ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

W. STEKLOFF

Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 191-259
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__191_0>

SUR LES

PROBLÈMES FONDAMENTAUX

DE LA

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE [1],

PAR M. W. STEKLOFF.

CHAPITRE I.

EXISTENCE DES FONCTIONS FONDAMENTALES DE M. H. POINCARÉ. PROBLÈME DE LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ. PROBLÈME HYDRODYNAMIQUE. PROBLÈMES DE DIRICHLET ET DE GAUSS.

1. Soit (S) une surface fermée ayant les propriétés suivantes :

1° *En tout point de* (S) *il existe un plan tangent déterminé.*

2° *Autour de chaque point* p *de* (S) *on peut décrire une sphère de rayon* D, *assez petit mais déterminé, de telle façon qu'une parallèle à la normale à* (S) *en* p *ne puisse rencontrer* (S), *à l'intérieur de la sphère, qu'en un seul point.*

3° *L'angle aigu* $\mathfrak{z}$, *que font les normales à* (S), *en deux points* p *et* p' *de* (S), *satisfait à la condition*

$$\mathfrak{z} < ar^{\alpha},$$

a *et* $\alpha \leq 1$ *étant des nombres ne dépendant pas du choix des points* p *et* p', r *étant la distance* pp'.

[1] Ce Mémoire a été reçu le 16 août 1901. *(Note de la Rédaction.)*

Pour $\alpha = 1$ cette dernière condition coïncide avec la condition 3° de mon Mémoire *Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique* (¹).

Désignons par f une fonction des coordonnées rectangulaires x, y, z, continue sur (S); par r la distance du point x, y, z au point variable $p'(\xi, \eta, \zeta)$ de (S); par ds l'élément superficiel de (S), et posons

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f}{r}\,ds,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface (S).

Désignons par n la direction de la normale extérieure à (S).

Les conditions 1°, 2° et 3° étant remplies, la fonction V de x, y, z satisfait, comme on sait, aux conditions suivantes :

Elle est continue dans l'espace tout entier.

Ses dérivées par rapport à x, y, z restent continues à l'intérieur et à l'extérieur de (S).

Les produits

$$RV, \quad R^2\frac{\partial V}{\partial x}, \quad R^2\frac{\partial V}{\partial y}, \quad R^2\frac{\partial V}{\partial z}$$

restent finis lorsque la distance R du point x, y, z à l'origine de coordonnées tend vers ∞.

La fonction V admet les dérivées normales

$$\frac{\partial V_i}{\partial n}, \quad \frac{\partial V_e}{\partial n}, \quad \frac{\partial V}{\partial n}$$

sur (S) satisfaisant aux équations

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{f}{2},$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{f}{2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi}\int f\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds. \tag{1}$$

(¹) W. Stekloff, *Les méthodes générales, etc.* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. II, 1900, p. 208).

Nous entendons par $\frac{\partial V_i}{\partial n}$ la limite vers laquelle tend l'expression

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(n, z) \tag{2}$$

quand le point x, y, z tend vers un point p de (S) en restant sur la normale n à l'intérieur de (S); par $\frac{\partial V_e}{\partial n}$ la limite de la même expression quand le point x, y, z tend vers p en restant sur n à l'extérieur de (S). Par $\frac{\partial V}{\partial n}$ nous désignons la valeur de l'intégrale (1) pour le point $p(x, y, z)$ de (S).

Dans l'équation (1), ψ désigne l'angle que fait la droite $\overline{p'p}$ avec la normale n à (S) en p.

La fonction V satisfait à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V = 0$$

à l'intérieur et à l'extérieur de (S).

2. Proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Trouver un potentiel de la simple couche répandue sur (S) *et satisfaisant à la condition*

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n} = -2\lambda \frac{\partial V}{\partial n} - 2f \qquad \textit{sur } (S), \tag{3}$$

λ *étant un paramètre.*

Posons

$$V = V_1 + \lambda V_2 + \lambda^2 V_3 + \ldots + \lambda^k V_{k+1} + \ldots. \tag{4}$$

Nous aurons, en vertu de (3),

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int f\frac{1}{r}\,ds, \qquad V_k = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n}\,\frac{1}{r}\,ds. \tag{5}$$

En partant du problème énoncé, j'ai introduit ces fonctions

$$V_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

pour la première fois dans ma Note *Sur le problème de la distribution* *de l'électricité, etc.* [1] et puis dans mon Mémoire déjà cité, où j'ai démontré le théorème suivant :

La série (4) *converge absolument et uniformément sur* (S), *pourvu que* $|\lambda|$ *soit plus petit qu'un nombre positif* λ_2, *plus grand que l'unité, si la fonction* f *satisfait à la condition*

$$\int f\,ds = 0. \tag{6}$$

J'ai établi, en effet, l'inégalité suivante

$$|V_k| < C\sigma^k,$$

où C est une constante positive, σ est un nombre plus petit que l'unité, ne dépendant que de (S).

De cette inégalité, on tire immédiatement le théorème énoncé.

J'y ai réussi sous la supposition que la surface (S) admette la transformation de M. H. Poincaré (*Acta mathematica*, t. XX, 1896), mais j'ai énoncé en même temps l'hypothèse que le théorème doit être vrai indépendamment de cette transformation, ce qui a été vérifié récemment par M. S. Zaremba dans l'addition à son Mémoire *Sur l'équation de Laplace, etc.* [2].

Je me permets de reproduire ici ma démonstration, en m'appuyant sur une inégalité établie par M. S. Zaremba dans son Mémoire déjà cité.

Mon analyse, basée sur les mêmes principes que celle de M. S. Zaremba, nous permet de simplifier un peu les raisonnements et de nous débarrasser du théorème fondamental de M. H. Poincaré que j'ai pris pour point de départ dans mes recherches antérieures.

3. Je rappellerai d'abord quelques résultats, obtenus autrefois dans mon Mémoire déjà cité, qui nous seront nécessaires pour ce qui va suivre. Désignons par $d\tau$ l'élément de volume du domaine (D) limité

---

(1) W. Stekloff, *Le problème de la distribution de l'électricité et le problème de Neumann* (*Comptes rendus*, 13 décembre 1897).

(2) S. Zaremba, *Sur la théorie de l'équation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1901).

par (S), par $d\tau'$ l'élément du domaine (D') extérieur à (S), et posons

$$J_k = \int \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x}\right)^2 d\tau, \qquad J_{m,n} = \int \sum \frac{\partial V_m}{\partial x} \frac{\partial V_n}{\partial x} d\tau,$$

$$J'_k = \int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau', \qquad J'_{m,n} = \int \sum \frac{\partial V_m}{\partial x} \frac{\partial V_n}{\partial x} d\tau',$$

V_k étant des fonctions définies par les relations (5).

Le théorème du numéro précédent sera démontré en toute rigueur, comme je l'ai prouvé autrefois, si nous démontrons la proposition suivante :

Le rapport

$$\frac{J_{k+1} + J'_{k+1}}{J_k + J'_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

est plus petit qu'un nombre μ positif, plus petit que l'unité, ne dépendant que de (S), *pourvu que f satisfasse à la condition* (6).

Tout se ramène, par conséquent, à la démonstration de l'inégalité

$$\frac{J_{k+1} + J'_{k+1}}{J_k + J'_k} < \mu < 1,$$

quel que soit l'indice k, *indépendamment de la transformation de M. H. Poincaré.*

4. Rappelons maintenant quelques propriétés du rapport considéré.

Les égalités (6) donnent

$$(7) \qquad \frac{\partial V_{ki}}{\partial n} - \frac{\partial V_{ke}}{\partial n} = -\left(\frac{\partial V_{k-1,i}}{\partial n} + \frac{\partial V_{k-1,e}}{\partial n}\right) \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Appliquons à l'intégrale $J_{k+1} + J'_{k+1}$ la transformation de Green. Nous trouverons, en nous appuyant sur l'équation (7),

$$J_{k+1} + J'_{k+1} = \int \sum \frac{\partial V_k}{\partial x} \frac{\partial V_{k+2}}{\partial x} d\tau + \int \sum \frac{\partial V_k}{\partial x} \frac{\partial V_{k+2}}{\partial x} d\tau',$$

---

(1) *Voir* mon Mémoire : *Les méthodes générales, etc.*, p. 228.

d'où, en tenant compte de l'inégalité de Schwarz,

$$\frac{W_{k+1}}{W_k} < \frac{W_{k+2}}{W_{k+1}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

où l'on a posé, pour plus de simplicité,

$$W_k = J_k + J'_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'autre part, M. H. Poincaré a démontré que

$$\frac{W_{k+1}}{W_k} \leqq 1.$$

Nous avons donc les inégalités suivantes :

$$(8) \qquad \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \ldots < \frac{W_{k-1}}{W_k} < \ldots \leqq 1 \quad (^1).$$

5. Considérons maintenant les valeurs des fonctions V_k ($k = 1, 2, \ldots$) sur (S).

En appliquant à V_k le lemme fondamental, démontré dans mon Mémoire cité (p. 217, 218), on obtient l'inégalité suivante

$$(9) \qquad \int V_k^2\, ds < l W_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

l étant une constante positive ne dépendant que de (S).

Quant aux valeurs de deux fonctions consécutives V_k et V_{k-1} sur (S), elles sont liées par les relations suivantes :

$$(10) \qquad V_k = \frac{1}{2\pi} \int V_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds,$$

où φ désigne l'angle que fait la droite dirigée du point $p(x, y, z)$ de (S) vers le point variable $p'(\xi, \eta, \zeta)$ de (S), avec la normale n à (S) en p'. Je renverrai pour la démonstration à mon Mémoire cité (p. 228).

6. Envisageons un cylindre de révolution (C), dont l'axe est dirigé

(1) H. Poincaré, *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta mathematica*, t. XX, 1896).

suivant la normale n à (S) au point p de (S). Soit R le rayon de ce cylindre.

Désignons par (σ) la portion de (S) découpée par (C) au voisinage du point p, par (S_0) la portion qui reste. Soient $d\sigma$ l'élément superficiel de (σ), ds_0 l'élément superficiel de (S_0).

Prenons la normale n en p pour l'axe des ζ et introduisons les coordonnées polaires ρ et φ ayant pour pôle le point p.

En choisissant convenablement la longueur R, nous obtiendrons les inégalités suivantes, établies par M. A. Liapounoff dans son Mémoire *Sur certaines questions, etc.* (¹) :

$$|r\cos\varphi| < \rho\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right| + |\zeta|.$$

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right| < \sqrt{3}\,a\,2^{\alpha}\rho^{\alpha}, \qquad |\zeta| < \frac{\sqrt{3}\,a}{\alpha+1}\rho^{\alpha+1},$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\left|\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| < N\rho^{\alpha-2},$$

N étant un nombre positif ne dépendant que de (S).

Cette inégalité nous apprend que

$$\int\left|\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| d\sigma < BR^{\alpha} \quad (^2),$$

B étant un nombre fixe ne dépendant que de (S).

On en déduit aisément

$$\left|\int V_{k-1}\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma\right| < B(V_{k-1})R^{\alpha}, \tag{11}$$

où (V_{k-1}) désigne le maximum de module de V_{k-1} sur (S).

D'autre part,

$$\left|\int V_{k-1}\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds_0\right| < \sqrt{I_{k-1}}\int\frac{\cos^2\varphi}{r^4}\,ds_0 < \frac{S}{R^4}\sqrt{I_k}, \tag{12}$$

(¹) A. Liapounoff, *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (*Journal de Mathématiques*, n° 3, 1898).

(²) Puisque $d\sigma < 2\rho\,d\rho\,d\varphi$.

où l'on a posé

$$I_k = \int V_k^2 \, ds,$$

S désigne l'aire de la surface (S) tout entière.

De l'équation (10), au moyen des inégalités (11) et (12), on tire l'inégalité suivante

$$(V_k) < \frac{S}{R^{\frac{1}{2}}} \sqrt{I_{k-1}} + BR^\alpha (V_{k-1}),$$

ou, en tenant compte de (9),

$$(V_k) < A\sqrt{W_{k-1}} + BR^\alpha (V_{k-1}), \tag{13}$$

A et B étant des constantes ne dépendant que de (S).

7. Désignons par l la limite du rapport

$$\frac{\sqrt{W_k}}{\sqrt{W_{k+1}}},$$

pour $k = \infty$, et choisissons la longueur R, qu'on peut prendre aussi petite que l'on veut, de façon que l'on ait

$$BR^\alpha < \frac{1}{l}. \tag{14}$$

Désignons maintenant par μ le module de λ et posons

$$v_k = (V_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Les inégalités (13) (pour $k = 2, 3, \ldots$) nous donneront

$$\sum_{k=2}^{\infty} \mu^{k-1} v_k < A \sum_{k=2}^{\infty} \mu^{k-1} \sqrt{W_{k-1}} + BR^\alpha v_1 + BR^\alpha \mu \sum_{k=2}^{\infty} \mu^{k-1} v_k$$

ou

$$(1 - BR^\alpha \mu) \sum_{k=2}^{\infty} \mu^{k-1} v_k < A \sum_{k=2}^{\infty} \mu^{k-1} \sqrt{W_{k-1}} + BR^\alpha v_1. \tag{15}$$

Il est évident [l'inégalité (14)] que

$$1 - BR^\alpha \mu > 0$$

pour toutes les valeurs de μ plus petites que l.

