P.-L. TCHÉBYCHEF

Sur les expressions approchées d'une racine carrée de la variable au moyen des fractions simples

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 15 (1898), p. 463-480

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1898_3_15__463_0>

SUR LES EXPRESSIONS APPROCHÉES

D'UNE RACINE CARRÉE DE LA VARIABLE

AU MOYEN DES FRACTIONS SIMPLES (1),

PAR M. P.-L. TCHÉBYCHEF.

Traduit du russe par M. A. VASSILIEF, à Kasan.

Dans le calcul des quadratures il est souvent indispensable de remplacer les fonctions qui présentent les difficultés d'intégrations par leurs valeurs approchées. Si cette difficulté provient d'un radical du second degré, on a grand avantage à employer l'expression approchée du radical $\sqrt{\frac{1}{x}}$ au moyen d'une fonction de la forme

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x},$$

qui s'obtient au moyen du premier théorème démontré dans notre Mémoire : *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions* (2).

Quand on a en vue de diminuer autant que possible la limite de l'erreur relative pour toutes les valeurs de x, de $x = 1$ à $x = h > 1$, la meilleure représentation du radical $\sqrt{\frac{1}{x}}$ par la fonction

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}$$

---

(1) *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. LXI (Appendice I); 1889.

(2) *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 6e série. (*Sciences mathématiques et physiques*, t. VII; 1858.)

sera celle pour laquelle les rapports

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}},$$

$$\frac{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}},$$

s'écartent le moins de 1 entre $x=1$ et $x=h$. Cette représentation du radical $\sqrt{\frac{1}{x}}$ peut s'obtenir au moyen du théorème en question, si nous l'appliquons à la détermination des quantités

$$A,\quad B_1,\quad B_2,\quad \ldots,\quad B_n,\quad C_1,\quad C_2,\quad \ldots,\quad C_n,$$

pour lesquelles le logarithme du rapport

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}},$$

ou du rapport

$$\frac{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

s'écarte le moins de zéro lorsque x varie de $x=1$ à $x=h$. En supposant que dans l'intervalle $x=1$, $x=h$ les valeurs limites de ces rapports sont

$$l,\quad \frac{1}{l}>l,$$

nous voyons, en vertu du théorème en question, qu'il est possible de rapprocher ces limites de l'unité par un changement convenable de $2n+1$ quantités

$$A,\quad B_1,\quad B_2,\quad \ldots,\quad B_n,\quad C_1,\quad C_2,\quad \ldots,\quad C_n$$

qui entrent dans la fonction

$$y = \frac{A + \dfrac{B_1}{C_1 + x} + \dfrac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \dfrac{B_n}{C_n + x}}{\sqrt{\dfrac{1}{x}}}$$
$$= \sqrt{x}\left(A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}\right),$$

dans le cas où cette fonction de $x = 1$ à $x = h$ atteint moins de $2n + 2$ fois les valeurs limites l, $\frac{1}{l}$.

Il s'ensuit que l'approximation maxima des limites l, $\frac{1}{l}$ à l'unité peut avoir lieu seulement pour les quantités A, B_1, B_2, ..., B_n, C_1, C_2, ..., C_n, telles que la fonction

$$y = \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}\right]$$

atteint dans l'intervalle $x = 1$, $x = h$ au moins $2n + 2$ fois les valeurs l, $\frac{1}{l}$ sans les dépasser.

Nous allons montrer, maintenant, comment on peut, d'après cela, trouver et la quantité l et la fonction y qui donnent la solution de notre problème.

