ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. BIANCHI

Sur les systèmes cycliques, dont les plans enveloppent une sphère

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 325-334

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__325_0>

SUR LES SYSTÈMES CYCLIQUES

DONT LES PLANS ENVELOPPENT UNE SPHÈRE,

PAR M. L. BIANCHI.

I.

Les recherches de Ribaucour, complétées par un beau théorème de M. Darboux [1], ont établi une liaison bien intime entre les deux théories de la déformation des surfaces et des congruences de cercles normaux à une série de surfaces (systèmes cycliques). La nouvelle méthode de M. Weingarten dans la théorie de l'applicabilité ressort, au fond, de ce lien entre les deux théories. C'est qu'en effet la connaissance d'un système cyclique, dont les cercles sont tracés dans les plans tangents d'une surface (S), permet, après avoir fixé une des surfaces orthogonales aux cercles, de ramener l'élément linéaire de (S) à la forme caractéristique

$$ds^2 = du^2 + 2\frac{\partial\psi}{\partial u}du\,dv + 2\frac{\partial\psi}{\partial v}dv^2$$

ou bien, en posant

$$\xi = u, \qquad \eta = \psi + \frac{1}{2}v, \qquad \zeta = \psi - \frac{1}{2}v,$$

à la forme équivalente

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 - d\zeta^2.$$

Alors la détermination des surfaces applicables sur (S) se trouve

---

(1) Voir *Leçons, etc.*, t. III, p. 354.

ramenée à l'intégration d'une équation correspondante de la forme de M. Weingarten :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}\rho_1\rho_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q}(\rho_1+\rho_2) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = 0.$$

Je me propose de considérer ici le cas particulier des systèmes cycliques dans lesquels les plans des cercles enveloppent une sphère, pour en étudier les relations avec les surfaces à courbure constante. On peut regarder notre problème à un autre point de vue, qu'il ne semble pas inutile de mentionner. Si nous appelons a le rayon de la sphère, la détermination de nos systèmes cycliques revient, d'après ce qui précède, à trouver trois fonctions réelles ξ, η, w de u, v, telles que l'on ait

$$d\xi^2 + d\eta^2 - dw^2 = a^2(du^2 + \sin^2 u\, dv^2).$$

En écrivant

$$d\xi^2 + d\eta^2 = a^2(du^2 + \sin^2 u\, dv^2) + dw^2,$$

nous voyons que chaque solution de notre problème géométrique donnera lieu à une surface *à courbure totale nulle* dans l'espace courbe à trois dimensions défini par son ds^2 de la forme

$$ds^2 = a^2(du^2 + \sin^2 u\, dv^2) + dw^2.$$

C'est une forme d'espace bien connue, comme admettant un groupe continu (transitif) de mouvements à quatre paramètres. La recherche des surfaces à courbure nulle de cet espace équivaut à celle des surfaces pseudosphériques (à courbure constante négative) de l'espace euclidien.

II.

Dans tout système cyclique, les lignes qui, sur la surface enveloppe des plans des cercles, correspondent aux développables de la congruence des axes forment, d'après un théorème de Ribaucour, un système conjugué. Lorsque la surface enveloppe est une sphère, ce sera donc un système orthogonal, c'est-à-dire que la congruence des axes des cercles sera une congruence normale. Il résulte alors d'une proposition connue que les surfaces Σ orthogonales aux axes des cercles auront même image de leurs lignes de courbure qu'une surface à courbure constante (1). On trouve, de plus, que toutes ces surfaces Σ forment des intégrales de l'équation d'Ampère :

$$\rho_1\rho_2 - (p-a)(\rho_1+\rho_2) + 2q + b = 0. \tag{1}$$

Ici les notations employées sont celles de M. Weingarten (2), et a, b désignent deux constantes dont la première a représente le rayon de la sphère, tandis que la seconde b (lorsque a n'est pas nulle) peut changer de valeur comme on veut, par le passage d'une surface Σ à une surface parallèle.

Réciproquement, toute surface Σ intégrale de (1) a la même image sphérique qu'une surface à courbure constante, et ses normales sont les axes d'une congruence normale de cercles tracés dans les plans tangents d'une sphère de rayon a. Lorsque $a=0$, les surfaces Σ sont caractérisées par cette propriété que, sur chaque normale, les deux centres de courbure sont conjugués harmoniques par rapport à une sphère fixe. Si, en outre, $b=0$, le segment de normale entre les deux centres de courbure est vu sous un angle droit de l'origine, et l'on a les surfaces considérées par M. Darboux à la page 322, tome IV de ses *Leçons*.

En supposant connues les surfaces Σ intégrales d'une même équation (1), la méthode de Weingarten permet d'en faire dériver par quadratures une classe de surfaces applicables.

