ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. ANDOYER

Sur la forme doublement quadratique et ses rapports avec la théorie des fonctions elliptiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 491-513
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__491_0>

SUR

LA FORME DOUBLEMENT QUADRATIQUE

ET

SES RAPPORTS AVEC LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. H. ANDOYER.

Les pages qui suivent ont été écrites à l'occasion de conférences faites aux candidats à l'agrégation, à la Sorbonne; on peut les considérer comme un commentaire du beau Chapitre consacré par Halphen à l'équation d'Euler, dans son *Traité des fonctions elliptiques* (T. II, Chap. IX); peut-être aussi pourra-t-on y trouver quelques points de vue nouveaux, en raison du rôle prépondérant que nous attribuons à la considération des invariants de la forme doublement quadratique.

1. Soit f une forme doublement quadratique binaire, aux variables x_1, x_2 et y_1, y_2,

$$f = (a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2) y_1^2 + 2 (b_0 x_1^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2) y_1 y_2 \\ + (c_0 x_1^2 + 2 c_1 x_1 x_2 + c_2 x_2^2) y_2^2.$$

Nous supposons d'ailleurs que les variables (x) et (y) définissent les éléments de deux espaces distincts, et par suite peuvent être soumises à des substitutions linéaires distinctes.

On peut former un système d'invariants et covariants algébriquement indépendants, pour la forme f, de la façon suivante, qui, sans être la plus simple, est celle qui est le mieux appropriée au but que nous poursuivons.

En remarquant d'abord que les substitutions indiquées transforment linéairement les coefficients $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, \ldots$, précisément comme les produits

$$x_2^2 y_2^2, \quad -x_1 x_2 y_2^2, \quad x_1^2 y_2^2, \quad -x_2^2 y_1 y_2, \quad x_1 x_2 y_1 y_2, \quad \ldots,$$

on en déduit un invariant quadratique

$$k = -\frac{1}{6}(a_0 c_2 + a_2 c_0 - 2 a_1 c_1 - 2 b_0 b_2 + 2 b_1^2),$$

le facteur numérique étant choisi pour la commodité de ce qui suivra.

Écrivons maintenant le discriminant de f, considérée comme forme quadratique par rapport aux (y); ce sera un covariant du quatrième degré par rapport aux (x), soit

$$\begin{aligned} g = {} & (a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2)(c_0 x_1^2 + 2 c_1 x_1 x_2 + c_2 x_2^2) \\ & - (b_0 x_1^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2)^2, \end{aligned}$$

ou, pour abréger,

$$g = \alpha_0 x_1^4 + 4 \alpha_1 x_1^3 x_2 + 6 \alpha_2 x_1^2 x_2^2 + 4 \alpha_3 x_1 x_2^3 + \alpha_4 x_2^4.$$

A la forme g nous joindrons son hessien

$$\begin{aligned} h = {} & (\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2) x_1^4 + 2(\alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2) x_1^3 x_2 \\ & + (\alpha_0 \alpha_4 + 2 \alpha_1 \alpha_3 - 3 \alpha_2^2) x_1^2 x_2^2 + 2(\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3) x_1 x_2^3 + (\alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3^2) x_2^4 \end{aligned}$$

et ses deux invariants

$$i = \alpha_0 \alpha_4 - 4 \alpha_1 \alpha_3 + 3 \alpha_2^2,$$

$$j = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix}.$$

Si, de même, on regarde f comme une forme quadratique par rapport aux (x), son discriminant fournit un nouveau covariant biquadratique par rapport aux (y):

$$\begin{aligned} g' = {} & (a_0 y_1^2 + 2 b_0 y_1 y_2 + c_0 y_2^2)(a_2 y_1^2 + 2 b_2 y_1 y_2 + c_2 y_2^2) \\ & - (a_1 y_1^2 + 2 b_1 y_1 y_2 + c_1 y_2^2)^2, \end{aligned}$$

ou

$$g' = \alpha'_0 y_1^4 + 4 \alpha'_1 y_1^3 y_2 + 6 \alpha'_2 y_1^2 y_2^2 + 4 \alpha'_3 y_1 y_2^3 + \alpha'_4 y_2^4;$$

et nous y joindrons son hessien

$$h' = (\alpha'_0 \alpha'_2 - \alpha'^2_1) y_1^4 + \ldots;$$

quant à ses invariants i' et j', définis comme i et j, ils sont précisément égaux à i et j, comme nous allons le voir.

Puisque les substitutions auxquelles sont soumises les (x) et les (y) sont indépendantes, on peut supposer, sans porter atteinte à la généralité, les formes g et g' réduites à la forme canonique, c'est-à-dire ne renfermant que les carrés des variables. On voit sans peine que, si l'on ne fait aucune hypothèse particulière, ceci entraîne les conditions

$$a_1 = b_0 = b_2 = c_1 = 0.$$

En supposant qu'il en soit ainsi, on a

$$\begin{gathered}
\alpha_0 = a_0 c_0, \qquad \alpha_1 = \alpha_3 = 0, \qquad \alpha_4 = a_2 c_2, \\
\alpha'_0 = a_0 a_2, \qquad \alpha'_1 = \alpha'_3 = 0, \qquad \alpha'_4 = c_0 c_2, \\
6\alpha_2 = 6\alpha'_2 = a_0 c_2 + a_2 c_0 - 4 b_1^2,
\end{gathered}$$

et les égalités $i' = i$, $j' = j$ annoncées plus haut deviennent alors évidentes.

Les invariants i, j, k et les covariants g, h, g', h' forment un système de fonctions indépendantes à l'aide desquelles peuvent s'exprimer toutes les fonctions invariantes relatives à la forme f et, en particulier, cette forme elle-même.

2. Envisageons l'équation canonisante relative aux formes g et g', soit, comme il est bien connu,

$$4\lambda^3 - i\lambda - j = 0,$$

dont nous désignerons les racines par λ_1, λ_2, λ_3.