2. Comme la fonction y, qui se ramène à l ou à $\frac{1}{l}$ pour une valeur quelconque de x qui ne rend pas nulle $\frac{dy}{dx}$ et qui n'est ni $x = 1$, ni $x = h$, dépassera entre $x = 1$, $x = h$ les limites l, $\frac{1}{l}$, il doit y avoir, depuis $x = 1$ jusqu'à $x = h$, d'après ce qui précède, au moins $2n + 2$ valeurs différentes de x qui vérifient l'équation

$$(l^2 - y^2)(1 - l^2 y^2) = 0,$$

en même temps que l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 1 - x(h - x) = 0,$$

équations dont les premiers membres, d'après (1), seront des fractions rationnelles de même dénominateur

$$(C_1 + x)^4 (C_2 + x)^4 \ldots (C_n + x)^4,$$

les numérateurs étant du degré $4n + 2$. D'après la composition de ces équations on voit que leurs racines communes, distinctes de $x = 1$, $x = h$ doivent être multiples; par suite, ces équations ne peuvent avoir lieu simultanément pour $2n + 2$ valeurs distinctes de x si elles n'ont pas $4n + 2$ racines communes, égales ou inégales, ce qui suppose leur identité puisqu'elles se ramènent à des équations du degré $4n + 2$. Ces équations ne peuvent être identiques que lorsqu'on a l'égalité

$$(l^2 - y^2)(1 - l^2 y^2) = C\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x(1 - x)(h - x),$$

où C est une quantité constante; on a ainsi l'équation différentielle

$$\sqrt{C}\,\frac{dy}{\sqrt{(l^2 - y^2)(1 - l^2 y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(h - x)}}. \tag{2}$$

De toutes les fonctions y qui satisfont à cette équation pour des valeurs quelconques l, C, il n'est pas difficile de distinguer celle qui donne la solution de notre problème. Nous remarquerons pour cela que, d'après (1), l'égalité $\frac{dy}{dx} = 0$ se ramène à une équation du degré $2n$ et, par suite, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = +\infty$, la dérivée $\frac{\partial y}{dx}$ ne peut s'annuler plus de $2n$ fois. Comme, d'après ce qui précède, elle s'annule au moins $2n$ fois dans l'intervalle $x = 1$, $x = h$, elle ne doit pas s'annuler dans les intervalles

$$x = 0, \qquad x < 1,$$
$$x > h, \qquad x = +\infty;$$

quant à l'intervalle $x = 1$, $x = h$, elle doit s'y annuler $2n$ fois.

Par suite, l'équation (2) donne la relation suivante, entre les intégrales définies $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}$, $\int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}$, $\int_0^l \frac{dy}{\sqrt{(l^2-y^2)(1-l^2y^2)}}$, $\int_l^{\frac{1}{l}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-l^2)(1-l^2y^2)}}$,

$$\frac{\int_0^l \frac{dy}{\sqrt{(l^2-y^2)(1-l^2y^2)}}}{\int_l^{\frac{1}{l}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-l^2)(1-l^2y^2)}}} = (2n+1)\frac{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}}{\int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}}. \tag{3}$$

3. Cette égalité permet de calculer aisément l d'après le rapport des intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}, \quad \int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}.$$

Des diverses formules qu'on peut employer pour cela, nous prendrons la suivante

$$l^4 = 1 - 16q^{2n+1}\left(\frac{1+q^{4n+2}+q^{12n+6}+\dots}{1+q^{2n+1}+q^{6n+3}+\dots}\right)^8 = 1 - 16q^{2n+1}\left(\frac{\sum\limits_{i=+\infty}^{i=-\infty} q^{2(2n+1)i(2i+1)}}{\sum\limits_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{(2n+1)i(2i+1)}}\right)^8, \tag{4}$$

où

$$q = e^{-\pi\frac{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}}{\int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}}}.$$

Cette formule montre avec quelle rapidité se rapprochent de l'unité les quantités l, $\frac{1}{l}$, quand le nombre n croît, et, par suite, avec quelle rapidité diminue l'erreur relative de la formule

$$A + \frac{B_1}{C_1+x} + \frac{B_2}{C_2+x} + \dots + \frac{B_n}{C_n+x},$$

qui donne la valeur approchée du radical $\sqrt{\frac{1}{x}}$ dans l'intervalle de $x=1$ à $x=h$.

