ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M. STOUFF

Remarques sur quelques propositions dues à M. Hermite

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 89-118
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__89_0>

REMARQUES

SUR

QUELQUES PROPOSITIONS DUES A M. HERMITE,

PAR M. STOUFF.

I.

L'objet de ce Travail est de démontrer deux théorèmes donnés par M. Hermite; l'un d'eux, énoncé dans une lettre arithmétique à Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 40), consiste en ce que dans une forme quadratique définie réduite à coefficients quelconques, le produit des coefficients des carrés des indéterminées est inférieur au déterminant de la forme multiplié par un coefficient numérique dépendant seulement du nombre des indéterminées. L'autre (*Journal de Crelle*, t. 47) se rapporte à la réduction des formes quadratiques indéfinies à coefficients entiers. Les propriétés des réduites d'Hermite que l'on rencontre dans la démonstration du premier théorème jouent un rôle essentiel dans la démonstration du second ([1]).

II.

Soit

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

une forme quadratique à n indéterminées, à coefficients quelconques

([1]) *Comparer* KORKINE et ZOLOTAREFF, *Sur les formes quadratiques* (*Mathematische Annalen*, t. VI). — MINKOWSKI, *Zur Theorie der positivenquadratischen Formen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 101).

et essentiellement positive. Nous dirons que cette forme est une réduite d'Hermite si elle satisfait aux conditions suivantes.

Dans toutes les formes équivalentes à f, le coefficient de x_1^2 a une valeur au moins égale à celle qu'il a dans f. Dans toutes les formes équivalentes à f et où le coefficient de x_1^2 est a_{11}, le coefficient de x_2^2 a une valeur au moins égale à a_{22}, et ainsi de suite. Afin d'obtenir une réduite unique, M. Hermite, dans la lettre citée, pose encore d'autres conditions, mais il n'est pas nécessaire de les faire intervenir pour les propriétés que nous avons en vue.

Théorème I. — *Dans une réduite d'Hermite le coefficient a_{ii} ne peut surpasser le coefficient a_{jj} si i est moindre que j.*

En effet, si l'on avait

$$a_{ii} > a_{jj}, \qquad i < j,$$

on pourrait soumettre la forme à la substitution de déterminant un qui consiste à remplacer x_i par x_j et x_j par $-x_i$ sans toucher aux autres indéterminées, et l'on obtiendrait une forme équivalente à la primitive où les coefficients de $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{i-1}^2$ auraient conservé les mêmes valeurs, mais où le coefficient de x_i^2 serait diminué, ce qui est contre l'hypothèse.

Théorème II. — *Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une réduite d'Hermite, les formes obtenues en égalant à zéro dans f un nombre quelconque des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont encore des réduites d'Hermite.*

En effet, soient $x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_r}$ celles des variables qui n'ont pas été annulées

$$q_1 < q_2 < \ldots < q_r,$$

et $F(x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_r})$ ce que devient $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dans F le coefficient de $x_{q_1}^2$ est $a_{q_1 q_1}$. S'il existait une substitution S de déterminant un transformant F en une forme F′ où le coefficient de $x_{q_1}^2$ eût une valeur $a'_{q_1 q_1}$ moindre que $a_{q_1 q_1}$, on pourrait faire subir à la forme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la substitution qui consiste : 1° à ne pas changer les variables autres que $x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_r}$, 2° à effectuer sur le groupe des variables $x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_r}$ la substitution S. Les coefficients des carrés des variables autres que $x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_r}$ ne sont pas altérés, mais le coefficient de $x_{q_1}^2$ devient $a'_{q_1 q_1}$. De deux choses l'une : ou $a'_{q_1 q_1}$ n'est inférieur à aucun des coefficients des carrés des variables dont les indices sont inférieurs à q_1; dans ce cas, f n'est pas une réduite d'Hermite, parce que le coefficient de $x_{q_1}^2$ n'est pas le moindre possible pour les formes équivalentes à f et où les $q_1 - 1$ premiers coefficients des carrés sont les mêmes que ceux de f. Ou bien $a'_{q_1 q_1}$ est inférieur à l'un des $q_1 - 1$ premiers coefficients des carrés, à a_{pp} par exemple; alors la substitution consistant à changer x_p en x_{q_1}, x_{q_1} en $-x_p$ donne une forme équivalente à f où le coefficient de x_p^2 est diminué, sans que les coefficients des carrés précédents soient altérés. Dans ce cas, f ne serait pas non plus une réduite d'Hermite.

On raisonnerait d'une manière analogue en se plaçant dans l'hypothèse suivant laquelle F aurait une équivalente F' où le coefficient de $x_{q_1}^2$ serait le même que dans F, mais où le coefficient de $x_{q_2}^2$ aurait une valeur $a'_{q_2 q_2}$ inférieure à $a_{q_2 q_2}$. Il est clair que l'on arriverait ainsi de proche en proche à prouver que f ne peut être une réduite d'Hermite sans que F en soit une. C. Q. F. D.

Supposons une réduite d'Hermite décomposée en carrés de fonctions linéaires et homogènes, la première contenant les n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la seconde seulement les $n-1$ dernières $x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, la $n^{\text{ième}}$ la variable x_n seulement

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{j=i}^{j=n} \alpha_{ij} x_j \right)^2. \tag{1}$$

Aucun des coefficients α_{ii} par lesquels commencent respectivement ces fonctions linéaires n'est nul et l'on a

$$\left(\prod_{i=1}^{i=n} \alpha_{ii} \right)^2 = D, \tag{2}$$

D étant le déterminant de f.

Nous avons le droit, pour simplifier, de supposer que les quantités α_{ii} sont positives; car on peut, sans altérer f, changer arbitrairement les signes des fonctions linéaires dont les carrés constituent cette forme.

Théorème III. — *j étant un entier au moins égal à $i+1$, on a toujours*

$$\sum_{h=1}^{h=i} \alpha_{hj}^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{h=1}^{h=i} \alpha_{hh}^2; \tag{3}$$

en effet, faisons dans f la substitution suivante de déterminant un

$$x_h = x'_h + \lambda_h x'_j \quad \text{pour} \quad h = 1, 2, \ldots, i,$$
$$x_h = x'_h \quad \text{pour} \quad h = i+1, i+2, \ldots, n.$$

Parmi les coefficients des carrés des variables, le coefficient a_{jj} est seul altéré. Dans la nouvelle forme, le coefficient de x'^2_j est

$$(\lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{12} + \ldots + \lambda_i \alpha_{1i} + \alpha_{1j})^2 + (\lambda_2 \alpha_{22} + \lambda_3 \alpha_{23} + \ldots + \lambda_i \alpha_{2i} + \alpha_{2j})^2 + \ldots$$
$$+ (\lambda_{i-1} \alpha_{i-1.i-1} + \lambda_i \alpha_{i-1.i} + \alpha_{i-1.j})^2 + (\lambda_i \alpha_{ii} + \alpha_{ij})^2 + \alpha^2_{i+1.j} + \alpha^2_{i+2.j} + \ldots + \alpha^2_{jj}.$$

On peut disposer du nombre entier λ_i de telle sorte que $\lambda_i \alpha_{ii} + \alpha_{ij}$ soit en valeur absolue au plus égal à $\frac{1}{2}\alpha_{ii}$; on peut ensuite disposer de l'entier λ_{i-1} de façon que $\lambda_{i-1}\alpha_{i-1.i-1} + \lambda_i \alpha_{i-1.i} + \alpha_{i-1.j}$ soit en valeur absolue au plus égal à $\frac{1}{2}\alpha_{i-1.i-1}$, et ainsi de suite. Finalement le coefficient de x_j^2 sera au plus égal à

$$\frac{1}{4}\sum_{h=1}^{h=i} \alpha^2_{hh} + \sum_{h=i+1}^{h=j} \alpha^2_{hj};$$

or, dans la forme primitive, le coefficient de x_j^2 est

$$\sum_{h=1}^{h=i} \alpha^2_{hj} + \sum_{h=i+1}^{h=j} \alpha^2_{hj}.$$

Si cette dernière quantité était supérieure à la précédente, f aurait une équivalente où le coefficient de x'^2_j aurait une valeur moindre que a_{jj}, sans que les autres coefficients des carrés soient altérés. f ne serait donc pas une réduite d'Hermite. L'inégalité (3) a donc lieu nécessairement.