Dans le cas $a=0$, ce seront les complémentaires des surfaces à courbure constante. Dans le cas général, $a \neq 0$, leur élément linéaire se réduit à la forme

$$ds^2 = e^{-2v}du^2 + \{2(v-u)e^{-2v} - A\}dv^2, \tag{2}$$

A désignant une constante, qui se rencontre dans un Mémoire récent de l'auteur (3). Ce ds^2 appartient à la surface

$$x = (u-v)e^{-v}, \qquad y+iz = e^{-v}, \qquad y-iz = 2e^{-v} + Ae^{v} - e^{-v}(u-v+1)^2,$$

(1) Au point de vue réel, il faut ajouter toutefois que cette courbure sera nécessairement négative lorsque les cercles sont réels.

(2) ρ_1, ρ_2, rayons de courbure principaux de Σ; p, distance algébrique de l'origine au plan tangent; $2q$, carré de la distance de l'origine au point de contact.

(3) *Sulla deformazione delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili* (*Annali di Matematica*, 4e série, t. VI, 1901).

c'est-à-dire à la quadrique imaginaire

$$x^2 + 2z^2 + 2xy + 2ixz - 2iyz - A = 0,$$

qui est *osculée* par le cercle imaginaire de l'infini. D'après les développements donnés par M. Darboux à la page 336 du tome IV, en réduisant ce ds^2 à la forme de Liouville, on aura

$$(2') \qquad ds^2 = \frac{A}{4}(u - v)\left\{\frac{u\,du^2}{(1-u)^3} + \frac{v\,dv^2}{(v-1)^3}\right\}.$$

III.

Je vais donner maintenant les formules qui, en partant d'une surface (S) à courbure constante K *donnée avec ses lignes géodésiques*, font connaître par quadratures la triple infinité de surfaces Σ, intégrales de (1), qui ont la même image sphérique de (S), et, par suite, les systèmes cycliques correspondants, dont les plans enveloppent une sphère. Soient, dans les notations habituelles, x, y, z les coordonnées d'un point variable sur (S), X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale. La surface (S) étant rapportée à un système quelconque de coordonnées curvilignes u, v, indiquons par

$$(3) \qquad \Sigma\, dx^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$(3') \qquad -\Sigma\, dx\,dX = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

les deux formes quadratiques fondamentales de (S). Maintenant construisons le système suivant d'équations simultanées du second ordre, avec une fonction inconnue Φ :

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial v} - KE\Phi + aD,\\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} &= \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial v} - KF\Phi + aD',\\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial v} - KG\Phi + aD'',
\end{aligned}\right.$$

a étant une constante, et les symboles de Christoffel $\begin{Bmatrix}ik\\l\end{Bmatrix}$ se rapportant à la première forme (3).

Quelle que soit la constante a, ces trois équations (A) forment un système complètement intégrable ; la solution plus générale Φ contient par suite trois constantes arbitraires.

Lorsque $a = 0$, le système (A) est bien connu par les recherches de M. Weingarten ; son intégration est immédiate, *en supposant connues les lignes géodésiques de la surface*. Dans cette même hypothèse, la méthode de la variation des constantes permet aussi de calculer, par trois quadratures, la solution générale du système complet (A).

Maintenant, une solution quelconque Φ de (A) étant choisie, déterminons par une quadrature une deuxième fonction W à l'aide des équations suivantes :

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{FD' - GD}{EG - F^2} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{FD - ED'}{EG - F^2} \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$
$$\frac{\partial W}{\partial v} = \frac{FD'' - GD'}{EG - F^2} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{FD' - ED''}{EG - F^2} \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

pour lesquelles la condition d'intégrabilité est satisfaite, à cause des équations (A) et des formules de Codazzi. Posons alors

$$(4) \quad \xi = WX + \Delta(x, \Phi), \qquad \eta + WY + \Delta(y, \Phi), \qquad \zeta = WZ + \Delta(z, \Phi),$$

les paramètres différentiels étant calculés par rapport à la forme quadratique (3) : *le point* (ξ, η, ζ) *décrira une surface* Σ *intégrale de* (1), *et l'image sphérique des lignes de courbure de* Σ *sera la même que pour la surface* (S), *à courbure constante* K *donnée*.

Quant au système cyclique correspondant, ayant pour axes les normales de Σ et pour enveloppe des plans de ses cercles la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

on l'obtiendra de la manière suivante. Le centre du cercle sera dans le point (x_1, y_1, z_1), dont les coordonnées s'expriment par les formules

$$(5) \quad x_1 = aX + \Delta(x, \Phi), \qquad y_1 = aY + \Delta(y, \Phi), \qquad z_1 = aZ + \Delta(z, \Phi);$$

c'est le point où la normale de Σ perce le plan tangent correspondant de la sphère. Enfin, le rayon R du cercle sera déterminé par la relation

$$(6) \qquad - KR^2 = \Phi^2.$$

On voit bien que ces cercles seront réels seulement lorsque la courbure K de (S) sera négative.

