ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. DIDON

Sur deux systèmes d'équations aux dérivées partielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 6 (1869), p. 7-25
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6__7_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR DEUX SYSTÈMES
D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR M. DIDON,
DOCTEUR ÈS SCIENCES.

Dans le travail intitulé *Étude de certaines fonctions analogues aux fonctions* X_n *de Legendre, etc.*, que j'ai publié récemment dans ce Journal, j'ai indiqué pour chacune des fonctions $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$ un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, et résolu le premier de ces systèmes. Je me propose ici de donner la solution complète du second. Chacun de ces systèmes est satisfait par quatre fonctions distinctes, de sorte que, si l'on donne à m et à n toutes les valeurs entières et positives possibles, on obtient huit séries de fonctions.

Il était intéressant de chercher pour chacune de ces séries une fonction génératrice: c'est ce que j'ai fait dans ce qui va suivre. Enfin, j'ai mis sous forme d'intégrales définies la fonction $V_{m,n}$, et aussi les fonctions $\varphi_{m,n}$ et $V_{m,n}$ qui sont associées aux fonctions de deux variables analogues aux polynômes $\sin(n \arccos x)$ et $\cos(n \arccos x)$.

I.

Pour résoudre le système

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2} - xy\frac{d^2U}{dx\,dy} + (n-2)x\frac{dU}{dx} \\ &\qquad -(m+1)y\frac{dU}{dy} + (m+n)(m+1)U = 0, \\ &(1-y^2)\frac{d^2U}{dy^2} - xy\frac{d^2U}{dx\,dy} + (m-2)y\frac{dU}{dy} \\ &\qquad -(n+1)x\frac{dU}{dx} + (m+n)(n+1)U = 0, \end{aligned}\right.$$

auquel satisfait la fonction $U_{m,n}$, j'ai employé le système

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - xy\frac{d^2P}{dx\,dy} + 2(q-1)x\frac{dP}{dx} - y\frac{dP}{dy} + 2qP = 0, \\ &(1-y^2)\frac{d^2P}{dy^2} - xy\frac{d^2P}{dx\,dy} + 2(q-1)y\frac{dP}{dy} - x\frac{dP}{dx} + 2qP = 0 \end{aligned}\right.$$

tel, qu'en posant $\dfrac{d^{m+n}P}{dx^m\,dy^n} = U$, la fonction U satisfasse au système (1).

On a $q = m + n$. Le système (2) admet pour solutions deux polynômes : l'un d'eux est $(x^2 + y^2 - 1)^q$, l'autre peut se représenter par

$$(3)\quad \sum (-1)^{q-1-k-h} \frac{2.4.6\ldots 2k}{1.3.5\ldots(2k+1)} \frac{2.4.6\ldots 2h}{1.3.5\ldots(2h+1)} \frac{(q-1)!}{k!\,h!\,(q-1-h-k)!} x^{2k+1} y^{2h+1},$$

où la somme doit s'étendre à toutes les valeurs entières et positives de h et de k satisfaisant à la condition $h + k \leqq q - 1$.

Si l'on remarque que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\alpha\, d\alpha = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n+1)},$$

on verra que l'expression (3) peut s'écrire

$$\sum (-1)^{q-1-k-h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1}\alpha\, d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2h+1}\beta\, d\beta \frac{(q-1)!}{k!\,h!\,(q-1-k-h)!} x^{2k+1} y^{2h+1},$$

ou bien

$$\sum \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin\alpha y \sin\beta\,(x^2\sin^2\alpha)^k (y^2\sin^2\beta)^h (-1)^{q-1-k-h} \frac{(q-1)!}{k!\,h!\,(q-1-k-h)!}\,d\alpha\,d\beta,$$

ou enfin

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy \sin\alpha \sin\beta\,(x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta - 1)^{q-1}\,d\alpha\,d\beta.$$

La solution correspondante du système (1) sera donc

$$(4) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d^{m+n}\,xy\,(x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta - 1)^{m+n-1}}{dx^m\,dy^n} \sin\alpha \sin\beta\,d\alpha\,d\beta.$$

La forme de la formule de Lagrange, qui a permis à M. Hermite de mettre la fonction $U_{m,n}$ sous la forme $\frac{1}{m!\,n!\,2^{m+n}} \frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n}$, donnera immédiatement la somme

$$S = \sum \frac{a^m b^n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n\ldots 2^{m+n}} \frac{d^{m+n}\,xy\,(x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta - 1)^{m+n-1}}{dx^m\,dy^n},$$

car il suffira de faire dans cette formule

$$F = x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta - 1, \quad \Phi = \frac{xy}{x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta - 1}.$$

L'intégrale double $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} S \sin\alpha \sin\beta\,d\alpha\,d\beta$ sera la fonction génératrice des polynômes (4).

