ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULES DRACH

Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 15 (1898), p. 243-384
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1898_3_15__243_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ESSAI

SUR UNE

THÉORIE GÉNÉRALE DE L'INTÉGRATION

ET SUR LA

CLASSIFICATION DES TRANSCENDANTES,

PAR M. JULES DRACH,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

1. Lacroix, dans son grand *Traité de Calcul différentiel et intégral*, après avoir constaté l'extraordinaire diversité des éléments qui vérifient des relations différentielles et le petit nombre de cas où ces relations peuvent être résolues à l'aide des transcendantes élémentaires, ajoute : « Ces considérations me portent à croire que ce qui peut le plus contribuer aux progrès du Calcul intégral, c'est la classification exacte des divers genres de transcendantes absolument irréductibles, et par là essentiellement distincts, et la recherche des propriétés particulières à chacun de ces genres. »

Nous avons tenté ici de fixer les traits essentiels de cette classification en nous bornant aux transcendantes les plus simples : celles qui vérifient des équations différentielles algébriques et plus particulièrement des équations du premier ordre.

Peu de recherches ont été faites dans cet ordre d'idées, mais presque toutes ont conduit jusqu'à présent à des résultats importants. Galois a réalisé, pour les nombres et les fonctions algébriques, la classification réclamée par Lacroix et, plus tard, les travaux de Puiseux et de

Riemann ont montré qu'elle conduisait naturellement aux propriétés essentielles de ces éléments.

Liouville, s'attaquant aux transcendantes du Calcul intégral, a définitivement établi le caractère transcendant de certaines fonctions simples. La classification qu'il a ébauchée n'a malheureusement pas conservé son importance devant les découvertes modernes de l'Analyse.

Une classe particulière de transcendantes, les intégrales de différentielles algébriques et les fonctions qui s'y rattachent, a accaparé ensuite pendant longtemps l'attention des géomètres. C'est seulement de nos jours que l'étude des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels ou algébriques, abordée dans des voies diverses par un grand nombre de mathématiciens, parmi lesquels il faut citer, en Allemagne avec Riemann, MM. Fuchs et Klein, en France MM. Jordan, Poincaré et Picard, a permis d'entrevoir pour les transcendantes qui vérifient ces équations une classification rationnelle.

Jamais d'ailleurs le problème général de Lacroix n'a été posé d'une manière précise et c'est par là que nous avons dû commencer.

2. Les recherches célèbres de Galois nous ont appris que *les nombres algébriques ne sont jamais déterminés d'une manière unique par les relations algébriques entières à coefficients rationnels qu'ils vérifient.*

Si l'on considère, parmi ces relations, celles qui renferment un seul nombre algébrique, elles sont également vérifiées par tous les nombres conjugués.

Si l'on considère celles qui renferment à la fois un nombre et ses conjugués, leur ensemble ou toute portion de cet ensemble qui suffit à le déterminer reste inaltéré par certaines permutations des nombres conjugués entre eux.

Le système de ces permutations ou, mieux encore, le système des substitutions qui permettent de passer de l'une d'elles à toutes les autres, fixe la nature des nombres algébriques que l'on étudie, en montrant, de la manière la plus claire, tous les moyens qui permettent de rattacher ces éléments aux nombres rationnels.

Un fait analogue s'est présenté dans l'étude des fonctions algébriques d'une variable, où son importance a été mise en évidence par

Puiseux, d'une façon véritablement inattendue : On sait qu'une fonction algébrique permet d'établir entre les nombres algébriques une certaine correspondance, telle qu'à une détermination de la variable corresponde une détermination de la fonction, les déterminations qui correspondent aux diverses fonctions conjuguées étant *en général* différentes. Il existe cependant des déterminations *singulières* de la variable pour lesquelles les déterminations des fonctions conjuguées ne sont pas toutes distinctes. Plusieurs des correspondances définies par ces fonctions conjuguées se *raccordent*, pour ainsi parler, en ces déterminations singulières et cette circonstance a conduit Puiseux à les regarder comme données par diverses branches d'une même fonction, à détermination multiple par conséquent, qui est la fonction algébrique de la théorie moderne des fonctions. Pour fixer deux éléments de la nouvelle correspondance il a été nécessaire, pour la première fois, de faire intervenir, avec les éléments initiaux, la succession des déterminations données à la variable jusqu'à la détermination finale et de choisir cette succession de façon à être certain de considérer toujours la même branche de la fonction algébrique. On constate alors qu'en revenant à la détermination initiale de la variable on ne retrouve pas nécessairement les déterminations initiales des diverses fonctions conjuguées; une certaine permutation s'est effectuée sur ces déterminations et *cette permutation est l'une de celles que donne la théorie de Galois*.

La considération des relations rationnelles vérifiées par une fonction et ses conjuguées joue, par suite, un rôle essentiel dans toute recherche sur les fonctions algébriques.

3. L'étude des transcendantes les plus simples, celle de la fonction logarithmique, par exemple, amène aux mêmes conclusions. La relation

$$xy' = 1$$

vérifiée par le logarithme de x et les relations

$$\begin{aligned} xy'' + y' &= 0, \\ xy''' + 2y'' &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots&, \end{aligned}$$

qui en sont des conséquences nécessaires, ne nous permettent pas, en effet, de distinguer entre les éléments y et $y + c$, c désignant une constante arbitraire. L'étude des correspondances numériques définies par la fonction y a montré depuis longtemps qu'à une détermination de x correspondent une infinité de déterminations de y qui s'obtiennent en ajoutant à l'une d'elles la constante $2mi\pi$.

4. Il était réservé à M. Picard d'établir en quelques pages, déjà classiques, que les transcendantes qui vérifient des équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients rationnels en x sont aussi incomplètement déterminées par les relations rationnelles, qui les lient à leurs dérivées et à la variable; l'indétermination est définie cette fois par un système de transformations linéaires et homogènes portant sur les éléments d'un système fondamental de solutions ([1]). M. Vessiot, partant de là et utilisant les beaux résultats obtenus par M. Lie dans l'étude de la structure des groupes linéaires, a pu énoncer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation linéaire soit intégrable par quadratures.

Une classification naturelle des transcendantes qui vérifient des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques, classification basée sur les propriétés des groupes linéaires, résultait immédiatement de ces recherches ([2]).

Mais depuis longtemps déjà Riemann et, après lui, MM. Fuchs et Klein avaient remarqué qu'à une détermination de la variable correspondent, pour les éléments d'un système fondamental, une infinité de déterminations, dérivant de l'une d'entre elles par des transformations linéaires et homogènes à coefficients constants, et étudié l'influence des déterminations singulières de la variable. M. Poincaré avait même, en profitant de ces remarques, construit de toutes pièces, à l'aide de développements en série, des transcendantes *uniformes* à l'aide desquelles il est possible d'exprimer, dans des cas assez étendus, les intégrales des équations linéaires à coefficients algébriques de la même manière qu'on avait exprimé, avec les fonctions abéliennes, les intégrales de différentielles algébriques. Il ouvrait ainsi une voie dont nous pourrons seulement plus loin prévoir toute l'importance pour notre but.

([1]) *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1885.

([2]) VESSIOT, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1892.

5. Toutes ces recherches avaient mis en évidence le rôle joué par l'ensemble des relations rationnelles vérifiées par les éléments que l'on étudie et leurs dérivées d'ordre quelconque, ou plutôt par les transformations qu'il est possible de faire subir aux éléments sans altérer cet ensemble. Ces transformations formaient d'ailleurs toujours un *groupe*, puisque la succession de deux d'entre elles laissait évidemment l'ensemble inaltéré. Il était, dès lors, tout naturel de chercher à étendre les résultats obtenus aux groupes les plus généraux que MM. Sophus Lie et Picard (1) venaient de découvrir, dont les transformations pouvaient dépendre de fonctions arbitraires. M. Lie (2) avait lui-même cherché à appliquer sa théorie des groupes, plus particulièrement celle des *groupes finis* (dont les transformations ne dépendent que de paramètres arbitraires, en nombre limité), à l'intégration des équations différentielles.