Sur les formes canoniques, on a d'ailleurs

$$\lambda_1 = -\alpha_2, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha_2 + \sqrt{a_0 a_2 c_0 c_2}\right), \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2}\left(\alpha_2 - \sqrt{a_0 a_2 c_0 c_2}\right),$$

et ces racines sont des invariants qu'on peut toujours calculer. On sait que les polynomes $h + \lambda_\alpha g$, $h' + \lambda_\alpha g'$ sont des carrés parfaits, et nous poserons par suite

$$\sqrt{h + \lambda_\alpha g} = q_\alpha, \qquad \sqrt{h' + \lambda_\alpha g'} = q'_\alpha,$$

les formes quadratiques q_α, q'_α se calculant toujours sans peine; elles ne sont déterminées qu'au signe près, mais nous supposerons que leur détermination a été fixée une fois pour toutes, arbitrairement d'ailleurs.

Avec les formes canoniques, on obtient

$$q_1 = 2\sqrt{-1}\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\,x_1x_2,$$
$$q_2 = \sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\left(\sqrt[4]{\frac{a_0c_0}{a_2c_2}}x_1^2+\sqrt[4]{\frac{a_2c_2}{a_0c_0}}x_2^2\right),$$
$$q_3 = \sqrt{-1}\sqrt{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\left(\sqrt[4]{\frac{a_0c_0}{a_2c_2}}x_1^2-\sqrt[4]{\frac{a_2c_2}{a_0c_0}}x_2^2\right),$$

les déterminations des radicaux biquadratiques qui figurent dans ces formules étant liées entre elles et à la détermination du radical $\sqrt{a_0a_2c_0c_2}$, dont dépendent λ_2 et λ_3, d'une façon évidente.

On aurait des formules analogues pour les q'_α; il suffirait de changer les (x) en (y) et de permuter a_2 et c_0.

Remarquons que les formes quadratiques q_α ou q'_α ont pour discriminant la quantité

$$(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)(\lambda_\alpha-\lambda_\gamma) \qquad \text{ou} \qquad 3\lambda_\alpha^2-\frac{i}{4},$$

tandis que l'invariant simultané des formes q_β et q_γ, ou q'_β et q'_γ est nul.

Il est alors facile, à l'aide des formes canoniques, de vérifier la formule générale suivante :

$$f = \sum\frac{\sqrt{\lambda_\alpha-k}\,q_\alpha q'_\alpha}{(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)(\lambda_\alpha-\lambda_\gamma)}, \tag{1}$$

où α prend successivement les valeurs 1, 2, 3, tandis que β et γ sont différents de α.

On a ainsi déterminé f en fonction des invariants i, j, k et des covariants g, g', h, h', à la condition d'avoir résolu l'équation canonisante. D'ailleurs, à cause de l'indétermination des radicaux $\sqrt{\lambda_\alpha-k}$, on voit que huit formes f répondent à la question, deux à deux égales au signe près.

Toutes les formes f pour lesquelles les invariants i, j et les covariants g, g', h, h' sont connus, c'est-à-dire, en somme, simplement les covariants g et g', sont déterminées par la formule précédente, où l'invariant k joue le rôle de constante arbitraire.

Si cette constante k devient infinie, la formule n'a plus de sens au point de vue de la théorie des formes; mais il est intéressant de voir ce que devient le second membre divisé par $\sqrt{-k}$. C'est

$$\sum \pm \frac{q_\alpha q'_\alpha}{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)},$$

et l'on voit aisément que c'est le carré d'une forme doublement linéaire; en effet, en vertu des remarques faites précédemment, le discriminant de cette quantité, considérée comme forme quadratique par rapport aux (x) par exemple, est égal à

$$\sum \frac{q'^2_\alpha}{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)},$$

c'est-à-dire à zéro, puisque $q'^2_\alpha = h' + \lambda_\alpha g'$ et que l'on a

$$\sum \frac{1}{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)} = 0, \qquad \sum \frac{\lambda_\alpha}{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)} = 0.$$

3. Pour rendre la formule précédemment obtenue plus symétrique, soit g'' une troisième forme biquadratique, aux variables z_1 et z_2, admettant les mêmes invariants i et j que g et g'; et soit h'' son hessien. En posant

$$k = -\frac{h''}{g''} \qquad \text{et} \qquad q''_\alpha = \sqrt{h'' + \lambda_\alpha g''},$$

on pourra écrire

$$(2) \qquad f\sqrt{g''} = \sum \frac{q_\alpha q'_\alpha q''_\alpha}{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)}.$$

On peut d'ailleurs choisir une fois pour toutes les déterminations des q''_α; on ne diminue pas ainsi la généralité, car à une valeur de k correspondent quatre valeurs du rapport $\frac{z_1}{z_2}$, de sorte que la formule précédente fait bien correspondre à cette valeur de k huit formes f, deux à deux égales au signe près.

Mais si l'on regarde le rapport $\frac{z_1}{z_2}$ comme la nouvelle constante arbitraire, on voit que la forme f est déterminée au signe près par les (z).

Comme précédemment, la formule perd son sens si $g'' = 0$, c'est-à-dire si k devient infini; mais le second membre devient alors le carré d'une forme doublement linéaire.

4. L'expression

$$\varphi = \sum \frac{q_\alpha q'_\alpha q''_\alpha}{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)}, \tag{3}$$

qui figure au second membre de (2), définit, quand on la divise par $\sqrt{g''}$, une forme doublement quadratique en (x) et (y) qui admet les invariants $g, g', h, h', i, j, k = -\frac{h''}{g''}$, définis précédemment. Sa constitution symétrique montre que, de même, divisée par exemple par $\sqrt{g'}$, elle définit une forme doublement quadratique en (x) et (z) pour laquelle les invariants correspondants seraient g, g'', h, h'', i, j et $-\frac{h'}{g'}$.

Nous allons transformer l'expression φ et montrer que l'on peut se dispenser, pour la calculer, de la connaissance des racines λ_α de l'équation canonisante, dans l'hypothèse suivante : deux des formes g, g', g'', par exemple g et g', sont identiques, c'est-à-dire ont les mêmes coefficients, et, en outre, on connaît une racine de la troisième, g''.