Pour donner une application de la forme précédente du polynôme (4) que je désignerai par R, je vais en déduire le système (1).

Pour cela, je pose

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d^{m+n}\,xy\,(x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta - z^2)^{m+n-1}}{dx^m\,dy^n} \sin\alpha \sin\beta\,d\alpha\,d\beta.$$

Par le théorème des fonctions homogènes, on aura

$$x\frac{dT}{dx}+y\frac{dT}{dy}-2(m+n-1)z^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d^{m+n}xy(x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\beta-z^2)^{m+n-2}}{dx^m\,dy^n}\sin\alpha\sin\beta\,d\alpha\,d\beta$$
$$=(m+n)\mathrm{T}.$$

On tire de là, après avoir fait $z=1$,

$$(5)\left\{\begin{aligned}&2(m+n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d^{m+n}xy(x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\beta-1)^{m+n-2}}{dx^m\,dy^n}\sin\alpha\sin\beta\,d\alpha\,d\beta\\&\quad=x\frac{d\mathrm{R}}{dx}+y\frac{d\mathrm{R}}{dy}-(m+n)\mathrm{R}.\end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, soit

$$\mathrm{S}=xy(x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\beta-1)^{m+n-1};$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{S}}{dx}=&\,y(x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\beta-1)^{m+n-1}\\&+2(m+n-1)x^2y(x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\beta-1)^{m+n-2}\\&-2(m+n-1)x^2y\cos^2\alpha(x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\beta-1)^{m+n-2}.\end{aligned}$$

Mais l'égalité, facile à établir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k+1}\alpha\,d\alpha=2k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k-1}\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha,$$

où k désigne un nombre entier positif, conduisant à la suivante

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha(x^2\sin^2\alpha+\mathrm{A})^{q-1}\,d\alpha=2(q-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha\sin\alpha\,x^2(x^2\sin^2\alpha+\mathrm{A})^{q-2}\,d\alpha,$$

où q désigne aussi un nombre entier positif, on voit immédiatement que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\frac{d\mathrm{S}}{dx}\,d\alpha=2(m+n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2y(x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\beta-1)^{m+n-2}\sin\alpha\,d\alpha.$$

Par conséquent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\sin\beta\,\frac{d^{m+n+2}S}{dx^{m+2}\,dy^n}\,d\alpha\,d\beta$$

$$= 2(m+n-1)x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\sin\beta\,\frac{d^{m+n+1}\,xy(x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\beta-1)^{m+n-2}}{dx^{m+1}\,dy^n}\,d\alpha\,d\beta$$

$$+ 2(m+n-1)(m+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\sin\beta\,\frac{d^{m+n}\,xy(x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\beta-1)^{m+n-2}}{dx^m\,dy^n}\,d\alpha\,d\beta.$$

A cause de l'égalité (5) on a donc

$$\frac{d^2R}{dx^2} - x\,\frac{d\left[x\frac{dR}{dx}+y\frac{dR}{dy}-(m+n)R\right]}{dx}$$
$$-(m+1)\left[x\frac{dR}{dx}+y\frac{dR}{dy}-(m+n)R\right]=0;$$

c'est la première équation du système (1); on trouverait de même la seconde.

Jusqu'ici je n'ai considéré que les deux solutions du système (2), qui sont des polynômes; mais il y en a deux autres; l'une de ces dernières est

$$P = (1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}(1-x^2-y^2)^q\int_0^y \frac{d\theta}{(1-x^2-\theta^2)^{q+1}}.$$

Je fais $\theta = \sqrt{1-x^2}\,z$, il vient alors

$$\int_0^y \frac{d\theta}{(1-x^2-\theta^2)^{q+1}} = \int_0^{\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}} \frac{\sqrt{1-x^2}\,dz}{(1-x^2)^{q+1}(1-z^2)^{q+1}}$$
$$= \frac{1}{(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}}\int_0^{\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}} \frac{dz}{(1-z^2)^{q+1}}.$$

Donc

$$P = (1-x^2-y^2)^q\int_0^{\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}} \frac{dz}{(1-z^2)^{q+1}}.$$