L'inégalité (15) nous apprend, par conséquent, que le rayon ρ de convergence de la série

$$v_1 + \mu v_2 + \mu^2 v_3 + \ldots + \mu^k v_{k+1} + \ldots \tag{16}$$

est au moins égal à celui de la série

$$\sqrt{W_1} + \mu \sqrt{W_2} + \mu^2 \sqrt{W_3} + \ldots + \mu^k \sqrt{W_{k+1}} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\rho \geqq l. \tag{17}$$

D'autre part, il est aisé de prouver que ρ ne peut pas surpasser le rayon de convergence de la série

$$v_2 + \mu^2 v_4 + \mu^4 v_6 + \ldots + \mu^{2(k-1)} v_{2k} + \ldots,$$

et *a fortiori* le rayon de convergence de la série

$$V_2 + \lambda^2 V_4 + \lambda^4 V_6 + \ldots + \lambda^{2(k-1)} V_{2k} + \ldots. \tag{18}$$

En effet, en tenant compte de l'égalité (7), on trouve

$$\int V_{2k} \left(\frac{\partial V_{2i}}{\partial n} - \frac{\partial V_{2e}}{\partial n} \right) ds = \int V_{2k-s} \left(\frac{\partial V_{s+2,i}}{\partial n} - \frac{\partial V_{s+2,e}}{\partial n} \right) ds,$$

d'où, en posant

$$s = k - 1,$$

on tire

$$\int V_{2,k} \left(\frac{\partial V_{2,i}}{\partial n} - \frac{\partial V_{2,e}}{\partial n} \right) ds = W_{k+1}. \tag{19}$$

Multiplions la série (18) par

$$\left(\frac{\partial V_{2,i}}{\partial n} - \frac{\partial V_{2,e}}{\partial n} \right) ds$$

et intégrons en étendant l'intégration à toute la surface (S).

On a, en vertu de (19),

$$W_2 + \mu^2 W_3 + \mu^4 W_4 + \ldots + \mu^{2(k-1)} W_{k+1} + \ldots.$$

Le rayon de convergence de cette série est au plus égal à

$$\lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{W_k}}{\sqrt{W_{k+1}}} = l.$$

Il en est de même du rayon de convergence de la série (18), et à plus forte raison de ρ.

On a donc

$$\rho \leqq l.$$

Cette inégalité et l'égalité (17) montrent que

$$\rho = l.$$

On obtient ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La série*

$$V_1 + \lambda V_2 + \lambda^2 V_3 + \ldots + \lambda^k V_{k-1} + \ldots \tag{20}$$

converge absolument et uniformément sur (S) *pour toutes les valeurs de* λ *dont le module est plus petit que l'unité, quelle que soit la fonction* f, *continue sur* (S), *si la surface* (S) *satisfait aux conditions* 1°, 2° *et* 3° *du n°* 1.

Il est aisé de démontrer que la série (20) se représente sous la forme d'un potentiel de la simple couche, pourvu que

$$\mu = |\lambda| < N,$$

N étant un nombre fixe plus petit que l'unité; mais peu importe.

8. Considérons maintenant un cas particulier en faisant, dans la condition 3°, $\alpha = 1$ et employons quelques résultats obtenus par M. S. Zaremba dans son Mémoire cité : *Sur la théorie de l'équation de Laplace, etc.*

Considérons l'intégrale

$$W = \frac{1}{4\pi} \int f \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

μ étant un nombre positif quelconque.

La fonction W, définie par cette intégrale, a les propriétés suivantes :

Elle reste continue dans l'espace tout entier.

Ses dérivées par rapport à x, y, z restent continues à l'extérieur et à l'intérieur de (S).

La fonction W s'annule à l'infini comme un potentiel de la simple couche et satisfait à l'équation

$$\Delta W - \mu^2 W = 0$$

à l'intérieur et à l'extérieur de (S) et à la condition

$$\frac{\partial W_i}{\partial n} - \frac{\partial W_e}{\partial n} = f \quad \text{sur (S).}$$

Désignons par f_0 le maximum de module de f sur (S).

On a, comme l'a montré M. S. Zaremba (¹),

$$|W| < \frac{A}{\mu} f_0,$$

$$\left| \frac{\partial W_i}{\partial n} - \frac{1}{2} f \right| < \frac{2A}{\mu} f_0, \qquad \left| \frac{\partial W_e}{\partial n} + \frac{1}{2} f \right| < \frac{2A}{\mu} f_0,$$

A étant un nombre fixe ne dépendant que de (S).

Prenons pour μ un nombre positif plus grand que 2A.

Nous pouvons énoncer les théorèmes suivants, établis par M. S. Zaremba (²) :

Théorème I. — *Il existe une fonction w, continue dans l'espace tout entier, ayant les dérivées normales sur* (S), *s'annulant à l'infini ainsi que sur la surface donnée* (S) *et vérifiant l'équation*

$$\Delta w - \mu^2 w + \mu^2 V = 0$$

à l'intérieur et à l'extérieur de (S), *pourvu que* (S) *satisfasse aux conditions* 1°, 2° *et* 3° (*pour* $\alpha = 1$) *et que le nombre* μ *soit plus grand qu'un nombre fixe* μ_0 *plus grand que* 2A.

Théorème II. — *Si la surface* (S) *et le nombre* μ *satisfont aux conditions du théorème précédent, il existe une fonction* w_1, *continue dans l'espace tout entier, ayant les dérivées normales sur* (S) *et satisfaisant aux conditions suivantes :*

$$\Delta w_1 - \mu^2 w_1 = 0$$

(¹) S. Zaremba, *Sur l'équation aux dérivées partielles* $\Delta u + \xi u + f = 0$ (*Annales de l'École Normale*, t. XVI, 1889, p. 431).

(²) S. Zaremba, *Sur la théorie de l'équation de Laplace, etc.* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1901).

à l'intérieur et à l'extérieur de (S),

$$w_1 = \mathrm{V} \quad sur\ (\mathrm{S}).$$

Nous entendons ici par V le potentiel

$$-\frac{1}{2\pi}\int f\,\frac{1}{r}\,ds.$$

Posons ensuite

$$\mathrm{J}_1 = \int \sum \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 d\tau + \mu^2 \int w_1^2\,d\tau,$$
$$\mathrm{J}'_1 = \int \sum \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 d\tau' + \mu^2 \int w_1^2\,d\tau'.$$

Théorème III. — *Le rapport* $\frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{J}'_1}$ *satisfait aux conditions suivantes :*

$$\frac{1-\dfrac{2\mathrm{A}}{\mu}}{1+\dfrac{2\mathrm{A}}{\mu}} < \frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{J}'_1} < \frac{1+\dfrac{2\mathrm{A}}{\mu}}{1-\dfrac{2\mathrm{A}}{\mu}}, \tag{21}$$

quelle que soit la fonction f dans l'expression V.

Quant aux intégrales J_1 *et* J'_1, *elles satisfont aux égalités*

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{J}_1 &= \mathrm{J} + \mu^2 \mathrm{I} - \mathrm{R}, \\ \mathrm{J}'_1 &= \mathrm{J}' + \mu^2 \mathrm{I}' - \mathrm{R}', \end{aligned}\right. \tag{22}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{V}^2\,d\tau, \qquad \mathrm{I}' = \int \mathrm{V}^2\,d\tau',$$
$$\mathrm{J} = \int \sum \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)^2 d\tau, \qquad \mathrm{J}' = \int \sum \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)^2 d\tau',$$
$$\mathrm{R} = \int \sum \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 d\tau + \mu^2 \int w^2\,d\tau,$$
$$\mathrm{R}' = \int \sum \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 d\tau' + \mu^2 \int w^2\,d\tau'.$$

Nous supposons, sans doute, que la fonction f soit choisie de façon que l'intégrale I' ait un sens bien déterminé.

Il est presque évident que

$$\mathrm{R} < \mu^2 \mathrm{I}, \qquad \mathrm{R}' < \mu^2 \mathrm{I}'. \tag{23}$$

Il est inutile de reproduire ici la démonstration des propositions énoncées, qui se trouve dans le Mémoire de M. S. Zaremba cité plus haut [1].

9. Supposons que f dépende linéairement de p constantes arbitraires $\alpha_s (s = 1, 2, \ldots, p)$,

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p,$$

$f_s (s = 1, 2, \ldots, p)$ étant des fonctions quelconques, continues sur (S).

D'après le théorème connu de M. H. Poincaré [2], on peut toujours choisir les α_s de façon que l'on ait

$$\frac{I}{J} < \frac{B}{L_p}, \tag{24}$$

B étant un nombre fixe, L_p étant un nombre positif ne dépendant que de (S) et de p et indéfiniment croissant avec p.

Il est aisé de voir, d'autre part, qu'en choisissant convenablement le nombre p on peut disposer les α_s de telle manière que l'inégalité

$$\frac{I'}{J'} < \frac{B}{L_p} \tag{25}$$

soit satisfaite en même temps que l'inégalité (24).

Remarquons qu'on peut prendre pour L_p le nombre suivant :

$$L_p = N p^{\frac{2}{3}}, \tag{25_1}$$

N étant une constante positive ne dépendant que de (S).

Ces conditions étant remplies, on tire de (22)

$$J_1 < \left(1 + \frac{\mu^2 B}{L_p}\right) J, \qquad J_1 > J,$$
$$J'_1 < \left(1 + \frac{\mu^2 B}{L_p}\right) J', \qquad J'_1 > J'.$$

---

(1) S. Zaremba, *Sur la théorie de l'équation de Laplace, etc.* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1901).

(2) H. Poincaré, *Sur les équations différentielles de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1894).

On trouve donc, en vertu de (21),

$$J < mJ', \qquad J' < mJ,$$

où l'on a posé

$$m = \left(1 + \frac{B\mu^2}{L_p}\right) \frac{1 + \frac{2A}{\mu}}{1 - \frac{2A}{\mu}}.$$

Il est évident qu'en choisissant le nombre p assez grand, on peut faire la différence $(m - 1)$ aussi petite qu'on veut; pour cela, il suffit de poser, par exemple,

$$\mu^2 = \sqrt{L_p}.$$

En d'autres termes, *en choisissant convenablement p et μ, nous pouvons prendre le nombre*

$$q^2 = \left(\frac{1 - m}{1 + m}\right)^2$$

aussi petit qu'on veut.

On peut donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. — *Soit V un potentiel de la simple couche, dont la densité dépend linéairement de p constantes arbitraires $\alpha_s (s = 1, 2, \ldots, p)$.*

On peut toujours disposer les α_s de façon que l'on ait

$$\frac{1}{m} < \frac{J}{J'} < m,$$

où m est un nombre positif ne dépendant que de p et de (S), qu'on peut prendre, par le choix convenable du nombre p, aussi voisin de l'unité que l'on veut.

10. Reprenons maintenant les fonctions V_k définies par les relations (5) (n° 2) et posons, pour plus de simplicité,

$$\frac{\partial V_k}{\partial n} = \rho_k.$$

Prenons en outre dans V_1, au lieu de f, la fonction suivante :

$$f_1 = \alpha_0 f + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \ldots + \alpha_p \rho_p,$$

α_s étant des constantes arbitraires, et formons la suite des fonctions $V_k (k = 2, 3, \ldots)$.

Tous les V_k seront les fonctions linéaires de p constantes α_s.

Il en est de même de la fonction

$$U = \alpha V_k + \beta V_{k+1},$$

où α et β sont les autres constantes arbitraires.

D'après le théorème du numéro précédent, on peut choisir le nombre p et disposer ensuite les constantes α_s de telle manière que l'on ait

$$\frac{1}{m} < \frac{J}{J'} < m, \tag{26}$$

quelles que soient les constantes α et β.

Ici, nous entendons par J et J' les intégrales suivantes :

$$J = \int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau, \qquad J' = \int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau'.$$

Mais on sait que les inégalités (26) entraînent l'inégalité suivante :

$$\frac{W_{k+1}}{W_k} < \left(\frac{1 - m}{1 + m}\right)^2 = q^2$$

(*voir* mon Mémoire cité, p. 229 et 230).

On peut donc choisir la fonction f dans V_1 de façon que le rapport

$$\frac{W_{k+1}}{W_k}$$

soit plus petit qu'un nombre q^2, donné d'avance.

On peut de même choisir f de façon que l'on ait

$$\frac{W_{k+2}}{W_{k+1}} < q^2.$$

Mais cette inégalité entraîne l'inégalité

$$\frac{W_{k+1}}{W_k} < q^2.$$

On en conclut que la fonction f peut être choisie de façon que l'on ait

$$\frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \ldots < \frac{W_{k+1}}{W_k} < \ldots < q^2$$

[*voir* les inégalités (8)].

Pour cela, il suffit de poser

$$f = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p,$$

$f_s (s = 0, 1, 2, \ldots)$ étant des fonctions quelconques, continues sur (S), $\alpha_s (s = 0, 1, 2, \ldots)$ étant des facteurs réels indéterminés, et d'assujettir les α_s à vérifier un certain nombre d'équations linéaires et homogènes.

On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème. — *Soit*

$$f = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_p f_p$$

la densité du potentiel de la simple couche

$$V = -\frac{1}{2\pi}\int f \frac{1}{r}\, ds.$$

On peut choisir le nombre p et disposer ensuite les constantes

$$\alpha_s (s = 0, 1, 2, \ldots)$$

en les assujettissant à vérifier un certain nombre d'équations linéaires et homogènes, de telle manière que le rapport

$$\lim_{k=\infty} \frac{W_{k+1}}{W_k}$$

soit plus petit qu'un nombre q^2, quelque voisin de zéro que soit q^2.

11. Soit f une fonction quelconque, continue sur (S).

Formons la suite de fonctions

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int f \frac{1}{r}\, ds, \qquad V_k = -\frac{1}{2\pi}\int \rho_{k-1} \frac{1}{r}\, ds.$$

Posons ensuite

$$f_1 = \alpha_0 f + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \ldots + \alpha_p \rho_p$$

et formons la suite de fonctions

$$V'_1 = -\frac{1}{2\pi}\int f_1 \frac{1}{r}\, ds, \qquad V'_k = -\frac{1}{2\pi}\int \rho'_{k-1}\frac{1}{r}\, ds,$$

en posant

$$\rho'_k = \frac{\partial V'_k}{\partial n}.$$

Désignons par W'_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) les intégrales W_k (*voir* n° 4) correspondant aux fonctions V'_k.

D'après le théorème du numéro précédent, on peut choisir les α_s de façon que l'on ait

$$\lim_{k=\infty} \frac{W'_{k+1}}{W'_k} < q^2.$$

Cette inégalité étant établie, nous obtiendrons, en employant les raisonnements de mon Mémoire *Les méthodes générales, etc.*, l'inégalité suivante :

$$(27) \qquad |V'_k| < C\tau^k,$$

C étant un nombre fixe, τ étant un nombre plus petit que l'unité ne dépendant que de (S).