Théorème IV. — *Dans une réduite d'Hermite décomposée comme on l'a indiqué plus haut* [*identité* (1)] *en une somme de carrés, on a toujours*

$$(4) \qquad \alpha_{ii} < \theta_i \alpha_{i+1.i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

θ_i étant un coefficient numérique ne dépendant que de son indice i. Cette propriété a lieu pour $n = 2$; soit en effet

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2)^2 + \alpha^2_{22}x_2^2,$$

on a, d'après le théorème III,

$$\alpha_{12}^2 \leqq \frac{\alpha_{11}^2}{4},$$

et comme

$$\alpha_{11} \leqq \alpha_{22},$$

$$\alpha_{11}^2 \leqq \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2,$$

et *a fortiori*

$$\alpha_{11}^2 \leqq \frac{\alpha_{11}^2}{4} + \alpha_{22}^2,$$

$$\alpha_{11} \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} \alpha_{22}.$$

Nous allons prouver maintenant que si le théorème est vrai pour les réduites d'ordre inférieur ou égal à $n-1$, il est vrai pour les réduites d'ordre n.

D'après le théorème II, la forme obtenue en faisant, dans $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_n = 0$ est une réduite d'Hermite. Si donc le théorème que nous avons en vue a été démontré pour les réduites d'ordre $n-1$, nous avons déjà

$$\text{(A)} \qquad \alpha_{11} < \theta_1 \alpha_{22}, \qquad \alpha_{22} < \theta_2 \alpha_{33}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{n-2.n-2} < \theta_{n-2} \alpha_{n-1.n-1};$$

il ne reste donc plus qu'à prouver la dernière inégalité

$$\alpha_{n-1.n-1} < \theta_{n-1} \alpha_{n.n};$$

l étant un entier moindre que n, envisageons la forme constituée par la somme des carrés des $n-l$ dernières fonctions linéaires

$$\varphi(x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n) = \sum_{i=l+1}^{i=n} \left(\sum_{j=i}^{j=n} \alpha_{ij} x_j \right)^2.$$

Soit $\psi(x'_{l+1}, x'_{l+2}, \ldots, x'_n)$ une réduite d'Hermite équivalente à φ, et

$$\psi(x'_{l+1}, x'_{l+2}, \ldots, x'_n) = \sum c_{ij} x_i x_j$$
$$(i, j = l+1, l+2, \ldots, n).$$

Il existe une substitution S de déterminant un

$$\text{S} \begin{cases} x_{l+1} = \mu_{l+1.l+1} x'_{l+1} + \ldots + \mu_{l+1.n} x'_n, \\ x_{l+2} = \mu_{l+2.l+1} x'_{l+1} + \ldots + \mu_{l+2.n} x'_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n \;\; = \mu_{n.l+1} \;\; x'_{l+1} + \ldots + \mu_{nn} x'_n, \end{cases}$$

telle que l'on ait identiquement

$$\varphi(x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n) = \psi(x'_{l+1}, x'_{l+2}, \ldots, x'_n).$$

On a d'ailleurs

$$(5) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{i=l} \left(\sum_{j=i}^{j=n} \alpha_{ij} x_j \right)^2 + \varphi(x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n).$$

Faisons dans f la substitution de déterminant un

$$x_i = x'_i + \nu_{i.l+1} x'_{l+1} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, l),$$

$$x_i = \sum_{j=l+1}^{j=n} \nu_{ij} x'_j \qquad (i = l+1, l+2, \ldots, n),$$

Les coefficients ν_{ij}, où i et j varient de $l+1$ inclusivement à n inclusivement, sont les coefficients de la substitution S déjà définie. Les coefficients $\nu_{i.l+1}$ pour les valeurs de i de 1 inclusivement à l inclusivement sont des entiers dont nous nous réservons de disposer. En tenant compte de (5), on voit que le coefficient de x'^2_{l+1} dans la nouvelle forme sera :

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11}\nu_{1.l+1} + \alpha_{12}\nu_{2.l+1} + \ldots + \alpha_{1n}\nu_{n.l+1})^2 \\ &\quad + (\alpha_{22}\nu_{2.l+1} + \alpha_{23}\nu_{3.l+1} + \ldots + \alpha_{2n}\nu_{n.l+1})^2 + \ldots \\ &\quad + (\alpha_{l-1.l-1}\nu_{l-1.l+1} + \alpha_{l-1.l}\nu_{l.l+1} + \ldots + \alpha_{l-1.n}\nu_{n.l+1})^2 \\ &\quad + (\alpha_{ll}\nu_{l.l+1} + \alpha_{l.l+1}\nu_{l+1.l+1} + \ldots + \alpha_{l.n}\nu_{n.l+1})^2 + c_{l+1.l+1}. \end{aligned}$$

On peut disposer de l'entier $\nu_{l.l+1}$ de sorte que la dernière parenthèse soit moindre en valeur absolue que $\frac{1}{2}\alpha_{ll}$: on pourra ensuite disposer de l'entier $\nu_{l-1.l+1}$ de manière que l'avant-dernière parenthèse soit moindre en valeur absolue que $\frac{1}{2}\alpha_{l-1.l-1}$, et ainsi de suite. Alors le coefficient de x'^2_{l+1} sera moindre que

$$\frac{1}{4}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \ldots + \alpha_{ll}^2) + c_{l+1.l+1}.$$

Dans $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et dans sa transformée, les coefficients des carrés des l premières variables sont les mêmes : donc, dans la nouvelle forme, le coefficient de x'^2_{l+1} ne saurait avoir une valeur inférieure à celle de x_{l+1}^2 dans f; on a donc

$$\alpha_{1.l+1}^2 + \alpha_{2.l+1}^2 + \ldots + \alpha_{l.l+1}^2 + \alpha_{l+1.l+1}^2 \leqq \frac{1}{4}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \ldots + \alpha_{ll}^2) + c_{l+1.l+1},$$

et *a fortiori*

$$\alpha_{l+1.l+1}^2 \leqq \frac{1}{4}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \ldots + \alpha_{ll}^2) + c_{l+1.l+1}. \tag{6}$$

Or, on déduit des inégalités (A)

$$\alpha_{l-1.l-1} < \theta_{l-1}\alpha_{ll}, \qquad \alpha_{l-2.l-2} < \theta_{l-1}\theta_{l-2}\alpha_{ll}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{11} < \theta_{l-1}\theta_{l-2}\ldots\theta_2\theta_1\alpha_{ll},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{4}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \ldots + \alpha_{ll}^2) < \frac{1 + \theta_{l-1}^2 + \theta_{l-1}^2\theta_{l-2}^2 + \ldots + \theta_{l-1}^2\theta_{l-2}^2\ldots\theta_2^2\theta_1^2}{4}\alpha_{ll}^2.$$

Soit η_l un nombre positif défini par l'égalité

$$\eta_l^2 = \frac{2}{1 + \theta_{l-1}^2 + \theta_{l-1}^2\theta_{l-2}^2 + \ldots + \theta_{l-1}^2\theta_{l-2}^2\ldots\theta_2^2\theta_1^2}.$$

Il est clair que si l'on a

$$\alpha_{ll} \leqq \eta_l \alpha_{l+1.l+1}, \tag{7}$$

il en résultera

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{l}\alpha_{ii}^2 < \frac{\alpha_{l+1.l+1}^2}{2},$$

et, par suite, d'après l'inégalité (6),

$$\alpha_{l+1.l+1}^2 < 2c_{l+1.l+1}. \tag{8}$$

Nous distinguons maintenant les deux cas suivants :

Premier cas. — On a

$$\alpha_{ii} > \eta_i \alpha_{i+1.i+1} \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-2; \tag{9}$$

on en déduit aisément

$$\alpha_{11} > \eta_1\alpha_{22}, \qquad \alpha_{11} > \eta_1\eta_2\alpha_{33}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{11} > \eta_1\eta_2\ldots\eta_{n-2}\alpha_{n-1.n-1} \tag{10}$$

et, par suite,

$$\alpha_{11}^{n-2} > \eta_1^{n-2}\eta_2^{n-3}\ldots\eta_{n-3}^2\eta_{n-2}\alpha_{22}\alpha_{33}\ldots\alpha_{n-1.n-1}. \tag{11}$$

Or, M. Hermite a démontré que l'on peut toujours attribuer dans une forme quadratique positive aux indéterminées des valeurs entières telles que la valeur de la forme ne surpasse pas $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{D}$. On peut supposer ces valeurs entières des indéterminées premières entre elles : car, si elles avaient un facteur commun autre que l'unité, on pourrait les diviser par ce facteur et la valeur que prendrait alors la forme serait encore plus petite. On sait aussi, d'après M. Hermite, que si n nombres entiers n'ont pas de diviseur commun autre que l'unité, on peut former un déterminant ayant ses éléments entiers, ayant pour valeur l'unité et dont la première ligne est constituée par ces nombres. On peut, par suite, trouver toujours une forme quadratique équivalente à la forme considérée et où le coefficient de la première indéterminée est moindre que $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{D}$. Le coefficient a_{11} dans f, qui égale α_{11}^2, ne peut donc surpasser la valeur précédente

$$\alpha_{11}^2 \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{D};$$

en élevant les deux membres de cette inégalité à la puissance $\frac{n}{2}$ et en remplaçant D par sa valeur (2), il vient

$$\alpha_{11}^n \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n(n-1)} \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{n-1.n-1}\alpha_{nn}.$$