Ceci pourra être appliqué au calcul de la forme f dans les deux cas suivants : 1° Les deux formes g et g' sont identiques; 2° On connaît une racine de l'une d'elles, g' par exemple. En effet, dans le premier cas, il suffira de prendre pour g'' une forme admettant une racine connue, et, dans le second cas, on choisira g'' identique à g.

Effectuons la transformation annoncée de l'expression φ en supposant les formes g et g' identiques et supposant que l'on connaisse une racine (t) de la forme g'', c'est-à-dire un couple de valeurs t_1, t_2, qui, mises à la place de z_1, z_2, annulent g''.

Nous emploierons dans ce qui suit les notations suivantes : une forme binaire quelconque F de degré p par rapport à des variables (x) sera représentée par F_{x^p}, et sa polaire d'ordre q par rapport à de nouvelles variables (y), c'est-à-dire l'expression

$$\frac{1}{p(p-1)\ldots(p-q+1)}\left(y_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^q,$$

où la puissance est symbolique, par $F_{x^{p-q}y^q}$.

Ceci posé, il n'est pas difficile de voir que, en prenant q_α et q'_α avec la même détermination, on a l'identité

$$q_\alpha q'_\alpha = h_{x^2y^2} + \lambda_\alpha g_{x^2y^2} + \left(2\lambda_\alpha^2 - \frac{i}{6}\right)(xy)^2,$$

où (xy) désigne $x_1y_2 - x_2y_1$; il suffit de se souvenir que q_α^2 est égal à $h + \lambda_\alpha g$, et que le discriminant de la forme quadratique q_α est égal à $3\lambda_\alpha^2 - \frac{i}{4}$.

La même identité permet d'écrire

$$q''_\alpha \sqrt{h''_{t^4}} = h''_{z^2t^2} + \lambda_\alpha g''_{z^2t^2} + \left(2\lambda_\alpha^2 - \frac{i}{6}\right)(zt)^2,$$

puisque $g''_{t^4} = 0$ par hypothèse; la détermination de $\sqrt{h''_{t^4}}$ est choisie arbitrairement, mais toujours la même. On peut maintenant écrire q''_α sous une forme plus avantageuse.

Appelons en général J le covariant sextique d'une forme biquadratique g, de sorte que si

$$g = \alpha_0 x_1^4 + 4\alpha_1 x_1^3 x_2 + 6\alpha_2 x_1^2 x_2^2 + \ldots,$$

on ait

$$\mathrm{J} = (\alpha_0^2\alpha_3 - 3\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3)x_1^6 + \ldots;$$

on a d'ailleurs

$$\mathrm{J}^2 = -4\mathrm{H}(h + \lambda_\alpha g) = -4h^3 + igh - jg^3.$$

On peut vérifier sans peine les relations

$$h_{y^4}^2 g_{x^2y^2} = g_{y^4} h_{xy^3}^2 + \mathrm{J}_{y^6} h_{xy^3}(xy) + \frac{1}{4} g_{y^4}(ih_{y^4} - jg_{y^4})(xy)^2,$$

$$h_{y^4} h_{x^2y^2} = h_{xy^3}^2 + \left(\frac{1}{4} jg_{y^4} - \frac{1}{12} ih_{y^4}\right)(xy)^2.$$

Appliquons-les à la forme g'', en nous souvenant que $g''_{t^4} = 0$; il vient

$$h''^2_{t^4} g''_{z^2t^2} = \mathrm{J}''_{t^6} h''_{zt^3}(zt),$$

$$h''_{t^4} h''_{z^2t^2} = h''^2_{zt^3} - \frac{1}{12} ih''_{t^4}(zt)^2;$$

et, en posant

$$p = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{J}''_{t^6}}{h''^2_{t^4}} \frac{h''_{zt^3}}{(zt)},$$

on peut écrire

$$g''_{z^2t^2} = 2p(zt)^2,$$

$$h''_{z^2t^2} = -\left(p^2 + \frac{i}{2}\right)(zt)^2,$$

et, par suite,

$$q''_\alpha \sqrt{h''_{t^4}} = \left(-p^2 + 2\lambda_\alpha p + 2\lambda_\alpha^2 - \frac{i}{4}\right)(zt)^2.$$

En remplaçant dans φ les quantités $q_\alpha q'_\alpha$ et q''_α par leurs nouvelles expressions, on a une fonction symétrique des λ_α, qui, tous calculs faits, se réduit à

$$(4) \qquad \varphi = \frac{2(zt)^2}{\sqrt{h''_{t^4}}}\left[h_{x^2y^2} + pg_{x^2y^2} + \left(\frac{i}{12} - p^2\right)(xy)^2\right].$$

Si l'on prend les (z) égaux aux (t), φ devient un carré,

$$\varphi = 2\sqrt{h''_{t^4}}(xy)^2;$$

il en est de même si (z) est une autre racine (t') de g''; alors $p = \lambda_\alpha$, et l'on trouve aisément

$$\varphi = \frac{2(tt')^2}{\sqrt{h''_{t^4}}}(q_\alpha)^2_{xy};$$

en même temps, on peut vérifier que

$$\frac{(tt')^2}{\sqrt{h''_{t^4}}\sqrt{h''_{t'^4}}} = \frac{1}{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)}.$$

Si l'on décompose φ en facteurs linéaires par rapport à p, et que l'on remarque l'identité

$$g^2_{x^2y^2} + 4h_{x^2y^2}(xy)^2 + \frac{i}{3}(xy)^4 = g_{x^4}g_{y^4},$$

il vient

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= -\frac{2(zt)^2(xy)^2}{\sqrt{h''_{t^4}}}\left(p - \frac{g_{x^2y^2} + \sqrt{g_{x^4}g_{y^4}}}{2(xy)^2}\right)\left(p - \frac{g_{x^2y^2} - \sqrt{g_{x^4}g_{y^4}}}{2(xy)^2}\right) \\ &= -\frac{2(zt)^2(xy)^2}{\sqrt{h''_{t^4}}}\left[p + \frac{2h_{x^2y^2} + \frac{i}{6}(xy)^2}{g_{x^2y^2} + \sqrt{g_{x^4}g_{y^4}}}\right]\left[p + \frac{2h_{x^2y^2} + \frac{i}{6}(xy)^2}{g_{x^2y^2} - \sqrt{g_{x^4}g_{y^4}}}\right], \end{aligned} \right.$$

formule qui nous sera utile plus loin.

