitude λ est boréale, ou dans la position symétrique A′ si cette latitude est australe, et le Soleil se trouvant indifféremment vers Y ou vers Y′.

On voit immédiatement que, dans cette hypothèse, l'inclinaison γ de l'orbite sur l'écliptique est égale à $\lambda - \theta$, et que le nœud descendant de l'orbite a dû coïncider à l'origine avec le nœud ascendant de l'équateur; nous allons montrer que les choses étaient disposées de telle sorte que cette coïncidence a dû se maintenir indéfiniment. En effet, lorsque le noyau L, encore enveloppé dans la zone fluide, arrive en A ou en A′, on peut le considérer comme décrivant un élément d'une orbite inclinée sur l'écliptique d'un angle γ, et l'on peut lui appliquer les formules qui déterminent le mouvement de l'équateur lunaire. Or, si l'on désigne par φ la longitude sélénocentrique de la Terre, comptée à partir d'une droite parallèle à OX, ces formules sont (*)

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{2} n \frac{C-A}{B} (\theta + \gamma) \sin 2\varphi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{3}{2} n \frac{C-A}{B} \left(1 + \frac{\gamma}{\theta}\right)(1 - \cos 2\varphi);$$

et, puisqu'on suppose le noyau L en A ou en A′, il faut faire $\sin 2\varphi = 0$, $\cos 2\varphi = -1$, ce qui donne

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = -3n \frac{C-A}{B} \left(1 + \frac{\gamma}{\theta}\right).$$

D'un autre côté, le mouvement de précession de l'anneau, dont le noyau L fait encore partie, est déterminé par les formules (13), pourvu qu'on y remplace γ par θ. Puisqu'on suppose le Soleil en Y ou en Y′, il faut faire $\sin 2v' = 0$, $\cos 2v' = -1$, et l'on tire de ces formules

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n'^2}{n}.$$

(*) *Voir* le Mémoire déjà cité. Nous prenons, bien entendu, les formules qui déterminent le mouvement de l'équateur vrai ou instantané, et non celles qui déterminent le mouvement de l'équateur géométrique.

Le mouvement rétrograde des nœuds de l'anneau est donc double de sa valeur moyenne; de sorte que, si nous représentons ici par $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$ le moyen mouvement des nœuds de l'orbe lunaire, nous aurons, au moment que nous considérons,

$$\frac{d\omega}{dt} = 2\left(\frac{d\omega}{dt}\right).$$

Mais, par ce qui précède, on doit avoir constamment

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Donc, si le noyau L se sépare de l'anneau précisément en A ou en A', on aura, dans l'état initial,

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = -\frac{3}{2}n\frac{C-A}{B}\left(1+\frac{\gamma}{\theta}\right),$$

équation identique à celle que nous avons numérotée (4), et qui exprime la condition nécessaire pour que la coïncidence des nœuds, une fois établie, se maintienne indéfiniment.