Il montrait que presque tous les cas d'abaissement qui s'étaient présentés jusqu'alors dans l'intégration des équations différentielles ordinaires résultent de l'existence de transformations, dépendant d'un nombre limité de paramètres, qui laissent invariables les équations considérées. Ces transformations forment nécessairement un groupe.

D'autre part, à tout groupe de transformations défini par des relations différentielles, M. Lie avait associé des expressions, les *invariants différentiels*, qui demeurent invariables par les transformations du groupe et par celles-là seulement. Une équation qui reste invariable par les transformations d'un groupe est (3) une simple relation entre ces invariants différentiels.

6. Malheureusement *les cas signalés par M. Lie étaient toujours* PARTICULIERS : Une équation différentielle ordinaire

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0,$$

---

(1) E. PICARD, *Journal de Liouville*, 1892.

(2) S. LIE, *Berichte über die Verhandlungen der k. s. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 1891.

(3) Sauf des cas exceptionnels sur lesquels nous n'insistons pas ici.

d'ordre supérieur au premier, n'admet pas, en général, de groupe au sens de M. Lie.

Les équations linéaires aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

et les systèmes complets, étudiés par M. Lie, sont celles ou ceux qui admettent un groupe de transformations dépendant de paramètres arbitraires *et portant sur les variables* $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ces systèmes sont aussi très particuliers; les beaux travaux de MM. Lie et Vessiot l'ont montré d'une manière frappante.

La même observation s'étend *à plus forte raison* aux équations d'ordre supérieur qui admettent des groupes.

Ajoutons que, dans les cas particuliers où une équation admet un groupe, il n'en résulte pas une *théorie complète* de l'intégration de cette équation; au contraire, *il est impossible d'affirmer, sur un exemple donné, que la réduction qui résulte de l'existence du groupe est la seule que l'on puisse faire*. Les théorèmes auxquels on parvient par ces méthodes n'ont, en général, pas de réciproques. Dans quelques cas même où l'on sait que l'équation admet un groupe, par exemple dans le cas des équations différentielles ordinaires du premier ordre, on n'avait pu utiliser cette propriété.

Enfin, en poussant un peu plus loin l'examen des travaux de M. Lie, on remarquait qu'il ne tirait aucun parti des transformations immédiatement en évidence sur l'équation, transformations *banales* (?), telles, par exemple, que la transformation

$$Z = f(z),$$

où f est une fonction arbitraire et qui laisse invariable toute équation linéaire telle que (1).

Sans contester l'importance de ses recherches particulières sur le sujet, on peut donc affirmer que *l'application, indiquée par M. Lie, de sa théorie des groupes à l'intégration des équations n'est pas la véritable généralisation de la méthode employée par Galois pour les équations algébriques*.

Les travaux de M. Picard, sur les équations différentielles linéaires, montraient la voie où il fallait s'engager pour parvenir à cette généralisation.

7. Le succès de la méthode de Galois tient uniquement à la remarque suivante :

Le système des équations qui sont vérifiées par toutes les racines demeure invariable par une substitution quelconque de ces n racines et par ces transformations seulement. Les coefficients de l'équation dont on étudie les racines sont les invariants *indépendants* du groupe G_n des substitutions de n lettres. Tout progrès dans la détermination de ces racines amène à la *connaissance explicite* des invariants d'un sous-groupe de G_n.

Cette observation subsiste pour les équations différentielles linéaires. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les éléments d'un système fondamental de solutions; on connaît d'une manière explicite les invariants différentiels indépendants du groupe général Γ_n des transformations linéaires et homogènes portant sur $y_1, y_2, \ldots, y_n$, quand on considère ces éléments comme des fonctions de la variable x. Tout progrès dans l'intégration amène à connaître l'expression explicite des invariants différentiels de l'un des sous-groupes de Γ_n et réciproquement.

A un autre point de vue, dans les deux cas on peut exprimer tous les éléments qui satisfont à l'équation que l'on étudie, comme *fonction déterminée* d'un nombre limité d'entre eux, formant un *système fondamental*. Cela suffit pour permettre l'extension de la théorie de Galois.

Soit un système d'équations aux dérivées partielles, définissant p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de n variables, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et supposons que la *solution générale* de ce système s'exprime d'une manière *déterminée, toujours la même*, à l'aide d'un nombre fini r de solutions particulières *quelconques*, des variables et d'un nombre fini de constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ou de fonctions arbitraires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$ d'arguments déterminés; nous dirons que les solutions du système dépendent d'un nombre limité r d'éléments fondamentaux. Si l'on veut édifier une théorie *complète* de la détermination de $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *il est nécessaire* de substituer à la recherche de la solution générale celle, *équivalente*, de r solutions particulières formant un système fondamental.

Ce second problème dépend *toujours* de l'étude d'un groupe que l'on obtient de la manière suivante : On écrit les égalités qui donnent la solution générale en fonction des solutions particulières et l'on y remplace successivement au premier membre les éléments de la solution générale par r nouveaux systèmes de solutions et au second membre les constantes ou les fonctions arbitraires par r nouveaux systèmes de constantes ou de fonctions. Les pr égalités, ainsi obtenues, définissent, entre les éléments d'un système fondamental, le groupe attendu.

Il joue, dans l'intégration du système, le même rôle que le groupe symétrique dans l'étude des équations algébriques ou le groupe linéaire et homogène dans l'étude des équations différentielles linéaires.

8. Parmi les systèmes dont la solution dépend d'un nombre limité d'éléments fondamentaux, les plus importants sont formés par *les équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre.*

Le groupe à considérer est, dans ce cas, un *groupe de transformations ponctuelles* [1].

A toute équation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

à coefficients rationnels, dont $z_1, z_2, \ldots, z_n$ forment un système fondamental de solutions, est attaché un groupe Γ, contenu dans le groupe ponctuel général Γ_n des transformations de $z_1, z_2, \ldots, z_n$, que nous appelons son *groupe de rationalité* et qui possède les propriétés suivantes :

Tous les invariants différentiels *rationnels* de Γ, lorsqu'on étend les transformations en regardant les z comme des fonctions des $(n+1)$ variables $x, x_1, \ldots, x_n$, s'expriment rationnellement à l'aide des x.

Toute fonction des z qui s'exprime rationnellement à l'aide des x est une fonction de ces invariants différentiels.

L'intégration de l'équation (1) se décompose donc en trois parties :

1° Recherche des différents groupes Γ qu'il y a lieu de considérer;

---

[1] Cf. *Comptes rendus*, 8 mai 1893.

2° Détermination du groupe Γ qui correspond à une équation donnée;

3° Étude des transformations du groupe Γ;

que nous étudions successivement.

La dernière étude conduit à *fixer la nature des transcendantes* z_1, $z_2, \ldots, z_n$ *d'après la considération des relations rationnelles qui lient ces éléments aux variables et à leurs dérivées par rapport à ces variables*. La classification obtenue concorde, par suite, avec celle à laquelle nous serions parvenus en partant de ce dernier point de vue.

En suivant *pas à pas* la marche adoptée dans l'étude des nombres algébriques et des groupes de substitutions, on démontre que les éléments $z_1, \ldots, z_n$ qui forment un système fondamental de solutions de l'équation

$$X(z) = 0, \tag{1}$$

attaché au groupe de rationalité Γ, peuvent être amenés à faire partie du domaine de rationalité par des adjonctions successives de transcendantes attachées à des groupes *simples*, c'est-à-dire qui n'admettent pas de sous-groupe invariant. Pour ces dernières, aucune réduction analogue n'est plus possible; d'où l'importance de toute recherche relative aux transcendantes $z_1, \ldots, z_n$ dans le cas où Γ est un groupe simple.