Si l'on suppose que (y), par exemple, prenne comme valeur particulière une racine (u) de g, et que l'on pose

$$m = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{J}_{u^6}}{h_{u^4}^2}\,\frac{h_{xu^3}}{(xu)},$$

on a simplement

$$\varphi = -\frac{2(zt)^2(xu)^2}{\sqrt{h''_{t^4}}}(p-m)^2.$$

Portons maintenant dans l'expression (4) de φ les valeurs de $g_{x^2y^2}$ et $h_{x^2y^2}$ déduites des identités

$$\begin{aligned} g_{y^4}g_{x^2y^2} &= g_{xy^3}^2 + h_{y^4}(xy)^2,\\ g_{y^4}^2 h_{x^2y^2} &= h_{y^4}g_{xy^3}^2 - \mathrm{J}_{y^6}g_{xy^3}(xy) + \left(\frac{i}{6}g_{y^4}^2 - h_{y^4}^2\right)(xy)^2; \end{aligned}$$

il viendra

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi = \frac{2(zt)^2}{g_{y^4}^2\sqrt{h''_{t^4}}}\Big\{&(h_{y^4}+pg_{y^4})g_{xy^3}^2 - \mathrm{J}_{y^6}g_{xy^3}(xy)\\ &+\left[\left(-p^2+\frac{i}{4}\right)g_{y^4}^2 + pg_{y^4}h_{y^4} - h_{y^4}^2\right](xy)^2\Big\}. \end{aligned}\right.$$

On peut encore décomposer le second membre en facteurs linéaires et écrire

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi = \frac{2(zt)^2(xy)^2(h_{y^4}+pg_{y^4})}{g_{y^4}^2\sqrt{h''_{t^4}}}&\left[\frac{g_{xy^3}}{(xy)} - \frac{\mathrm{J}_{y^6}+\sqrt{g_{y^4}^3(4p^3-ip-j)}}{2(h_{y^4}+pg_{y^4})}\right]\\ &\left[\frac{g_{xy^3}}{(xy)} - \frac{\mathrm{J}_{y^6}-\sqrt{g_{y^4}^3(4p^3-ip-j)}}{2(h_{y^4}+pg_{y^4})}\right]. \end{aligned}\right.$$

Cette formule est illusoire quand on prend pour (y) une racine (u) de g; mais nous avons déjà vu ce que devient φ dans ce cas.

5. Si l'on égale la forme f à zéro, on obtient une relation entre les (x) et les (y) qui donne par différentiation

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}dy_2 = 0;$$

par le théorème d'Euler, on a aussi

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} = y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} = 0,$$

et en résolvant l'équation $f=0$ par rapport à x_1 ou y_1, on a encore

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+4x_2^2g'=0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{dy_1}\right)^2+4y_2^2g=0.$$

Par suite, il vient la relation différentielle

$$\frac{(x_2\,dx_1-x_1\,dx_2)^2}{g}=\frac{(y_2\,dy_1-y_1\,dy_2)^2}{g'}, \tag{8}$$

ce qui est l'équation d'Euler sous sa forme la plus générale. Dans cette relation, la constante k ou (z) a disparu. Par suite, inversement, on peut regarder l'équation $f=0$, ou $\varphi=0$, comme définissant l'intégrale générale de l'équation (8). Si la constante k devient infinie, cette relation conserve ici son sens, et l'on obtient les quatre intégrales particulières doublement linéaires par rapport aux (x) et aux (y).

En prenant l'intégrale sous la forme $\varphi=0$, et y regardant (z) comme la constante arbitraire, la symétrie de l'expression φ montre que la relation $\varphi=0$ est aussi l'intégrale des équations différentielles

$$\frac{(x_2\,dx_1-x_1\,dx_2)^2}{g}=\frac{(z_2\,dz_1-z_1\,dz_2)^2}{g''}$$

et

$$\frac{(y_2\,dy_1-y_1\,dy_2)^2}{g'}=\frac{(z_2\,dz_1-z_1\,dz_2)^2}{g''};$$

dans le premier cas, c'est (y) qui est la constante arbitraire; dans le second cas c'est (x).

L'intégrale de l'équation d'Euler peut donc être écrite de façon qu'elle dépende des variables (x) et (y) et de la constante arbitraire (z) d'une façon absolument symétrique, les rôles de ces quantités pouvant être échangés.

Supposons que l'on considère une des quatre intégrales particulières de l'équation (8) qui sont doublement linéaires par rapport aux (x) et aux (y), soit ψ. Pour vérifier $\psi=0$, on peut poser

$$x_1=\rho\,(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2),$$
$$x_2=\rho\,(\beta_1y_1+\beta_2y_2),$$

ρ étant un facteur d'homogénéité arbitraire; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ étant déterminés. Il est clair qu'alors on a

$$x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1 = \rho^2(\alpha\beta)(y_1\,dy_2 - y_2\,dy_1),$$

et, par suite, si par cette substitution g devient g_1, on a

$$g_1 = \rho^4(\alpha\beta)^2 g'.$$

Les quatre intégrales $\psi = 0$ définissent donc, à un facteur près, quatre substitutions linéaires qui transforment g en g' à un facteur près. Si l'on veut que ce facteur soit précisément l'unité, il faudra prendre ρ de telle façon que $\rho^4(\alpha\beta)^2 = 1$; et, par suite, il y a exactement seize substitutions linéaires transformant g en g'; elles sont, d'ailleurs, identiques, quatre par quatre, à une racine quatrième de l'unité près.

Si l'on considère l'expression $gh' - g'h$, il est clair qu'elle s'annule identiquement, quand on y remplace les (x) par leurs valeurs définies par les substitutions précédentes; c'est donc un produit de quatre facteurs doublement linéaires en (x) et (y) qui sont précisément les intégrales ψ.