En désignant par θ une quantité comprise entre o et 1, nous trouvons pour la représentation de toutes les grandeurs comprises, entre l et $\frac{1}{l}$, la formule $l^{2\theta-1}$; par suite, d'après ce qui a été démontré relativement à la fonction

$$y = \sqrt{x}\left(A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}\right),$$

on obtient l'équation suivante pour la détermination de la valeur du radical $\sqrt{\frac{1}{x}}$:

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = l^{1-2\theta}\left(A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}\right). \tag{5}$$

4. Les quantités $A, B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_n$, qui entrent dans la formule (5), se déduisent aisément de l'expression de l'intégrale de l'équation (2) qu'on obtient lorsque l'égalité (3) a lieu.

En mettant cette intégrale sous la forme

$$\sqrt{x}\left(A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}\right),$$

nous trouvons qu'alors les quantités $A, B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_n$ s'obtiennent à l'aide de la fonction elliptique de module

$$k = \sqrt{1 - \frac{1}{h}} \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \tag{6}$$

au moyen des formules suivantes :

$$A = \frac{1}{l\sqrt{h}\left(1 + 2\,\mathrm{dn}\frac{2K}{2n+1} + 2\,\mathrm{dn}\frac{4K}{2n+1} + \ldots + 2\,\mathrm{dn}\frac{2nK}{2n+1}\right)},$$

$$B_m = \frac{2\sqrt{h}\,\mathrm{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{l\,\mathrm{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}\left(1 + 2\,\mathrm{dn}\frac{2K}{2n+1} + \ldots + 2\,\mathrm{dn}\frac{2nK}{2n+1}\right)},$$

$$C_m = \frac{\mathrm{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}{\mathrm{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}}\,h.$$

En remarquant que la fonction $\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}$ se réduit à 1 pour $m=0$ et ne change pas quand m change de signe, nous pouvons mettre la somme

$$1+2\operatorname{dn}\frac{2K}{2n+1}+2\operatorname{dn}\frac{4K}{2n+1}+\ldots+2\operatorname{dn}\frac{2nK}{2n+1},$$

sous la forme

$$\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1},$$

où le signe $\sum$ s'étend aux quantités

$$m=-n,\ -(n-1),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\ n.$$

Par suite, nous aurons

$$A=\frac{1}{l\sqrt{h}\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}},\qquad B_m=\frac{2\sqrt{h}\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{l\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}$$

et

$$\frac{B_m}{C_m+x}=\frac{2\sqrt{h}\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{l\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}\,\frac{1}{\dfrac{\operatorname{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}{\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}}h+x}$$

$$=\frac{2\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{l\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}\,\frac{\sqrt{h}}{x\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}+h\operatorname{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}.$$

Comme l'expression

$$\frac{\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{l\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}\,\frac{\sqrt{h}}{x\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}+h\operatorname{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}$$

se ramène, pour $m=0$, à

$$\frac{1}{l\sqrt{h}\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}},$$

c'est-à-dire à A et ne change pas quand m change de signe, cette expression, sommée relativement à m pour les valeurs de m,

$$m = -n,\ -(n-1),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\ n$$

donne l'expression de la somme

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}.$$

Donc, l'égalité (5) donne la formule suivante pour la détermination de la valeur du radical

$$\sqrt{\frac{1}{x}},$$

lorsque x ne dépasse pas les limites $x = 1$, $x = h$

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{\displaystyle\sum \frac{\sqrt{h}\,\mathrm{dn}\,\dfrac{2mK}{2n+1}}{x\,\mathrm{sn}^2\,\dfrac{2mK}{2n+1} + h\,\mathrm{cn}^2\,\dfrac{2mK}{2n+1}}}{l^{20}\displaystyle\sum \mathrm{dn}\,\frac{2mK}{2n+1}}.$$

5. Il n'est pas difficile de déduire de l'égalité obtenue une formule qui donne les valeurs limites de l'intégrale

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}}\,du,$$

au moyen des intégrales qui contiennent la fonction V hors du signe du radical. Il est nécessaire pour cela que les fonctions U et V restent positives pour toutes les valeurs de la variable u, auxquelles s'étend l'intégration.

En désignant par

$$M,\quad M_0 < M$$

les limites que la fonction V ne dépasse pas, nous remarquons que l'expression $\frac{V}{M_0}$ restera dans les limites 1, $\frac{M}{M_0}$ et, par conséquent, dans les limites 1, h, si h désigne $\frac{M}{M_0}$.