Posant $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \xi$, on obtient

$$P = (1-x^2)^q (1-\xi^2)^q \int_0^{\xi} \frac{dz}{(1-z^2)^{q+1}};$$

mais

$$(1-\xi^2)^q \int_0^{\xi} \frac{dz}{(1-z^2)^{q+1}} = C \int_{-1}^{+1} \frac{(1-z^2)^q}{\xi - z}\, dz,$$

C désignant une certaine constante; donc on a, en négligeant cette constante,

$$P = \int_{-1}^{+1} \frac{[(1-x^2)(1-z^2)]^q}{\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} - z}\, dz.$$

La solution correspondante du système (1) sera

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^{m+n} \dfrac{[(1-x^2)(1-z^2)]^{m+n}}{\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} - z}}{dx^m\, dy^n}\, dz.$$

La formule de Lagrange permettra de trouver immédiatement la fonction génératrice des expressions précédentes; il suffira de faire dans cette formule

$$F = (1-x^2)(1-z^2), \quad \psi = \frac{1}{\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} - z}$$

et on trouvera la fonction génératrice sous la forme d'une intégrale définie prise entre les limites -1 et $+1$.

II.

Le système d'équations auquel satisfait la fonction $V_{m,n}$ définie par le développement

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1} = \sum a^m b^n V_{m,n}$$

est le suivant

$$(6)\begin{cases}(1-x^2)\dfrac{d^2V}{dx^2}-xy\dfrac{d^2V}{dx\,dy}-(n+3)x\dfrac{dV}{dx}+my\dfrac{dV}{dy}+m(m+n+2)V=0,\\(1-y^2)\dfrac{d^2V}{dy^2}-xy\dfrac{d^2V}{dx\,dy}-(m+3)y\dfrac{dV}{dy}+nx\dfrac{dV}{dx}+n(m+n+2)V=0.\end{cases}$$

On voit que la solution complète de ce système contiendra quatre constantes arbitraires, et que, par conséquent, il y aura, comme solutions, quatre fonctions distinctes. Pour trouver cette solution complète, je remplace les variables x et y, par d'autres ξ et η, liées aux premières par les relations

$$x=\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}},\quad y=\frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}.$$

Le système (6) se transforme dans le suivant

$$(1+\xi^2)(1+\xi^2+\eta^2)\frac{d^2V}{d\xi^2}+\xi\eta(1+\xi^2+\eta^2)\frac{d^2V}{d\xi\,d\eta}+[(m+2)\eta^2-n(1+\xi^2)]\xi\frac{dV}{d\xi}$$
$$+[(m+1)(1+\eta^2)-(n+1)\xi^2]\eta\frac{dV}{d\eta}+m(m+n+2)V=0.$$

Je n'écris que l'une des équations de ce système; la seconde s'en déduira par le changement de ξ, η, m, n respectivement en η, ξ, n, m.

Posons ensuite

$$V=V'(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{m+n}{2}+1},$$

on obtiendra

$$(7)\begin{cases}(1+\xi^2)\dfrac{d^2V'}{d\xi^2}+\xi\eta\dfrac{d^2V'}{d\xi\,d\eta}+(2m+n+4)\xi\dfrac{dV'}{d\xi}\\\qquad+(m+1)\eta\dfrac{dV'}{d\eta}+(m+1)(m+n+2)V'=0,\\(1+\eta^2)\dfrac{d^2V'}{d\eta^2}+\xi\eta\dfrac{d^2V'}{d\xi\,d\eta}+(2n+m+4)\eta\dfrac{dV'}{d\eta}\\\qquad+(n+1)\xi\dfrac{dV'}{d\xi}+(n+1)(m+n+2)V'=0.\end{cases}$$

En cherchant un système de la forme

$$(1+\xi^2)\frac{d^2P}{d\xi^2}+\xi\eta\frac{d^2P}{d\xi\,d\eta}+h\xi\frac{dP}{d\xi}+h'\eta\frac{dP}{d\xi}+h''P=0,$$

$$(1+\eta^2)\frac{d^2P}{d\eta^2}+\xi\eta\frac{d^2P}{d\xi\,d\eta}+k\xi\frac{dP}{d\xi}+k'\eta\frac{dP}{d\eta}+k''P=0,$$

tel, qu'en posant $\frac{d^{m+n}P}{d\xi^m\,d\eta^n}=V'$, cette fonction V' satisfasse au système (7), on trouvera le système suivant

$$(1+\xi^2)\frac{d^2P}{d\xi^2}+\xi\eta\frac{d^2P}{d\xi\,d\eta}+4\xi\frac{dP}{d\xi}+\eta\frac{dP}{d\eta}+2P=0,$$