Quand g' est identique à g, il résulte de ce qui a été dit plus haut que les intégrales ψ sont (xy) et les polaires $(q_\alpha)_{xy}$.

Dans le cas général, les intégrales ψ sont de la forme

$$\frac{1}{2}\frac{J_{u^6}}{h_{u^4}^2}\frac{h_{xu^3}}{(xu)} - \frac{1}{2}\frac{J'_{t^6}}{h'^2_{t^4}}\frac{h'_{yt^3}}{(yt)},$$

(u) et (t) étant respectivement racines de g et g'.

6. Nous allons appliquer ce qui précède à un certain nombre de cas particuliers qui se rencontrent fréquemment, et nous retrouverons ainsi la plupart des propositions classiques relatives au théorème d'addition des fonctions elliptiques et au problème de l'inversion des intégrales elliptiques.

Comme premier cas, prenons

$$g = 4x_1^3x_2 - ix_1x_2^3 - jx_2^4,$$

g' et g'' étant identiques à g.

Pour simplifier l'écriture, nous ferons $x_1 = x$, $x_2 = 1$, de sorte que

$$g = 4x^3 - ix - j,$$

et nous ferons de même dans la plupart des cas analogues.

Remarquons que les invariants de la forme g sont précisément i et j, et que l'on a ici

$$h = -\left(x^4 + \frac{i}{2}x^2 + 2jx + \frac{i^2}{16}\right),$$

$$\mathrm{J} = 2x^6 + \ldots.$$

En prenant pour la racine connue t de g, $t_1 = 1$, $t_2 = 0$, on a $p = z$, et la formule (4) donne l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx^2}{g} = \frac{dy^2}{g'},$$

sous la forme

$$(9) \qquad (xy + xz + yz)^2 - 4xyz(x + y + z) + \frac{i}{2}(xy + xz + yz) + j(x + y + z) + \frac{i^2}{16} = 0,$$

parfaitement symétrique par rapport à x, y, et la constante arbitraire z.

On a ici, d'ailleurs,

$$q_\alpha = \sqrt{-1}\,[(x - \lambda_\alpha)^2 - (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)],$$

et les intégrales doublement linéaires ψ, obtenues en faisant z infini, ou bien $z = \lambda_\alpha$, sont $(xy) = 0$, et

$$(10) \qquad (x - \lambda_\alpha)(y - \lambda_\alpha) - (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\lambda_\alpha - \lambda_\gamma) = 0.$$

Construisons la fonction $\wp$ de Weierstrass en prenant précisément i et j pour les invariants g_2 et g_3, de sorte que les λ_α seront les quantités ordinairement désignées par e_α.

Faisons alors

$$x = \wp(u), \qquad y = \wp(v), \qquad z = \wp(w).$$

On voit immédiatement que la formule (9) définit la relation qui existe entre x, y, z lorsque les arguments u, v, w sont liés par la condition

$$\pm u \pm v \pm w \equiv 0,$$

où le signe de congruence indique que l'égalité a lieu à une somme près des multiples des périodes primitives.

Quant à la relation (10) elle équivaut à la formule connue

$$[p(u+\omega_\alpha)-e_\alpha][p(u)-e_\alpha]-(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)=0,$$

ω_α désignant l'une des trois demi-périodes primitives, que l'on peut supposer liées par la relation

$$\omega_\alpha+\omega_\beta+\omega_\gamma=0.$$

Si l'on fait $x=y$, z devient infini ou bien égal à $p(2u)$, et les formules (4) ou (5) montrent que

$$p(2u)=-\frac{h}{g},$$

x étant remplacé dans le second membre par $p(u)$.

On a donc aussi

$$p(2u)-e_\alpha=-\frac{q_\alpha^2}{g}=\frac{\{[p(u)-e_\alpha]^2-(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)\}^2}{4p^3(u)-g_2 p(u)-g_3},$$

et ceci correspond à ce fait connu que $\sqrt{p(u)-e_\alpha}$ est une fonction uniforme de u.

Pour préciser le théorème d'addition de la fonction p, résolvons l'équation (9) par rapport à z; ses deux racines sont $p(u\pm v)$, et en remarquant que l'on a $g=p'^2(u)$, $g'=p'^2(v)$, la formule (5) permet d'écrire

$$p(u\pm v)=\frac{\left[2p(u)p(v)-\frac{i}{2}\right][p(u)+p(v)]-j\pm p'(u)p'(v)}{2[p(u)-p(v)]^2},$$

et l'on voit immédiatement que les signes se correspondent bien dans les deux membres.

En ajoutant de part et d'autre $p(u)+p(v)$, on obtient cette formule connue

$$p(u\pm v)+p(u)+p(v)=\frac{1}{4}\left[\frac{p'(u)\mp p'(v)}{p(u)-p(v)}\right]^2.$$

On a aussi

$$\wp(u+v)-\wp(u-v)=\frac{-\wp'(u)\wp'(v)}{[\wp(u)-\wp(v)]^2}.$$

Recourons maintenant à la formule (7); on a d'abord

$$\wp(2v)=-\frac{h_{y^4}}{g_{y^4}};$$

de plus, on peut écrire

$$J_{y^6}^2=4g_{y^4}^3\Pi\left(-\frac{h_{y^4}}{g_{y^4}}-\lambda_\alpha\right)=\wp'^6(v)\wp'^2(2v),$$

et, par suite,

$$J_{y^6}=\wp'^3(v)\wp'(2v),$$

comme on le voit en faisant $v=0$.