Nous n'insisterons pas sur un certain nombre de généralisations faciles des résultats obtenus dans la théorie des substitutions : invariance des *groupes facteurs* dans toute *décomposition normale* du groupe Γ, théorème de Lagrange, théorie de la *résolvante générale*, etc. Passons de même sur des applications immédiates, qu'on aurait pu multiplier sans grandes difficultés, à l'équation du premier ordre $y' = f(x, y)$ où f est rationnel, à certaines équations du second ordre $y'' = f(x, y, y')$, aux équations différentielles linéaires et aux systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles, bien que la simplicité des résultats obtenus mérite peut-être attention.

9. L'étude des équations non linéaires du premier ordre, ou plutôt de leurs *intégrales complètes*, se fait en suivant les mêmes principes que pour les équations linéaires.

On peut d'ailleurs la considérer comme une simple application de cette dernière, l'étude de l'équation

$$Z(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \text{const.},$$

exigeant seulement la détermination du groupe de rationalité de l'équation linéaire à $(2n+1)$ variables

$$[Z, f] = 0.$$

Ce groupe est, pour un choix particulier du système fondamental de solutions, un groupe de transformations de contact à n ou $(n-1)$ variables.

On parvient d'ailleurs encore à des groupes de transformations de contact quand on étudie les intégrales complètes des systèmes en involution

$$X_1 = a_1, \quad \ldots, \quad X_q = a_q,$$

où les X dépendent rationnellement de $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ (1).

Il convient d'observer ici qu'il est possible d'amener, par une transformation ponctuelle des variables ou une transformation de contact, toute équation, linéaire ou non, du premier ordre, à une forme canonique tout intégrée. Cette observation avait été faite depuis longtemps par M. Lie, mais la détermination de la transformation étant identique à l'intégration de l'équation donnée, *cela ne constituait qu'un simple déplacement de la question* (2). Les théories que nous développons montrent que l'*on peut fixer d'une manière précise la difficulté de l'intégration, c'est-à-dire aussi celle qui consiste à trouver la transformation qui amène à la forme canonique.*

10. Nous n'avons pas, dans notre travail, donné aux considérations basées sur la théorie des groupes, *conçue a priori*, et sur les beaux résultats acquis dans ce domaine par M. Lie, un rôle prépondérant.

---

(1) Nous avons dû, pour ne pas donner à ce travail un développement exagéré, supprimer l'étude des équations aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaires, qui fera l'objet d'un Mémoire spécial; nous renverrons, à cette occasion, à une Note des *Comptes rendus*, 14 janvier 1895.

(2) *Cf.* Darboux, *Mémoire sur les solutions singulières*, etc. (*Mémoires des Savants étrangers*, t. XXVII, p. 9).

En étudiant le problème de l'*intégration en général,* il nous a été possible de définir ce que nous appelons l'*intégration logique* d'un système, qui est au problème de Cauchy et aux autres problèmes plus ou moins précis qu'on s'est posé sur l'intégration, ce qu'est la résolution *algébrique* des équations par la théorie de Galois à leur résolution *numérique* ou par approximation.

Nous avons été amenés ainsi à définir d'une manière extrêmement précise tous les éléments du raisonnement : nombres, variables, fonctions, dérivées, etc. *avec les moyens les plus simples* et à partir de théorèmes généraux sur les *fonctions dérivables* pour déterminer et classer toutes les transcendantes du Calcul intégral, ou du moins celles que nous pouvons *définir algébriquement.*

Les principaux théorèmes de la théorie des groupes, donnés par M. Lie, se sont ainsi trouvés établis d'une manière presque intuitive par des méthodes qui en feront saisir la véritable importance.

Signalons encore quelques indications générales sur le problème de l'*intégration logique des systèmes différentiels quelconques* et sur les formes les plus simples auxquelles on peut ramener de tels systèmes. En particulier, *tout système différentiel devant définir p fonctions* z_1, z_2, ..., z_p *de n variables* x_1, x_2, ..., x_n *peut être ramené à un système d'équations du second ordre, à une seule fonction inconnue, en augmentant convenablement le nombre des variables.*

Les transcendantes qui sont liées à leurs dérivées et aux variables par des relations rationnelles se partagent donc en deux grandes classes, suivant qu'elles vérifient des équations qui sont toutes du premier ordre ou toutes du second ordre.

La classe intermédiaire se ramène, en effet, à la seconde classe avec une ou plusieurs variables de moins, par l'introduction de transcendantes de la première classe.

Le travail actuel est consacré presque exclusivement aux transcendantes de la première classe.

Il n'existe d'ailleurs, à notre connaissance, aucune recherche relative aux *transcendantes essentielles du second ordre* au point de vue auquel nous nous plaçons. On suppose toujours, bien entendu, dans la définition de telles transcendantes, le nombre des variables réduit à son minimum.

11. Nous bornerons là les indications qu'il nous a paru nécessaire de donner sur le contenu de ce travail.

On pourra nous reprocher d'avoir insisté longuement sur des propositions élémentaires, regardées à d'autres points de vue comme évidentes, ou établies d'une manière différente de celle que nous avons adoptée; nous avons vu là le seul moyen de donner quelque unité à ce travail.

Nous avons voulu également établir, une fois pour toutes, la distinction à faire, en Mathématiques, entre une étude de *pure logique* et toute autre recherche. Nous insistons d'ailleurs sur ce point dans la *Conclusion,* en indiquant les rapports de notre théorie avec celle que l'on pourrait construire en faisant intervenir les développements en série et les *groupes de monodromie* relatifs à nos équations. Nous pensons que cette dernière étude doit *suivre* celle, que nous avons essayé d'esquisser, des groupes de rationalité, mais en demeurer entièrement distincte (1).

Peut-être nous permettra-t-on deux citations qui paraissent justifier les idées qui nous ont guidé :

« Ce qu'on appelle un fait d'Analyse doit toujours être ramené, si l'on veut s'en faire une idée juste, aux principes métaphysiques de cette science. Il est évident, en effet, que, l'emploi des caractères algébriques ne pouvant rien ajouter aux idées qu'ils représentent, on doit toujours trouver dans l'examen attentif des conditions de chaque question la raison de tous les résultats auxquels on est conduit par le calcul. » J.-M. AMPÈRE.

« Je mehr ich über die Principien der Functionentheorie nachdenke — und ich thue dies unablässig — um so fester wird meine Ueberzeugung, dass diese auf dem Fundamente algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden muss, und dass es deshalb nicht der richtige Weg ist, wenn umgekehrt zur Begründung einfacher und fundamentaler algebraische Sätze, das « Transcendente » um mich kurz auszudrücken

---

(1) Les résultats principaux de ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans deux Notes (8 mai 1893, 14 janvier 1895), sauf ceux relatifs aux systèmes différentiels généraux (*Comptes rendus,* 26 octobre 1897) et à la détermination du groupe de rationalité (Chapitre III).

in Anspruch genommen wird, so bestechend auch auf den ersten Anblick z. B die Betrachtungen sein mögen, durch welche Riemann so viele der wichtigsten Eigenschaften algebraischer Functionen entdeckt hat. » K. WEIERSTRASS.

Qu'il me soit permis, en terminant, d'exprimer ma vive reconnaissance à M. S. Lie, pour le dévouement avec lequel il m'a initié à ses théories si puissantes et si fécondes, et à MM. E. Picard et J. Tannery, pour l'affectueux et inlassable intérêt qu'ils ont bien voulu prendre à mes recherches !

CHAPITRE I.

LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES ET LES GROUPES DE SUBSTITUTIONS.

I. — Nombres entiers positifs et négatifs.

1. *Nous définirons tous les éléments sur lesquels nous raisonnerons dans la suite,* c'est-à-dire les nombres et les fonctions algébriques, les différentielles et les dérivées de ces fonctions, et, d'une manière générale, les fonctions d'une ou de plusieurs variables qui vérifient des relations différentielles algébriques, *par leurs liaisons avec les éléments d'un premier système,* dont nous allons d'abord préciser les propriétés.