$$(1+\eta^2)\frac{d^2P}{d\eta^2}+\xi\eta\frac{d^2P}{d\xi\,d\eta}+4\eta\frac{dP}{d\eta}+\xi\frac{dP}{d\xi}+2P=0;$$

qu'on peut écrire

$$\frac{d\left[(1+\xi^2)\frac{dP}{d\xi}+\xi\eta\frac{dP}{d\eta}+2\xi P\right]}{d\xi}=0,$$

$$\frac{d\left[(1+\eta^2)\frac{dP}{d\eta}+\xi\eta\frac{dP}{d\xi}+2\eta P\right]}{d\eta}=0;$$

ou bien

$$(1+\xi^2)\frac{dP}{d\xi}+\xi\eta\frac{dP}{d\eta}+2\xi P=\varphi(\eta),$$

$$(1+\eta^2)\frac{dP}{d\eta}+\xi\eta\frac{dP}{d\xi}+2\eta P=\psi(\xi).$$

Rien de plus facile que de déterminer les fonctions φ et ψ.

Le système précédent d'équations est, en effet, équivalent au suivant

$$(8)\qquad \begin{cases}(1+\xi^2+\eta^2)\dfrac{dP}{d\xi}+2\xi P=(1+\eta^2)\,\varphi(\eta)-\xi\eta\,\psi(\xi),\\[2ex](1+\xi^2+\eta^2)\dfrac{dP}{d\eta}+2\eta P=(1+\xi^2)\,\psi(\xi)-\xi\eta\,\varphi(\eta).\end{cases}$$

En différentiant la première de ces équations par rapport à η, la seconde par rapport à ξ et retranchant les résultats, on obtient

$$(1+\eta^2)\varphi'(\eta)+3\eta\varphi(\eta)=(1+\xi^2)\psi'(\xi)+3\xi\psi(\xi).$$

Chacun des membres de cette égalité est donc égal à une constante A, ce qui donne

$$\psi(\xi)=\frac{A}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\xi \sqrt{1+\xi^2}\,d\xi+\frac{B}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\varphi(\eta)=\frac{A}{(1+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\eta \sqrt{1+\eta^2}\,d\eta+\frac{C}{(1+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (8), on tirera de la première de ces équations

$$\begin{aligned}P=(1+\xi^2+\eta^2)^{-1}\Bigg\{&\pi(\eta)+\frac{A\xi}{\sqrt{1+\eta^2}}\int_0^\eta\sqrt{1+\eta^2}\,d\eta+\frac{C\xi}{\sqrt{1+\eta^2}}\\&-A\eta\int_0^\xi\left[\frac{\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\xi\sqrt{1+\xi^2}\,d\xi\right]d\xi-B\eta\int_0^\xi\frac{\xi\,d\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg\},\end{aligned}$$

et de la seconde

$$\begin{aligned}P=(1+\xi+\eta^2)^{-1}\Bigg\{&\chi(\xi)+\frac{A\eta}{\sqrt{1+\xi^2}}\int_0^\xi\sqrt{1+\xi^2}\,d\xi+\frac{B\eta}{\sqrt{1+\xi^2}}\\&-A\xi\int_0^\eta\left[\frac{\eta}{(1+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\eta\sqrt{1+\eta^2}\,d\eta\right]d\eta-C\xi\int_0^\eta\frac{\eta\,d\eta}{(1+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg\}.\end{aligned}$$

En égalant ces deux valeurs, et divisant par $(1+\xi^2+\eta^2)^{-1}$, on aura

$$\begin{aligned}&\pi(\eta)-A\eta\int_0^\xi\left[\frac{\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\xi\sqrt{1+\xi^2}\,d\xi\right]d\xi-\frac{A\eta}{\sqrt{1+\xi^2}}\int_0^\xi\sqrt{1+\xi^2}\,d\xi+A\xi\eta\\&=\chi(\xi)-A\xi\int_0^\eta\left[\frac{\eta}{(1+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\eta\sqrt{1+\eta^2)}\,d\eta\right]d\eta-\frac{A\xi}{\sqrt{1+\eta^2}}\int_0^\eta\sqrt{1+\eta^2}\,d\eta+A\xi\eta.\end{aligned}$$

Mais le premier membre est une simple fonction de η, le second une simple fonction de ξ; donc chacun de ces membres est égal à une constante D. Donc finalement, on a

$$P=(1+\xi^2+\eta^2)^{-1}\left\{D+\frac{C\xi}{\sqrt{1+\eta^2}}+\frac{B\eta}{\sqrt{1+\xi^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{A}{2}\left[\frac{\xi}{\sqrt{1+\eta^2}}\log(\eta+\sqrt{1+\eta^2})+\frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2}}\log(\xi+\sqrt{1+\xi^2})\right]\right\}.$$

C'est l'expression $(1+\xi^2+\eta^2)^{-1}$ qui conduit au polynôme $V_{m,n}$ comme solution du système d'équations (6). Je l'avais déjà du reste démontré *à priori*.