Alors il vient

$$\frac{g_{xy^3}}{(xy)}=\frac{\wp'(v)}{2}\frac{\wp'(2v)\pm\wp'(u\pm v)}{\wp(u\pm v)-\wp(2v)};$$

prenons la dérivée du premier membre par rapport à u; on voit d'abord que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{g_{xy^3}}{(xy)}\right]=-\frac{g_{y^4}}{(xy)^2};$$

la dérivée en question est donc

$$\frac{-\wp'(u)\wp'^2(v)}{[\wp(u)-\wp(v)]^2},$$

et l'on a, par suite,

$$\frac{-\wp'(u)\wp'(v)}{[\wp(u)-\wp(v)]^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\wp'(2v)\pm\wp'(u\pm v)}{\wp(u\pm v)-\wp(2v)}\right];$$

mais le premier membre est égal à $\wp(u+v)-\wp(u-v)$ d'après une formule écrite plus haut : remplaçant alors $u-v$ par a, $2v$ par b, on obtient

$$\wp(a+b)-\wp(a)=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{\wp'(a)-\wp'(b)}{\wp(a)-\wp(b)}\right],$$

ce qui est la forme ordinaire du théorème d'addition.

Revenons à la formule qui donne $\wp(2u)-e_\alpha$; on voit aisément que l'on a exactement, en adoptant les conventions ordinaires,

$$\sqrt{\mathrm{p}(2u)-e_\alpha}=\frac{\sigma_\alpha(2u)}{\sigma(2u)}=-\frac{[\mathrm{p}(u)-e_\alpha]^2-(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}{\mathrm{p}'(u)};$$

d'autre part, d'après la formule (3), puisque q_α est proportionnel à $\sqrt{\mathrm{p}(2u)-e_\alpha}$, les arguments u, v, w étant toujours liés par la relation

$$\pm u \pm v \pm w \equiv 0,$$

on voit encore que l'on peut écrire l'intégrale générale φ sous la forme

$$\Sigma(e_\beta-e_\gamma)\,\sigma_\alpha(2u)\,\sigma_\alpha(2v)\,\sigma_\alpha(2w)=0,$$

où les signes sont choisis comme il convient. C'est encore une forme connue du théorème d'addition.

7. Posons maintenant

$$g=(1-x^2)(1-k^2x^2),$$

et prenons g' et g'' identiques à g.

On a ici

$$i=\frac{1}{12}(1+14k^2+k^4),$$

$$j=\frac{1}{216}(1+k^2)(1-34k^2+k^4);$$

les racines de l'équation canonisante sont

$$\lambda_1=\frac{1+k^2}{6},\qquad \lambda_2=-\frac{1+k^2}{12}+\frac{k}{2},\qquad \lambda_3=-\frac{1+k^2}{12}-\frac{k}{6},$$

et la formule (3) donne facilement l'intégrale φ sous la forme

$$(11)\qquad \begin{aligned}4k(1-k^2)xyz&+(1-k)(kx^2+1)(ky^2+1)(kz^2+1)\\&+(1+k)(kx^2-1)(ky^2-1)(kz^2-1)=0.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$x=\mathrm{sn}\,u,\qquad y=\mathrm{sn}\,v,\qquad z=\mathrm{sn}\,w,$$

c'est la relation qui existe entre x, y, z lorsque les arguments u, v, w sont liés par la condition

$$\mathrm{K}\equiv\varepsilon u+\varepsilon' v+\varepsilon'' w,$$

les quantités ε, ε', ε'' ayant 1 pour valeur absolue, et 1 pour produit.

Si, dans la formule (11), on change successivement le signe du premier terme, puis du second, et enfin du troisième, on obtient de même les relations qui correspondent aux conditions

$$-\mathrm{K} \equiv \varepsilon u + \varepsilon' v + \varepsilon'' w,$$
$$-\mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1} \equiv \varepsilon u + \varepsilon' v + \varepsilon'' w,$$
$$\mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1} \equiv \varepsilon u + \varepsilon' v + \varepsilon'' w,$$

K et K′ ayant leur signification ordinaire.

Nous n'insisterons pas davantage sur les conséquences que l'on pourrait déduire de la formule (11), et de tout ce qui a été dit précédemment d'une façon générale.

En gardant g et g' comme plus haut, faisons

$$g'' = 4z^3 - iz - j,$$

et servons-nous de la racine connue $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ de g''.

D'après la formule (5), en posant toujours

$$x = \operatorname{sn} u, \qquad y = \operatorname{sn} v,$$

l'intégrale φ de l'équation d'Euler $\dfrac{dx^2}{g} = \dfrac{dy^2}{g'}$ pourra s'écrire

$$z = \frac{1 + k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v - \dfrac{1+k^2}{6}(\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 v + 4 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v) + \varepsilon \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{2(\operatorname{sn} u - \operatorname{sn} v)^2}.$$

Construisons aussi la fonction $\wp$ en prenant pour invariants g_2 et g_3 les quantités i et j, de sorte que les périodes de $\wp$ seront $4\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$ comme celles de sn; faisant $z = \wp(\alpha)$, on aura, lorsque $\varepsilon = 1$, la condition

$$\alpha \equiv \pm(u - v);$$

en faisant $v = 0$, on déduit

$$\wp(\alpha) = -\frac{1+k^2}{12} + \frac{1 + \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha}{2\operatorname{sn}^2\alpha},$$

et, en particulier,

$$\wp(2\mathrm{K}) = \frac{1+k^2}{6}.$$

En faisant $\varepsilon = -1$, et profitant de ce résultat, on aurait la condition

$$\alpha \equiv 2K \pm (u + v).$$

En faisant, en particulier, $v = u$, on voit que

$$p(2u - 2K) = -\frac{h}{g},$$

où dans le second membre x est égal à $\operatorname{sn} u$.

Pour avoir les relations doublement linéaires qui existent entre p et sn, on peut se servir de ces formules, ou de ce qui a été dit d'une façon générale. C'est ainsi qu'en prenant pour racine connue u de g : $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, on obtiendra la formule

$$p(\alpha) = \frac{(5k^2 - 1)\operatorname{sn}(\alpha + K) - (5 - k^2)}{12[\operatorname{sn}(\alpha + K) - 1]}.$$

8. Supposons actuellement que l'on veuille intégrer l'équation suivante

$$\frac{dx^2}{g} = dv^2,$$

g étant un polynome quelconque du quatrième degré en x : c'est le problème de l'inversion.