D'autre part, il est évident qu'on peut choisir les α_s de telle façon que les conditions du théorème précédent soient satisfaites en même temps que la suivante :

$$\int f_1\, ds = 0.$$

Cette condition étant remplie, nous trouverons, comme dans mon Mémoire cité (p. 235-239),

$$(28) \qquad |\rho'_k| < k\sigma^k,$$

k étant un nombre fixe,

$$\sigma = \tau^{\frac{1}{3}}.$$

Quant à τ, on peut poser

$$\tau = 2q.$$

En remarquant que

$$\tau < \sigma,$$

on peut écrire, au lieu de (27),

$$|V'_k| < C\sigma^k.$$

Cette inégalité montre que la série

$$V'_1 + \lambda V'_2 + \lambda^2 V'_3 + \ldots + \lambda^k V'_{k+1} + \ldots \tag{29}$$

converge absolument et uniformément sur (S), pourvu que

$$|\lambda| < \frac{1}{\sigma}. \tag{30}$$

Elle représente un potentiel de la simple couche, dont la densité est égale à

$$f_1 + \lambda \rho'_1 + \lambda^2 \rho'_2 + \ldots + \lambda^k \rho'_k + \ldots,$$

car cette série converge absolument et uniformément sur (S), pourvu que $|\lambda|$ satisfasse à la condition (30), ce qui résulte immédiatement de l'inégalité (28).

La série (29) représente, par conséquent, une fonction V', harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de (S), satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial V'_i}{\partial n} - \frac{\partial V'_e}{\partial n} = -2\lambda \frac{\partial V'}{\partial n} - 2 f_1 \quad \text{sur } (S). \tag{31}$$

12. Il est aisé de voir que

$$V' = \alpha_0 V + \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_p U_p,$$

où l'on a posé

$$U_1 = V_2 + \lambda V_3 + \ldots + \lambda^{k-1} V_{k+1} + \ldots = \frac{1}{\lambda}(V - V_1),$$

$$U_2 = V_3 + \lambda V_4 + \ldots + \lambda^{k-1} V_{k+2} + \ldots = \frac{1}{\lambda}(U_2 - V_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$U_p = V_{p+1} + \lambda V_{p+2} + \ldots + \lambda^{k-1} V_{p+k} + \ldots = \frac{1}{\lambda}(U_{p-1} - V_{p-1}).$$

En appliquant la méthode connue de M. H. Poincaré (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1894), on trouve

$$V = \frac{P}{D},$$

où P est un potentiel de la simple couche se représentant sous la forme de la série absolument et uniformément convergente

$$P_0 + \lambda P_1 + \lambda^2 P_2 + \ldots + \lambda^k P_k + \ldots,$$

pourvu que

$$|\lambda| < \frac{1}{\sigma},$$

D est un polynome entier en λ à coefficients constants.

La fonction P satisfait à la condition

$$\frac{\partial P_i}{\partial n} - \frac{\partial P_e}{\partial n} = -2\lambda \frac{\partial P}{\partial n} - 2fD \quad \text{sur (S)}.$$

On voit donc que la fonction V, considérée comme fonction du paramètre λ, est une fonction méromorphe, n'ayant que des pôles simples, réels et positifs

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots,$$
$$\lambda_1 > \lambda_2, \quad \lambda_2 > \lambda_3, \quad \ldots, \quad \lambda_k > \lambda_{k+1}, \quad \ldots.$$

Remarquons encore que *le plus petit de ces pôles λ_1 est égal à l'unité*, ce qui résulte immédiatement du théorème du n° 7.

13. Désignons maintenant par $V_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ les résidus de la fonction V correspondant aux pôles $\lambda_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Il est évident que ces résidus sont les fonctions harmoniques à l'intérieur et à l'extérieur de (S) se représentant sous la forme des potentiels de la simple couche et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(32) \qquad \frac{\partial V_{ki}}{\partial n} - \frac{\partial V_{ke}}{\partial n} = -2\lambda_k \frac{\partial V_k}{\partial n} = -\lambda_k \left(\frac{\partial V_{ki}}{\partial n} + \frac{\partial V_{ke}}{\partial n} \right) \quad \text{sur (S)},$$

ou

$$\frac{\partial V_{ki}}{\partial n} = -\mu_k \frac{\partial V_{ke}}{\partial n} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

où l'on a posé

$$\mu_k = \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k + 1}.$$

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Pour toute surface* (S) *satisfaisant aux conditions* 1°, 2° *et* 3° (*si l'on y fait $\alpha = 1$*), *il existe une infinité de nombres positifs*

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 \geqq \lambda_1, \qquad \lambda_3 \geqq \lambda_2, \qquad \ldots, \qquad \lambda_k \geqq \lambda_{k-1}, \qquad \ldots$$

et de fonctions correspondantes

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots, \quad V_k, \quad \ldots$$

ayant les propriétés d'un potentiel de la simple couche et satisfaisant aux conditions

$$\frac{\partial V_{ki}}{\partial n} = -\mu_k \frac{\partial V_{ke}}{\partial n} \quad sur\ (S)\ (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

où

$$\mu_k = \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k + 1}.$$

Les nombres λ_k *ne dépendent que de* (S); *quant aux nombres* μ_k, *ils satisfont à l'inégalité*

$$\frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 + 1} \leqq \mu_k \leqq 1$$

pour toutes les valeurs de k *à partir de* $k = 2$, *etc.*

Le nombre μ_1 *est égal à zéro; la fonction correspondante* $V_1 =$ const. *à l'intérieur de* (S) *et représente un potentiel de la simple couche, répandue sur* (S), *sans action sur un point intérieur à* (S).

Il en résulte que V_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) *sont les fonctions fondamentales de M. H. Poincaré, dont l'existence est donc démontrée pour toute surface* (S), *satisfaisant seulement aux trois conditions générales* 1°, 2° *et* 3° (*pour* $\alpha = 1$).

Ce théorème et la méthode de la démonstration que je viens d'exposer m'ont été connus depuis longtemps, mais dans la supposition que la surface (S) admette la transformation de M. H. Poincaré; ils résultent immédiatement de mes recherches antérieures sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique [1], comme je l'ai déjà signalé dans mon Ouvrage *Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique*, paru récemment en russe (Édition de la Société Mathématique de Kharkow, 1901).

---

(1) W. Stekloff, *Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique* (*Comptes rendus*, 6 mars 1899). — *Les méthodes générales pour résoudre, etc.* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. II, 1900).

Mais c'est M. S. Zaremba qui a démontré le premier le théorème dont il s'agit, sans employer aucune transformation.

Mon analyse, exposée dans ce Chapitre, diffère un peu de celle de M. S. Zaremba, comme l'on peut conclure de sa petite Communication dans l'addition à son Mémoire *Sur la Théorie de l'équation de Laplace, etc.*

14. De ce qui précède, nous tirerons quelques conséquences importantes que j'indiquerai tout de suite.

Multiplions l'équation (32) par $V\,ds$ et intégrons en étendant l'intégration à la surface (S) tout entière.

On obtient aisément, comme dans mon Mémoire *Sur les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré* (¹) [en tenant compte de (31)],

$$\frac{\lambda - \lambda_k}{D(1 + \lambda_k)} \int P \frac{\partial V_{ki}}{\partial n}\, ds = -\int f V_k\, ds.$$

Supposons que λ tende vers λ_k et passons à la limite. On aura

$$k \int V_k \frac{\partial V_{ki}}{\partial n}\, ds = -\int f\, V_k\, ds,$$

k étant un nombre fixe, différent de zéro.

Cette égalité nous donne immédiatement le théorème suivant :

Théorème. — *Si la fonction f satisfait à la condition*

$$\int f V_k\, ds = 0,$$

le point $\lambda = \lambda_k$ sera un point simple de la fonction V, *méromorphe en λ, définie par les conditions suivantes :*

$$\Delta V = 0 \quad \textit{à l'intérieur et à l'extérieur de } (S),$$
$$\frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n} = -2\lambda \frac{\partial V}{\partial n} - 2f \quad \textit{sur } (S),$$

(S) *étant une surface satisfaisant aux conditions* 1°, 2° *et* 3° (*pour* $\alpha = 1$) *du n°* 1.

(¹) W. Stekloff, *Sur les fonctions harmoniques, etc.* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. II, 1900).

Nous pourrions déduire de ce théorème quelques conséquences intéressantes, analogues à celles que j'ai indiquées, il y a un an, pour les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré, dans mon Mémoire déjà cité; mais nous n'insisterons pas sur ce point.

Nous indiquerons seulement la conséquence suivante :

Appliquons le théorème précédent au cas de $k=1$. Nous tirerons la proposition suivante :

Si la fonction f satisfait à la condition

$$\int f\,ds=0,$$

le point $\lambda_1=1$ est un point simple de la fonction V; en d'autres termes, *la série*

$$V_1+\lambda V_2+\lambda^2 V_3+\ldots+\lambda^k V_{k+1}+\ldots,$$

V_k *étant des fonctions définies par les relations* (5) *du n°* 2, *converge absolument et uniformément sur* (S), *pourvu que*

$$|\lambda|<\lambda_2>1.$$

On a donc, en tenant compte du théorème du n° 7,

$$\lim_{k=\infty}\frac{\sqrt{W_k}}{\sqrt{W_{k+1}}}=\lambda_2>1,$$

ou, en vertu de (8) (n° 4),

$$\frac{W_{k+1}}{W_k}\leqq\frac{1}{\lambda_2^2}=\mu<1,$$

quel que soit l'indice k.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si la fonction f dans l'expression*

$$V=-\frac{1}{2\pi}\int f\frac{1}{r}\,ds$$

satisfait à la condition

$$\int f\,ds=0, \tag{33}$$

le rapport

$$\frac{W_{k+1}}{W_k}$$

est plus petit qu'un nombre μ inférieur à l'unité.

15. Cela nous suffit pour établir les théorèmes plus généraux que ceux que j'ai démontrés, il y a un an, dans mon Mémoire *Les méthodes générales, etc.*

La démonstration restera la même; il est inutile de la reproduire de nouveau.

Voici l'énoncé de ces théorèmes :

Théorème I. — *La méthode connue de M. Robin résout le problème de la distribution de l'électricité pour toute surface* (S) *satisfaisant aux conditions* 1°, 2° *et* 3° (*si l'on y fait* $\alpha = 1$).

Il existe donc une fonction ρ, représentant la densité d'une couche superficielle sans action sur un point intérieur à (S), qu'on peut définir par la série suivante :

$$\rho = f + (\rho_1 - \rho_0) + (\rho_2 - \rho_1) + \ldots + (\rho_k - \rho_{k-1}) + \ldots,$$

où f est une fonction quelconque, assujettie à une seule condition

$$\int f\, ds = a,$$

a étant un nombre positif donné à l'avance, $\rho_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des fonctions définies par les relations

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi}\int \rho_{k-1}\frac{\cos\psi}{r^2}\, ds \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Théorème II. — *Les méthodes de C. Neumann et de G. Robin pour résoudre le problème hydrodynamique s'appliquent à toute surface* (S) *satisfaisant aux conditions du théorème précédent, quelle que soit la fonction continue f à laquelle doit se réduire sur* (S) *la dérivée normale de la fonction harmonique cherchée.*

Considérons la méthode de M. Robin.

Formons le potentiel de la simple couche

$$V = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int (f + \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + \ldots + \varepsilon^k\rho_k + \ldots)\frac{1}{r}\,ds,$$

où $\varepsilon = \pm 1$.

Posons $\varepsilon = 1$ et supposons que f satisfasse à la condition

$$\int f\,ds = 0.$$

Nous obtiendrons une *fonction*

$$V_1 = \frac{1}{2\pi}\int (f + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k + \ldots)\frac{1}{r}\,ds,$$

harmonique à l'intérieur (et à l'extérieur) de (S) *et satisfaisant à la condition*

$$\frac{\partial V_{1i}}{\partial n} = f \quad sur\ (S).$$

Posons ensuite $\varepsilon = -1$. Nous obtiendrons une *fonction*

$$V_2 = -\frac{1}{2\pi}\int [f - \rho_1 + \rho_2 - \ldots (-1)^k\rho_k + \ldots]\frac{1}{r}\,ds,$$

harmonique à l'extérieur (et à l'intérieur) de (S) *et satisfaisant à la condition*

$$\frac{\partial V_{2e}}{\partial n} = f - \rho,$$

quelle que soit la fonction f, continue sur (S).

Il résulte de là que *la fonction*

$$U = V_2 - P,$$

où

$$P = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho}{r}\,ds \ (^1)$$

représente une fonction harmonique à l'extérieur de (S), *satisfaisant à la condition*

$$\frac{\partial U_e}{\partial n} = f \quad sur\ (S).$$

---

(1) ρ désigne la densité d'une couche superficielle sans action sur un point intérieur.

16. Théorème III. — *La méthode de la moyenne arithmétique de C. Neumann pour résoudre le problème de Dirichlet s'applique à toute surface* (S) *satisfaisant aux conditions* 1°, 2° *et* 3° (*pour* $\alpha = 1$) *du* n° 1, *si la fonction donnée* f, *à laquelle doit se réduire sur* (S) *la fonction harmonique cherchée, satisfait à une telle condition que le potentiel de la double couche*

$$W_1 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f\cos\varphi}{r^2}\,ds$$

admette les dérivées normales sur (S) [1].

Cette dernière condition sera remplie, par exemple, si la fonction f, continue sur (S), satisfait à l'inégalité de M. A. Liapounoff :

$$\int_0^{2\pi} (f - f_0)\,d\varphi < \beta\rho^{\alpha+1},$$

f_0 désignant la valeur de f au point quelconque p de (S), β et $\alpha \leqq 1$ étant des nombres positifs ne dépendant pas de la position du point p sur (S), ρ et φ étant les coordonnées polaires ayant pour l'axe de z la normale n à (S) en p et pour pôle le point p.