En remarquant que $\alpha_{11}^n = \alpha_{11}^{n-2}.\alpha_{11}^2$ et en utilisant l'inégalité (11), il vient

$$\eta_1^{n-2}\eta_2^{n-3}\ldots\eta_{n-3}^2\eta_{n-2}\alpha_{11} \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n(n-1)} \alpha_{nn};$$

en faisant encore intervenir la dernière des inégalités (10), on obtient finalement

$$\alpha_{n-1.n-1} \leqq \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n(n-1)}}{\eta_1^{n-1}\eta_2^{n-2}\ldots\eta_{n-3}^3\eta_{n-2}^2}\alpha_{nn}.$$

Deuxième cas. — Les inégalités (9) n'ont pas toutes lieu. Soit l la plus haute valeur pour laquelle on ait

$$\alpha_{ll} \leqq \eta_l \alpha_{l+1.l+1}.$$

Nous aurons alors

$$\alpha_{l+1.l+1}^2 < 2 c_{l+1.l+1},$$

d'après (8), et comme $c_{l+1.l+1}$ est le premier coefficient d'une réduite d'Hermite à $n-l$ variables,

$$c_{l+1.l+1} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-l-1)} \sqrt[n-l]{D_l}$$

où D_l désigne le déterminant de φ (*voir* théorème IV). On a évidemment

$$D_l = (\alpha_{l+1.l+1}\alpha_{l+2.l+2}\ldots\alpha_{n.n})^2, \tag{12}$$

d'où

$$\alpha_{l+1.l+1}^2 < 2\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-l-1)} \sqrt[n-l]{D_l}, \tag{13}$$

et en élevant les deux membres de (13) à la puissance $\frac{n-l}{2}$ et en utilisant (12)

$$\alpha_{l+1.l+1}^{n-l} < 2^{\frac{n-l}{2}} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}(n-l)(n-l-1)} \alpha_{l+1.l+1}\alpha_{l+2.l+2}\ldots\alpha_{n.n}. \tag{14}$$

Or on a, d'après l'hypothèse,

$$\alpha_{l+i.l+i} > \eta_{l+i}\alpha_{l+i+1.l+i+1}, \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-l-2,$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{l+1.l+1} > \eta_{l+1}\alpha_{l+2.l+2}, \qquad \alpha_{l+1.l+1} > \eta_{l+1}\eta_{l+2}\alpha_{l+3.l+3}, \qquad \ldots, \\ \qquad\qquad \alpha_{l+1.l+1} > \eta_{l+1}\eta_{l+2}\ldots\eta_{n-2}\alpha_{n-1.n-1}; \end{array}\right. \tag{15}$$

en multipliant ces inégalités membre à membre, on en déduit

$$\alpha_{l+1.l+1}^{n-l-2} > \eta_{l+1}^{n-l-2}\eta_{l+2}^{n-l-3}\ldots\eta_{n-2}\alpha_{l+2.l+2}\alpha_{l+3.l+3}\ldots\alpha_{n-1.n-1}, \tag{16}$$

et par la combinaison des inégalités (14) et (16),

$$\eta_{l+1}^{n-l-2}\eta_{l+2}^{n-l-3}\ldots\eta_{n-2}\alpha_{l+1.l+1} < 2^{\frac{n-l}{2}} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}(n-l)(n-l-1)} \alpha_{n.n};$$

en combinant encore cette inégalité avec la dernière des inégalités (15) on a enfin

$$\alpha_{n-1\cdot n-1} < \frac{2^{\frac{n-l}{2}}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}(n-l)(n-l-1)}}{\eta_{l+1}^{n-l-1}\eta_{l+2}^{n-l-2}\cdots\eta_{n-2}^{2}}\alpha_{nn}.$$

Il résulte de cette discussion que, dans les différents cas possibles, le rapport $\frac{\alpha_{n-1\cdot n-1}}{\alpha_{nn}}$ reste respectivement inférieur à des quantités déterminées. Désignons par θ_{n-1} la plus grande de ces quantités; on aura dans tous les cas

$$\alpha_{n-1\cdot n-1} < \theta_{n-1}\alpha_{nn}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — En vertu de l'inégalité (3), on a *a fortiori*

$$\alpha_{ij}^2 \leqq \frac{1}{4}\sum_{h=1}^{h=i}\alpha_{hh}^2,$$

où j est un nombre supérieur à i; d'après le théorème IV, chaque quantité α_{hh} où h est moindre que i est inférieure à α_{ii} multipliée par un nombre fixe. Donc α_{ij} (il s'agit des valeurs absolues) est inférieure à α_{ii} multipliée par un nombre fixe. On sait, d'après le théorème IV, que α_{ii} est inférieure à α_{kk} multipliée par un nombre fixe. Nous en concluons que, si l est supérieur ou égal à i, on a

$$(17) \qquad |\alpha_{ij}| \leqq \zeta_{il}\alpha_{ll},$$

ζ_{il} étant un nombre fixe qui ne dépend que de i et de l.

Théorème V. — *Dans une réduite d'Hermite, on a toujours*

$$a_{11}a_{22}\ldots a_{nn} < \mu D,$$

μ étant un coefficient fixe qui ne dépend que de l'ordre n de la réduite.

En effet,

$$a_{ii} = \sum_{j=1}^{j=i}\alpha_{ji}^2 = \sum_{j=1}^{j=i-1}\alpha_{ji}^2 + \alpha_{ii}^2;$$

mais, d'après l'inégalité (3),

$$\sum^{j=i-1}\alpha_{ji}^2 \leqq \frac{1}{4}\sum^{j=i-1}\alpha_{jj}^2,$$

et, par suite, en utilisant les inégalités (4),

$$a_{ii} < \left(\frac{\theta_1^2\theta_2^2\ldots\theta_{i-1}^2+\ldots+\theta_{i-2}^2\theta_{i-1}^2+\theta_{i-1}^2}{4}+1\right)\alpha_{ii}^2,$$

en représentant, dans le second membre, le multiplicateur de α_{ii}^2 par ε_i, nous aurons

$$a_{ii} < \varepsilon_i \alpha_{ii}^2.$$

ε_i est un coefficient numérique déterminé par son indice i; on en déduit

$$a_{11}a_{22}\ldots a_{nn} < \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\alpha_{11}^2\alpha_{22}^2\ldots\alpha_{nn}^2,$$

$$a_{11}a_{22}\ldots a_{nn} < \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n \mathrm{D}, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

III.

Soient $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une forme quadratique indéfinie à coefficients entiers, et D la valeur absolue du déterminant de cette forme. Nous supposons que D n'est pas nul. On dit que cette forme appartient au type quadratique d'indice p quand elle peut se décomposer en $n-p$ carrés positifs et p carrés négatifs

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_{n-p}^2 - V_1^2 - V_2^2 - \ldots - V_p^2.$$

$U_1, U_2, \ldots, U_{n-p}, V_1, \ldots, V_p$ sont des fonctions linéaires des variables, mais les coefficients de $x_1, \ldots, x_n$ dans ces fonctions ne sont pas en général entiers, ni même rationnels. D est égal au carré du déterminant des coefficients de $x_1, \ldots, x_n$ dans $U_1, \ldots, U_{n-p}, V_1, \ldots, V_p$. L'étude des formes d'indice p se ramène évidemment à celle des formes d'indice $n-p$, de sorte qu'il est permis de supposer $p \leqq \frac{n}{2}$.

Considérons la forme quadratique définie

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_{n-p}^2 + V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_p^2,$$

dont le déterminant pris en valeur absolue a aussi pour valeur D. Soit

$$x_i = \sum_{j=1}^{j=n} \beta_{ij} x'_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

une substitution S à coefficients entiers et de déterminant 1, qui transforme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en une réduite d'Hermite équivalente $f_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Soient $U'_1, U'_2, \ldots, U'_{n-p}, V'_1, V'_2, \ldots, V'_p$, $F_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ ce que deviennent respectivement $U_1, U_2, \ldots, U_{n-p}$, $V_1, V_2, \ldots, V_p$, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par la substitution S. F_1 a encore ses coefficients entiers. On aura

$$f_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = U'^2_1 + U'^2_2 + \ldots + U'^2_{n-p} + V'^2_1 + V'^2_2 + \ldots + V'^2_p,$$
$$F_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = U'^2_1 + U'^2_2 + \ldots + U'^2_{n-p} - V'^2_1 - V'^2_2 - \ldots - V'^2_p,$$

et par conséquent

$$f_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = F_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) + 2V'^2_1 + 2V'^2_2 + \ldots + 2V'^2_p;$$

il s'agit de démontrer que tous les coefficients de $F_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ ont des limites qui ne dépendent que de D.