Nous supposerons que ce système satisfait aux conditions suivantes :

I. *Il existe un mode de composition qui permet de passer de deux éléments quelconques du système à un troisième élément, bien déterminé, du même système.*

II. *Ce mode de composition est associatif.*

Si l'on représente par (u, v) le résultat de la composition de l'élément u avec l'élément v, on aura par conséquent, entre trois éléments quelconques du système, l'identité

$$(a, (b, c)) = ((a, b), c).$$

III. *Un même élément composé avec des éléments qui diffèrent entre eux donne encore des éléments qui diffèrent entre eux.*

On peut donc conclure des identités

$$(a, u) = b, \qquad (a, v) = b$$

l'identité

$$u = v.$$

IV. *Tous les éléments du système sont obtenus, et chacun d'eux est obtenu une seule fois, par une composition* répétée *de l'un d'eux, convenablement choisi, avec lui-même, c'est-à-dire en composant cet élément* a *avec lui-même, ce qui donne* (a, a), *puis avec l'élément* (a, a), *ce qui donne* $\big(a, (a, a)\big)$ *et ainsi de suite.*

Il est facile d'établir que ces hypothèses permettent de former d'une seule manière une *table de composition* des éléments du système, c'est-à-dire une table donnant le résultat de la composition de l'élément u, choisi d'une manière quelconque, avec l'élément v, quelconque également.

Si, par exemple, nous continuons à représenter par a l'élément qui sert à obtenir tous les autres, la propriété associative de la composition donnera l'identité

$$\big(a, (a, a)\big) = \big((a, a) a, \big). \tag{1}$$

On peut donc représenter les éléments $\big(a, (a, a)\big)$ et $\big((a, a), a\big)$ par un même signe (a, a, a) obtenu en supprimant les parenthèses intérieures.

Cette propriété associative donnera également les identités

$$\big(a, (a, a, a)\big) = \big((a, a), (a, a)\big) = \big((a, a, a), a\big), \tag{2}$$

qui permettent encore de représenter par un même signe (a, a, a, a), obtenu comme précédemment, tous les éléments qui y figurent.

Il est clair que le même raisonnement peut être répété *sans conditions* et qu'on obtiendra ainsi une suite illimitée d'éléments représentés par les signes

$$a, \quad (a, a), \quad (a, a, a), \quad (a, a, a, a), \quad \ldots,$$

dont la loi de formation est immédiate. Les identités (1), (2), ..., écrites successivement, constituent une table de composition de ces éléments.

Enfin, la représentation même de ces éléments montre que leur composition est *commutative* (1), c'est-à-dire que l'on a identiquement

$$(u, v) = (v, u),$$

quels que soient les éléments u, v du système.

Les éléments a, (a, a), (a, a, a), ..., que nous venons de définir, sont appelés *nombres entiers positifs*. On les représente d'ordinaire, pour la commodité de l'écriture, par des signes spéciaux 1, 2, 3, ..., formés d'après des règles qui constituent la numération. On appelle *addition* la composition à l'aide de laquelle tous les entiers positifs dérivent de l'entier *un*, et l'on représente par $(u + v)$ le résultat de l'addition des entiers u et v.

Tout cela est bien connu; nous avons jugé utile de le rappeler, afin de fixer parmi les propriétés des entiers positifs celles que nous employons à les définir.

Nous aurons souvent dans la suite à considérer des systèmes d'éléments qui possèdent les propriétés I, II, III du système des nombres entiers positifs : on dit que *les éléments de ces systèmes forment un groupe pour le mode de composition considéré*. Les entiers positifs composés par addition forment par conséquent un groupe G.

2. La table de composition du groupe G montre immédiatement qu'aucun entier positif mis à la place de x ne peut vérifier la relation

$$(1 + x) = 1.$$

Proposons-nous de chercher s'il est possible de former un nouveau système d'éléments satisfaisant aux conditions suivantes :

I. *Pour un certain mode de composition, les éléments du système forment un groupe.*

II. *Le système renferme les nombres entiers positifs et la table de composition relative à ces entiers est identique à leur table d'addition.*

(1) *Cf.* H. POINCARÉ, *Sur la nature du raisonnement mathématique* (*Revue de Métaphysique et de Morale*; 1894).

III. *Un élément au moins du nouveau système, mis à la place de x, vérifie la relation*

$$(1 + x) = 1,$$

où l'on a conservé, pour indiquer la nouvelle composition, le signe de l'addition des entiers positifs, ce qui est évidemment légitime.

On reconnaît immédiatement qu'un seul élément du nouveau système peut vérifier la relation $(1 + x) = 1$; le développement des hypothèses précédentes conduit d'ailleurs uniquement aux identités

$$(x + x) = x,$$
$$(x + a) = (a + x) = a,$$

dans lesquelles a est un entier positif quelconque. Il résulte de là que le nouveau système peut être formé par les entiers positifs et un seul élément nouveau x. On nomme cet élément *zéro* et on le représente par le signe 0.

La composition des éléments du nouveau système, que nous continuerons à nommer *addition*, reste commutative [1].

3. On peut conclure de l'examen de la table d'addition du système formé par zéro et les entiers positifs, qu'aucun élément x du système ne vérifie la relation

$$(a + x) = b$$

dès que b précède a dans la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3, ...

Considérons la première relation satisfaisant à cette condition :

$$(1 + x) = 0$$

et proposons-nous de former un nouveau système d'éléments qui possède les propriétés suivantes :

I. *Pour un certain mode de composition les éléments du système forment un groupe.*

---

(1) Nous ferons observer ici, une fois pour toutes, que *c'est l'étude directe des grandeurs géométriques, mécaniques ou physiques qui conduit pratiquement à introduire dans le raisonnement de nouveaux éléments;* nous nous préoccupons uniquement de montrer comment cette introduction peut être faite *sans sortir du domaine de la logique pure.*

II. *Le système renferme les entiers positifs et zéro; la table de composition relative à ces éléments est identique à leur table d'addition.*

III. *Un élément au moins du système vérifie la relation*

$$(1+x)=0.$$

Sans insister sur le développement de ces conditions, nous rappellerons que le nouveau système ne renferme qu'un élément possédant les propriétés attribuées à x, mais qu'il renferme une suite illimitée d'éléments nouveaux. A chaque entier positif a correspond l'un de ces éléments y qui vérifie la relation

$$(a+y)=0$$

et si l'on désigne par (-1) l'élément x et par $(-a)$ l'élément y, l'élément $(-a)$ est formé par addition répétée de l'élément (-1), comme a est formé avec 1. La composition des éléments est toujours commutative.

Les nouveaux éléments (-1), (-2), (-3), ... portent le nom d'*entiers négatifs*. Ajoutons que, dans le système formé par zéro et les entiers, il existe toujours un élément et un seul qui, mis à la place de x, vérifie la relation

$$(a+x)=b,$$

a et b désignant deux éléments quelconques du système. On aurait d'ailleurs pu obtenir les nouveaux éléments en se proposant de former un système satisfaisant à cette condition.

4. Soient a et b deux éléments quelconques du système formé par zéro et les entiers; si nous posons identiquement

$$(a.1)=a$$
$$(a.(b+1))=((a.b)+a),$$

nous avons défini un nouveau mode de composition de ces éléments qu'on appelle *multiplication*. Ce mode possède également des propriétés simples *que l'on peut établir en partant des identités précédentes* [1]; nous rappellerons seulement celles dont nous aurons besoin plus tard :

---

[1] H. Poincaré, *loc. cit.*

On a d'abord, quel que soit l'élément a du système

$$(a.0) = 0.$$

Si l'on supprime zéro l'on obtiendra un nouveau système, dont les éléments composés par multiplication forment un groupe. La multiplication est d'ailleurs commutative comme l'addition.