Posons

$$L = \frac{\partial W_{1i}}{\partial n} = \frac{\partial W_{1e}}{\partial n}$$

et formons la suite des fonctions

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int L\frac{1}{r}\,ds, \qquad V_k = -\frac{1}{2\pi}\int \rho_{k-1}\frac{1}{r}\,ds,$$

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi}\int \rho_{k-1}\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds, \qquad \rho_k = \frac{\partial V_k}{\partial n}.$$

Soit ρ' une fonction quelconque vérifiant l'équation de M. Robin :

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\int \rho\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds. \tag{34}$$

Posons

$$C = -\frac{\int f\rho'\,ds}{\int \rho'\,ds}.$$

---

(1) M. Liapounoff a démontré récemment que cette dernière restriction n'a rien d'essentiel; il suffit que f soit continue sur (S). *Voir* A. Liapounoff, *Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet* (*Communications de la Société mathématique de Kharkow*, 2e série, t. VII).

Choisissons maintenant une autre fonction ρ, vérifiant la même équation (34) jointe à la condition

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{\rho}{r}\,ds = -C,$$

et formons le potentiel de la simple couche

$$V = \frac{1}{2\pi}\int(\rho + L + \rho_2 + \rho_4 + \ldots + \rho_{2k} + \ldots)\frac{1}{r}\,ds.$$

La fonction V *ainsi obtenue résout le problème de Gauss.*

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème IV. — *Si la surface* (S) *et la fonction donnée* f *satisfont aux conditions du théorème III, on peut trouver une fonction harmonique* V *se représentant sous la forme du potentiel de la simple couche*

$$V = \frac{1}{2\pi}\int(\rho + L + \rho_2 + \rho_4 + \ldots + \rho_{2k} + \ldots)\frac{1}{r}\,ds$$

et se réduisant à f *sur* (S).

Dans ce cas, les dérivées normales de la fonction V, harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de (S) et se réduisant à f sur (S), se représentent sous la forme des séries suivantes :

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = L - \rho_1 + \rho_2 - \ldots (-1)^k \rho_k + \ldots,$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = -2\rho - L - \rho_1 - \rho_2 - \ldots - \rho_k - \ldots.$$

17. Voici quelques conséquences du théorème énoncé.

Théorème V. — *La fonction de Green, que nous désignerons par* G, *existe pour toute surface* (S) *satisfaisant aux conditions* 1°, 2° *et* 3° (*pour* $\alpha = 1$), *et admet les dérivées normales régulières sur* (S).

Théorème VI. — *La solution du problème de Dirichlet peut être présentée sous la forme suivante :*

$$V = \int f\frac{\partial G}{\partial n}\,ds \text{ (1)}$$

(1) $\frac{\partial G}{\partial n}$ représente la dérivée de G suivant la normale intérieure à (S) dans le cas du *problème intérieur* et la dérivée de G suivant la normale extérieure à (S), quand il s'agit du *problème extérieur de Dirichlet*.

pour toute surface (S) *ayant les propriétés énoncées dans le théorème précédent, si la fonction f est continue sur* (S).

La démonstration découle de la formule connue de Green ([1]).

18. Remarquons enfin que le théorème fondamental de M. H. Poincaré découle presque immédiatement du théorème du n° 4.

En l'appliquant au cas de $k = 1$, on trouve

$$\frac{W_2}{W_1} < \frac{J_2 + J'_2}{J_1 + J'_1} < \mu < 1.$$

Nous supposons, sans doute, que la fonction f, dans l'expression

$$V = -\frac{1}{2\pi}\int f\frac{1}{r}\,ds,$$

satisfait à la condition (33).

Or, en vertu de (7),

$$J_{1,2} + J'_{1,2} = J'_1 - J_1,$$

d'où

$$(J'_1 - J_1)^2 < (J_1 + J'_1)(J_2 + J'_2).$$

Par conséquent,

$$\frac{W_2}{W_1} > \left(\frac{J'_1 - J_1}{J'_1 + J_1}\right)^2 = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2,$$

où l'on a posé

$$k = \frac{J'_1}{J_1} > 0.$$

On a donc

$$\frac{|k-1|}{k+1} < \sqrt{\mu}$$

ou

$$k = \frac{J'_1}{J_1} < \frac{1+\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}} = m.$$

Nous trouverons de même

$$\frac{J_1}{J'_1} < m.$$

([1]) *Voir* A. LIAPOUNOFF, *Sur certaines questions, etc.* (*Journal de Mathématiques*, n° 3, 1898, p. 308).

Le théorème suivant est donc démontré :

Théorème. — *Si la densité f d'un potentiel V de la simple couche satisfait à la condition*

$$\int f\,ds = 0,$$

le rapport

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau'}$$

a une limite supérieure $\frac{1+\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}}$ *finie et une limite inférieure* $\frac{1-\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}}$ *différente de zéro, ne dépendant que de* (S), *pourvu que la surface* (S) *satisfasse aux conditions* 1°, 2° *et* 3° (*pour* $\alpha = 1$) *du n°* 1.

C'est le théorème de M. H. Poincaré que j'ai appelé autrefois *théorème fondamental* (*voir* mon Mémoire *Les méthodes générales, etc.*, p. 224).

CHAPITRE II.

PROBLÈMES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DE LA CHALEUR ET DE L'ACOUSTIQUE.

I. — Problème des températures stationnaires.

1. Appliquons maintenant les résultats du Chapitre précédent à la solution de divers problèmes de la Physique mathématique qui se rattachent au problème hydrodynamique (problème de Neumann).

Considérons d'abord le problème fondamental de la théorie analytique de la chaleur, problème des températures stationnaires qui s'énonce comme il suit :

Trouver une fonction φ des coordonnées rectangulaires x, y, z, continue avec ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de la surface *donnée* (S) *et satisfaisant aux conditions*

$$\Delta v + \varphi = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + hv = 0 \quad \text{sur (S)}, \tag{2}$$

φ étant une fonction donnée continue et admettant les dérivées premières à l'intérieur de (S), *h étant une constante positive différente de zéro.*

2. Supposons que (S) satisfasse aux conditions 1°, 2° et 3° du n° 1 du Chapitre précédent et considérons le cas particulier de $\alpha = 1$.

Il ne peut exister qu'une seule fonction v, définie par les conditions (1) et (2), ce qui résulte immédiatement de la proposition évidente qu'il ne peut pas exister une fonction U différente de zéro et satisfaisant à la fois aux conditions suivantes :

$$\Delta U = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$
$$\frac{\partial U_i}{\partial n} + hU = 0 \quad \text{sur (S)} \ (h > 0).$$

Supposons d'abord que φ satisfait à l'égalité

$$\int \varphi \, d\tau = 0. \tag{3}$$

Proposons-nous de déterminer v par la série suivante :

$$v = v_0 + hv_1 + h^2 v_2 + \ldots + h^k v_k + \ldots,$$

$v_k (k = 0, 1, 2, \ldots)$ étant des fonctions de x, y, z.

On trouve, en tenant compte de (1) et (2), les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta v_0 + \varphi = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)}, \\ &\frac{\partial v_{0i}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S)}; \end{aligned} \right. \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta v_k = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)} \\ &\frac{\partial v_{ki}}{\partial n} + v_{k-1} = 0 \quad \text{sur (S)} \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5}$$

La méthode de Robin permet de calculer successivement v_0, v_1, v_2, ...

Posons, en effet,

$$v_0 = v'_0 + u, \qquad v'_0 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi}{r}\, d\tau.$$

On trouve

$$\Delta u = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = -\frac{\partial v'_{0i}}{\partial n} = f \quad \text{sur (S)}.$$

C'est le problème hydrodynamique qui est possible, car

$$\int \frac{\partial v'_{0i}}{\partial n}\, ds = 0,$$

en vertu de (3).

La méthode de Robin nous donnera u sous la forme du potentiel de la simple couche

$$u = \frac{1}{2\pi}\int (f + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s + \ldots)\frac{1}{r}\, ds.$$

Nous trouverons ensuite v_0 en posant

$$v_0 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi}{r}\, d\tau + u + C_0,$$

C_0 étant une constante arbitraire.

En choisissant C_0 de telle sorte que

$$\int v_0\, ds = 0,$$

nous pourrons déterminer v_1.

Nous trouverons

$$v_1 = \frac{1}{2\pi}\int (-v_0 + \rho_1^{(0)} + \rho_2^{(0)} + \ldots + \rho_s^{(0)} + \ldots)\frac{1}{r}\, ds + C_1,$$

C_1 étant une autre constante arbitraire, $\rho_s^{(0)}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ étant des fonctions définies successivement par les relations (5) du Chapitre précédent, si l'on y fait

$$f = -v_0.$$

En choisissant C_1 de façon que l'on ait

$$\int v_1\, ds = 0,$$

nous pourrons déterminer v_2, et ainsi de suite.

Nous aurons, en général,

$$v'_{k+1} = \frac{1}{2\pi}\int\left(-v_k + \rho_1^{(k)} + \rho_2^{(k)} + \ldots + \rho_s^{(k)} + \ldots\right)\frac{1}{r}\,ds,$$
$$v_{k+1} = v'_{k+1} + C_{k+1},$$

C_{k+1} étant une constante, définie par l'équation

$$\int(v_{k+1} + C_{k+1})\,ds = 0.$$

3. Cette équation nous donne

$$|C_{k+1}| < (v'_{k+1}),$$

(v'_{k+1}) étant le maximum de $|v'_{k+1}|$ sur (S).

On a donc

$$(6)\qquad |v_{k+1}| < 2(v'_{k+1}).$$

Désignons par $\mu_k^{(0)}$ le maximum de module de

$$\mu'_k = -v_k + \rho_1^{(k)} + \rho_2^{(k)} + \ldots + \rho_s^{(k)} + \ldots \quad \text{sur (S)}.$$

Il est évident que

$$(7)\qquad |v'_{k+1}| < N\mu_k^0,$$

N étant un nombre positif ne dépendant que de (S).

4. Rappelons de nouveau quelques résultats, établis dans mon Mémoire *Les méthodes générales, etc.*, en employant les notations y adoptées sans les expliquer de nouveau.

Comme v_k satisfait à la condition

$$\int v_k\,ds = 0,$$

on a (Mémoire cité, p. 239)

$$(8)\qquad |\rho_s^{(k)}| < k\sigma^s \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

k étant un nombre fini et positif, à savoir

$$k = \frac{\sigma}{1-\sigma}[(A + A_1)L_1 + n] = \frac{N\sigma}{1-\sigma},$$

où A, A_1 sont des nombres ne dépendant que de (S).

On voit donc que *la série μ'_k converge absolument et uniformément sur* (S).

Désignons par M_k le maximum de $|v_k|$ sur (S).

On peut poser (Mémoire cité, p. 238)

$$L_1 = \left(M_k + \frac{n}{m}\right)\alpha, \qquad m = A + A_1,$$

α étant une constante positive ne dépendant que de (S),

$$n = \frac{2k_1 C}{\sigma^2 c(1-\sigma^5)}. \tag{9}$$

Dans cette expression, k_1 et c sont des nombres fixes ne dépendant pas de M_k, $C\sigma^3$ représente la limite supérieure de l'expression (Mémoire cité, p. 233 et 234)

$$\sigma^{k+1}\left[\sqrt{P + (k-1)Q\log\frac{N}{\mu}} + T\right], \tag{10}$$

où les nombres N et μ ne dépendent pas de M_k.

Quant à T, P et Q, on peut les présenter sous la forme suivante :

$$T = bM_k, \qquad P = B_1 P_1, \qquad Q = B_1 Q_1,$$

où b, P_1, Q_1 ne dépendent que de (S),

$$B_1 = l\lambda(J_1 + J'_1) = -2l\lambda\int V_1 v_k\, ds.$$

Cette égalité donne

$$B_1 < 4l^2 S\lambda M_k^2 = q' M_k^2,$$

q' étant un nombre ne dépendant pas de M_k.

On peut donc poser

$$P = P' M_k^2, \qquad Q = Q' M_k^2,$$

en désignant par P' et Q' les expressions $P_1 q'$, $Q_1 q'$.

L'expression (10) se représentera sous la forme suivante :

$$M_k \sigma^{k-1}\left[\sqrt{P' + (k-1)Q'\log\frac{N}{\mu}} + b\right],$$

où ni σ, ni l'expression entre crochets ne dépendent de M_k.

Il en résulte que l'on peut poser

$$C = g_1 M_k,$$

g_1 étant un nombre ne dépendant que de (S).

On a donc, eu égard à (9),

$$n = g M_k,$$

g étant une constante de la même nature que g_1.

Par conséquent,

$$L_1 = h M_k$$

et

$$k = q M_k,$$

q étant un nombre ne dépendant pas de M_k.

On peut remplacer l'inégalité (8) par la suivante :

$$(11) \qquad |\rho_s^k| < q M_k \sigma^\lambda,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\mu_k^n < Q_1 M_k,$$

Q_1 étant un nombre de la même nature que q.

5. Revenons maintenant à l'inégalité (7).

On trouve, en tenant compte de l'inégalité précédente,

$$|v'_{k+1}| < N M_k,$$

N étant un nombre positif ne dépendant pas de M_k, et puis, en vertu de (6),

$$(12) \qquad |v_{k+1}| < Q M_k,$$

où Q est un nombre de la même nature que N.

Cette inégalité nous apprend que *la série*

$$(13) \qquad v_0 + h v_1 + h^2 v_2 + \ldots + h^k v_k + \ldots$$

converge absolument et uniformément sur (S), *pourvu que*

$$(14) \qquad h < \frac{1}{Q}.$$

Soit ρ la densité d'une couche superficielle, répandue sur (S), en équilibre sur (S).

Choisissons ρ de façon que l'on ait

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{\rho}{r}\,ds = 1 \quad \text{sur (S)}.$$

On peut écrire

$$(15) \qquad v_{k+1} = \frac{1}{2\pi}\int(\mu'_k + C_k\rho)\frac{1}{r}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu_k}{r}\,ds,$$

où l'on a posé

$$\mu_k = \mu'_k + C_k\rho.$$

Il est aisé de voir, en tenant compte de (11), que

$$(16) \qquad |\mu_k| < QM_k,$$

Q étant un nombre ne dépendant que de (S).