Dans les formes $f_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $F_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, ... supprimons, pour simplifier l'écriture, les accents et les indices des lettres f et F. La question revient alors à celle-ci. Il s'agit de démontrer que, si

$$F(x_1, x_1, \ldots, x_n) = U^2_1 + U^2_2 + \ldots + U^2_{n-p} - V^2_1 - \ldots - V^2_p$$

est une forme à coefficients entiers et de déterminant D, et si

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U^2_1 + U^2_2 + \ldots + U^2_{n-p} + V^2_1 + \ldots + V^2_p$$

est une réduite d'Hermite, tous les coefficients de F ont des limites qui ne dépendent que de D.

Supposons la réduite d'Hermite $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mise sous la forme (1) et posons

$$A_i = \sum_{j=i}^{j=n} \alpha_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Parmi les quantités α_{ij}, nous aurons particulièrement à considérer celles où le second indice est égal au premier; pour les désigner nous ne conserverons souvent que le premier indice, afin d'abréger l'écriture, de sorte que α_i aura le même sens que α_{ii}. Le déterminant des quantités A_i, par rapport aux variables x_i, est égal à $\prod_{i=1}^{i=n} \alpha_i$, c'est-à-dire à $\sqrt{D}$; il n'est pas nul, et l'on peut exprimer par suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en fonctions linéaires et homogènes de $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Soit

$$U_i = \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_{ij} A_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-p),$$

$$V_i = \sum_{j=1}^{j=n} \mu_{ij} A_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

On aura identiquement

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 \\ &= \left(\sum_{j=1}^{j=n} \lambda_{1j} A_j\right)^2 + \left(\sum_{j=2}^{j=n} \lambda_{2j} A_j\right)^2 + \ldots \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^{j=n} \lambda_{n-p,j} A_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{j=n} \mu_{1j} A_j\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{j=n} \mu_{pj} A_j\right). \end{aligned}$$

Il en résulte que les quantités

$$\begin{array}{ll} \lambda_{ij} & (i = 1, 2, \ldots, n-p; j = 1, 2, \ldots, n), \\ \mu_{ij} & (i = 1, 2, \ldots, p; j = 1, 2, \ldots, n) \end{array}$$

constituent ensemble les coefficients d'une substitution orthogonale. Les seuls coefficients qui nous intéressent sont les coefficients μ_{ij}. En vertu des propriétés générales des substitutions orthogonales ils satisfont aux relations suivantes :

Théorème VI.

$$(18) \qquad \sum_{j=1}^{j=n} \mu_{ij} \mu_{hj} = \delta_{ih} \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, p),$$

où le symbole δ_{ih} représente zéro quand i et h sont différents, et 1 quand ils sont égaux.

Théorème VII. — *Dans le produit $\prod_{i=1}^{i=n} \alpha_i$, le produit de deux facteurs équidistants des extrêmes $\alpha_i \alpha_{n-i+1}$ est toujours supérieur à une quantité positive qui ne dépend que de i et de n.*

Nous avons en effet

$$(19)\qquad \begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 \\ - 2(\mu_{11}A_1 + \mu_{12}A_2 + \ldots + \mu_{1n}A_n)^2 \\ - 2(\mu_{21}A_1 + \ldots + \mu_{2n}A_n)^2 - \ldots \\ - 2(\mu_{p1}A_1 + \ldots + \mu_{pn}A_n)^2. \end{aligned}$$

En développant les calculs, on trouve que le coefficient de x_1^2 est

$$\alpha_{11}^2(1 - 2\mu_{11}^2 - 2\mu_{21}^2 - \ldots - 2\mu_{p1}^2),$$

celui de x_1x_2 est

$$\begin{gathered} 2\alpha_{11}\alpha_{12}(1 - 2\mu_{11}^2 - 2\mu_{21}^2 - \ldots - 2\mu_{p1}^2) \\ - 4\alpha_{11}\alpha_{12}(\mu_{11}\mu_{12} + \mu_{21}\mu_{22} + \ldots + \mu_{p1}\mu_{p2}), \end{gathered}$$

celui de x_2^2 est

$$\begin{gathered} \alpha_{12}^2(1 - 2\mu_{11}^2 - \ldots - 2\mu_{p1}^2) \\ - 4\alpha_{12}\alpha_{22}(\mu_{11}\mu_{12} + \ldots + \mu_{p1}\mu_{p2}) + \alpha_{22}^2(1 - 2\mu_{12}^2 - \ldots - 2\mu_{p2}^2), \end{gathered}$$

. . . .

En général, le coefficient de x_jx_h est une somme de termes de la forme $\alpha_{kj}\alpha_{lh}$, où l'indice k ne surpasse pas j et où l'indice l ne surpasse pas h, multipliés par des fonctions du second degré des quantités μ_{ij}. Les égalités (18) montrent qu'aucune des quantités μ_{ij} ne peut surpasser l'unité en valeur absolue. Il résulte aussi du théorème IV et de son corollaire que, si j ne surpasse pas i, et si h ne surpasse pas $n - i + 1$, le produit $\alpha_{kj}\alpha_{lh}$ est en valeur absolue inférieur à $\alpha_i\alpha_{n-i+1}$, multiplié par une quantité numérique déterminée; par suite, le coefficient de x_jx_h sera aussi inférieur en valeur absolue à $\alpha_i\alpha_{n-i+1}$, multiplié par une quantité déterminée. On pourra donc assigner une quantité M_i telle que, si $\alpha_i\alpha_{n-i+1}$ devient inférieur à M_i, les coefficients de tous les produits x_jx_h, où j ne surpasse pas i et où h ne surpasse pas $n - i + 1$, soient forcément moindres que l'unité. Or, les coefficients de $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ doivent être entiers et ceux qui sont inférieurs à l'unité en valeur absolue sont nécessairement nuls. Voyons maintenant quelles seraient les conséquences de cette hypothèse.

Dans le déterminant D de F, les $n - i + 1$ premiers éléments de chacune des i premières lignes seraient tous nuls. Par suite, chacun des déterminants de la matrice constituée par les i premières lignes de D serait nul, car chacun de ces déterminants aurait au moins une colonne de zéros. Or le déterminant D peut, d'après un théorème connu, s'exprimer par une somme dont chaque terme est le produit d'un des déterminants de cette matrice par le déterminant complémentaire. D serait donc nul, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc $\alpha_i \alpha_{n-i+1}$ ne peut devenir inférieur à M_i.

Si n est impair, le facteur $\alpha_{\frac{n+1}{2}}$ est supérieur à une quantité positive déterminée.

Théorème VIII. — *Le produit de deux facteurs équidistants des extrêmes $\alpha_i \alpha_{n-i+1}$ est toujours inférieur à une quantité positive qui ne dépend que de i, de n et de* D.

En effet, le produit des quantités α_j étant égal à $\sqrt{D}$, si l'on groupe ensemble les facteurs équidistants des extrêmes, on voit que le produit $\alpha_i \alpha_{n-i+1}$ est inférieur à $\sqrt{D}$ divisé par le produit des limites inférieures que donne le théorème VII pour chacun des autres systèmes de facteurs équidistants des extrêmes.

Théorème IX. — *Il existe une quantité L_1 telle que, si α_{n-p+1} est supérieur à L_1, on ait nécessairement :*

$$(20) \qquad \sum_{h=1}^{\mu} \mu_{hi}\mu_{hj} = \eta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\eta_{ij} = 0 \quad \textit{pour} \quad i \neq j,$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \quad \textit{pour} \quad i = j,$$

et

$$(21) \quad \mu_{ij} = 0 \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, p; \quad j = p+1, p+2, \ldots, n-p.$$

(ici p est, comme nous l'avons dit plus haut, l'indice du type quadratique auquel F appartient).

En effet, d'après le théorème VIII, le produit $\alpha_p \alpha_{n-p+1}$ est inférieur à une limite déterminée; d'après le théorème IV, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ étant inférieurs à α_p multiplié respectivement par des quantités déterminées, on pourra toujours déterminer une quantité telle que, si α_{n-p+1}

est supérieur à cette quantité, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ soient tous moindres qu'une quantité que l'on pourra assigner à l'avance.