On voit dès lors que pour les valeurs de U auxquelles s'étend l'intégrale

$$\int \frac{\mathrm{U}}{\sqrt{\mathrm{V}}}\,du,$$

l'égalité (7) sera applicable à $x = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{M}_0}$, si nous prenons

$$h = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}_0}.$$

En substituant ces valeurs de x et de h dans l'égalité (7), nous obtenons

$$\sqrt{\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{V}}} = \frac{\displaystyle\sum \frac{\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}\,\mathrm{dn}\,\frac{2m\mathrm{K}}{2n+1}}{\mathrm{V}\,\mathrm{sn}^2\,\frac{2m\mathrm{K}}{2n+1} + \mathrm{M}\,\mathrm{cn}^2\,\frac{2m\mathrm{K}}{2n+1}}}{l^{2\theta}\displaystyle\sum \mathrm{dn}\,\frac{2m\mathrm{K}}{2n+1}},$$

et, en divisant par $\sqrt{\mathrm{M}_0}$,

$$\sqrt{\frac{1}{\mathrm{V}}} = \frac{\displaystyle\sum \frac{\sqrt{\mathrm{M}}\,\mathrm{dn}\,\frac{2m\mathrm{K}}{2n+1}}{\mathrm{V}\,\mathrm{sn}^2\,\frac{2m\mathrm{K}}{2n+1} + \mathrm{M}\,\mathrm{cn}^2\,\frac{2m\mathrm{K}}{2n+1}}}{l^{2\theta}\displaystyle\sum \mathrm{dn}\,\frac{2m\mathrm{K}}{2n+1}}.$$

Comme on a supposé que pour les valeurs de u, auxquelles s'étend l'intégrale

$$\int \frac{\mathrm{U}\,du}{\sqrt{\mathrm{V}}},$$

la fonction U reste positive, on obtient de cette égalité, où θ reste une quantité indéterminée comprise entre 0 et 1,

$$(8)\qquad \int \frac{\mathrm{U}\,du}{\sqrt{\mathrm{V}}} = \frac{\displaystyle\sum \int \frac{\sqrt{\mathrm{M}}\,\mathrm{dn}\,\frac{2m\mathrm{K}}{2n+1}\,\mathrm{U}\,du}{\mathrm{V}\,\mathrm{sn}^2\,\frac{2m\mathrm{K}}{2n+1} + \mathrm{M}\,\mathrm{cn}^2\,\frac{2m\mathrm{K}}{2n+1}}}{l^{2\theta}\displaystyle\sum \mathrm{dn}\,\frac{2m\mathrm{K}}{2n+1}}.$$

Cette formule a été obtenue dans l'hypothèse

$$h = \frac{M}{M_0};$$

on aura, par conséquent, d'après (6),

$$M_0 = M(1 - k^2).$$

Cela nous donne une relation entre les valeurs M, M_0 que ne doit dépasser la fonction V dans les limites de l'intégration et le module k qui figure dans la formule (8) et l'équation (4).

En désignant, pour abréger,

$$\operatorname{sn}\frac{2mK}{2n+1} \quad \text{par} \quad s_m,$$

nous obtenons

$$\operatorname{cn}\frac{2mK}{2n+1} = \sqrt{1 - s_m^2}; \qquad \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1} = \sqrt{1 - k^2 s_m^2},$$

$$\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1} = 1 + 2\sqrt{1 - k^2 s_1^2} + 2\sqrt{1 - k^2 s_2^2} + \ldots + 2\sqrt{1 - k^2 s_n^2},$$

d'où, en posant

$$S = 1 + 2\sqrt{1 - k^2 s_1^2} + 2\sqrt{1 - k^2 s_2^2} + \ldots + 2\sqrt{1 - k^2 s_n^2}, \tag{10}$$

et

$$F(s) = \frac{\sqrt{M}\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S} \int \frac{U\,du}{V s^2 + M(1 - s^2)}, \tag{11}$$

nous aurons, d'après l'égalité (8),

$$\int \frac{U\,du}{\sqrt{V}} = \frac{1}{l^{2\theta}}[F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)]. \tag{12}$$