Cette inégalité montre que *la série*

$$(17) \qquad \mu = \mu_0 + h\mu_1 + h^2\mu_2 + \ldots + h^k\mu_k + \ldots$$

converge absolument et uniformément sur (S) *pour les mêmes valeurs de* h *que la série* (13).

6. Il résulte de ce que nous avons dit que la série

$$(18) \qquad V = v_1 + hv_2 + \ldots + h^k v_{k+1} + \ldots$$

représente une fonction harmonique à l'intérieur de (S).

Mais cela ne nous suffit pas; il faut encore s'assurer que V *se représente sous la forme du potentiel de la simple couche.*

On peut écrire, en effet,

$$\int\frac{\mu}{r}\,ds = \int\frac{\mu_0}{r}\,ds + h\int\frac{\mu_1}{r}\,ds + \ldots + h^k\int\frac{\mu_k}{r}\,ds + \ldots,$$

car la série (17) converge uniformément sur (S).

On trouve donc, en tenant compte de (15) et (18),

$$\int\frac{\mu}{r}\,ds = v_1 + hv_2 + \ldots + h^k v_{k+1} + \ldots = V.$$

Cela nous suffit pour démontrer que la fonction v, définie par la série (13), satisfait aux conditions demandées (1) et (2).

On peut poser

$$v = v_0 + hV,$$

d'où l'on conclut immédiatement que

$$\Delta v + \varphi = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S).}$$

Il ne reste qu'à démontrer que v satisfait à la condition (2).

On a, d'après les propriétés connues du potentiel de la simple couche,

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu \cos\psi}{r^2}\,ds + \mu.$$

Or

$$\int \frac{\mu \cos\varphi}{r^2}\,ds = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \int \frac{\mu_k \cos\psi}{r^2}\,ds,$$

en vertu de la convergence uniforme de la série μ (17).

D'autre part, il est évident que

$$\frac{\partial v_{k+1,i}}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu_k \cos\psi}{r^2}\,ds + \mu_k = -v_k.$$

On a donc

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu \cos\psi}{r^2}\,ds = \mu_0 + v_0 + h(\mu_1 + v_1) + \ldots + h^k(\mu_k + v_k) + \ldots = S.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_i}{\partial n} = \mu - S &= [\mu_0 - (\mu_0 + v_0)] + h[\mu_1 - (\mu_1 + v_1)] + \ldots + h^k[\mu_k - (\mu_k + v_k)] + \ldots \\ &= -[v_0 + hv_1 + \ldots + h^k v_k + \ldots] = -v,\end{aligned}$$

puisque les séries μ et S convergent sur (S).

En remarquant que

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = \frac{\partial v_{0i}}{\partial n} + h\frac{\partial V_i}{\partial n},$$

on trouve enfin

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + hv = 0 \quad \text{sur (S),}$$

pourvu que h satisfasse à l'inégalité (14). C. Q. F. D.

7. On peut, de la même manière, résoudre le problème un peu plus général :

Trouver une fonction v, définie par les conditions

$$\Delta v + \varphi = 0 \quad \textit{à l'intérieur de } (S), \tag{19}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + hv + f = 0 \quad \textit{sur } (S), \tag{20}$$

f étant une fonction donnée, continue sur (S).

Posons

$$v = v_0 + hv_1 + h^2 v_2 + \ldots + h^k v_k + \ldots.$$

Nous obtiendrons, comme précédemment,

$$\Delta v_0 + \varphi = 0 \quad \text{à l'intérieur de } (S),$$

$$\frac{\partial v_{0i}}{\partial n} + f = 0 \quad \text{sur } (S),$$

et les équations (5) du n° 2 pour déterminer toutes les autres fonctions v_k, à partir de v_1.

La définition de v_0 se ramène évidemment au problème hydrodynamique.

Il suffit de poser

$$v_0 = U + v'_0 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi}{r}\, ds + v'_0.$$

Nous trouverons alors

$$\Delta v'_0 = 0 \quad \text{à l'intérieur de } (S),$$

$$\frac{\partial V'_{0i}}{\partial n} + f + \frac{\partial U_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } (S).$$

Le problème sera possible si nous supposons que

$$\int \varphi\, d\tau = \int f\, ds.$$

La méthode de Robin nous permettra de calculer v'_0 et, par conséquent, v_0, après quoi nous trouverons successivement tous les v_k ($k = 1, 2, \ldots$) par la même méthode que précédemment.

La série (13) représentera la fonction cherchée pour toutes les valeurs de h satisfaisant à l'inégalité (14).

8. Nous avons supposé que φ satisfait à la condition (3), mais cette dernière restriction n'a rien d'essentiel.

Soit φ une fonction quelconque. Posons

$$v = u + \frac{C}{h},$$

C étant une constante indéterminée.

Le problème du n° 1 se ramène au suivant :

Trouver une fonction u satisfaisant aux conditions

$$\Delta u + \varphi = 0 \quad \textit{à l'intérieur de } (S),$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + hu + C = 0 \quad \textit{sur } (S),$$

c'est-à-dire au problème du numéro précédent.

Le problème sera possible si nous posons

$$CS - \int \varphi \, d\tau = 0.$$

Nous trouverons, comme précédemment,

$$u = u_0 + hV,$$

u_0 étant une fonction satisfaisant aux conditions

$$\Delta u_0 + \varphi = 0 \quad \text{à l'intérieur de } (S),$$
$$\frac{\partial u_{0i}}{\partial n} + C = 0 \quad \text{sur } (S),$$

V étant un potentiel de la simple couche, qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} + hV + u_0 = 0 \quad \text{sur } (S).$$

La fonction

$$v = w_0 + hV,$$

où

$$w_0 = u_0 + \frac{C}{h} = u_0 + \frac{\int \varphi \, d\tau}{hS},$$

représentera la solution du problème.

9. Supposons, en particulier, que dans l'équation (19) du n° 7

$$\varphi = 0.$$

Posons

$$v = u + \frac{C}{h},$$

C étant une constante quelconque.

Le problème se ramène à déterminer la fonction u par les conditions

$$\Delta u = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + hu + f + C = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

Supposons que C satisfait à l'équation

$$CS + \int f\, ds = 0$$

et formons la série

$$u = u_0 + hu_1 + h^2 u_2 + \ldots + h^k u_k \ldots.$$

Nous aurons

$$\Delta u_0 = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$
$$\frac{\partial u_{0i}}{\partial n} + f + C = 0 \quad \text{sur (S)},$$

et les équations (5) pour déterminer tous les v_k à partir de $k = 1$.

La fonction cherchée se représentera sous la forme suivante :

$$v = u - \frac{\int f\, ds}{hS}.$$

10. Désignons par f_0 le maximum de $|f|$ sur (S) et posons

$$w_1 = v - \frac{f_0}{h}, \qquad w_2 = v + \frac{f_0}{h}.$$

Les équations (19) et (20), si l'on y fait $\varphi = 0$, donnent

$$\Delta w_1 = 0, \qquad \Delta w_2 = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$
$$\frac{\partial w_{1i}}{\partial n} + hw_1 + f_0 + f = 0, \qquad \frac{\partial w_{2i}}{\partial n} + hw_2 + f - f_0 = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

De ces équations on obtient aisément l'inégalité suivante :

$$(21) \qquad |v| \leqq \frac{f_0}{h},$$

en employant les raisonnements de M. Poincaré [*voir* son Mémoire

Sur les équations différentielles de la Physique mathématique (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1894, p. 99)].

Soit h_0 une valeur quelconque de h plus petit que $\frac{1}{Q}$.

Posons

$$h = h_0 + \eta$$

et cherchons, suivant la méthode de M. H. Poincaré [1], la fonction v assujettie aux conditions suivantes :

$$\Delta v + \varphi = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$
$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + (h_0 + \eta) v = 0 \quad \text{sur (S)},$$

sous la forme de la série

$$v = v_0 + \eta v_1 + \eta^2 v_2 + \ldots + \eta^k v_k + \ldots. \tag{22}$$

On obtient

$$\Delta v_0 + \varphi = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$
$$\frac{\partial V_{0i}}{\partial n} + h_0 v_0 = 0 \quad \text{sur (S)},$$
$$\Delta v_k = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$
$$\frac{\partial v_{ki}}{\partial n} + h_0 v_k + v_{k-1} = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

Nous pouvons déterminer successivement tous les $v_k (k = 0, 1, 2, \ldots)$ par les méthodes indiquées plus haut.

Désignons par N_k le maximum de $|v_k|$ sur (S). Nous aurons, en vertu de (21),

$$|v_k| < \frac{N_{k-1}}{h_0} < \frac{N_0}{h_0^k}.$$

Cette inégalité montre que la série (22) converge absolument et uniformément sur (S), pourvu que

$$\eta < h_0.$$

En raisonnant ensuite comme dans les nos 5-7, nous démontrerons que la fonction cherchée v se représentera sous la forme suivante :

$$v = w_0 + V',$$

---

(1) H. Poincaré, *Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1894, p. 121-123.

où w_0 est une fonction satisfaisant aux équations

$$\Delta w_0 + \varphi = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$
$$\frac{\partial w_{0i}}{\partial n} + C = 0 \quad \text{sur (S)}, \qquad C = \frac{\int \varphi \, d\tau}{S};$$

V′ est un potentiel de la simple couche, vérifiant l'équation

$$\frac{\partial V'_i}{\partial n} + (h_0 + \eta) V' + (h_0 + \eta) w_0 - C = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

Il en résulte qu'il existe une fonction v, vérifiant les équations (1) et (2), pour toutes les valeurs de h, plus petites que

$$\frac{2}{Q},$$

et ainsi de suite.

En continuant de la sorte nous résoudrons le problème du n° 1 quelle que soit la valeur positive du paramètre h.

11. Il est évident que la solution générale du problème du n° 1 de ce Chapitre, quelle que soit la fonction φ, continue à l'intérieur de (S) avec ses dérivées du premier ordre, et, quelle que soit la valeur positive du paramètre h, peut se représenter sous la forme suivante :

$$v = w_0 + hV,$$

où w_0 est une fonction satisfaisant aux conditions

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Delta w_0 + \varphi = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)}, \\ &\frac{\partial w_{0i}}{\partial n} + \frac{\int \varphi \, d\tau}{S} = 0 \quad \text{sur (S)}, \\ &\int w_0 \, ds = \int \varphi \, d\tau; \end{aligned} \right.$$

V est un potentiel de la simple couche, assujetti à la condition

$$(24) \qquad \frac{\partial V_i}{\partial n} + hV + u_0 = 0 \quad \text{sur (S)},$$

où l'on a posé

$$u_0 = w_0 - \frac{\int \varphi \, d\tau}{hS}.$$

En tenant compte de l'inégalité (21), on trouve

$$|hV| < (u_0), \tag{25}$$

(u_0) étant le maximum de $|u_0|$ sur (S).

Or,

$$(u_0) < K(\varphi),$$

K étant un nombre fixe ne dépendant que de (S), (φ) étant le maximum de φ dans le domaine (D), limité par (S).

On a donc

$$|hV| < K(\varphi). \tag{26}$$

Désignons par μ la densité du potentiel V, en posant

$$V = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu}{r}\,ds.$$

On s'assurera aisément que

$$|\mu| < Q(\varphi), \tag{27}$$

Q étant un nombre positif ne dépendant que de (S) et de h.

Les inégalités (25), (26) et (27) nous seront nécessaires pour ce qui va suivre.

En résumant les recherches précédentes, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Il existe une fonction v, satisfaisant aux conditions*

$$\Delta v + \varphi = 0 \quad \textit{à l'intérieur de } (S),$$
$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + hv = 0 \quad \textit{sur } (S),$$

où φ est une fonction quelconque, continue et admettant les dérivées du premier ordre à l'intérieur de (S) *(h est une constante quelconque positive) si la surface* (S) *satisfait aux conditions* 1°, 2° *et* 3° *(pour $\alpha = 1$) du n°* I *du Chapitre précédent.*

La fonction v se représente sous la forme suivante :

$$v = w_0 + hV,$$

où

$$w_0 = u_0 + \frac{\int \varphi\, d\tau}{h S},$$

u_0 *étant une fonction, définie par les conditions*

$$\Delta u_0 + \varphi = 0 \quad \textit{à l'intérieur de } (S),$$

$$\frac{\partial u_{0i}}{\partial n} + \frac{\int \varphi\, d\tau}{S} = 0 \quad \textit{sur } (S),$$

$$\int u_0\, ds = 0;$$

V *est un potentiel de la simple couche à densité* μ.

Les modules de V *et de* μ *satisfont aux inégalités*

$$|hV| < (u_0) < K(\varphi),$$
$$|\mu| < Q(\varphi),$$

(u_0) *et* (φ) *étant les valeurs maximales des modules de* u_0 *sur* (S) *et de* φ *dans le domaine* (D), K *et* Q *étant des nombres positifs ne dépendant pas de* (φ).

Le problème des températures stationnaires est donc résolu complètement.

II. — Problème de refroidissement d'un corps solide homogène.

12. Désignons par U la température du corps, limité par la surface (S).

On aura

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K \Delta U,$$

K étant le coefficient de conductibilité; et la condition

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} + hU = 0 \quad \text{sur } (S),$$

h étant une constante positive, proportionnelle au pouvoir émissif.

U est une fonction de t, x, y et z qui doit se réduire à une fonction donnée f pour $t = 0$

$$U_{t=0} = f \quad \text{à l'intérieur de (S).}$$

Posons

$$U = AVe^{-kt},$$

A étant une constante arbitraire, V étant une fonction ne dépendant que de x, y, z; k étant un nombre positif.

Il viendra

$$\Delta V + \frac{k}{K} V = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S),}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} + hV = 0 \quad \text{sur (S).}$$

Supposons qu'il existe une infinité de nombres positifs

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n, \quad \ldots$$

et de fonctions correspondantes

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_n, \quad \ldots,$$

vérifiant les équations

$$\Delta V_n + k_n V_n = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{28}$$

jointes aux conditions

$$\frac{\partial V_{ni}}{\partial n} + hV_n = 0 \quad \text{sur (S)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{29}$$

La série

$$U = \sum A_n V_n e^{Kk_n},$$

A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ étant des constantes arbitraires, représentera la solution du problème, si nous choisissons les constantes A_n de façon que l'on ait

$$\sum A_n V_n = f \quad \text{à l'intérieur de (S).}$$

C'est la méthode connue de Fourier.