Enfin, quels que soient les entiers a, b, c, on a identiquement :

$$(a.(b+c)) = (a.b) + (a.c),$$

ce qu'on énonce en disant : *La multiplication est distributive par rapport à l'addition.*

L'étude de la constitution du groupe formé par les nombres entiers lorsqu'on les compose par multiplication conduit à reconnaître que tous ces nombres peuvent s'obtenir par multiplication de certains d'entre eux qu'on appelle *nombres premiers*. La théorie de la décomposition des nombres en facteurs premiers, ou une étude directe, théorie de la divisibilité, permet de décider s'il existe ou non un entier x vérifiant la relation

$$(a.x) = b$$

dans laquelle a et b sont deux entiers donnés. C'est la considération des relations de cette forme qui ne sont vérifiées par aucun entier, qui amène à introduire dans le raisonnement de nouveaux éléments : les nombres rationnels.

II. — Nombres rationnels.

5. Nous savons que les entiers composés par multiplication forment un groupe. Il est aisé de voir que *la table de composition de ce groupe*, table de multiplication, *supposée construite, suffit à définir ces éléments*, c'est-à-dire qu'on en peut conclure l'existence d'un deuxième mode de composition des éléments qui possède les propriétés de l'addition, la table de composition relative à ce mode étant identique à la table d'addition. Ce point étant admis, proposons-nous de définir un nouveau système satisfaisant aux conditions suivantes :

I. *Les éléments du système, composés par un certain mode, forment un groupe.*

II. *Le système renferme les nombres entiers et la table de composition relative à ces éléments est identique à leur table de multiplication.*

III. *Le système renferme toujours un élément x qui vérifie la relation*

$$(a.x) = b,$$

où l'on a conservé pour indiquer la nouvelle composition le signe de la multiplication, a et b désignant deux éléments quelconques du système.

Le développement de ces conditions conduit à établir que les éléments nouveaux s'obtiennent en multipliant par des nombres entiers ceux qui vérifient des relations de la forme

$$(a.x) = 1,$$

a désignant un entier différent de $+1$ et de -1, ou bien encore qu'ils résultent de la composition entre eux et avec les nombres entiers des éléments satisfaisant aux relations

$$(p.x) = 1,$$

où p est un nombre *premier*. La composition des nouveaux éléments entre eux et avec les entiers est encore commutative, on continue à l'appeler *multiplication;* les nouveaux éléments sont dits *nombres rationnels*.

Nous ferons observer qu'il est maintenant possible d'établir l'existence d'un second mode de composition des nombres rationnels entre eux et avec les entiers, qui possède les propriétés de l'addition; tel, par exemple, que la multiplication soit distributive par rapport à l'addition.

On peut conclure de là que la composition par multiplication des nombres rationnels et de zéro, qui a été écarté jusqu'à présent, suit les mêmes lois que celle des entiers et de zéro, c'est-à-dire qu'on a toujours

$$(0.a) = (a.0) = 0.$$

Les relations

$$(0.x) = a,$$

où a est différent de zéro sont donc les seules qui n'admettent pas de solution dans le système formé par les nombres entiers et les nombres rationnels. *Ces relations sont* IMPOSSIBLES *en raison du rôle singulier joué par zéro dans la multiplication.*

Ajoutons que la relation $(0.x) = 0$ est vérifiée par tout élément x du système : nombres entiers ou rationnels et zéro [1].

III. — Variables. Polynomes. Fractions rationnelles.

6. Les éléments considérés jusqu'à présent sont liés aux nombres entiers par des relations qui suffisent à les isoler; on les nomme, pour cela, éléments *déterminés* ou *numériques*. Nous allons en définir qui possèdent des propriétés plus générales : les éléments indéterminés et les éléments variables.

Un élément *indéterminé* est un élément qui peut être choisi d'une manière arbitraire, dans un système d'éléments déterminés; il possédera, par conséquent, les propriétés communes à tous ces éléments. Par exemple, un nombre rationnel indéterminé α se composera avec les nombres rationnels et avec lui-même, suivant deux modes qui posséderont les propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres rationnels. Si l'on adopte la notation α^m pour représenter le produit de m facteurs α, tous les éléments déduits de α par ces deux modes sont de la forme

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + l\alpha^m,$$

les éléments $a, b, \ldots, l$ étant des nombres rationnels déterminés. Ce sont les *polynomes* en α; leur calcul suit nécessairement les mêmes lois que celui des nombres rationnels. La considération des relations $Ax = B$ où A et B sont des polynomes en α, qui ne sont vérifiées par

(1) Nous verrons dans la suite l'importance exceptionnelle de ces deux circonstances, sur lesquelles repose toute la théorie des *singularités* des fonctions d'une ou de plusieurs variables.

aucun de ces éléments, conduit à définir des éléments nouveaux qu'on représente par $\frac{B}{A}$ et qu'on appelle *fractions rationnelles* en α. Ces éléments suivent encore nécessairement les lois du calcul des nombres rationnels.

A côté des propriétés générales de composition que nous venons de rappeler, les éléments indéterminés possèdent des propriétés spéciales qui dépendent du système particulier d'éléments numériques auxquels ils appartiennent; un entier indéterminé possède, par exemple, des propriétés qui n'appartiennent pas à un nombre rationnel indéterminé. On parvient aux éléments variables en ne conservant que les propriétés générales de composition des éléments indéterminés. *Un élément variable x se composera avec lui-même et avec les nombres rationnels suivant deux modes qui possèdent les propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres rationnels, et ce sont là toutes ses propriétés* (¹).

Les éléments qui résultent de cette composition sont de la forme

$$a + bx + cx^2 + \ldots + lx^m,$$

où les a, b, ..., l sont des nombres rationnels et les lois de leur calcul sont celles du calcul des nombres rationnels. On peut, de plus, affirmer que *deux polynomes en x qui ne renferment pas les mêmes puissances de x avec les mêmes coefficients sont deux éléments distincts.*

Aux polynomes en x, la considération des relations

$$Ay = B,$$

(¹) On considère souvent des éléments nommés *paramètres* ou *constantes arbitraires*, qui possèdent les mêmes propriétés de composition que les variables; *ils n'en diffèrent que par la manière dont ils se comportent dans la* DIFFÉRENTIATION, les différentielles des constantes étant nulles et celles des variables étant de nouvelles variables. On comprendra plus loin les raisons de ces dénominations distinctes.

Ajoutons que les variables, telles que nous les définissons, sont ce qu'on appelle d'habitude des *variables complexes*, qui peuvent être représentées géométriquement par les points du plan de Cauchy ou par des segments géométriques. *C'est d'ailleurs cette coïncidence qui est la véritable raison de l'importance des variables complexes en Analyse;* dans l'Analyse pure, ce sont les propriétés logiques qui jouent un rôle essentiel; dans l'Analyse appliquée, l'existence ou la non-existence, dans un ensemble déterminé, d'éléments *réalisés* possédant ces propriétés, peut modifier du tout au tout ce point de vue.

dans lesquelles A et B sont deux polynomes, qui ne sont vérifiées par aucun polynome mis à la place de y, permet de rattacher des éléments y qu'on représente par $\frac{B}{A}$ et qu'on appelle *fractions rationnelles* en x; ces éléments, bien définis, suivent encore les lois du calcul des nombres rationnels. Ceci peut s'étendre immédiatement en considérant plusieurs éléments indéterminés α, β, γ, ... ou plusieurs éléments variables $x, y, z, \ldots$, ou à la fois des éléments indéterminés et des éléments variables; nous n'y insisterons pas.

Ajoutons cependant que le système formé par les polynomes et les fonctions rationnelles de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, à coefficients rationnels, déterminés ou non, possède les deux propriétés suivantes :

I. Il existe toujours un élément et un seul du système, X, qui vérifie relation

$$A + X = B,$$

où A et B sont deux éléments quelconques du système.

II. Il existe toujours un élément et un seul du système, X_1, qui vérifie la relation

$$A_1 X_1 = B_1,$$

B_1 étant quelconque et A_1 différent de zéro.

Lorsque $A_1 = B_1 = 0$, tout élément du système mis à la place de X_1 vérifie la relation.

Lorsque $A_1 = 0$, B_1 étant différent de zéro, aucun élément du système ne vérifie la relation.