Considérons maintenant la solution

$$(9)\qquad (1+\xi^2+\eta^2)^{-1}\frac{\xi}{\sqrt{1+\eta^2}}$$

du système (8), soit

$$\frac{1}{1\,2\ldots m\;1\,2\ldots n}\,\frac{d^{m+n}\left[(1+\xi^2+\eta^2)^{-1}\dfrac{\xi}{\sqrt{1+\eta^2}}\right]}{d\xi^m\,d\eta^n}=Q_{m,n},$$

on a

$$[1+(\xi+a)^2+(\eta+b)^2]^{-1}\frac{\xi+a}{\sqrt{1+(\eta+b)^2}}=\sum a^m b^n Q_{m,n}.$$

Remplaçons a et b respectivement par $a\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}$ et $b\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}$, il vient

$$\left(1+2\frac{a\xi+b\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}+a^2+b^2\right)^{-1}\frac{\xi+a\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}{\sqrt{1+\eta^2+2b\eta\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}+b^2(1+\xi^2+\eta^2)}}$$
$$=\sum a^m b^n(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{m+n}{2}+1}Q_{m,n}.$$

Si l'on substitue maintenant aux variables ξ et η les variables x et y, liées aux premières par les relations

$$x=\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}},\qquad y=\frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}},$$

le premier membre de l'équation précédente devient

$$(1+2ax+2by+a^2+b^2)^{-1}\frac{x+a}{\sqrt{1-x^2-y^2+(y+b)^2}}.$$

Par conséquent, la fonction génératrice des solutions du système (6), qui correspondent aux solutions (9) du système (8), et que je représenterai par $R_{m,n}$ est

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}\frac{x-a}{\sqrt{1-x^2-y^2+(y-b)^2}}$$
$$=(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}\frac{x-a}{\sqrt{1-x^2-2by+b^2}}.$$

On verra de même que les fonctions génératrices des deux autres solutions du système (6) sont

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}\frac{y-b}{\sqrt{1-x^2-y^2+(x-a)^2}}$$
$$=(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}\frac{y-b}{\sqrt{1-y^2-2ax+a^2}}$$

et

$$\frac{x-a}{\sqrt{1-x^2-y^2+(y-b)^2}}\log\frac{y-b+\sqrt{1-x^2-y^2+(y-b)^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$
$$+\frac{y-b}{\sqrt{1-x^2-y^2+(x-a)^2}}\log\frac{x-a+\sqrt{1-x^2-y^2+(x-a)^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

La composition de la fonction $R_{m,n}$ offre de l'intérêt.

On a

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}\frac{x-a}{\sqrt{1-x^2-2by+b^2}}=\sum a^m b^n R_{m,n}.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2-2by+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-2\dfrac{b}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{b^2}{1-x^2}}}$$
$$=\sum\frac{b^n}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1}}(X_n),$$

(X_n) désignant ce que devient la fonction X_n de Legendre, lorsqu'on y remplace x par $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$. Par conséquent

$$\frac{x-a}{\sqrt{1-x^2-2by+b^2}}=\sum b^n \frac{x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n+1}}(X_n)-\sum \frac{ab^n}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n+1}}(X_n).$$

Donc

$$\sum a^m b^n R_{m,n}=\left(\sum a^m b^n V_{m,n}\right)\left[\sum \frac{xb^n}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n+1}}(X_n)-\sum \frac{ab^n}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n+1}}(X_n)\right],$$

et

$$\begin{aligned}R_{m,n}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}V_{m,n}(X_0)+\frac{x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}V_{m,n-1}(X_1)+\ldots\\ +\frac{x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n+1}}V_{m,0}(X_n)\\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}V_{m-1,n}(X_0)-\frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}V_{m-1,n-1}(X_1)-\ldots\\ -\frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n+1}}V_{m-1,0}(X_n),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$R_{m,n}=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(X_{n-k})}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-k+1}}(xV_{m,k}-V_{m-1,k}).$$

Cette formule montre bien clairement que $R_{m,n}$ est de la forme $\frac{P}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$, P étant un polynôme entier et rationnel en x et y, du degré n en y, et dont les puissances de y ont des indices de même parité que n. Il est bien facile de former le système d'équations aux dérivées partielles auquel satisfait le polynôme P; ce système n'offre rien de simple.