Pour résoudre le problème, il est nécessaire d'abord de démontrer l'existence des fonctions $V_n (n = 1, 2, \ldots)$, satisfaisant aux conditions (28), (29), et puis la possibilité du développement d'une fonction donnée en série procédant suivant les fonctions V_k.

Nous traiterons ces deux problèmes importants dans les numéros suivants.

13. Proposons-nous de déterminer une fonction v satisfaisant aux conditions

$$\Delta v + kv + f = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + hv = 0 \quad \text{sur (S)}, \tag{31}$$

en entendant par f une fonction de x, y, z, continue et admettant les dérivées du premier ordre à l'intérieur de (S), par k un paramètre positif.

Cherchons v sous la forme de la série

$$v = v_0 + kv_1 + k^2 v_2 + \ldots + k^n v_n + \ldots. \tag{32}$$

Nous trouverons les équations suivantes :

$$\Delta v_0 + f = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$

$$\frac{\partial v_{0i}}{\partial n} + hv_0 = 0 \quad \text{sur (S)},$$

$$\Delta v_n + v_{n-1} = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + hv_n = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

La détermination de $v_k (k = 0, 1, 2, \ldots)$ est précisément le problème qui a été traité dans les numéros précédents.

En s'appuyant sur le théorème du n° 11, on trouve

$$v_n = w'_n + hV_n, \qquad w'_n = u'_n + \frac{C_n}{h}, \tag{33}$$

$$\Delta u'_n + v_{n-1} = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$

$$\frac{\partial u'_{ni}}{\partial n} + C_n = 0 \quad \text{sur (S)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{34}$$

$$\int u'_n \, ds = 0, \tag{35}$$

où l'on a posé

$$C_n = \frac{\int \varphi_{n-1}\, d\tau}{S} \quad (36)$$

([1]).

Quant à V_n, c'est un potentiel de la simple couche satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial V_{ni}}{\partial n} = -hV_n - w'_n + \frac{C_n}{h} = -\varphi_n + \frac{C_n}{h}. \quad (37)$$

14. Considérons les séries suivantes :

$$S = w'_0 + kw'_1 + \ldots + k^n w'_n + \ldots,$$
$$T = V_0 + kV_1 + \ldots + k^n V_n + \ldots.$$

La série (32) converge en même temps que S et T.

Il ne reste qu'à déterminer les conditions de convergence absolue et uniforme de ces dernières séries.

Commençons par l'étude de la série T.

Elle convergera absolument et uniformément dans le domaine (D), limité par (S), s'il en est de même de la série

$$(u'_0) + k(u'_1) + k^2(u'_2) + \ldots + k^n(u'_n) + \ldots,$$

ce qui résulte immédiatement de l'inégalité

$$|hV_n| < (u'_n)$$

[*voir* l'inégalité (24)].

Posons

$$u'_n = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi_{n-1}}{r}\, d\tau + u''_n + A_n = U_n + u''_n + A_n, \quad (38)$$

A_n étant une constante que nous choisirons de sorte que

$$\int (U_n + u''_n + A_n)\, ds = 0, \quad (39)$$

pour que la condition (35) soit satisfaite.

---

(1) Nous supposons que

$$\varphi_{-1} = f.$$

Les équations (34) donnent

$$\Delta u''_n = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S).}$$

$$(40) \qquad \frac{\partial u''_{ni}}{\partial n} + \frac{\partial U_{ni}}{\partial n} + C_n = 0 \quad \text{sur (S).}$$

La méthode de Robin nous donne u''_n sous la forme du potentiel de la simple couche

$$(41) \qquad u''_n = \frac{1}{2\pi}\int\left[-\left(\frac{\partial U_{ni}}{\partial n} + C_n\right) + \rho_1^{(n)} + \rho_2^{(n)} + \ldots + \rho_s^{(n)} + \ldots\right]\frac{1}{r}\,ds,$$

$\rho_s^{(n)}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ étant des fonctions définies par les relations (5) du Chapitre I, si l'on y fait

$$f = -\left(\frac{\partial U_{ni}}{\partial n} + C_n\right).$$

De l'équation (39) on tire

$$|A_n| < (u''_n) + (U_n),$$

ou

$$|A_n| < (u''_n) + K\sqrt{\int v_{n-1}^2\,d\tau},$$

puisque

$$(42) \qquad (U_n) < K\sqrt{\int v_{n-1}^2\,d\tau},$$

K étant un nombre ne dépendant que de (S).

On trouve alors, en tenant compte de (38),

$$(43) \qquad |u'_n| < 2\left[(u''_n) + K\sqrt{\int v_{n-1}^2\,d\tau}\right].$$

15. Cela posé, considérons la fonction

$$(44) \qquad w'_n = U_n + u''_n.$$

C'est une fonction harmonique à l'extérieur de (S), s'annulant à l'infini.

En appliquant la formule connue de Green, on trouve

$$w'_n = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{w'_n\cos\varphi}{r^2}\,ds - \frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial w'_{ne}}{\partial n}\,\frac{1}{r}\,ds \quad \text{à l'extérieur de (S).}$$

Or, en vertu de (40),

$$\frac{\partial w'_{ne}}{\partial n} = \frac{\partial U_{ne}}{\partial n} + \frac{\partial u''_{ne}}{\partial n} = \frac{\partial U_{ni}}{\partial n} + \frac{\partial u''_{ne}}{\partial n} = -C_n - \left(\frac{\partial u''_{ni}}{\partial n} - \frac{\partial u''_{ne}}{\partial n}\right),$$

car les dérivées du premier ordre du potentiel newtonien U_n restent continues dans l'espace tout entier.

En remarquant que u''_n est une fonction harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de (S), continue dans l'espace tout entier, on trouve

$$u''_n = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial u''_{ni}}{\partial n} - \frac{\partial u''_{ne}}{\partial n}\right)\frac{1}{r}\,ds.$$

Il en résulte que

$$w'_n = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{w'_n\cos\varphi}{r^2}\,ds + \frac{C_n}{4\pi}\int\frac{1}{r}\,ds + u''_n \quad \text{à l'extérieur de (S)},$$

c'est-à-dire, en vertu de (44),

$$U_n = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{w'_n\cos\varphi}{r^2}\,ds + \frac{C_n}{4\pi}\int\frac{1}{r}\,ds \quad \text{à l'extérieur de (S)}.$$

Supposons que le point x, y, z tend vers un point de (S) et passons à la limite.

Il viendra, après un calcul simple,

$$u''_n = U_n + \frac{1}{2\pi}\int\frac{U_n\cos\varphi}{r^2}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int\frac{u''_n\cos\varphi}{r^2}\,ds - \frac{C_n}{2\pi}\int\frac{1}{r}\,ds \quad \text{sur (S)}.$$

Il s'ensuit que

$$|u''_n| < \frac{1}{2\pi}\int\frac{|u''_n\cos\varphi|}{r^2}\,ds + K\sqrt{\int v_{n-1}^2\,d\tau},$$

K étant un nombre ne dépendant que de (S).

D'autre part, nous avons déjà trouvé (*voir* n° 6 du Chapitre I)

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{|u''_n\cos\varphi|}{r^2}\,ds < A\sqrt{\int u''^2_n\,ds} + BR(u''_n).$$

On a donc

$$(u''_n) < N\sqrt{\int u''^2_n\,ds} + M\sqrt{\int v_{n-1}^2\,d\tau}, \tag{45}$$

où N et M sont des nombres ne dépendant que de (S).

16. Appliquons maintenant le lemme fondamental, mentionné plus haut (*voir* n° 5 du Chapitre I), à la fonction harmonique u''_n.

On aura

$$\int u_n''^2\,ds < l\left[\int\sum\left(\frac{\partial u_n''}{\partial x}\right)^2 d\tau + \int\sum\left(\frac{\partial u_n''}{\partial x}\right)^2 d\tau'\right].$$

Or u_n'' est un potentiel de la simple couche de masse totale nulle.

On a donc, d'après le théorème fondamental du n° 18 du Chapitre précédent,

$$\int\sum\left(\frac{\partial u_n''}{\partial x}\right)^2 d\tau' < \frac{1+\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}}\int\sum\left(\frac{\partial u_n''}{\partial x}\right)^2 d\tau.$$

Par conséquent,

$$\int u_n''^2\,ds < Q\int\left(\frac{\partial u_{ni}''}{\partial n}\right)^2 ds,$$

Q étant un nombre ne dépendant que de (S).

D'autre part, il est aisé de constater, en tenant compte de (40), que

$$\left(\frac{\partial u_{ni}''}{\partial n}\right)^2 < K\int \varphi_{n-1}^2\,d\tau + L\int\frac{\varphi_{n-1}^2\,|\cos\varphi|}{r^2}\,d\tau,$$

K et L étant des nombres de la même nature que Q.

Cette inégalité nous apprend que

$$\int\left(\frac{\partial u_{ni}''}{\partial n}\right)^2 ds < M\int\varphi_{n-1}^2\,d\tau,$$

c'est-à-dire

$$\int u_n''^2\,ds < N\int\varphi_{n-1}^2\,d\tau.$$

En comparant cette inégalité aux inégalités (43) et (45), on trouve

$$(u_n') < Q\sqrt{\int\varphi_{n-1}^2\,d\tau},$$

Q étant un nombre positif ne dépendant que de (S).

17. Cette inégalité montre que le rayon de convergence absolue et uniforme de la série T est au moins égal à

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sqrt{W_n}}{\sqrt{W_{n+1}}},$$

où l'on a posé

$$W_n = \int v_n^2 \, d\tau.$$

Il est presque évident qu'il en est de même du rayon de convergence de la série S et, par suite, de celui de la série (32).

On a donc

$$\rho \geqq \lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{W_n}}{\sqrt{W_{n+1}}}, \tag{46}$$

ρ étant le rayon de convergence *absolue et uniforme* de la série (32).

18. Cela posé, considérons la série

$$|v_0| + k^2 |v_2| + \ldots + k^{2n} |v_{2n}| + \ldots.$$

Il est évident que ρ ne peut pas surpasser le rayon de convergence de cette dernière série et, à plus forte raison, celui de la série

$$v_0 + k^2 v_2 + \ldots + k^{2n} v_{2n} + \ldots. \tag{47}$$

Posons maintenant

$$W_{m,n} = \int v_n v_m \, d\tau.$$

On sait que

$$W_{m,n} = W_{m+s,\, n-s},$$

s étant un nombre entier quelconque plus petit que n.

On a donc

$$W_{2k,0} = \int v_k^2 \, d\tau = W_k, \tag{48}$$

si l'on pose

$$m = 0, \qquad n = 2k, \qquad s = k.$$

Multiplions la série (47) par $v_0 \, d\tau$ et intégrons, en étendant l'intégration au domaine (D) tout entier; il viendra, en vertu de (48),

$$W_0 + k^2 W_1 + \ldots + k^{2n} W_n + \ldots.$$

Le rayon de convergence de cette série est au plus égal à

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{W_n}}{\sqrt{W_{n+1}}}.$$

Il en est de même de ρ.

On a donc

$$\rho \leqq \lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{W_n}}{\sqrt{W_{n+1}}}.$$

Cette inégalité et l'inégalité (46) démontrent le théorème suivant :

Théorème. — *La fonction v satisfaisant aux conditions* (30) *et* (31), *considérée comme fonction du paramètre k, se développe en série procédant suivant les puissances entières de k, pourvu que*

$$k < \lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{W_n}}{\sqrt{W_{n+1}}}. \tag{49}$$

19. Je dis maintenant que la série (32) satisfait aux conditions (30) et (31).

On peut écrire

$$v = S + hT,$$

d'où

$$\Delta v = \Delta S,$$

puisque T est harmonique à l'intérieur de (S), ce qui résulte immédiatement des recherches précédentes. Posons

$$w''_n = u''_n + A_n + \frac{C_n}{h}. \tag{50}$$

Nous aurons

$$v_n = U_n + w''_n.$$

Considérons les séries

$$S_1 = U_0 + kU_1 + k^2 U_2 + \ldots + k^n U_n + \ldots,$$
$$S_2 = w''_0 + kw''_1 + k^2 w''_2 + \ldots + k^n w''_n + \ldots.$$

Les recherches précédentes montrent qu'on peut poser

$$S = S_1 + S_2$$

et que la série S_2 converge absolument et uniformément dans (D), pourvu que k satisfasse à l'inégalité (48).

Il s'ensuit que S_2 est harmonique à l'intérieur de (S).

On a donc

$$\Delta S = \Delta S_1.$$

Formons maintenant les séries suivantes :

$$(51)\quad \frac{\partial U_0}{\partial x}+k\frac{\partial U_1}{\partial x}+\ldots+k^n\frac{\partial U_n}{\partial x}+\ldots \quad \text{(etc., par rapport à } y, z\text{)},$$

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}+k\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\ldots+k^n\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2}+\ldots \quad \text{(etc., par rapport à } y, z\text{)}.$$

Il est évident que ces séries convergent dans (D) en même temps que la série (32).

Il en résulte que

$$\Delta S_1 = \Delta U_0 + k\Delta U_1 + \ldots + k^n \Delta U_n + \ldots = -f - kv,$$

d'où

$$\Delta v + kv + f = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$

puisque

$$\Delta S_1 = \Delta v.$$

20. Démontrons enfin que la fonction v satisfait à la condition (30). Les équations (41) et (50) donnent

$$w''_n = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\sigma_n}{r}\,ds,$$

où l'on a posé

$$\sigma_n = (A_n + C_n)\rho - \left(\frac{\partial U_{ni}}{\partial n} + C_n\right) + \rho_1^{(n)} + \rho_2^{(n)} + \ldots + \rho_s^{(n)} + \ldots,$$

ρ étant la densité d'une couche électrique en équilibre sur (S) (n° 5).