Suivant une dénomination consacrée, nous désignerons le système précédent sous le nom de *domaine de rationalité absolu* ou de *domaine absolu,* ou simplement d'*absolu.*

IV. — Nombres et fonctions algébriques.

7. Tous les éléments étudiés jusqu'ici sont définis *sans ambiguïté,* c'est-à-dire d'une manière unique, par leurs liaisons avec les éléments déjà connus. CETTE CIRCONSTANCE NE SE PRÉSENTERA PLUS; *tous les éléments déterminés, c'est-à-dire non variables, que nous aurons à considérer*

*maintenant ne seront définis par leurs liaisons aux éléments précédents, c'est-à-dire à l'*ABSOLU, *qu'avec un certain arbitraire*. La connaissance précise de cet arbitraire nous permettra de fixer ce qu'il y a de déterminé dans le calcul de ces éléments; elle nous permettra aussi de les classer. Une étude ultérieure de la classification *naturelle*, à laquelle on parvient ainsi, en montrera l'importance.

Le premier exemple d'éléments qui ne sont définis qu'avec une certaine ambiguïté est donné par les *nombres algébriques*, dont nous allons maintenant résumer les principales propriétés (¹).

Le produit de deux polynomes en x à coefficients rationnels est un polynome en x à coefficients rationnels. Tout polynome en x à coefficients rationnels peut-il inversement être regardé comme le produit de deux polynomes de même nature? Une théorie élémentaire (théorie de la divisibilité) montre qu'il n'en est rien.

Par un nombre limité d'essais, fixé à l'avance, on peut mettre tout polynome $F(x)$ à coefficients rationnels sous la forme d'un produit

$$f^\alpha(x)\, g^\beta(x) \ldots l^\lambda(x),$$

de polynomes à coefficients rationnels pour chacun desquels une décomposition analogue n'est plus possible (polynomes irréductibles) ou bien reconnaître l'impossibilité de cette décomposition.

L'identité

$$F(x) = (x - x_1)\, F_1(x, x_1) + F(x_1),$$

où x_1 désigne un nombre rationnel arbitraire, nous montre qu'on obtiendra les nombres rationnels x_1 qui vérifient la relation

$$F(x_1) = 0,$$

en égalant à zéro les polynomes $f(x)$, $g(x)$, ... *facteurs* de $F(x)$ qui sont du premier degré en x. Tout polynome $F(x)$ qui n'admet pas de diviseurs rationnels du premier degré, ne s'annule pour aucune détermination rationnelle de x.

(¹) On pourra consulter, pour plus de détails sur ce sujet, l'*Introduction à l'étude de la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure* (2ᵉ Partie, *Algèbre supérieure*). Librairie Nony; 1895.

Supposons que $F(x)$ n'admette pas de diviseurs rationnels du premier degré, ni même d'aucun degré, et proposons-nous de rechercher s'il existe, dans l'ensemble général formé par les constantes arbitraires, des éléments x qui vérifient la relation

$$F(x) = 0.$$

En désignant par x_1 l'un de ces éléments, on pourra encore écrire l'identité

$$F(x) = (x - x_1) F_1(x, x_1) + F(x_1),$$

et conclure de là et de la relation

$$F(x) = 0,$$

la relation

$$(x - x_1) F_1(x, x_1) = 0.$$

La propriété distributive de la multiplication étant conservée dans l'ensemble général des constantes arbitraires, on peut affirmer que, *pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul;* si donc x est différent de x_1, on aura

$$F_1(x, x_1) = 0.$$

Soit x_2 un élément vérifiant cette dernière relation, l'identité

$$F_1(x, x_1) = (x - x_2) F_2(x, x_2, x_1) + F_1(x_2, x_1)$$

nous montrera de même que tout élément x_3, différent de x_1 et de x_2, qui vérifie la relation

$$F_1(x, x_1) = 0$$

vérifie également

$$F_2(x_3, x_2, x_1) = 0.$$

Le raisonnement se continue manifestement jusqu'à x_n lorsque le polynome $F(x)$ est de degré n, et les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ devront vérifier les relations

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} F(x_1) = 0, \\ F_1(x_2, x_1) = 0, \\ F_2(x_3, x_2, x_1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{n-1}(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) = 0. \end{array} \right.$$

On pourra conclure aussi de là l'identité

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

et il est clair que cette identité suffit pour que $F(x)$ s'annule pour $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n$. Ce polynome $F(x)$ ne peut s'annuler pour aucune autre détermination de x.

Posons

$$F(x) = x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^n p_n,$$

et désignons par $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les sommes des produits un à un, deux à deux, ..., n à n des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$; il résulte des remarques précédentes que, s'il existe des éléments satisfaisant à la relation

$$F(x) = 0,$$

ces éléments distincts sont au nombre de n et doivent vérifier les relations (I) ou encore les relations (II)

$$\text{(II)} \qquad S_1 = p_1, \quad S_2 = p_2, \quad \ldots, \quad S_n = p_n.$$

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes.

8. Nous sommes ainsi amenés à rechercher toutes les conséquences des relations (I) ou (II), et il suffira d'établir qu'elles ne sont jamais contradictoires pour démontrer l'existence des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qu'on appelle des *nombres algébriques*.

Nous étudierons tout de suite le système plus général formé des relations

$$\text{(S)} \qquad F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où les F sont des polynomes à coefficients rationnels. Les conséquences nécessaires de ces relations s'obtiennent toutes en appliquant les deux remarques suivantes :

Si l'on a

$$A = 0, \qquad B = 0,$$

on a aussi

$$\lambda A + \mu B = 0,$$

λ et μ étant deux éléments de l'ensemble formé des constantes arbitraires et des variables.

Si l'on a

$$A^\alpha B^\beta = 0,$$

on a aussi

$$AB = 0.$$

La théorie du *résultant* apprend à ramener ces conséquences à leur forme la plus simple : nous rappellerons qu'en posant

$$z = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n,$$

où les u sont des nombres rationnels indéterminés, Liouville a montré comment, par un procédé régulier, on parvient à les définir à l'aide d'une seule équation

$$\Pi R_i(z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-i}) = 0,$$

dont le premier membre est un produit de polynomes et qu'on appelle la *résolvante générale* du système.

Parmi les différents systèmes (S), nous considérerons plus particulièrement ici ceux dont la résolvante ne renferme plus aucune des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et s'écrit par conséquent

$$R_n(z) = 0,$$

R_n étant un polynome en $z, u_1, u_2, \ldots, u_n$ à coefficients rationnels, qu'on peut supposer sans diviseurs multiples.

Ces systèmes seront appelés *déterminés*.

Les équations (S) sont elles-mêmes des conséquences nécessaires des relations

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{cases} R_n(z) = 0, \\ x_i D_z R_n(z) + D_{u_i} R_n(z) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

en nombre $(n+1)$, dont n seulement sont distinctes et où $D_{u_i} R_n(z)$ représente un polynome bien déterminé, la *dérivée partielle* de $R_n(z)$ par rapport à u_i.

Lorsque le résolvant $R_n(z)$ formé par les méthodes régulières ne renferme pas z, il se réduit à une constante; les équations (S) qui entraînent la relation

$$R_n(z) = 0,$$

conduisent alors à une contradiction : on dit que le système (S) est *incompatible*.

Si le résolvant $R_n(z)$ renferme z, deux cas peuvent se présenter suivant que ce polynome est ou non réductible lorsque les u sont indéterminés.

Si le résolvant $R_n(z)$ est irréductible, toute relation entière en z, à coefficients rationnels en $u_1, u_2, \ldots, u_n$, compatible avec la relation

$$R_n(z) = 0,$$

est une conséquence nécessaire de cette dernière, c'est-à-dire est comprise parmi les relations

$$\lambda R_n(z) = 0,$$

où λ est un polynome en $z, u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Si le résolvant $R_n(z)$ admet des diviseurs rationnels, il n'en est pas de même; soit $\varphi_n(z)$ l'un de ces diviseurs, la relation

$$\varphi_n(z) = 0$$

est compatible avec la relation

$$R_n(z) = 0$$

sans en être une conséquence nécessaire. Les relations (T) peuvent se partager en divers groupes

$$\varphi_n(z) = 0,$$
$$x_i D_z \varphi_n(z) + D_{u_i} \varphi_n(z) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

relatifs aux divers diviseurs rationnels de $R_n(z)$, et les relations de l'un de ces groupes sont incompatibles avec celles de chacun des autres.