Or le coefficient de x_1^2 dans F est

$$\alpha_1^2(1 - 2\mu_{11}^2 - 2\mu_{21}^2 - \ldots - 2\mu_{p1}^2),$$

$1 - 2\mu_{11}^2 - 2\mu_{21}^2 - \ldots - 2\mu_{p1}^2$ est au plus égal en valeur absolue à $2p - 1$; donc, si α_1 devient inférieur à $\frac{1}{\sqrt{2p-1}}$, ce coefficient, qui doit être entier, est forcément nul; or α_1 n'est pas nul, sans quoi D serait nul, donc on a

$$(22) \qquad \mu_{11}^2 + \mu_{21}^2 + \ldots + \mu_{p1}^2 = \frac{1}{2}.$$

Si l'on se reporte à la formule (19), on voit alors que A_1^2 disparait dans le développement du second membre, le terme en $x_1 x_2$ dans F provient uniquement de $A_1 A_2$ dans le second membre de (19), et il a pour coefficient

$$-4(\mu_{11}\mu_{12} + \mu_{21}\mu_{22} + \ldots + \mu_{p1}\mu_{p2})\alpha_1\alpha_2;$$

si $\alpha_1\alpha_2$ est inférieur à $\frac{1}{4p}$, ce coefficient ne peut être entier que si l'on a

$$(23) \qquad \mu_{11}\mu_{12} + \mu_{21}\mu_{22} + \ldots + \mu_{p1}\mu_{p2} = 0;$$

les égalités (22) et (23) étant satisfaites, ce qui aura lieu si α_1 et α_2 sont suffisamment petits, le terme en $x_1 x_3$ provient uniquement de $A_1 A_3$ dans le second membre de (19), et il a pour coefficient

$$-4(\mu_{11}\mu_{13} + \ldots + \mu_{p1}\mu_{p3})\alpha_1\alpha_3,$$

et si $\alpha_1\alpha_3$ est inférieur à $\frac{1}{4p}$, il ne peut être entier que si l'on a

$$\mu_{11}\mu_{13} + \ldots + \mu_{p1}\mu_{p3} = 0, \quad \ldots;$$

on voit donc que, si l'on suppose $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ suffisamment petits, on aura

$$\sum_{j=1}^{j=p} \mu_{j1}\mu_{ji} = \eta_{1i}$$

où

$$\eta_{11} = \frac{1}{2}, \qquad \eta_{12} = \eta_{13} = \ldots = \eta_{1p} = 0.$$

Le terme en x_2^2 dans F provient alors uniquement de A_2^2 dans le second membre de (19), et il a pour coefficient

$$(1 - 2\mu_{12}^2 - 2\mu_{22}^2 - \ldots - 2\mu_{p2}^2)\,\alpha_2^2\,;$$

si l'on suppose α_2 suffisamment petit, α_2 n'étant pas nul, on aura forcément

$$\mu_{12}^2 + \mu_{22}^2 + \ldots + \mu_{p2}^2 = \frac{1}{2},$$

et ainsi de suite. Le terme en $x_2 x_3$ provient alors uniquement de $A_2 A_3$, ... Il est évident que, de proche en proche, on arrivera à prouver ainsi toutes les relations (20) lorsque $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p$ sont suffisamment petits. Le coefficient α_{p+1} est inférieur à une limite déterminée; en effet, $\alpha_{p+1}\,\alpha_{n-p}$ étant le produit de deux facteurs équidistants des extrêmes dans $\prod \alpha_i$ a une limite supérieure; or α_{n-p} est supérieur à α_{p+1} $\left(\text{pour } p < \frac{n-1}{2}\right)$ multiplié par une quantité déterminée. Il en résulte que α_{p+1}^2 et, par suite, α_{p+1} ont une limite supérieure déterminée.

Les relations (20) ayant lieu, le coefficient de $x_1 x_{p+1}$ dans F provient alors uniquement de $A_1 A_{p+1}$; il est égal à

$$-4(\mu_{11}\mu_{1\cdot p+1} + \mu_{21}\mu_{2\cdot p+1} + \ldots + \mu_{p1}\mu_{p\cdot p+1})\,\alpha_1\,\alpha_{p+1}.$$

α_{p+1} ayant une limite supérieure, on peut toujours supposer α_1 assez petit pour que $\alpha_1\,\alpha_{p+1}$ soit moindre que $\frac{1}{4p}$; alors le coefficient précédent est forcément nul et l'on a

$$\mu_{11}\mu_{1\cdot p+1} + \mu_{21}\mu_{2\cdot p+1} + \ldots + \mu_{p1}\mu_{p\cdot p+1} = 0;$$

le coefficient $x_2 x_{p+1}$ dans F provient alors uniquement de $A_2 A_{p+1}$, et si α_2 est assez petit, on aura

$$\mu_{12}\mu_{1\cdot p+1} + \ldots + \mu_{p2}\mu_{p\cdot p+1} = 0,$$

et ainsi de proche en proche on démontre les relations

$$(22) \qquad \sum_{j=1}^{j=p} \mu_{ji}\,\mu_{j.p+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Or les relations (22) sont homogènes et linéaires par rapport aux quantités $\mu_{j.p+1}$, et le déterminant des quantités μ_{ji} $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$ n'est pas nul, car le carré de ce déterminant est le déterminant des quantités $\sum_{h=1}^{h=p} \mu_{hi}\,\mu_{hj}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$, et d'après les relations (20) ce déterminant se réduit à $\frac{1}{2^p}$. Donc on a

$$(23) \qquad \mu_{j.p+1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

En se reportant à la formule (19) et en tenant compte des relations (20) et (23), on voit que le terme en x_{p+1}^2 dans F ne provient plus que de A_{p+1}^2 et qu'il est égal à α_{p+1}^2. Comme α_{p+1} ne peut être nul et que α_{p+1}^2 doit être entier, α_{p+1} est au moins égal à 1. Or le produit $\alpha_{p+1}\,\alpha_{n-p}$ a une limite supérieure, donc α_{n-p} est inférieur à cette limite; et, d'après le théorème IV, toutes les quantités α_i où i ne surpasse pas $n-p$ ont des limites supérieures.

Ainsi $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots, \alpha_{n-p}$ ont tous des limites supérieures et inférieures positives quand on suppose $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ suffisamment petits.

Maintenant le coefficient de $x_1\,x_{p+2}$ dans F provient uniquement, à cause des relations (20) et (22), de $A_1\,A_{p+2}$ et il est égal à

$$-4(\mu_{11}\,\mu_{1.p+2} + \ldots + \mu_{p1}\,\mu_{p.p+2})\,\alpha_1\,\alpha_{p+2},$$

et comme α_{p+2} a une limite supérieure on pourra, en diminuant au besoin α_1, faire en sorte que ce coefficient soit nécessairement nul. On aura alors

$$\mu_{11}\,\mu_{1.p+2} + \ldots + \mu_{p1}\,\mu_{p.p+2} = 0,$$

et ainsi de suite. On démontrera de proche en proche toutes les relations

$$\sum_{h=1}^{h=p} \mu_{hi}\,\mu_{hj} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ j = p+1, p+2, \ldots, n-p).$$

D'où, en s'appuyant comme précédemment sur ce que le déterminant des quantités μ_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$ n'est pas nul, on tirera toutes les équations (21). Comme, pour que cela arrive, il suffit que α_1, α_2, α_3, ..., α_p soient suffisamment petits, et que l'on peut rendre ces quantités aussi petites que l'on veut en supposant α_{n-p+1} suffisamment grand, il existe une quantité L_1 telle que, en supposant α_{n-p+1} supérieur à L_1 les conditions (20) et (21) aient lieu.

THÉORÈME X. — *Les quantités α_i, où i ne surpasse pas $n - p$, sont inférieures à des limites qui ne dépendent que de* D.

Il y a deux cas à distinguer. Si α_{n-p+1} est inférieur à L_1, d'après le théorème IV les quantités α_i sont inférieures à L_1 multiplié par des quantités déterminées. Si α_{n-p+1} est supérieur à L_1, il résulte de la démonstration du théorème IX que ces quantités sont aussi inférieures à des limites déterminées. La plus grande de celle des deux limites que nous obtenons pour α_i dans les deux cas répond à l'énoncé du théorème X.

THÉORÈME XI. — *Soit q un nombre inférieur ou égal à p, p étant au plus égal à $\frac{n}{2}$; supposons que des quantités μ_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, p; j = 1, 2, \ldots, n)$ satisfassent aux conditions suivantes :*

$$\sum_{h=1}^{h=n} \mu_{ih}\mu_{jh} = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p), \tag{24}$$

$$\delta_{ii} = 1, \qquad \delta_{ij} = 0 \qquad \textit{pour} \qquad i \neq j,$$

$$\sum_{h=1}^{p} \mu_{hi}\mu_{hj} = \eta_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q; j = 1, 2, n - q), \tag{25}$$

$$\eta_{ii} = \frac{1}{2}, \qquad \eta_{ij} = 0 \qquad \textit{pour} \qquad i \neq j,$$

on a

$$\mu_{i,n-q+j} = \sum_{h=1}^{h=q} \omega_{jh}\mu_{ih}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, q),$$

où les quantités

$$\omega_{jh} (j, h = 1, 2, \ldots, q)$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale.