Faisons $y = p(v)$; la fonction p étant construite avec les invariants i et j de g, l'équation devient

$$\frac{dx^2}{g} = \frac{dy^2}{4y^3 - iy - j};$$

prenons le polynome g'' identique à g; remarquons que l'on connaît la racine $t_1 = 1$, $t_2 = 0$, de $g' = 4y^3 - iy - j$, et servons-nous de la formule (7) où les (y) et les (z) sont permutés; on a $p = y$, et l'on peut écrire l'intégrale sous la forme

$$\frac{g_{xz^3}}{(xz)} = \frac{J_{z^6} \pm \sqrt{g_{z^4}^2(4y^3 - iy - j)}}{2(h_{z^4} + y g_{z^4})},$$

où z est la constante arbitraire.

A cause de l'identité

$$J^2 = -4H(h + \lambda_\alpha g),$$

nous pouvons déterminer un argument w tel que

$$p(w) = -\frac{h_{z^4}}{g_{z^4}}, \qquad p'(w) = \frac{J_{z^6}}{g_{z^4}\sqrt{g_{z^4}}},$$

et alors il vient

$$\frac{g_{xz^3}}{(xz)} = \frac{1}{2}\sqrt{g_{z^4}}\,\frac{p'(w) \pm p'(v)}{p(v) - p(w)};$$

d'ailleurs en différentiant, et tenant compte de formules déjà calculées, on a

$$\frac{dx}{dv} = \frac{(xz)^2}{\sqrt{g_{z^4}}}[\pm p(v \mp w) \mp p(v)],$$

les signes supérieurs et inférieurs allant ensemble. On a ainsi précisé la détermination du radical $\sqrt{g}$ qui convient au choix adopté, et qui est telle que

$$\frac{dx}{\sqrt{g}} = dv.$$

Les formules précédentes résolvent le problème; elles permettent d'exprimer x et $\frac{dx}{dv}$ en fonction uniforme de v.

Il est clair que l'on peut ajouter à v une constante arbitraire; par suite, on peut écrire

$$\frac{g_{xz^3}}{(xz)} = -\frac{1}{2}\sqrt{g_{z^4}}\,\frac{p'(v - v_0) - p'(w)}{p(v - v_0) - p(w)},$$

$$\sqrt{g} = \frac{dx}{dv} = \frac{(xz)^2}{\sqrt{g_{z^4}}}[p(v - v_0) - p(v - v_0 + w)],$$

et regarder soit z, soit v_0, comme la constante arbitraire d'intégration. Dans ce dernier cas, z est un paramètre que l'on peut choisir à volonté. Si, en particulier, on fait $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, les formules se simplifient, et l'on retombe sur le procédé ordinaire d'inversion.

Supposons que (u) soit une racine de g; d'après la dernière formule on aura dans ce cas

$$2(v - v_0) \equiv -w;$$

prenons donc $-\frac{w}{2}$ comme valeur correspondante de $v - v_0$; on aura

$$\frac{g_{uz^3}}{(uz)} = \frac{1}{2}\sqrt{g_{z^4}}\,\frac{p'\left(\frac{w}{2}\right) + p'(w)}{p\left(\frac{w}{2}\right) - p(w)};$$

on a d'ailleurs l'identité

$$\frac{g_{uz^3}}{(uz)} - \frac{g_{xz^3}}{(xz)} = \frac{(xu)}{(xz)(uz)} g_{z^4},$$

et, par suite, il vient

$$\frac{(xu)}{(xz)(uz)}\sqrt{g_{z^4}} = \frac{1}{2}\,\frac{\wp'\left(\frac{w}{2}\right) + \wp'(w)}{\wp\left(\frac{w}{2}\right) - \wp(w)} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(v - v_0) - \wp'(w)}{\wp(v - v_0) - \wp(w)};$$

le second membre se transforme sans peine, et l'on peut écrire

$$\frac{(xu)}{(xz)(uz)}\sqrt{g_{z^4}} = -\frac{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp\left(v - v_0 + \frac{w}{2}\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)};$$

c'est encore une formule d'inversion connue, doublement linéaire par rapport à x et à $\wp\left(v - v_0 + \frac{w}{2}\right)$.

D'après ce qui a été dit d'une façon générale, cette même relation pourrait être écrite sous la forme

$$\frac{1}{2}\,\frac{J_{u^6}}{h_{u^4}^2}\,\frac{h_{u^3x}}{(xu)} = \wp\left(v - v_0 + \frac{w}{2}\right);$$

la valeur de $v - v_0$ qui correspond à $x = z$ étant $-w$, on en déduit la formule

$$\wp\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{J_{u^6}}{h_{u^4}^2}\,\frac{h_{u^3z}}{(zu)};$$

différentiant, il vient

$$\wp'\left(\frac{w}{2}\right) = -\frac{J_{u^6}}{h_{u^4}(zu)^2}\,\frac{dz}{dw};$$

or, les formules qui définissent w donnent sans peine

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{2}\sqrt{g_{z^4}},$$

et, par suite, il vient

$$\wp'\left(\frac{w}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{J_{u^6}\sqrt{g_{z^4}}}{h_{u^4}(zu)^2}.$$

On calculera donc aisément $\wp\left(\frac{w}{2}\right)$ et $\wp'\left(\frac{w}{2}\right)$, connaissant le paramètre z et la racine (u) de g.