Mais considérons la fonction $R_{m,n}$ sous le point de vue exprimé par l'égalité suivante

$$R_{m,n}=\sum X_{n-2h}\,y^{n-2h},$$

où X_{n-2h} désigne une fonction de x, qui n'est pas la fonction X_{n-2h} de Legendre. En substituant dans le système (6) cette valeur de $R_{m,n}$, et égalant à zéro les coefficients de y^{n-2h} dans les deux équations, on aura

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-x^2)\frac{d^2 X_{n-2h}}{dx^2} - (2n+3-2h)x\frac{dX_{n-2h}}{dx} \\ &\qquad + m(m+2n-2h+2)X_{n-2h} = 0, \\ &(n-2h+2)(n-2h+1)X_{n-2h+2} + 2hx\frac{dX_{n-2h}}{dx} \\ &\qquad + 2h(m+2n-2h+2)X_{n-2h} = 0. \end{aligned}\right.$$

La première des équations (10) donne

$$X_{n-2h} = A_{n-2h}\frac{d^{m+2n+1-2h}(1-x^2)^{m+n+\frac{1}{2}-h}}{dx^{m+2n+1-2h}},$$

la seconde permettra de trouver une relation entre les constantes A_{n-2h} et A_{n-2h+2}.

Par un calcul facile, on trouvera

$$A_{n-2h} = A_{n-2h+2}\frac{2m+2n+3-2h}{2h}(n-2h+2)(n-2h+1).$$

Si donc on suppose $A_n = 1$, il viendra

$$\begin{aligned} A_{n-2h} = {} & \frac{(2m+2n+1)(2m+2n-1)\ldots(2m+2n+3-2h)}{2^h.1.2.3\ldots h} \\ & \times n(n-1)(n-2)\ldots(n-2h+1). \end{aligned}$$

Ces fonctions X_{n-2h} jouissent d'une propriété curieuse. On reconnaîtra immédiatement, en différentiant $m+1$ fois la première des équations (10), que

$$\frac{d^{m+1}X_{n-2h}}{dx^{m+1}} = \frac{C}{(1-x^2)^{m+n+\frac{3}{2}-h}},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{d^{m+n+1}R_{m,n}}{dx^{m+1}\,dy^n} = \frac{k}{(1-x^2)^{m+n+\frac{3}{2}}},$$

k étant une constante.

En résumé, on voit que le système (6) n'admet qu'une seule solution qui soit un polynôme entier et rationnel en x et en y, c'est la fonction $V_{m,n}$ que le système (6) caractérise par conséquent, si l'on ne considère que les solutions du système qui soient des polynômes. Ce système permettra même d'en déterminer très-facilement les coefficients, et l'on trouvera

$$V_{m,n} = \sum (-1)^{k+h} \frac{x^{m-2h} y^{n-2k}}{4^{k+h}} \frac{m(m-1)\ldots(m-2h+1)}{h!} \times \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{h!} \frac{1}{(m+n)\ldots(m+n-h-k+1)}.$$

Il est à remarquer que l'on a

$$V_{m,n} = \frac{d^{n+m} Q}{dx^n\, dy^m},$$

Q étant un polynôme qui est le même tant que la somme $m+n$ ne change pas. Cette propriété, qui rapproche les deux fonctions $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, résulte immédiatement de ce que le système d'équations

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - xy\frac{d^2P}{dx\,dy} + (q-3)x\frac{dP}{dx} + qy\frac{dP}{dy} + 2qP = 0,$$
$$(1-y^2)\frac{d^2P}{dy^2} - xy\frac{d^2P}{dx\,dy} + (q-3)y\frac{dP}{dy} + qx\frac{dP}{dx} + 2qP = 0,$$

où $q = m+n$, différentié n fois par rapport à x et n fois par rapport à y, reproduit le système (6), si l'on pose $\frac{d^{n+m}P}{dx^n\,dy^m} = V$. On a

$$Q = \sum (-1)^{k+h} \frac{x^{q-2h} y^{q-2k}}{4^{h+k}} \frac{q(q-1)\ldots(q-2h+1)\,q(q-1)\ldots(q-2k+1)}{h!\,k!\,q(q-1)\ldots(q-h-k+1)}.$$

III.