Ceci subsiste lors même que les u ne sont plus arbitraires, mais reçoivent des déterminations pour lesquelles $R_n(z)$ n'a pas de diviseurs multiples.

Les systèmes (S) se partagent donc en deux classes :

1° Les *systèmes irréductibles*, tels que toute relation rationnelle en x_1, $x_2, \ldots, x_n$ compatible avec les équations (S), est une conséquence nécessaire de ces équations et peut s'obtenir en les combinant linéairement;

2° Les *systèmes réductibles,* pour lesquels on peut écrire entre les x des relations rationnelles qui, sans cesser d'être compatibles avec les relations (S), n'en sont pas des conséquences nécessaires. Ces derniers systèmes se décomposent en un certain nombre de systèmes irréductibles distincts.

L'exemple le plus simple de tels systèmes est fourni par une seule relation

$$F(z) = 0.$$

1° Si $F(z)$ est irréductible, toute relation $\varphi(z) = 0$, compatible avec la relation $F(z) = 0$, en est une conséquence nécessaire,

$$\varphi(z) = \lambda(z) F(z),$$

λ étant un polynome.

2° Si $F(z) = \varphi(z)\psi(z)$, on peut déduire de la relation

$$F(z) = 0,$$

soit la relation

$$\varphi(z) = 0,$$

soit la relation

$$\psi(z) = 0,$$

et lorsque $F(z)$ n'a pas de diviseurs multiples, ces deux relations s'excluent l'une l'autre; aucune d'elles n'est une conséquence *nécessaire* de la relation $F(z) = 0$.

9. L'application des résultats précédents au système

$$\text{(II)} \qquad S_1 = p_1, \quad S_2 = p_2, \quad \ldots, \quad S_n = p_n$$

se fait de la manière suivante :

Le système (II) est *déterminé* puisque chaque élément $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifie la relation $F(x) = 0$; s'il admet une solution $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la symétrie des premiers membres montre qu'il en aura au moins $n!$, obtenues en permutant les x d'une manière quelconque. Il ne pourra en avoir plus, puisque le degré de la résolvante ne peut surpasser le produit des degrés des équations du système.

Le produit

$$\Pi(z - u_1 x_{r_1} - u_2 x_{r_2} - \ldots - u_n x_{r_n})$$

étendu à toutes les permutations $r_1, r_2, \ldots, r_n$ des entiers $1, 2, \ldots, n$ est une fonction symétrique des x. *On sait donc l'exprimer et d'une seule manière à l'aide de* $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Soit $R(z, S_1, S_2, \ldots, S_n)$ le résultat obtenu; l'identité de Taylor

$$R(z, S_1, S_2, \ldots, S_n) = R(z, p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ + \Sigma(S_i - p_i) D_{p_i} R(z, p_1, p_2, \ldots, p_n) + \ldots$$

nous montre, en remplaçant z par $u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n$, auquel cas on a identiquement

$$R(z, S_1, S_2, \ldots, S_n) = 0,$$

que la relation

$$R(z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

est une conséquence nécessaire des relations

$$\text{(II)} \qquad S_1 = p_1, \qquad S_2 = p_2, \qquad \ldots, \qquad S_n = p_n$$

et une combinaison linéaire de ces équations. *C'est donc la résolvante générale du système* (II); elle renferme z quels que soient les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Le polynome $R(z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ est, d'ailleurs, sans diviseurs multiples lorsque les u sont indéterminés.

Donnons aux u des déterminations telles que cette dernière propriété subsiste; on peut affirmer qu'il existe un élément au moins, ζ, qui vérifie la relation

$$R(\zeta, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0;$$

car toutes les conséquences de cette hypothèse se ramènent à la relation

$$\varphi(\zeta, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

φ désignant un diviseur rationnel *irréductible* de R. Les formules

$$\xi_i D_\zeta R(\zeta, p) + D_{u_i} R(\zeta, p) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

donnent alors l'expression de n éléments $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ qui, mis à la place des x, vérifient les relations (II).

L'existence des n racines de toute équation algébrique irréductible de degré n,

$$F(x) = 0,$$

à coefficients rationnels, est donc établie. On en conclut immédiatement l'existence des racines de toute équation à coefficients rationnels.

10. Les remarques précédentes donnent tout ce qu'il y a d'essentiel dans la théorie des nombres algébriques :

Si la résolvante $R(z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$ est irréductible, il en est de même du système (II). On ne peut ajouter aux équations (II) que des relations rationnelles qui en sont des conséquences nécessaires et, par conséquent, distinguer les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de ceux qu'on en déduit par une permutation quelconque. L'équation $F(x) = 0$ est *générale*.

Si la résolvante $R(z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$ est réductible, le système (II) se décompose en plusieurs systèmes irréductibles. On passe de l'un à l'autre par une permutation des x et, par conséquent, les divers facteurs de la résolvante sont de même degré. Les relations qui forment l'un de ces systèmes demeurent invariables pour certains échanges des x entre eux, qui forment nécessairement un *groupe*, c'est-à-dire que la succession de deux échanges possédant cette propriété équivaut à un seul échange possédant la même propriété. Le nombre des échanges possibles, c'est-à-dire des substitutions du groupe, est le degré du facteur irréductible de la résolvante.

A toute équation $F(x) = 0$ *spéciale* correspond donc un groupe de substitutions G de n lettres, nommé *groupe de rationalité*, définissant l'arbitraire qui subsiste toujours dans la définition des racines à l'aide des relations rationnelles qu'elles vérifient. Ce groupe n'est déterminé qu'à une permutation près des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Toutes les fonctions rationnelles des x, invariables par les substitutions de ce groupe, sont des nombres rationnels, et réciproquement.

Une étude de la structure du groupe G, c'est-à-dire de la manière dont les différentes permutations

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_\lambda,$$

qui appartiennent à ce groupe, s'échangent entre elles lorsqu'on effectue sur les x l'une de ces permutations, permet de ramener tout groupe de substitutions à une forme canonique : *décomposition normale d'un groupe en facteurs,* où les facteurs seuls sont déterminés. Il en résulte une solution du problème qui consiste à parvenir à une définition précise des racines d'une équation en faisant intervenir d'autres nombres algébriques bien déterminés, c'est-à-dire de la *résolution algébrique.* On démontre que les nombres algébriques qui conduisent à l'une de ces solutions peuvent toujours être choisis parmi les fonctions rationnelles des racines.

Enfin tous les nombres algébriques sont des fonctions rationnelles de certains d'entre eux, les nombres algébriques *normaux,* racines des équations dont toutes les racines sont les fonctions rationnelles de l'une d'elles.

11. Tous les résultats précédents s'étendent, *mutatis mutandis,* aux *fonctions algébriques* d'une ou de plusieurs variables. On est conduit à ces éléments en observant que la relation

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{1}$$

où F est un polynome à coefficients rationnels, *irréductible* même après l'adjonction de nombres algébriques convenables, ou de fonctions algébriques de moins de n variables, ne peut être vérifiée en mettant à la place de z une fonction rationnelle de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si l'on cherche, dans l'ensemble des *fonctions arbitraires* des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (c'est-à-dire dans l'ensemble des éléments qui possèdent entre eux, et avec les fonctions rationnelles de ces variables, les deux modes de composition, addition et multiplication, dont nous avons mis en évidence les propriétés générales) des éléments qui peuvent vérifier la relation (1), on trouve, en opérant comme nous l'avons fait plus haut pour les nombres algébriques, qu'il en existe p distincts $z_1, z_2, \ldots, z_p$, lorsque p est le degré en z du polynome F : ce sont les *fonctions algébriques de* $x_1, \ldots, x_n$.