IV.

Considérons maintenant la classe de surfaces applicables $(\overline{S})$, d'élément linéaire (2) ou (2'), que la méthode de Weingarten fait dériver de nos surfaces Σ intégrales de (1).

Ces surfaces dérivées $(\overline{S})$, ainsi que je l'ai démontré dans le Mémoire cité au n° 2, ne sont autre chose que les surfaces enveloppes des plans orthogonaux aux lignes $\Phi =$ const. sur la surface donnée (S) à courbure constante. Par là, elles viennent se lier aux familles de Lamé composées de surfaces à courbure constante, à l'aide d'une proposition que je vais répéter ici.

Dans toute famille de Lamé, où chacune des surfaces qui la composent est individuellement à courbure constante, cette courbure K variant toutefois suivant une loi arbitraire de l'une à l'autre surface de la famille, la distance infiniment petite d'une surface (S) à la successive, comptée sur la normale de (S), satisfait précisément à un système tel que (A). Il en résulte la proposition en vue :

Dans toute famille de Lamé composée de surfaces à courbure constante, les plans osculateurs des trajectoires orthogonales de la famille, en tous les points d'une même surface à courbure constante K, *enveloppent une surface avec l'élément linéaire*

$$ds^2 = e^{-2v}\,du^2 + \left[2(v-u)e^{-2v} - \frac{1}{K}\right]dv^2,$$

qui dépend seulement de la valeur K *de la courbure.*

Dans cette proposition on suppose essentiellement K variable avec la surface (S) dans la famille. Si, au contraire, K est absolument constante, la surface enveloppe $(\overline{S})$ est la complémentaire de (S) par rapport aux lignes géodésiques trajectoires orthogonales des lignes $\Phi =$ const. Son élément linéaire a encore une forme fixe, qui toutefois ne rentre pas dans la forme précédente.

En particulier, dans le cas de K négative, il revêt trois formes différentes bien connues, suivant la nature des cercles géodésiques $\Phi = \text{const}$.

V.

Dans le cas où la courbure K de (S) est positive, la détermination des surfaces Σ correspondantes, intégrales de (1), pourra se faire à l'aide d'une autre construction, qui se trouve déjà indiquée par Ribaucour [1].

Supposons en premier lieu que l'on ait, dans (1), $a \neq 0$. Indiquons par ρ le *carré de la distance* d'un point M variable sur (S) d'un point quelconque fixe dans l'espace. Appliquons la surface (S) sur la sphère et portons sur le rayon qui va au point de la sphère correspondant à M, dans l'applicabilité, à partir du centre O, une longueur $OP = \rho$:

Le plan normal en P *au rayon* OP *enveloppera une surface* Σ *intégrale de* (1).

En changeant la position du point fixe dans l'espace, on aura de la sorte une triple infinité de ces surfaces Σ; elles auront toutes pour image sphérique de leurs lignes de courbure celle de la surface (S^1), à courbure constante K, que l'on obtient de (S) par la transformation involutive de M. Hazzidakis.

Lorsque la constante a est nulle, on aura une construction tout à fait analogue, en prenant pour ρ la distance d'un point variable sur (S) d'un plan fixe dans l'espace.

VI.

La détermination des surfaces Σ intégrales de (1), ou bien des systèmes cycliques tracés dans les plans tangents d'une sphère, exige

---

(1) *Voir* la Note au n° 43 de son *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (*Journal de Mathématiques*, 1891).

non seulement la connaissance des surfaces correspondantes (S), à courbure constante, mais aussi celle de leurs lignes géodésiques.

Or, c'est un résultat acquis, dans la théorie des transformations des surfaces à courbure constante, qu'une telle surface (S) étant connue *avec ses lignes géodésiques,* pour chaque nouvelle surface (S′) que l'on déduit de (S) à l'aide d'une de ces transformations, on pourra aussi déterminer les lignes géodésiques, soit en termes finis, soit, dans le cas le plus défavorable, par une quadrature.

Je vais faire connaître une simple proposition géométrique qui ne semble pas avoir été observée jusqu'ici, et qui explique bien ce résultat.

Considérons deux surfaces (S), (S′) avec la même courbure constante négative $K = -\frac{1}{R^2}$, qui soient transformées l'une de l'autre par une transformation de M. Bäcklund. Les droites MM′ qui joignent les couples (M, M′) de points correspondants sur les deux surfaces (S), (S′) forment, comme on sait, une congruence (pseudo-sphérique) dont (S) et (S′) sont les deux nappes de la surface focale; l'angle σ des deux plans focaux est constant, ainsi que la distance des deux foyers M, M′, qui est égale à $R\cos\sigma$.