Il est aisé de voir que [*voir* l'inégalité (27) du n° 11]

$$|\sigma_n| < Q(v_{n-1}),$$

Q étant un nombre ne dépendant que de (S).

Il en résulte que la série

$$(52)\quad \sigma = \sigma_0 + k\sigma_1 + \ldots + k^n\sigma_n + \ldots$$

converge absolument et uniformément sur (S), pourvu que k satisfasse à l'inégalité (49).

On peut écrire, par conséquent,

$$S_2 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\sigma}{r}\,ds,$$

d'où l'on tire, en tenant compte de la convergence uniforme de la série (52),

$$\frac{\partial S_{2i}}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\sigma \cos\psi}{r^2}\,ds + \sigma = \sum k^n \frac{\partial w''_{ni}}{\partial n} = -\sum k^n \left(C_n + \frac{\partial U_{ni}}{\partial n}\right),$$

puisque, en vertu de (50) et (40),

$$\frac{\partial w''_{ni}}{\partial n} = \frac{\partial u''_{ni}}{\partial n} = -\left(C_n + \frac{\partial U_{ni}}{\partial n}\right) \quad \text{sur (S).}$$

D'autre part, il est évident que la fonction S_1 admet la dérivée normale $\frac{\partial S_{1i}}{\partial n}$ sur (S), qui se représentera sous la forme de la série

$$\frac{\partial S_{1i}}{\partial n} = \sum k^n \frac{\partial U_{ni}}{\partial n},$$

ce qui découle immédiatement de la convergence uniforme des séries (51) sur (S).

On a donc

$$(53) \qquad \frac{\partial S_i}{\partial n} = \frac{\partial S_{1i}}{\partial n} + \frac{\partial S_{2i}}{\partial n} = -\sum k^n C_n \quad \text{sur (S).}$$

Considérons maintenant la fonction

$$T = V_0 + kV_1 + k^2V_2 + \ldots + k^nV_n + \ldots.$$

On sait que (n° 7)

$$V_n = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu_n}{r}\,ds,$$

μ_n étant une fonction satisfaisant à l'inégalité

$$|\mu_k| < Q(\rho_{n-1})$$

[*voir* n° 11, l'inégalité (26)].

On en conclut que la série

$$\mu = \mu_0 + k\mu_1 + \ldots + k^n\mu_n + \ldots$$

converge absolument et uniformément sur (S) pour les mêmes valeurs de k que la série (32).

On peut donc écrire

$$T = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu}{r}\,ds,$$

d'où

$$\frac{\partial T_i}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu \cos\psi}{r^2}\,ds + \mu$$

et, comme précédemment,

$$\frac{\partial T_i}{\partial n} = \sum k^n \frac{\partial V_{ni}}{\partial n}.$$

De cette égalité on tire, en s'appuyant sur (37),

$$h\frac{\partial T_i}{\partial n} = \sum k^n (C_n - hv_n) = \sum k^n C_n - hv$$

et finalement, en tenant compte de (53),

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = \frac{\partial S_i}{\partial n} + h\frac{\partial T_i}{\partial n} = -hv \quad \text{sur (S).}$$

C. Q. F. D.

21. Cela nous suffit pour établir en toute rigueur, en employant la méthode de M. H. Poincaré (*Rendiconti di Palermo*, 1894), le théorème suivant :

Théorème. — *Il existe, pour toute surface* (S) *satisfaisant aux conditions* 1°, 2° *et* 3° *du n°* 2 *de ce Chapitre, une fonction* v, *bien déterminée, vérifiant l'équation*

$$\Delta v + kv + f = 0 \quad \textit{à l'intérieur de } (S),$$

jointe à la condition

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + hv = 0 \quad \textit{sur } (S),$$

où k *est un paramètre positif,* f *est une fonction donnée, continue et admettant les dérivées du premier ordre à l'intérieur de* (S), *quelle que soit la constante positive* h.

Cette fonction v, *considérée comme fonction du paramètre* k, *se représente sous la forme de la série*

$$v = v_0 + kv_1 + k^2 v_2 + \ldots + k^n v_n + \ldots$$

qui converge absolument et uniformément dans le domaine (D), *limité* *par* (S), *pourvu que*

$$k < \lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{\int v_n^2 \, d\tau}}{\sqrt{\int v_{n+1}^2 \, d\tau}}.$$

En général, v est une fonction méromorphe en k, n'ayant que des pôles simples, réels et positifs, se trouvant tous parmi les nombres réels et positifs, ne dépendant que de la surface (S),

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \ldots, \quad k_n, \quad \ldots,$$

indéfiniment croissants avec l'indice n, de sorte que

$$k_n > A n^{\frac{2}{3}},$$

A *étant un nombre fixe.*

De ce théorème on déduira aussi le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute surface* (S) *satisfaisant aux conditions du théorème précédent donne lieu à une infinité de nombres positifs*

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \ldots, \quad k_n, \quad \ldots$$

ne dépendant que de (S) *et de fonctions correspondantes bien déterminées*

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots, \quad V_n, \quad \ldots$$

vérifiant les équations

$$\Delta V_n + k_n V_n = 0 \quad \textit{à l'intérieur de } (S) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

jointes aux conditions

$$\frac{dV_{ni}}{dn} + h V_n = 0 \quad \textit{sur } (S) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

quelle que soit la constante positive h.

22. Ces théorèmes ont été énoncés pour la première fois par M. H. Poincaré dans son Mémoire déjà cité *Sur les équations de la Physique mathématique* (¹).

(¹) H. POINCARÉ, *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti di Palermo*, 1894).

M. S. Zaremba, en 1899, a démontré les théorèmes dont il s'agit, par une méthode différente de celle de M. Poincaré, pour toute surface (S) satisfaisant à certaines conditions assez générales ([1]).

Enfin, dans le n° 10 du Chapitre III de mon Mémoire : *Les méthodes générales, etc.* ([2]), j'ai énoncé de nouveau les mêmes théorèmes, dont la méthode de la démonstration, pour les surfaces admettant la transformation de M. H. Poincaré, découle immédiatement de mes recherches sur le problème de la distribution de l'électricité et le problème de Neumann, qui font l'objet de trois premiers Chapitres de mon Mémoire cité.

Cette méthode, dont les principes que j'ai déjà indiqués dans une courte Note : *Le problème des températures stationnaires* ([3]), tout à fait différente de celle de M. S. Zaremba et exposée en détail dans ce Chapitre, nous a permis de simplifier essentiellement les raisonnements et d'obtenir les résultats, plus généraux, indiqués plus haut.

III. — Problème du développement d'une fonction donnée en série procédant suivant les fonctions V_n.

23. Les recherches de l'article I de ce Chapitre permettent de démontrer en toute rigueur l'existence de certaines fonctions discontinues, analogues à la fonction de Green, dont l'usage sera très utile dans les recherches sur le développement d'une fonction arbitraire en série procédant suivant les fonctions $V_n (n = 1, 2, \ldots)$.

Soient (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0) deux points du domaine (D), soit r leur distance.

Désignons par J une fonction de x, y, z; x_0, y_0, z_0 qui, consi-

---

([1]) S. Zaremba, *Sur l'équation aux dérivées partielles* $\Delta u + \xi u + f = 0$ *et sur les fonctions harmoniques* (*Annales de l'École Normale*, t. XVI, 1889).

([2]) W. Stekloff, *Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. II, 1900, p. 252).

([3]) W. Stekloff, *Le problème des températures stationnaires* (*Comptes rendus*, 15 octobre 1900).

dérée comme fonction des variables x, y, z, satisfait aux conditions suivantes :

Elle satisfait à l'équation

$$\Delta J = \frac{1}{D} \quad \text{à l'intérieur de (S),}$$

D étant le volume du domaine (D); elle reste finie et continue à l'intérieur de (S) sauf pour

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0,$$

où J devient infini, de sorte que la différence

$$J - \frac{1}{4\pi r}$$

reste finie et continue dans le voisinage du point x_0, y_0, z_0, situé à l'intérieur de (S); enfin, cette fonction satisfait à la condition

$$\frac{\partial J_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S).}$$

Posons

$$J = J_1 - \frac{1}{4\pi D}\int \frac{d\tau}{r} = J_1 - \frac{U}{D},$$

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Nous aurons

$$\Delta J_1 = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S),}$$

$$\frac{\partial J_{1i}}{\partial n} = \frac{1}{D}\frac{\partial U_i}{\partial n} \quad \text{sur (S).}$$

Posons ensuite

$$J_1 = J_2 + \frac{1}{4\pi r}.$$

Le problème se ramène à la détermination d'une fonction J_2 des variables x, y, z; x_0, y_0, z_0, continue à l'intérieur de (S) et satisfaisant aux conditions

$$\Delta J_2 = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S),}$$

$$\frac{\partial J_{2i}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2} + \frac{1}{D}\frac{\partial U_i}{\partial n} = f \quad \text{sur (S).}$$

C'est le problème de Neumann qui est possible, puisque

$$\int f\,ds = 0.$$

La méthode de Robin nous donnera J_2.

Nous trouverons la fonction cherchée, en posant

$$J = J_2 + \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi D}\int \frac{d\tau}{r} + C,$$

C étant une fonction arbitraire des variables x_0, y_0, z_0, continue à l'intérieur de (S).

En posant

$$C = \frac{1}{4\pi D^2}\int d\tau\left(\int \frac{d\tau}{r}\right) - \frac{1}{4\pi D}\int \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{D}\int J_2\,d\tau,$$

nous obtiendrons une fonction J satisfaisant, en outre, à la condition

$$\int J\,d\tau = 0. \tag{54}$$

Il est aisé de démontrer, par la méthode connue de Riemann, que J *est symétrique en* x, y, z *et* x_0, y_0, z_0.

Remarquons enfin que pour tout point x, y, z, intérieur à une surface (S_i), située à l'intérieur de (S),

$$\int J^2\,d\tau < Q_i, \tag{55}$$

Q_i étant un nombre fini et positif ne dépendant que de (S_i).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Il existe, pour toute surface* (S) *jouissant des propriétés du n° 2 de ce Chapitre, une fonction* J, *bien déterminée et satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *Elle dépend des variables* x, y, z ; x_0, y_0, z_0 *et, considérée comme fonction des variables* x, y, z, *reste finie et continue à l'intérieur de* (S), *sauf pour*

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0,$$

où elle devient infinie, de sorte que la différence

$$J - \frac{1}{4\pi r} \qquad [r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]$$

reste finie et continue dans le voisinage du point x_0, y_0, z_0, situé à l'intérieur de (S).

2° *Elle vérifie l'équation*

$$\Delta J = \frac{1}{D} \quad \textit{à l'intérieur de } (S),$$

D *étant le volume du domaine* (D) *limité par* (S).

3° *Elle satisfait aux conditions*

$$\frac{\partial J_i}{\partial n} = 0 \quad \textit{sur } (S),$$

$$\int J\, d\tau = 0.$$

24. Démontrons maintenant l'existence d'une autre fonction H satisfaisant à la première des conditions définissant la fonction J et aux conditions suivantes; elle vérifie l'équation

$$\Delta H = 0 \quad \text{à l'intérieur de } (S),$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial n} + hH = 0 \quad \text{sur } (S),$$

h étant une constante positive, différente de zéro.

Posons

$$H = \frac{C}{h} + \frac{1}{4\pi r} + H_1,$$

C étant une constante indéterminée.

On trouve

$$\Delta H_1 = 0 \quad \text{à l'intérieur de } (S),$$

$$\frac{\partial H_{1i}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2} + hH_1 + \frac{h}{4\pi r} + C = 0 \quad \text{sur } (S).$$

Supposons que le point x_0, y_0, z_0 se trouve à l'intérieur de (S) et cherchons H_1 sous la forme de la série

$$H_1 = w_0 + hw_1 + h^2 w_2 + \ldots + h^n w_n + \ldots.$$

Nous trouverons

$$\Delta w_0 = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$

$$\frac{\partial w_{0i}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2} - C = f \quad \text{sur (S)}.$$

Le problème sera possible si nous posons

$$CS = 1$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int f\, ds = 0.$$

La méthode de Robin nous donnera w_0 sous la forme suivante :

$$w_0 = w'_0 + C_0,$$

w'_1 étant le potentiel de la simple couche de masse totale nulle, C_0 étant une fonction arbitraire des variables x_0, y_0, z_0.

Pour la détermination de w_1, nous aurons les équations suivantes :

$$\Delta w_1 = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$

$$\frac{\partial w_{1i}}{\partial n} + w_0 + \frac{1}{4\pi r} = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

Le problème sera possible si nous choisissons C_0, de sorte que

$$C_0 S + \int w'_0\, ds + \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r} = 0.$$

La détermination de toutes les autres fonctions $w_k (k = 2, 3, \ldots)$ se ramène à l'intégration des équations tout à fait identiques à celles du n° 13.

Les raisonnements y adoptés démontreront sans peine l'existence de la fonction H_1 et, par suite, celle de la fonction cherchée H.

La fonction H *est symétrique en* x, y, z *et* x_0, y_0, z_0.

Pour tout point x, y, z intérieur à une surface (S_i) située à l'intérieur de (S), on a

$$\int H^2\, d\tau < Q_i, \tag{56}$$

Q_i étant un nombre ne dépendant que de (S_i).

L'existence de H étant établie, on trouve, en s'appuyant sur le théorème de Green,

$$V_n = k_n \int H V'_n \, d\tau' \quad \text{à l'intérieur de (S).} \tag{57}$$

Le théorème suivant est donc démontré :

Théorème. — *Il existe, pour toute surface* (S) *satisfaisant aux conditions du n° 2 de ce Chapitre, une fonction* H *bien déterminée et satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *Elle dépend des variables $x, y, z; x_0, y_0, z_0$ et reste finie et continue à l'intérieur de* (S), *sauf pour*

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

où elle devient infinie, de sorte que la différence

$$H - \frac{1}{4\pi r}$$

reste finie et continue dans le voisinage du point x_0, y_0, z_0 situé à l'intérieur de (S).