La relation $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{2}\sqrt{g_{z^4}}$, qui vient de nous servir, est évidente au moins au signe près, si l'on remarque que, g' désignant toujours le polynome $4y^3 - iy - j$, on doit avoir, en faisant $y = \wp\left(\frac{w}{2}\right)$,

$$-\frac{h'}{g'} = \wp(w) = -\frac{h_{z^4}}{g_{z^4}};$$

d'après ce qui a été dit à la fin du n° 5, la relation entre y et z est, par suite, doublement linéaire (ce qui concorde avec ce qui précède); elle est une intégrale de l'équation

$$\frac{dz}{\sqrt{g_{z^4}}} = \frac{dy}{\sqrt{g'}} = \frac{1}{2}dw.$$

9. Il nous reste à indiquer comment on pourra utiliser les résultats précédents pour l'étude des problèmes qui dépendent d'une relation doublement quadratique entre deux variables x et y, telle que

$$f(x, y) = 0.$$

Construisons la fonction $\wp$ avec les invariants i et j de f; faisons de plus $\wp(2w)$ égal à l'invariant k de f; on peut calculer deux substitutions linéaires de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2, & y_1 &= \alpha'_1 y'_1 + \alpha'_2 y'_2,\\ x_2 &= \beta_1 x'_1 + \beta_2 x'_2, & y_2 &= \beta'_1 y'_1 + \beta'_2 y'_2,\end{aligned}$$

telles que les formes g et g' relatives à f et définies au n° 1 se réduisent à

$$4x'^3_1 x'_2 - i x'_1 x'^3_2 - j x'^4_2 \quad \text{et} \quad 4y'^3_1 y'_2 - i y'_1 y'^3_2 - j y'^4_2;$$

si alors on fait

$$x'_1 = \wp(u), \qquad x'_2 = 1, \qquad y'_1 = \wp(v), \qquad y'_2 = 1,$$

la relation $f(x, y) = 0$ sera équivalente, d'après ce qui a été dit, à la condition

$$\pm u \pm v \pm w \equiv 0,$$

entre les arguments u, v, w; d'ailleurs w n'est déterminé qu'à une demi-période près, puisque l'on connaît seulement $\wp(2w)$.

Il est alors facile d'étudier les propriétés de la relation $f(x, y) = 0$, à la façon ordinaire. Il suffit de remarquer qu'ayant fixé w, les deux valeurs de y' qui correspondent à $x' = \wp(u)$ sont $\wp(u+w)$ et $\wp(u-w)$.

En particulier on est amené, comme l'on sait, à former des invariants de *fermeture*; égalés à zéro ils expriment que $2w$ est la $n^{\text{ième}}$ partie d'une période. En faisant ce calcul, on sera amené à considérer $\wp'(2w)$; il n'est pas inutile de remarquer que cette quantité est un invariant de f, rationnel par rapport aux coefficients de f et plus simple que i ou j. En effet, si l'on a $z = \wp(w)$, on sait que

$$\wp(2w) = -\frac{h_{z^4}}{g_{z^4}},$$

et aussi

$$\wp'(2w) = \frac{J_{z^6}}{\wp'^3(w)},$$

d'après le n° 6.

D'autre part la forme f admet évidemment l'invariant

$$l = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix};$$

en le calculant sur la forme f exprimée à l'aide des (x') et des (y'), on trouve facilement que

$$l = \frac{2J_{z^6}}{\wp'^3(w)\sqrt{-1}};$$

on a donc

$$\wp'^2(2w) = -\frac{l^2}{4};$$

cet invariant l est plus simple que i et j; il est gauche et vérifie la relation

$$l^2 = -16k^3 + 4ik + 4j.$$

On obtient encore un invariant un peu plus simple que i en faisant

$$m = 12k^2 - i,$$

et finalement on peut considérer k, l, m comme les trois invariants les plus simples de f. Leur rôle est mis en évidence quand on applique la méthode de Cayley au calcul des invariants de fermeture : on sait qu'il faut développer suivant les puissances croissantes de t le radical

$$\sqrt{4(k+t)^3 - i(k+t) - j};$$

or ce n'est autre chose que

$$\sqrt{4t^3 + 12kt^2 + mt - \frac{l^2}{4}};$$

en changeant t en $-\frac{t}{2}$, et multipliant par un facteur numérique, on voit que finalement le calcul des invariants de fermeture dépendra du développement du radical

$$\sqrt{l^2 + 2mt - 12kt^2 + 2t^3}.$$

10. Envisageons enfin le cas particulier où la forme f serait symétrique par rapport aux variables (x) et (y). Dans ce cas, les polynomes g et g' sont identiques, et l'on peut les transformer par une même substitution dans les polynomes

$$4x_1'^3 x_2' - ix_1' x_2'^3 - jx_2'^4 \qquad \text{et} \qquad 4y_1'^3 y_2' - iy_1' y_2'^3 - jy_2'^4;$$

mais, en même temps, il existe un nouvel invariant de la forme f, rationnel par rapport aux coefficients, puisque les (x) et les (y) sont soumis à la même substitution : c'est $n = a_2 + c_0 - 2b_1$ ou $n = 2(a_2 - b_1)$, puisque ici $a_2 = c_0$. En conservant les notations précédentes, il est facile de voir que l'on a

$$n^2 = -\frac{\wp''^2(w)}{\wp'^2(w)}.$$

D'ailleurs en même temps que

$$l = 2\wp'(2w)\sqrt{-1},$$

on a

$$n = -\frac{\wp''(w)}{\wp'(w)}\sqrt{-1}.$$

En fonction des invariants simples k, l, n on trouve sans difficulté

$$\wp(w) = -\left(\frac{k}{2} + \frac{n^2}{8}\right), \qquad \wp'(w) = \sqrt{-1}\left(\frac{l}{2} - \frac{3kn}{2} - \frac{n^3}{8}\right),$$

$$m = 12k^2 - i = \left(3k + \frac{n^2}{4}\right)^2 - ln.$$

Pour calculer les invariants de fermeture, il faudra ici exprimer que w est la $n^{\text{ième}}$ partie de période, et, d'après la méthode de Cayley, on sera amené à développer le radical

$$\sqrt{4[t+p(w)]^3 - i[t+p(w)] - j}$$

suivant les puissances croissantes de t; en changeant t en $-\frac{t}{2}$ et multipliant par un facteur numérique, on est ramené au développement du radical

$$\sqrt{\left(l - 3kn - \frac{n^3}{4}\right)^2 - 2tn\left(l - 3kn - \frac{n^3}{4}\right) + t^2\left(6k + \frac{3n^2}{2}\right) + 2t^3}.$$

On verra sans peine que les résultats ici obtenus ne diffèrent pas (aux notations près) de ceux que j'ai obtenus en étudiant la forme doublement quadratique au point de vue purement algébrique dans mon Ouvrage : *Leçons sur la théorie des formes*.