Posons, en effet,

$$(26)\qquad \sum_{h=1}^{h=p} \mu_{hi}\mu_{h.n-q+j} = \rho_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, q).$$

Multiplions les deux membres de l'équation (24) par μ_{ik}, où k ne surpasse pas q; laissant à j une valeur fixe, donnons à i les valeurs 1, 2, ..., p et ajoutons les équations ainsi obtenues, il vient

$$\sum_{i=1}^{i=p} \mu_{ik} \sum_{h=1}^{h=n} \mu_{ih}\mu_{jh} = \mu_{jk},$$

ou encore

$$\sum_{h=1}^{h=n} \mu_{jh} \sum_{i=1}^{i=p} \mu_{ik}\mu_{ih} = \mu_{jk},$$

ou, d'après (25) et (26),

$$\sum_{h=1}^{h=n-q} \mu_{jh}\eta_{hk} + \sum_{h=1}^{h=q} \mu_{j.n-q+h}\rho_{kh} = \mu_{jk};$$

et en tenant compte de la définition des quantités η_{ij} :

$$(27)\qquad \frac{1}{2}\mu_{jk} = \sum_{h=1}^{h=q} \rho_{kh}\mu_{j.n-q+h};$$

comme, dans les quantités ρ_{ij}, les indices i et j varient chacun de 1 à q, ces quantités forment les éléments d'un déterminant Δ d'ordre q. Δ n'est pas nul, en effet, les quantités μ_{jk}, où j varie de 1 à p, et où k varie de 1 à q, forment les éléments d'une matrice M de déterminants, et chacun de ces déterminants contient, d'après les formules (27) et le théorème relatif à la multiplication des déterminants, Δ en facteur. Si Δ était nul, tous les déterminants de M seraient donc nuls. Considérons le déterminant qui a pour éléments les quantités

$$\sum_{h=1}^{h=p} \mu_{hi}\mu_{hj} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, q);$$

on déduit aisément des formules (25) que la valeur de ce déterminant est $\frac{1}{2^q}$; d'autre part, il se décompose en une somme de produits de deux déterminants d'ordre q qui appartiennent à la matrice M. Tous les déterminants de M ne peuvent donc être nuls et, par suite, Δ n'est pas nul. Δ n'étant pas nul, on pourra résoudre les formules (27) par rapport aux quantités $\mu_{j.n-q+h}$ ($j = 1, 2, \ldots, p$; $h = 1, 2, \ldots, q$), et l'on aura

$$\mu_{i.n-q+j} = \sum_{h=1}^{h=q} \omega_{jh}\mu_{ih} \qquad (i = 1, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q). \tag{28}$$

Soit k un entier au plus égal à q; multiplions les deux membres de l'équation (28) par μ_{ik} et ajoutons les équations obtenues en donnant à i les valeurs $1, 2, \ldots, p$; il vient, en tenant compte des relations (25),

$$\sum_{i=1}^{i=p} \mu_{ik}\mu_{i.n-q+j} = \frac{1}{2}\omega_{jk}; \tag{29}$$

or les relations (24) peuvent s'écrire

$$\sum_{h=1}^{h=n-q} \mu_{ih}\mu_{jh} + \sum_{h=1}^{h=q} \mu_{i.n-q+h}\mu_{j.n-q+h} = \delta_{ij}. \tag{30}$$

Multiplions les deux membres de (30) par μ_{ik}, puis ajoutons en donnant à i les valeurs $1, 2, \ldots, p$, il vient, en utilisant les relations (25) et (29) et après avoir multiplié par 2,

$$\sum_{h=1}^{h=q} \omega_{hk}\mu_{j.n-q+h} = \mu_{jk}$$

et, en remplaçant les quantités $\mu_{j.n-q+h}$ par les valeurs (28),

$$\sum_{h=1}^{h=q} \omega_{hk} \sum_{l=1}^{l=q} \omega_{hl}\mu_{jl} = \mu_{jk},$$

et en attribuant toujours au symbole δ_{ij} la même signification que plus haut

$$\sum_{l=1}^{l=q} \mu_{jl}\left(\sum_{h=1}^{h=q} \omega_{hk}\omega_{hl} - \delta_{kl}\right) = 0. \tag{31}$$

Si dans les équations (31) on donne à j les valeurs 1, 2, ..., p, on obtient un système de p équations homogènes par rapport aux q quantités

$$\sum_{h=1}^{h=q} \omega_{hk}\omega_{hl} - \delta_{kl} \qquad (l = 1, 2, \ldots, q);$$

or les déterminants de la matrice formée par les quantités μ_{jl} ne sont pas tous nuls : on a donc

$$\sum_{h=1}^{h=q} \omega_{hk}\omega_{kl} - \delta_{kl} = 0. \tag{32}$$

Les équations (32) expriment précisément que les quantités ω_{ij} sont les coefficients d'une substitution orthogonale.

Théorème XII. — *Si α_{n-p+1} est inférieur à la quantité L_1 définie au théorème* IX, *il existe une quantité L_2 qui ne dépend que de* D, *et qui est telle que, si α_{n-p+2} est supérieur à L_2, les relations* (25) *aient lieu pour $q = p - 1$.*

De même on pourra définir une quantité L_3 ne dépendant que de D et telle que, si α_{n-p+2} est inférieur à L_2 et α_{n-p+3} supérieure à L_3, les relations (25) aient lieu pour $q = p - 2$, et ainsi de suite. De proche en proche, on prouve qu'il existe une limite L_p telle que, si α_{n-1} est moindre que L_{p-1} et α_n supérieur à L_p, les relations (25) aient lieu pour $q = 1$.

Supposons, en effet, α_{n-p+1} moindre que L_1; le coefficient de $x_i x_j$ dans $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est de la forme

$$\sum C_{hk}\alpha_{hi}\alpha_{kj}, \tag{33}$$

où les quantités C_{hk} sont des fonctions du second degré des quantités μ_{lm} à coefficients numériques et ont, par suite, des valeurs essentiellement limitées; h ne surpasse pas i, k ne surpasse pas j; par suite, d'après le théorème IV et son corollaire, le coefficient de $x_i x_j$ dans F est inférieur à $\alpha_i \alpha_j$ multiplié par une quantité déterminée.

Dans $\Pi\alpha_i$ le produit $\alpha_{p-1}\alpha_{n-p+2}$ étant le produit de deux facteurs équidistants des extrêmes a une limite supérieure ; on pourra donc, en s'appuyant toujours sur le théorème IV, choisir α_{n-p+2} assez grand pour que non seulement α_{p-1}, mais toutes les quantités α_i, où i ne surpasse pas $p-1$, soient moindres qu'une quantité qu'on pourra prendre aussi petite que l'on voudra.

D'autre part, si j ne surpasse pas $n-p+1$, comme α_{n-p+1} est inférieur à L_1, toutes les quantités α_j ont des limites supérieures.

On pourra donc choisir α_{n-p+2} assez grand pour que tous les produits $\alpha_i\alpha_j$, où $i \leqq p-1$, $j \leqq n-p+1$ soient moindres qu'une quantité qu'on pourra prendre aussi petite qu'on le voudra. On pourra donc aussi choisir α_{n-p+2} assez grand pour que les coefficients de $x_i x_j$ dans F pour $i \leqq p-1$, $j \leqq n-p+1$ soient aussi petits qu'on le voudra. Mais les coefficients de F, dès qu'ils deviennent moindres que 1, sont forcément nuls puisqu'ils sont entiers.

En considérant successivement les coefficients de x_1^2, $x_1 x_2$, ..., $x_1 x_{n-p+1}$, on obtient, d'une manière analogue à celle dont on a démontré le théorème IX, les relations (25) pour $i=1$; on considérera ensuite les coefficients de x_2^2, $x_2 x_3$, ..., $x_2 x_{n-p+1}$, ce qui permettra d'établir les relations (25) pour $i=2$ et ainsi de suite. L'existence de L_2 est donc démontrée.

L'existence de L_2 une fois établie, on prouve tout à fait de même celle de L_3 et ainsi de suite.

Théorème XIII. — *Tous les coefficients de* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ont des limites supérieures, fonctions de* D *seulement.*

Soit, en effet, q l'un des nombres 1, 2, ... p. Je suppose que α_{n-q} soit inférieur à L_{p-q} et que α_{n-q+1} soit supérieur à L_{p-q+1}.