La quantité θ étant comprise entre 0 et 1, cette égalité nous donne pour $\theta = 0$, $\theta = 1$ les deux valeurs limites suivantes de l'intégrale $\int \frac{U}{\sqrt{V}}\,du$:

$$\int \frac{U\,du}{\sqrt{V}} \geqq \quad [F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)],$$

$$\int \frac{U\,du}{\sqrt{V}} \leqq \frac{1}{l^2}[F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)],$$

où l est une quantité définie par l'équation (4) qui montre par sa composition que l s'approche rapidement de 1 quand le nombre n croît.

6. Passant aux applications des formules trouvées, nous commençons par le cas où $U = 1$, $V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u$, λ étant moindre que 1. En prenant o pour limite inférieure de l'intégrale

$$\int \frac{U\,du}{\sqrt{V}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}},$$

nous trouvons que le maximum de la fonction

$$V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u$$

dans les limites de l'intégration est 1; donc, conformément à notre notation, on peut prendre $M = 1$. Pour cette valeur de M l'équation (9) donne

$$M_0 = 1 - k^2,$$

où M_0 est, pour la quantité

$$V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u,$$

la limite inférieure, à laquelle est applicable la formule (12). Comme la fonction V ne doit pas dépasser la limite M pour toutes les valeurs de u auxquelles s'étend l'intégrale

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}},$$

on doit avoir, pour toutes ces valeurs de u,

$$1 - \lambda^2 \sin^2 u \geqq 1 - k^2$$

et, par conséquent,

$$\sin u \leqq \frac{k}{\lambda}.$$

Si $\lambda \leqq k$, cette condition, évidemment, sera remplie pour toute valeur réelle de u; par conséquent, dans le cas $\lambda \leqq k$, on pourra appliquer à l'intégrale

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}$$

la formule (12) quelque grand que soit u. Mais, dans le cas $\lambda > k$, cette condition ne sera satisfaite que pour les valeurs de u qui ne surpassent pas arc sin $\frac{\lambda}{k}$; par conséquent, dans ce cas, nos formules ne seront applicables à l'intégrale

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}$$

que moyennant la condition

$$u \leqq \arc\sin\frac{\lambda}{k}.$$

En substituant dans la formule (11),

$$U = 1, \qquad V = 1 - \lambda^2\sin^2 u, \qquad M = 1,$$

et en prenant zéro pour limite inférieure d'intégration, nous trouvons que dans le cas considéré

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\sqrt{1-k^2s^2}}{S}\int_0^u \frac{du}{(1-\lambda^2\sin^2 u)s^2+1-s^2} \\ &= \frac{\sqrt{1-k^2s^2}}{S\sqrt{1-\lambda^2s^2}}\,\mathrm{arctang}\left(\sqrt{1-\lambda^2s^2}\,\mathrm{tang}\,u\right). \end{aligned}$$

A l'aide de cette fonction et des quantités

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n, \quad S,$$

qui (n° 5) sont déterminées par la fonction elliptique de module k, nous obtenons, d'après (12), l'équation qui donne les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}},$$

qui se rapprochent rapidement l'une de l'autre quand le nombre n croît.

7. Dans le cas particulier

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

nous obtenons $q = e^{-\pi}$, et, par conséquent, l'équation (4), qui détermine la quantité l pour les différentes valeurs de n, se ramène à l'équation

$$l^4 = 1 - 16 e^{-(2n+1)\pi} \left(\frac{1 + e^{-(4n+2)\pi} + e^{-(12n+6)\pi} + \ldots}{1 + e^{-(2n+1)\pi} + e^{-(6n+3)\pi} + \ldots} \right)^8.$$

Cette équation, pour $n = 1, 2, \ldots$, donne

$$l^2 = 0,9993549,$$
$$l^2 = 0,9999988,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit, dès lors, avec quelle rapidité se rapprochent l'une de l'autre, lorsque le nombre n croît, les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}},$$

données par la formule (12).