Quand dans le polynôme $V_{m,n}$ on remplace x et y par $\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$ et $\frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$, ce polynôme se transforme dans l'expression suivante

$$\frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!}(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{m+n}{2}+1} \frac{d^{m+n}(1+\xi^2+\eta^2)^{-1}}{d\xi^m\, d\eta^n}.$$

Cette propriété va nous permettre de mettre $V_{m,n}$ sous la forme d'une intégrale double. On a, en effet,

$$
\begin{aligned}
(1+\xi^2+\eta^2)^{-1} &= \sum \frac{(-1)^{m+n}(m+n)!}{m!\,n!}\xi^{2m}\eta^{2n} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum (2m+2n+1)\frac{2.4.6\ldots(2m+2n)}{1.3.5\ldots(2m+2n+1)}\frac{(2m+2n)!}{(2m)!(2n)!} \\
&\quad\times\int_0^{2\pi}(i\xi\cos\alpha)^{2m}(i\eta\sin\alpha)^{2n}\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum (2m+2n+1)\frac{(2m+2n)!}{(2m)!(2n)!} \\
&\quad\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2n+1}\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}(i\xi\cos\alpha)^{2m}(i\eta\sin\alpha)^{2n}\,d\alpha.
\end{aligned}
$$

Comme l'intégrale $\int_0^{2\pi}\sin^m x\cos^n x\,dx$ est nulle, si les nombres m et n ne sont pas tous deux pairs, on en conclut qu'on peut mettre l'expression $(1+\xi^2+\eta^2)^{-1}$ sous la forme

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\sum (p+1)[i\sin\varphi(\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha)]^p.
$$

Par conséquent, on a

$$
(11)\quad (1+\xi^2+\eta^2)^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\,[1-i\sin\varphi(\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha)]^{-2}.
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^{m+n}(1+\xi^2+\eta^2)^{-1}}{d\xi^m\,d\eta^n} \\
&\quad = \frac{(m+n+1)!\,i^{m+n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{m+n+1}\varphi\cos^m\alpha\sin^n\alpha}{[1-i\sin\varphi(\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha)]^{m+n+2}}.
\end{aligned}
$$

Mais

$$
\xi = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad \eta = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad 1+\xi^2+\eta^2 = \frac{1}{1-x^2-y^2},
$$

donc

$$\mathrm{V}_{m,n} = -\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!\,2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi$$
$$\times \frac{\sin^{m+n}\varphi \cos^m\alpha \sin^n\alpha}{[\sqrt{x^2+y^2-1}+\sin\varphi(x\cos\alpha+y\sin\alpha)]^{m+n+2}}.$$

Comme vérification, cherchons d'après cette dernière formule $\sum a^m b^n \mathrm{V}_{m,n}$. Cette somme est égale à

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{[\sqrt{x^2+y^2-1}+\sin\varphi(x\cos\alpha+y\sin\alpha)]^2}$$
$$\times \sum (m+n+1)\left[\frac{\sin\varphi(a\cos\alpha+b\sin\alpha)}{\sqrt{x^2+y^2-1}+\sin\varphi(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}\right]^{m+n},$$

c'est-à-dire à

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{[\sqrt{x^2+y^2-1}+\sin\varphi(x\cos\alpha+y\sin\alpha)]^2}$$
$$\times \frac{1}{\left[1-\dfrac{\sin\varphi(a\cos\alpha+b\sin\alpha)}{\sqrt{x^2+y^2-1}+\sin\varphi(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}\right]^2},$$

ou enfin à

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\{\sqrt{x^2+y^2-1}+\sin\varphi\,[(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha]\}^2}.$$

En vertu de la formule (11), l'expression précédente se transforme en la suivante

$$-\frac{1}{x^2+y^2-1}\left(1+\frac{(x-a)^2}{1-x^2-y^2}+\frac{(y-b)^2}{1-x^2-y^2}\right)^{-1},$$

qui est égale à $(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}$.

Les fonctions $V_{m,n}$ et $\mathcal{V}_{m,n}$, qui sont associées aux fonctions $U_{m,n}$ et $\mathcal{U}_{m,n}$ analogues à $\cos(n \arccos x)$ et $\sin(n \arccos x)$ se mettent sous une forme plus simple que la fonction $\mathrm{V}_{m,n}$, car on peut les représenter par une intégrale définie simple.