Maintenant, comme (S), (S′) ont la même courbure constante, il est certain qu'elles seront applicables l'une sur l'autre d'une triple infinité de manières. Mais il est remarquable que l'on peut toujours trouver une de ces ∞^3 relations d'applicabilité à l'aide de la construction suivante :

Prolongez géodésiquement sur (S) *le rayon* MM′ *dans le sens même de* M *en* M′, *et sur cette ligne géodésique portez, à partir de* M, *un arc constant* $MM_1 = \delta$, *tel que l'on ait*

$$\sinh\left(\frac{\delta}{R}\right) = \cot\sigma \text{ (1)}. \tag{7}$$

La surface (S′) *sera applicable sur* (S), *de telle manière que chaque point* M′ *de* (S′) *vienne coïncider avec le point correspondant* M_1 *de* (S).

(1) Il n'échappera pas au lecteur que cette formule est la même qui relie, en Géométrie non euclidienne, la distance δ d'un point à une droite avec l'angle correspondant σ de parallélisme.

Il est évident qu'il suffira de connaître sur (S) les lignes géodésiques pour pouvoir réaliser cette construction d'applicabilité, après quoi l'on aura, *en termes finis,* les lignes géodésiques sur (S); c'est bien le résultat que nous avions énoncé.

On doit observer toutefois que, lorsque l'angle σ est nul, c'est-à-dire lorsque la transformation de M. Bäcklund se réduit à une transformation complémentaire, notre construction devient illusoire, puisque tous les points M_1 sont alors rejetés à distance infinie.

Il faudra, dans ce dernier cas, avoir recours à un ancien théorème de S. Lie, d'après lequel une quadrature suffira pour déterminer les lignes géodésiques de (S').

VII.

Il n'est pas sans intérêt de dépouiller la proposition établie au numéro précédent de tout ce qui a trait à la forme effective de la surface (S) dans l'espace, pour ne la considérer que comme une propriété de l'élément linéaire des surfaces à courbure constante; c'est bien la voie par laquelle on l'a obtenue.

La proposition se rapporte alors au problème de M. Tchebychef (¹) pour les surfaces à courbure constante, c'est-à-dire à la question de réduire leur élément linéaire à la forme

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\alpha\, du\, dv + dv^2, \tag{8}$$

ou bien, comme s'exprime M. Darboux, à la question d'*habiller* la surface. La proposition s'énonce alors sous la forme suivante :

Étant donné un habillement d'une surface à courbure constante, il en existe une simple infinité d'autres pour chacun desquels chaque point se transporte sur la surface à une distance géodésique fixe, donnée arbitrairement à l'avance, de sa position primitive.

Si la courbure de la surface est négative, les courbes d'habillement [c'est-à-dire les lignes u, v dans (8)] sont des *asymptotiques virtuelles*

(¹) *Voir* Darboux, *Leçons*, t. III, p. 133. On peut consulter aussi un article de M. Voss, *Ueber äquidistante Curvensysteme auf krummen Flächen* (*Katalog der Mathematischen Austellung zu Nürnberg*, septembre 1892).

de la surface; nous voulons dire par là qu'elles sont capables de devenir des lignes asymptotiques de la surface après une déformation convenable parfaitement déterminée. Alors, si nous considérons deux divers habillements de la surface dans la relation de notre théorème, les deux formes qu'affecte la surface, lorsqu'on aura rendu les courbes d'habillement respectivement des asymptotiques, seront transformées l'une de l'autre par une transformation de Bäcklund. Cela vaut aussi bien en déformant la surface dans l'espace euclidien comme dans tout autre espace à courbure constante. Il suit de là que les transformations des surfaces à courbure constante conservent leur valeur dans l'espace non euclidien, ce que j'avais déjà observé dans un ancien Mémoire de 1887 (1).

Si nous supposons maintenant la courbure de la surface (S) positive, les courbes d'habillement seront, sur la sphère, les images des lignes asymptotiques d'une surface pseudo-sphérique; et à deux habillements différents du théorème correspondra toujours une transformation de Bäcklund, ou bien une transformation complémentaire.

Enfin, dans le cas de la courbure nulle, sur le plan, les courbes d'habillement seront, dans un cas particulier, congruentes par translation dans chacun des deux systèmes, et les transformations considérées se réduiront elles-mêmes à de simples translations.

(1) *Su i sistemi di Weingarten negli spazi di curvatura costante* (*Atti dei Lincei*, vol. IV, 1887).