En posant dans cette formule $n = 1$, nous obtenons

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{1}{l^2 \theta} [F(0) + 2 F(s_1)].$$

Comme pour $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $n = 1$ l'équation qui détermine S revient à l'égalité

$$S = 1 + 2 \sqrt{1 - \frac{1}{2} s_1^2},$$

et $\operatorname{sn} \frac{2k}{3} = s_1$ est égal à 0,9002226, nous obtenons

$$S = 2,5424652,$$

et, par conséquent, d'après (11), pour $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$, il vient

$$\mathrm{F}(s) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}s^2}\,\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{1-\lambda^2 s^2}\,\operatorname{tang} u\right)}{2,5424652\sqrt{1-\lambda^2 s^2}}.$$

En faisant alors

$$s = 0, \qquad s = s_1 = 0,9002226,$$

nous obtenons

$$\mathrm{F}(0) = 0,3933195\,u,$$

$$\mathrm{F}(s_1) = \frac{0,3033402\,\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{1-0,8104007\lambda^2}\,\operatorname{tang} u\right)}{\sqrt{1-0,8104007\lambda^2}},$$

ce qui donne, après la substitution dans l'égalité (12), la formule suivante pour la détermination de l'intégrale $\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}$:

$$\frac{1}{l^{2\theta}}\left[0,3933195\,u + \frac{0,6066804\,\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{1-0,8104007\lambda^2}\,\operatorname{tang} u\right)}{\sqrt{1-0,8104007\lambda^2}}\right].$$

En posant $n = 2$, nous trouvons que, dans le cas considéré, l'égalité (12) se ramène à la suivante

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}} = \frac{1}{l^{2\theta}}\left[\mathrm{A}u + \frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{R}_1}\operatorname{arc\,tang}(\mathrm{R}_1 \operatorname{tang} u) + \frac{\mathrm{B}_2}{\mathrm{R}_2}\operatorname{arc\,tang}(\mathrm{R}_2 \operatorname{tang} u)\right],$$

où

$$\mathrm{A} = 0,2360679, \qquad \mathrm{B}_1 = 0,4188060, \qquad \mathrm{B}_2 = 0,3451258,$$

$${}_1{=}\mathrm{R}\sqrt{1-0,4262987\lambda^2}, \qquad \mathrm{R}_2 = \sqrt{1-0,9313130\lambda^2}.$$

Les formules semblables relatives à l'intégrale

$$\int_0^u \frac{1+p\sin^2 u}{1+q\sin^2 u}\,\frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}$$

se déduisent de l'égalité (12) en faisant

$$\mathrm{U} = \frac{1+p\sin^2 u}{1+q\sin^2 u}, \qquad \mathrm{V} = 1-\lambda^2\sin^2 u.$$

8. En mettant dans l'égalité (12), à la place de U et V, différentes fonctions, nous obtenons les formules qui donnent les valeurs limites des intégrales de la forme

$$\int \frac{\mathrm{U}\,du}{\sqrt{\mathrm{V}}},$$

dont le calcul présente souvent de grandes difficultés.

Ainsi, en posant

$$\mathrm{V} = 1 - \lambda^2 \sin^2 u, \qquad \mathrm{U} = \Phi(\operatorname{tang} u),$$

où $\Phi(\operatorname{tang} u)$ est une fonction qui reste positive dans les limites de l'intégration, nous obtenons

$$\int_0^u \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}\,du = \frac{1}{l^{2\theta}}[\mathrm{F}(0) + 2\,\mathrm{F}(s_1) + 2\,\mathrm{F}(s_2) + \ldots + 2\,\mathrm{F}(s_n)],$$

où

$$\mathrm{F}(s) = \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{\mathrm{S}} \int_0^u \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\,du}{1 - \lambda^2 s^2 \sin^2 u}.$$

Ces formules, d'après la remarque du n° 6, auront lieu pour toute valeur de u, si $\lambda \leqq k$.