2° *Elle vérifie l'équation*

$$\Delta H = 0 \quad \textit{à l'intérieur de } (S).$$

3° *Elle satisfait à la condition*

$$\frac{\partial H_i}{\partial n} + hH = 0 \quad \textit{sur } (S),$$

h étant une constante positive différente de zéro.

25. Passons maintenant au problème de développement d'une fonction donnée en série procédant suivant les fonctions $V_n (n = 1, 2, \ldots)$.

Nous appliquerons la même méthode que j'ai déjà eu l'occasion d'appliquer dans le cas particulier de $h = \infty$ [1].

Je me permettrai de ne pas entrer en détail, en renvoyant pour la démonstration détaillée à mon Mémoire cité.

Il est aisé de démontrer d'abord le théorème suivant :

---

[1] W. Stekloff, *Sur les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. II, 1900, p. 278-290 et 297-301).

THÉORÈME. — *Si la fonction f satisfait à la condition*

$$\int f V_n \, d\tau = 0,$$

le point

$$k = k_n$$

est un point simple de la fonction v satisfaisant aux conditions (30) *et* (31) *de l'article précédent.*

Il résulte de là que *la fonction v est holomorphe en k, pourvu que*

$$k \leqq k_{p+1},$$

si la fonction f satisfait aux conditions

$$\int f V_1 \, d\tau = 0, \qquad \int f V_2 \, d\tau = 0, \qquad \ldots, \qquad \int f V_p \, d\tau = 0.$$

On a donc, d'après le théorème du n° 18,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{W_n}}{\sqrt{W_{n+1}}} > k_{p+1},$$

d'où, en remarquant que

$$\frac{\sqrt{W_0}}{\sqrt{\int f^2 \, d\tau}} < \frac{\sqrt{W_1}}{\sqrt{W_0}} < \frac{\sqrt{W_2}}{\sqrt{W_1}} < \ldots < \frac{\sqrt{W_{n+1}}}{\sqrt{W_n}} < \ldots,$$

on tire l'inégalité suivante :

$$\frac{\sqrt{\int f^2 \, d\tau}}{\sqrt{W_0}} > k_{p+1}. \tag{58}$$

Or

$$\int \sum \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} \, d\tau + h \int f v_0 \, d\tau = \int f^2 \, d\tau,$$

d'où

$$\left(\int f^2 \, d\tau\right)^2 < \left[\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau + h \int f^2 \, ds\right] \left[\int \sum \left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2 d\tau + h \int v_0^2 \, ds\right].$$

D'autre part,

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2 d\tau + h \int v_0^2 \, ds < \sqrt{\int f^2 \, d\tau} \sqrt{\int v_0^2 \, d\tau},$$

ce qui nous donne

$$\frac{S}{T} = \frac{\int f^2\, d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau + h \int f^2\, ds} < \frac{\sqrt{W_0}}{\sqrt{\int f^2\, d\tau}},$$

d'où, en vertu de (58),

(59) $$\frac{S}{T} < \frac{1}{k_{p+1}}.$$

26. Posons maintenant

(60) $$f = \sum_{s=1}^{p} A_s V_s + R_p,$$

où

$$A_s = \int f V_s\, d\tau.$$

R_p est une fonction continue admettant les dérivées du premier ordre à l'intérieur de (S) et satisfaisant aux conditions

$$\int R_p V_1\, d\tau = 0, \qquad \int R_p V_2\, d\tau = 0, \qquad \ldots, \qquad \int R_p V_p\, d\tau = 0.$$

Cherchons la fonction w satisfaisant aux conditions

$$\Delta w + kw + R_p = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$
$$\frac{\partial w_i}{\partial n} + hw = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

Désignons par S_p et T_p ce que deviennent S et T, quand on y remplace f par R_p.

On trouve, en tenant compte de (59),

(61) $$\frac{S_p}{T_p} < \frac{1}{k_{p+1}},$$

quel que soit le nombre p.

Supposons, pour plus de simplicité, que

$$\int V_n^2\, d\tau = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On tire aisément de (60)

$$\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau + h \int f^2\, ds = \sum_{s=1}^{p} k_s A_s^2 + T_p + h S_p.$$

Il en résulte que l'expression positive

$$T_p + h S_p$$

est une fonction décroissante de l'indice p.

D'autre part, l'inégalité (61) donne

$$\frac{S_p}{T_p + h S_p} < \frac{1}{k_{p+1}}.$$

De cette inégalité on tire, en tenant compte de ce qui précède,

$$\lim_{p=\infty} S_p = \lim_{p=\infty} \int R_p^2\, d\tau = 0. \tag{62}$$

On trouve ainsi l'égalité suivante

$$\int f^2\, d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2 \tag{63}$$

qui aura lieu, quelle que soit la fonction f, continue avec ses dérivées du premier ordre à l'intérieur de (S).

Soit φ une autre fonction satisfaisant à une seule condition

$$\int \varphi^2\, d\tau < Q,$$

Q étant un nombre assignable.

On démontrera aisément l'égalité suivante, en tenant compte de (62),

$$\int \varphi f\, d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s, \qquad B_s = \int \varphi V_s\, d\tau. \tag{64}$$

Nous avons supposé que f admette les dérivées du premier ordre à l'intérieur de (D), mais cette dernière restriction n'a rien d'essentiel.

Les égalités (63) et (64) auront lieu, quelle que soit la fonction f, *continue* à l'intérieur de (S).

Pour le démontrer, il suffit d'employer le théorème suivant :

On peut toujours construire une suite de quantités positives, données à l'avance,

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_s, \quad \ldots,$$

formant une série convergente, et déterminer une suite de polynomes en x, y, z,

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_s, \quad \ldots,$$

tels qu'on ait

$$|P_s| < \varepsilon_s \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} P_s \quad \textit{dans } (D),$$

la série $\sum_{s=1}^{\infty} P_s$ *étant convergente* absolument et uniformément *à l'intérieur de* (S) [1].

En raisonnant ensuite de la même manière que dans le n° 11 de

---

[1] M. E. Picard (*Traité d'Analyse*, t. I, p. 263) n'a démontré ce théorème que dans le cas de deux variables x, y, mais on peut l'étendre au cas de plusieurs variables, en employant, au lieu de l'intégrale de Poisson, l'intégrale plus générale

$$V = \frac{1}{2S}\int \frac{f(1 - r^2)}{D^p}\, d\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'élément superficiel de la sphère (σ) dans l'espace de p dimensions, $2S$ étant l'aire de la surface (σ), D la distance de $d\sigma$ au point intérieur à (σ), r la distance de ce point du centre de (σ).

La fonction V se développe à l'intérieur de (σ) en série absolument et uniformément convergente

$$V = \frac{1}{2S}\sum_{k=0}^{\infty} \int f \frac{2k + p - 2}{p - 2}\, r^k\, \Omega_k(\cos\gamma)\, d\sigma,$$

où γ désigne l'angle que font r et le rayon de (σ) passant par $d\sigma$, $\Omega_k(\cos\gamma)$ désigne la somme de produits des polynomes de Legendre dont la somme d'indices est égale à k (*voir* RIQUIER, *Extension à l'hyperespace de la méthode de M. Carl Neumann, etc.* Paris, 1886).

En appliquant à cette série la méthode de M. E. Picard modifiée convenablement, nous démontrerons le théorème dont il s'agit, quel que soit le nombre de variables.

mon Mémoire *Sur les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré*, p. 285, nous établirons en toute rigueur les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si f est une fonction satisfaisant à une seule condition d'être continue à l'intérieur d'une surface* (S), *jouissant des propriétés du n° 2 de ce Chapitre, l'intégrale $\int f^2\,d\tau$ peut se représenter sous la forme de la série suivante :*

$$\int f^2\,d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \qquad A_s = \int f V_s\,d\tau.$$

Théorème II. — *Si f est une fonction continue à l'intérieur de* (S), *φ est une autre fonction quelconque satisfaisant à une seule condition*

$$\int \varphi^2\,d\tau < Q,$$

Q *étant un nombre assignable, l'intégrale $\int f\varphi\,d\tau$ peut se représenter sous la forme de la série* absolument *convergente :*

$$\int f\varphi\,d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s, \qquad B_s = \int \varphi V_s\,d\tau.$$

Il est inutile de reproduire la démonstration détaillée qu'on peut trouver dans mon Mémoire cité plus haut (p. 284 et 285).

27. Soit f une fonction continue à l'intérieur de (S), ainsi que ses dérivées de deux premiers ordres, et satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} + hf = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

L'expression

$$u = f + \int H\,\Delta f'\,d\tau'$$

représente une fonction continue à l'intérieur de (S).

Appliquons à u le théorème I du numéro précédent.

On trouve

$$\int u^2\,d\tau = \sum_{1}^{\infty} A_s^2,$$

où l'on a posé

$$A_s = \int f V_s d\tau + \int V_s \left(\int H \Delta f' d\tau' \right) d\tau.$$

Moyennant le théorème de Green et l'équation (57), on trouve aisément

$$\int V_s \left(\int H \Delta f' d\tau' \right) d\tau = -\int f V_s d\tau,$$

ce qui nous donne

$$A_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

c'est-à-dire

$$u = f + \int H \Delta f' d\tau' = 0. \tag{65}$$

Appliquons maintenant le théorème II du numéro précédent à l'intégrale

$$\int H \Delta f' d\tau',$$

ce qui est possible, pourvu que le point x, y, z soit à l'intérieur de (S), en vertu de (56).

On aura

$$\int H \Delta f' d\tau' = \sum_{s=1}^{\infty} B_s C_s,$$

où l'on a posé

$$B_s = \int V'_s \Delta f' d\tau', \qquad C_s = \int H V'_s d\tau' = \frac{V_s}{k_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

Mais

$$\int V'_n \Delta f' d\tau' = -k_n A_n.$$

Par conséquent,

$$\int H \Delta f' d\tau' = -\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s,$$

c'est-à-dire, en vertu de (65),

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s.$$

Le théorème suivant est donc démontré :

Théorème. — *Toute fonction f, continue avec ses dérivées de deux premiers ordres à l'intérieur de la surface* (S) *satisfaisant aux conditions du n° 2 de ce Chapitre, et vérifiant l'équation*

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} + hf = 0 \qquad \textit{sur } (\mathrm{S}),$$

peut se développer en la série suivante :

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{A}_s \mathrm{V}_s,$$

absolument *convergente à l'intérieur de* (S).

Le problème du refroidissement d'un corps solide homogène est ainsi résolu.

IV. — Remarque sur le problème du mouvement vibratoire d'une masse gazeuse renfermée dans un vase solide.

28. Ce problème s'énonce comme il suit :

Trouver une fonction Φ (*potentiel des vitesses*) *des variables* t, x, y, z *vérifiant l'équation*

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \Delta\Phi,$$

a étant une constante réelle, jointe aux conditions

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = 0 \quad \textit{sur } (\mathrm{S}),$$

$$\Phi = f \qquad \textit{pour} \qquad t = 0,$$

f étant une fonction donnée.

Le problème se ramène, comme on sait, à la démonstration des deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Toute surface* (S) *satisfaisant aux conditions du n°* 2 *de ce Chapitre donne lieu à une infinité de nombres positifs*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots$$

ne dépendant que de (S), *et de fonctions correspondantes*

$$U_1, U_2, \ldots, U_s, \ldots.$$

vérifiant les équations

$$\begin{aligned} &(66) \qquad \Delta U_s + \lambda_s U_s = 0 \quad \textit{à l'intérieur de } (S), \\ &(67) \qquad \frac{\partial U_{si}}{\partial n} = 0 \quad \textit{sur } (S) \end{aligned} \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

Théorème II. — *Toute fonction donnée f, continue avec ses dérivées de deux premiers ordres et satisfaisant à la condition*

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0 \quad \textit{sur } (S),$$

peut se développer à l'intérieur de (S) *en série* absolument *convergente de la forme suivante :*

$$f = \frac{1}{D}\int f\,d\tau + \sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s, \qquad A_s = \int f U_s\,d\tau.$$

Ici nous avons un cas particulier du problème général considéré plus haut.

Il est évident que la même méthode, modifiée un peu, s'applique immédiatement au problème dont il s'agit.

Cherchons une fonction φ satisfaisant aux conditions

$$\Delta\varphi + k\varphi + f = 0 \quad \text{à l'intérieur de } (S),$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } (S).$$

Cette fonction, considérée comme fonction du paramètre k, est une fonction méromorphe en k, n'ayant que des pôles simples, réels et positifs

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots,$$

dont les résidus correspondants représentent les fonctions

$$U_s \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

vérifiant les équations (66) et (67).

Chacune des fonctions $U_s (s = 1, 2, \ldots)$ peut se représenter sous la forme suivante :

$$U_s = \int J U'_s \, d\tau' \quad \text{à l'intérieur de (S),}$$

J étant la fonction discontinue dont nous avons démontré l'existence dans le n° 23 de l'article précédent.

En raisonnant ensuite comme dans les n^{os} 25, 26, 27, nous établirons aisément les propositions suivantes :

I. *Si f est une fonction continue avec ses dérivées de deux premiers ordres à l'intérieur de* (S) *et satisfaisant à la condition*

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0 \quad \textit{sur (S)},$$

on a

$$f + \int J \Delta f' \, d\tau' = C = \frac{1}{D} \int f \, d\tau \quad \textit{à l'intérieur de (S)}.$$

II. *Toute fonction f, continue avec ses dérivées de deux premiers ordres à l'intérieur de* (S), *donne lieu à l'égalité suivante :*

$$\int f^2 d\tau = \frac{1}{D}\left(\int f \, d\tau\right)^2 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \qquad A_s = \int f U_s \, d\tau.$$

III. *Si φ est une autre fonction, assujettie à une seule condition*

$$\int \varphi^2 d\tau < Q,$$

Q *étant un nombre assignable, on a*

$$\int f\varphi \, d\tau = \frac{1}{D} \int f \, d\tau \int \varphi \, d\tau + \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s, \qquad B_s = \int \varphi U_s \, d\tau.$$

De ces propositions nous tirerons, de la même manière que précédemment (n° 27), le théorème II. (*A suivre.*)