Le cas où α_{n-p+1} est supérieur à L_1 présente d'ailleurs les mêmes circonstances que les autres, car nous savons que α_{n-p} a dans tous les cas une limite supérieure, et il peut se traiter en même temps.

D'après les théorèmes IX et XII, dans l'un quelconque de ces cas les relations (25) ont lieu pour la valeur de q qui correspond à ce cas.

Considérons $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sous la forme (19), et le coefficient de $x_i x_j$ dans F sous la forme (33). Pour des valeurs déterminées de h

et de k, la partie $C_{hk}\alpha_{hi}\alpha_{kj}$ de ce coefficient est la part contributive qu'y apporte le produit des deux fonctions linéaires A_h et A_k.

Or, d'après le corollaire du théorème IV, tous les coefficients de A_h sont en valeur absolue moindre que α_h multiplié par des quantités fixes. Il en résulte que, si l'on connaît une limite supérieure pour le produit $\alpha_h\alpha_k$, toutes les parts contributives du produit A_hA_k dans les coefficients de F ont des limites supérieures.

Or, d'après les théorèmes VIII et IV, le produit $\alpha_i\alpha_j$ a une limite supérieure si $i+j\leqq n+1$; il aura aussi une limite supérieure si α_i et α_j ont séparément des limites supérieures, c'est-à-dire si $i\leqq n-q$, $j\leqq n-q$.

Parmi les produits A_hA_k, les seuls qui puissent apporter aux coefficients de f des parts contributives illimitées se partagent par suite en deux catégories.

La première comprendra les produits A_hA_k pour lesquels h est au moins égal à $n-q+1$, et k au moins égal à $q+1$.

La seconde comprendra les produits A_hA_k pour lesquels h est au moins égal à $n-q+1$, et pour lesquels k est inférieur ou égal à q, mais de telle sorte que $h+k$ surpasse $n+1$, l'inégalité excluant l'égalité.

Je dis d'abord que les produits A_hA_k de la première catégorie disparaissent tous dans le développement du second membre de (19).

Considérons d'abord ceux pour lesquels l'indice k (qui, comme nous venons de le dire, est supérieur à q) est inférieur à $n-q+1$. L'indice h étant au moins égal à $n-q+1$ peut se représenter par $n-q+j$, j étant positif. Le multiplicateur de $A_{n-q+j}A_k$ dans le second membre de (19) est

$$-4\sum_{i=1}^{i=p}\mu_{ik}\mu_{i.n-q+j};$$

or, d'après la formule (28), on aura

$$\sum_{i=1}^{i=p}\mu_{ik}\mu_{i.n-q+j}=\sum_{l=1}^{l=q}\omega_{jl}\sum_{i=1}^{i=p}\mu_{ik}\mu_{il}.$$

D'après les formules (25) les sommes $\sum_{i=1}^{i=p} \mu_{ik}\mu_{il}$ sont égales à η_{kl} et η_{kl} est nul, parce que l étant ici un nombre au plus égal à q, et k étant supérieur à q, l et k ne peuvent être égaux. Le multiplicateur de $A_{n-q+j}A_k$ est donc nul.

Considérons maintenant les produits $A_h A_k$ de la première catégorie pour lesquels $h = n-q+j$, $k = n-q+l$, j et l étant positifs. Supposons d'abord $j = l$. Dans le second membre de la formule (19) le multiplicateur de A^2_{n-q+j} est

$$1 - 2\sum_{i=1}^{i=p} \mu^2_{i.n-q+j};$$

or, d'après (28), on a

$$\sum_{i=1}^{i=p} \mu^2_{i.n-q+j} = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{r=1}^{r=q}\sum_{s=1}^{s=q} \omega_{jr}\omega_{js}\mu_{ir}\mu_{is},$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} \mu^2_{i.n-q+j} = \sum_{r=1}^{r=q}\sum_{s=1}^{s=q} \omega_{jr}\omega_{js}\sum_{i=1}^{i=p}\mu_{ir}\mu_{is} = \sum_{r=1}^{r=q}\sum_{s=1}^{s=q}\eta_{rs}\omega_{jr}\omega_{js}.$$

D'après les valeurs des quantités η_{rs}, ceci se réduit à

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=q}\omega^2_{jr} = \frac{1}{2},$$

puisque les ω_{jr} sont les coefficients d'une substitution orthogonale.

Supposons i différent de l. Dans le second membre de (19) le multiplicateur de $A_{n-q+j}A_{n-q+l}$ est

$$-4\sum_{i=1}^{i=p}\mu_{i.n-q+j}\mu_{i.n-q+l};$$

or, d'après (28),

$$\sum_{i=1}^{=p}\mu_{i.n-q+j}\mu_{i.n-q+l} = \sum_{r=1}^{r=q}\sum_{s=1}^{s=q}\omega_{jr}\omega_{ls}\sum_{i=1}^{i=p}\mu_{ir}\mu_{is} = \sum_{r=1}^{r=q}\sum_{s=1}^{s=q}\eta_{rs}\omega_{jr}\omega_{ls} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=q}\omega_{jr}\omega_{lr}.$$

Or, les ω_{jr} étant les coefficients d'une substitution orthogonale

$\sum_{r=1}^{r=q} \omega_{jr}\omega_{lr}$ où j et l sont différents est nulle. Le multiplicateur de $A_{n-q+j}A_{n-q+l}$ est donc nul. Ainsi les multiplicateurs des produits de la première catégorie sont tous nuls.

Les produits de la seconde catégorie donnent lieu, au contraire, à une discussion nouvelle. Chacun d'eux est de la forme $A_i A_{n+1-i+j}$ où i est au plus égal à q, et où j est un nombre positif au plus égal à $i-1$. Leurs contributions aux coefficients de F ont des limites supérieures, si le produit $\alpha_i \alpha_{n+1-i+j}$ a une limite supérieure.

Envisageons le produit $\alpha_2 \alpha_n$; je dis qu'on peut déterminer une quantité N telle que, si $\alpha_2\alpha_n$ est supérieur à N, les multiplicateurs des produits $A_i A_n$, pour $i \geqq 2$, s'annulent tous dans le développement du second membre de (19). Considérons, en effet, le produit

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_{n-1}\alpha_n = (\alpha_1\alpha_n)(\alpha_2\alpha_{n-1}). \tag{34}$$

Les deux produits entre parenthèses dans le second membre de (34) comprennent des facteurs de D équidistants des extrêmes. Ils ont donc des limites supérieures. Le produit des quatre facteurs a donc une limite supérieure, et par suite, en supposant $\alpha_2\alpha_n$ assez grand, on pourra rendre, d'après le théorème IV, aussi petits qu'on le voudra non seulement $\alpha_1\alpha_{n-1}$, mais tous les produits $\alpha_1\alpha_r$ où r ne surpasse pas $n-1$. Il en résulte que les coefficients de $x_1 x_r$ pour r moindre que n, dans F, pourront être rendus moindres que 1. Alors ils deviennent nuls, puisqu'ils sont entiers. On en déduit, d'après la méthode employée au théorème IX,

$$\sum_{i=1}^{i=p} \mu_{i1}\mu_{i,n-q+j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, q-1)$$

et d'après les formules (28)

$$\sum_{h=1}^{h=q} \omega_{jh} \sum_{i=1}^{i=p} \mu_{i1}\mu_{ih} = 0.$$

On en déduit (35) $\omega_{j1} = 0$, pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$.

Or, en résolvant les formules (28) par rapport aux quantités μ_{ih}, il vient

(36) $$\mu_{ih} = \sum_{j=1}^{j=q} \omega_{jh}\mu_{i.n-q+j} \qquad (h = 1, 2, \ldots, q);$$

en particulier, en faisant $h = 1$, et en tenant compte de (35),

(37) $$\mu_{i1} = \omega_{q1}\mu_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

d'ailleurs ω_{q1} est égal à ± 1, parce que $\sum_{j=1}^{j=q}\omega_{j1}^2 = 1$, et que les autres quantités ω_{j1} sont nulles.

Or, on a

$$\sum_{i=1}^{i=p}\mu_{i1}\mu_{i2} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=p}\mu_{i1}\mu_{i3} = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum_{i=1}^{i=p}\mu_{i1}\mu_{iq} = 0,$$

et l'on en déduit

$$\sum_{i=1}^{i=p}\mu_{in}\mu_{i2} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=p}\mu_{in}\mu_{i3} = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum_{i=1}^{i=p}\mu_{in}\mu_{iq} = 0.$$

Il en résulte que les multiplicateurs des produits A_iA_n pour $i \geqq 2$ sont tous nuls.