On a

$$(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum a^m b^n V_{m,n},$$

et on reconnaîtra facilement que par la subtitution $x = \dfrac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}$, $y = \dfrac{\eta}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}$, $V_{m,n}$ se transforme en

$$\frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!}(1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{m+n}{2}+1} \frac{d^{m+n}(1 + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{1}{2}}}{d\xi^m\, d\eta^n}.$$

L'égalité

$$(12) \qquad \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{A + iB\cos\alpha + iC\sin\alpha},$$

devient, quand on y fait $A = 1$, $B = \xi$, $C = \eta$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{1 + i\xi\cos\alpha + i\eta\sin\alpha}.$$

On déduira de cette formule, par un calcul analogue à celui qui a été fait pour la formule $V_{m,n}$,

$$V_{m,n} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!\,2\pi\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^m\alpha \sin^n\alpha\, d\alpha}{(\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + x\cos\alpha + y\sin\alpha)^{m+n+1}}.$$

Pour transformer de la même manière la fonction $\mathcal{V}_{m,n}$, il faudrait trouver une égalité semblable à (12) et donnant $\dfrac{1}{(\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})^3}$.

Or, si l'on différentie par rapport à A cette égalité (12), et qu'on remplace ensuite A, B et C respectivement par 1, ξ et η, on obtiendra

$$\frac{1}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(1 + i\xi\cos\alpha + i\eta\sin\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dans le cas où $m + n$ est un grand nombre, on peut trouver une intégrale simple qui représente approximativement la fonction $V_{m,n}$.

Cette intégrale simple est très-analogue à l'intégrale simple qui représente $V_{m,n}$; de sorte qu'on aura quelque chose d'équivalent au théorème de Laplace qui ramène approximativement, dans le cas où n est grand, la fonction X_n de Legendre à un cosinus.

En appliquant la méthode que Laplace a donnée dans son calcul des probabilités, on représente d'une manière approchée l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^k\varphi\, d\varphi}{(A + B\sin\varphi)^{k+1}}$, dans le cas où k est un grand nombre, par

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2k}}\,\frac{1}{\sqrt{A}\,(A+B)^{k+\frac{1}{2}}},$$

et par conséquent $V_{m,n}$, quand $m+n$ est grand, par

$$-\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!\,2\sqrt{m+n+1}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{(x^2+y^2-1)^{\frac{1}{4}}}$$
$$\times\int_0^{2\pi}\frac{\cos^m\alpha\,\sin^n\alpha}{(\sqrt{x^2+y^2-1}+x\cos\alpha+y\sin\alpha)^{m+n+\frac{3}{2}}}\,d\alpha.$$

J'indiquerai encore un autre rapprochement entre X_n et $U_{m,n}$. On peut se proposer de chercher, parmi tous les polynômes

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n$$

du degré n, qui ont l'unité pour coefficient du terme en x^n, quel est celui qui rend minimum l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1} f^2(x)\,dx$. Ce polynôme pourra être considéré comme étant celui qui s'approche le plus de zéro entre les limites -1 et $+1$. Pour en déterminer les coefficients A_1, $A_2, \ldots, A_n$, on égalera à zéro les dérivées de l'intégrale relatives à ces quantités, ce qui donnera les équations

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,x^{n-1}\,dx = 0,\ldots\quad \int_{-1}^{+1} f(x)\,x^{n-2}\,dx = 0,\ldots,\quad \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = 0.$$

On en conclut immédiatement

$$f(x) = \frac{1.2\ldots n.2^n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\,X_n.$$

Cherchons de même, parmi tous les polynômes $\varphi(x, y)$, du degré $m+n$, ayant l'unité pour coefficient du terme en $x^m y^n$, celui qui rend minimum l'intégrale $\int\int \varphi^2(x, y)\, dx\, dy$, où les variables satisfont à la condition $x^2 + y^2 \leqq 1$. On trouve les équations

$$\int\int \varphi(x, y)\, x^{m+n}\, dx\, dy = 0, \ldots, \quad \int\int \varphi(x, y)\, x^{m+1} y^{n-1}\, dx\, dy = 0, \ldots,$$
$$\int\int \varphi(x, y)\, x^{m-1} y^{n+1}\, dx\, dy = 0, \ldots, \quad \int\int \varphi(x, y)\, x^p y^q\, dx\, dy = 0, \ldots,$$

d'où l'on tire

$$\varphi(x, y) = \frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n.2^{m+n}}{(m+1)(m+2)\ldots 2m(n+1)(n+2)\ldots 2n}\,\frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots(m+n)}\,\mathrm{U}_{m,n}.$$