En supposant que cette condition est remplie et en prenant $\frac{\pi}{2}$ pour limite supérieure d'intégration, nous déduisons de ces formules

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\,du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{1}{l^{2\theta}}[\mathrm{F}(0) + 2\,\mathrm{F}(s_1) + 2\,\mathrm{F}(s_2) + \ldots + 2\,\mathrm{F}(s_n)],$$

$$\mathrm{F}(s) = \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{\mathrm{S}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\,du}{1 - \lambda^2 s^2 \sin^2 u}.$$

En posant dans la dernière intégrale $\operatorname{tang} u = z$, nous trouvons qu'elle se transforme en l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\Phi(z)\,dz}{1 + (1 - \lambda^2 s^2) z^2}$; par conséquent, l'égalité (11), qui détermine la fonction $F(s)$ dans le cas considéré, se ramène à

$$F(s)=\frac{\sqrt{1-k^2s^2}}{S}\int_0^\infty \frac{\Phi(z)\,dz}{1+(1-\lambda^2s^2)z^2}.$$

On voit dès lors que la formule, obtenue pour la détermination de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\,du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}$$

ne contiendra que les intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(z)\,dz}{1+(1-\lambda^2s^2)z^2},$$

intégrales dont l'expression est connue pour quelques valeurs particulières de la fonction $\Phi(z)$. Ainsi, dans le cas

$$\Phi(z)=z^{p-1},\qquad 0<p<1,$$

nous obtenons

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(z)\,dz}{1+(1-\lambda^2s^2)z^2}=\int_0^\infty \frac{z^{p-1}\,dz}{1+(1-\lambda^2s^2)z^2}=\frac{\pi}{2\sin\frac{p\pi}{2}(1-\lambda^2s^2)^{\frac{p}{2}}};$$

et, par conséquent, en déterminant l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\,du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\,du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}},$$

d'après (12) on aura

$$F(s)=\frac{\pi\sqrt{1-k^2s^2}}{2\sin\frac{p\pi}{2}(1-\lambda^2s^2)^{\frac{p}{2}}S};$$

par conséquent, elle donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\, du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{\pi}{2} \frac{1 + 2\sqrt{\dfrac{1-k^2 s_1^2}{(1-\lambda^2 s_1^2)^p}} + \ldots + 2\sqrt{\dfrac{1-k^2 s_n}{(1-\lambda^2 s_n^2)^p}}}{l^{20} \sin \dfrac{p\pi}{2}};$$

d'où, en substituant la valeur de S d'après (10), nous obtenons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\, du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{20} \sin \dfrac{p\pi}{2}} \, \frac{1 + 2\sqrt{\dfrac{1-k^2 s_1^2}{(1-\lambda^2 s_1^2)^p}} + \ldots + 2\sqrt{\dfrac{1-k^2 s_n}{(1-\lambda^2 s_n^2)^p}}}{1 + 2\sqrt{1-k^2 s_1^2} + \ldots + 2\sqrt{1-k^2 s_n^2}}.$$

Dans le cas particulier où le module k est pris égal à $\sqrt{\frac{1}{2}}$ et n égal à 1, cette égalité, après la substitution de la valeur

$$s_1 = \operatorname{sn} \frac{2\mathrm{K}}{3} = 0,9002226,$$

donne comme détermination de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\, du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}}$$

pour $\lambda \leqq \sqrt{\frac{1}{2}}$ la formule suivante

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{20} \sin \dfrac{p\pi}{2}} \left[0,3933195 + \frac{0,6066805}{(1-0,810404007\,\lambda^2)^{\frac{p}{2}}} \right],$$

où

$$l^2 = 0,9993549.$$

En posant $n = 2$ pour la même valeur du module k, nous obtenons comme détermination de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\, du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}},$$

dans le cas $\lambda \leqq \sqrt{\frac{1}{2}}$, la formule suivante

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{2\theta}\sin\frac{p\pi}{2}}\left[0,2360679+\frac{0,4188060}{(1-0,4262987\lambda^2)^{\frac{p}{2}}}+\frac{0,3451258}{(1-0,9313130\lambda^2)^{\frac{p}{2}}}\right],$$

où

$$l^2 = 0,9999988.$$

FIN DU TOME XV DE LA TROISIÈME SÉRIE.