Plus généralement, on peut déterminer une quantité N_{i1} fonction de D seulement, telle que si le produit $\alpha_i\alpha_{n+2-i}$ est supérieur à N_{i1} les multiplicateurs des produits A_hA_k pour $h \geqq i$, $k \geqq n + 2 - i$, s'annulent tous dans le développement du second membre de (19). En effet, le produit

$$\alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_{n+1-i}\alpha_{n+2-i} = (\alpha_{i-1}\alpha_{n+2-i})(\alpha_i\alpha_{n+1-i})$$

a une limite supérieure fonction de D, parce que chaque groupe mis entre parenthèse comprend deux facteurs équidistants des extrêmes; donc en supposant $\alpha_i\alpha_{n+2-i}$ assez grand, on pourra rendre $\alpha_{i-1}\alpha_{n+1-i}$ et aussi tous les produits $\alpha_r\alpha_s$, où r est au plus égal à $i - 1$, et où s est au plus égal à $n + 1 - i$, aussi petits que l'on voudra; par suite, on pourra rendre dans F moindres que l'unité les coefficients des produits x_rx_s, pour $r \leqq i - 1$, $s \leqq n + 1 - i$. Ces coefficients étant entiers deviendront alors nécessairement nuls. On en conclura, d'après la méthode du théorème IX,

$$(38)\qquad \sum_{l=1}^{l=p}\mu_{lt}\mu_{l.n-q+j}=0 \qquad (t=1,2,\ldots,i-1;\ j=1,2,\ldots,q+1-i).$$

En remplaçant dans (38) $\mu_{l.n-q+j}$ par la valeur (28), on en déduit

$$\sum_{h=1}^{h=q}\omega_{jh}\sum_{l=1}^{l=p}\mu_{lt}\mu_{lh}=0;$$

or

$$\sum_{l=1}^{l=p}\mu_{lt}\mu_{lh}=\eta_{th};$$

on en déduit

$$\omega_{jt}=0 \qquad (t=1,2,\ldots,i-1;\ j=1,2,\ldots,q+1-i).$$

Envisageons le tableau des quantités ω_{ij} :

$$\begin{array}{ccccccc}
\omega_{11}, & \omega_{12}, & \ldots, & \omega_{1.i-1}, & \omega_{1.i}, & \ldots, & \omega_{1q}, \\
\omega_{21}, & \ldots, & \ldots, & \omega_{2.i-1}, & \omega_{2i}, & \ldots, & \omega_{2q}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
\omega_{q+1-i.1}, & \ldots, & & \omega_{q+1-i.i-1}, & & \ldots, & \omega_{q+1-i.q}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
\omega_{q1}, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \omega_{qq}.
\end{array}$$

Dans ce Tableau, les $i-1$ premiers éléments de chacune des $q+1-i$ premières lignes sont tous nuls. Or on a

$$\sum_{l=1}^{l=q}\omega_{rl}\omega_{sl}=\partial_{rs} \qquad (\partial_{rs}=0 \text{ pour } r\neq s;\ \partial_{rs}=1 \text{ pour } r=s);$$

on en déduit

$$\sum_{l=q+2-i}^{q}\omega_{rl}\omega_{sl}=\partial_{rs},$$

par suite, les quantités

$$\omega_{lj} \quad \text{pour} \quad (l=q+2-i,\ \ldots,\ q;\ j=1,2,\ldots,i-1)$$

forment séparément les coefficients d'une substitution orthogonale.

On en déduit immédiatement

$$\omega_{lj} = 0 \qquad (l = q+2-i, \ldots, q;\ j = i, i+1, \ldots, q),$$

et les quantités

$$\omega_{lj} \quad \text{pour} \quad (l = 1, 2, \ldots, q+1-i;\ j = i, i+1, \ldots, q)$$

forment aussi séparément les coefficients d'une substitution orthogonale. Il en résulte que, dans les formules (28), les expressions de

$$\mu_{l.n+2-i}, \quad \mu_{l.n+3-i}, \quad \ldots, \quad \mu_{ln} \qquad (l = 1, 2, \ldots, p)$$

ne contiennent plus que les quantités

$$\mu_{l1}, \quad \mu_{l2}, \quad \ldots, \quad \mu_{l.i-1} \qquad (l = 1, 2, \ldots, p).$$

On en déduit

$$\sum_{l=1}^{l=p} \mu_{l.h}\mu_{l.n+2-i} = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum_{l=1}^{l=p} \mu_{lh}\mu_{ln} = 0 \qquad (h = i, i+1, \ldots, q),$$

et ces égalités prouvent que les multiplicateurs de $A_i A_{n+2-i}, \ldots, A_i A_n, \ldots$ sont tous nuls.

On peut déterminer une quantité N_{i2}, fonction de D seulement, telle que si le produit $\alpha_i \alpha_{n+2-i}$ est inférieur à N_{i1}, et le produit $\alpha_i \alpha_{n+3-i}$ supérieur à N_{i2}, les multiplicateurs des $A_h A_k$ pour $h \geqq i$, $k \geqq n+3-i$ soient tous nuls.

Supposons en effet $\alpha_i \alpha_{n+2-i}$ inférieur à N_{i1} ; d'après le théorème VII, le produit $\alpha_i \alpha_{n+1-i}$ est supérieur à une quantité déterminée H. Par conséquent le rapport $\frac{\alpha_{n+2-i}}{\alpha_{n+1-i}}$ est inférieur à $\frac{N_{i1}}{H}$.

Le produit

$$\alpha_{i-2}\alpha_i\alpha_{n+1-i}\alpha_{n+3-i}$$

se décompose en deux groupes de facteurs de D équidistants des extrêmes, et est par conséquent limité supérieurement; on peut donc supposer $\alpha_i \alpha_{n+3-i}$ assez grand pour que $\alpha_{i-2}\alpha_{n+1-i}$ soit aussi petit que l'on voudra, et comme dans l'hypothèse actuelle α_{n+2-i} est inférieur à α_{n+1-i} multiplié par une quantité fixe, on pourra supposer $\alpha_i \alpha_{n+3-i}$ assez grand pour que $\alpha_{i-2}\alpha_{n+2-i}$ et aussi $\alpha_h \alpha_k$, où $h \leqq i-2$, $k \leqq n+2-i$ soient aussi petits que l'on voudra, par suite, pour que les coefficients de $x_h x_k$ dans F, pour $h \leqq i-2$, $k \leqq n+2-i$, soient tous nuls. On en déduira, en raisonnant comme tout à l'heure,

$$\omega_{jt} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, i-2;\ j = 1, 2, \ldots, q+2-i).$$

Par suite, les quantités ω_{lj}, pour

$$(l = q+3-i, \ldots, q;\ j = 1, 2, \ldots, i-2),$$

déterminent séparément une substitution orthogonale. Les quantités ω_{lj}, pour

$$(l = 1, 2, \ldots, q+2-i;\ j = i-1, i, \ldots, q),$$

déterminent aussi séparément une substitution orthogonale.

Les expressions de $\mu_{l.n+3-i}, \ldots, \mu_{ln}$ ne contiennent alors plus que $\mu_{l1}, \mu_{l2}, \ldots, \mu_{l.i-2}$; par suite,

$$\sum_{l=1}^{p} \mu_{lh} \mu_{lk} = 0 \qquad (h = i-1, \ldots, q;\ k = n+3-i, \ldots, n),$$

et ainsi de suite de proche en proche.

Après avoir défini la quantité $N_{i.i-1}$, un raisonnement analogue prouve qu'il existe une quantité N_{ii} telle que, si $\alpha_i \alpha_{n-1}$ est inférieur à $N_{i.i-1}$ et $\alpha_i \alpha_n$ supérieur à N_{ii}, les multiplicateurs de $A_h A_n$, dans le second membre de (19) pour $h \geqq i$, sont tous nuls.

Il résulte de cette discussion que les produits $A_h A_k$, quels que soient h et k, n'apportent dans aucune circonstance, aux coefficients de F, que des contributions limitées par le déterminant D.

En effet, ou bien α_n est inférieur à L_p, et alors tous les coefficients de F ont des limites supérieures, ou bien α_n est supérieur à L_p, et alors on se trouve dans l'un des cas discutés au théorème XII. Les produits $A_h A_k$ de la première catégorie n'apportent aucune contribution aux coefficients de F; un produit $A_i A_k$ de la seconde catégorie ($i \leqq q$) n'apportera aux coefficients de F que des contributions limitées, si $\alpha_i \alpha_n$ est inférieur à N_{ii}. Dans le cas contraire, il existera un nombre j tel que $\alpha_i \alpha_{n+1-i+j}$ soit supérieur à N_{ij}, mais que $\alpha_i \alpha_{n-i+j}$ soit inférieur à $N_{i.j-1}$, et, dans ce cas, les produits $A_i A_k$ qui pourraient donner lieu à des contributions pour lesquelles on n'aurait pas de limites supérieures disparaissent du développement de F. C. Q. F. D.