Les systèmes d'équations à considérer doivent avoir une résolvante générale de la forme

$$R(Z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

sinon les fonctions ne dépendraient pas des n variables. La notion de l'irréductibilité subsiste sous la même forme.

Les éléments $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ne sont jamais définis, par les relations rationnelles qu'ils vérifient, qu'à certaines permutations près formant un groupe G, qui est le *groupe de rationalité* de l'équation (1).

On peut aussi indiquer une marche canonique, basée sur la *décomposition du groupe* G *en facteurs,* pour parvenir aux éléments z_1, $z_2, \ldots, z_p$, en faisant intervenir des fonctions algébriques bien déterminées.

Ces questions n'ont d'ailleurs jamais été traitées d'une manière complète et mériteraient une étude approfondie que nous ne pouvons faire en quelques pages.

Nous avons seulement voulu indiquer ici les méthodes générales qui permettent, en Algèbre, d'introduire dans le raisonnement des éléments nouveaux et de fixer leurs propriétés, afin de mettre en évidence la parfaite analogie qu'elles présentent entre elles et avec celles qui nous serviront tout à l'heure en Analyse.

12. Il convient cependant d'insister, avant de passer à un autre ordre d'idées, sur deux circonstances dont nous retrouverons plus tard les analogues.

Lorsqu'on étudie les fonctions algébriques de n variables et leur calcul, toutes les divisions par des fonctions de ces variables qui ne sont pas identiquement nulles sont des opérations possibles. Il n'en est pas de même quand on considère les *correspondances* établies par ces éléments entre des nombres algébriques ou des fonctions algébriques de moins de n variables, correspondances qu'on obtient en fixant dans le système des nombres algébriques les déterminations d'une ou de plusieurs variables. L'examen de ces divisions amène à considérer des *domaines singuliers,* définis par des fonctions algébriques de moins de n variables, qui jouent un très grand rôle dans l'étude des correspondances dont nous parlons. Tels sont, en particulier, les domaines obtenus en égalant à zéro les divers diviseurs du *discriminant* de l'équation qui définit les fonctions algébriques elles-mêmes. Les divisions par zéro sont d'ailleurs les seules opérations impossibles, c'est-à-dire les seules à examiner.

Dans les théories esquissées nous avons constamment distingué, parmi les $n+1$ variables $z, x_1, \ldots, x_n$ qui vérifient une relation algébrique

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{1}$$

l'une d'entre elles z, regardée comme une fonction des autres. Supposons que l'on passe des éléments z, x aux éléments z', x' par des relations

$$\begin{aligned} z &= Z(z', x'_1, x'_2, \ldots, x'_n), \\ x_i &= X_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

où Z et les X sont des fonctions rationnelles de leurs arguments, qui permettent, en se servant ou non de la relation (1), d'exprimer z' et les x' par des formules analogues; les propriétés *essentielles* de la fonction z des x et celles de la fonction z' des x' seront évidemment les mêmes.

Un autre point de vue consiste à regarder dans une relation algébrique tous les éléments comme jouant le même rôle, l'attention étant portée non plus sur les éléments qui la vérifient, mais sur la relation elle-même ou sur son premier membre. Il est clair qu'alors deux relations

$$f(x, y) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta) = 0,$$

telles que l'on puisse passer de l'une à l'autre par des transformations

$$\begin{aligned} x &= R_1(\xi, \eta), \qquad & \xi &= r_1(x, y), \\ y &= R_2(\xi, \eta), \qquad & \eta &= r_2(x, y), \end{aligned}$$

où les R et les r sont rationnels, ne posséderont pas de propriétés essentielles distinctes.

Ceci dit pour faire observer que, avec le point de vue, changent aussi les propriétés *essentielles* des éléments que l'on considère.

CHAPITRE II.

LES SYSTÈMES COMPLÈTEMENT INTÉGRABLES ET LE PROBLÈME DE *L'INTÉGRATION LOGIQUE*.

I. — Différentielles et dérivées des polynomes. Fonctions dérivables.

1. Soient x une variable, y une fonction de x définie par l'identité

$$y = f(x),$$

où $f(x)$ représente un polynome à coefficients rationnels [1]; désignons par dx une nouvelle variable, indépendante de x, et formons le développement de $f(x + dx)$ suivant les puissances croissantes de dx

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{dx}{1} f'(x) + \frac{dx^2}{1.2} f''(x) + \ldots;$$

nous définirons une fonction de x et de dx que nous représenterons par dy en écrivant l'identité

$$dy = f'(x)\, dx.$$

La variable dx s'appellera *différentielle de* x, la fonction dy s'appellera *différentielle de* y; dy représente, par conséquent, l'ensemble des termes du premier degré en dx dans le développement de $f(x + dx)$.

La fonction y' de x définie par l'identité

$$dy - y'\, dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$y' = f'(x),$$

sera dite *dérivée première* ou simplement *dérivée* de la fonction y.

---

[1] Dans tout ce qui suit, à moins d'indication expresse du contraire, nous appellerons *rationnels* des éléments qui appartiennent à un *domaine naturel* pouvant renfermer des variables, indépendantes de celles sur lesquelles nous raisonnerons explicitement.

Répétons avec la fonction y' ce que nous venons de faire avec y, c'est-à-dire formons

$$f'(x+dx)=f'(x)+\frac{dx}{1}f''(x)+\ldots,$$

et posons

$$dy'=f''(x)\,dx;$$

dy' sera la différentielle de y' et la fonction y'', définie par l'identité

$$dy'-y''\,dx=0,$$

sera la dérivée première de y' ou la *dérivée seconde* de y. On définira de même dy'', dy''', ... et y''', y^{IV}, ...

La théorie des fonctions algébriques a pu montrer déjà l'intérêt qui s'attache à la considération des éléments y', y'', ...; nous voulons seulement mettre en évidence une propriété essentielle du calcul de ces éléments.

Les relations de définition

$$y=f(x),\qquad y'=f'(x),\qquad y''=f''(x),\qquad \ldots$$

permettent de former en nombre illimité des identités

$$\varphi(x,y,y',\ldots)=0,$$

dont le premier membre est un polynome; *si l'on remplace dans l'une quelconque de ces identités x par $x+dx$, y par $y+dy$, y' par $y'+dy'$, ..., l'ensemble des termes qui sont, dans le premier membre, du premier degré par rapport aux différentielles, est identiquement nul.*

Les relations

$$y=f(x),\qquad y'=f'(x),\qquad y''=f''(x),\qquad \ldots,$$

dont l'identité considérée est une simple combinaison linéaire, traitées par le procédé indiqué, conduisent, en effet, aux relations

$$dy=f'(x)\,dx,\qquad dy'=f''(x)\,dx,\qquad dy''=f'''(x)\,dx,\qquad \ldots,$$

qui sont des identités d'après la définition des différentielles.

Nous ajouterons que, si, dans la relation différentielle ainsi obtenue, on remplace les différentielles dy, dy', dy'', ... par les expressions correspondantes $y' dx, y'' dx, y''' dx, \ldots$, on obtiendra une identité

$$\varphi_x + \varphi_y y' + \varphi_{y'} y'' + \ldots + \varphi_{y^{(n-1)}} y^{(n)} = 0,$$

qui renfermera nécessairement $y^{(n)}$ lorsque $y^{(n-1)}$ est la dérivée d'ordre le plus élevé qui figure dans φ.

2. Tout ce que nous venons de dire peut, avec d'évidentes modifications, être répété dans le cas de plusieurs variables.

Considérons, pour fixer les idées, une fonction z de *deux* variables seulement x et y définie par l'identité

$$z = f(x, y),$$

dont le second membre est un polynome à coefficients rationnels.

Nous désignerons par dx et dy deux nouvelles variables indépendantes, et nous définirons une fonction dz de x, y, dx, dy en prenant dans le développement de $f(x + dx, y + dy)$ l'ensemble des termes du premier degré en dx et dy

$$dz = f_x\, dx + f_y\, dy.$$

Nous posons d'autre part l'identité

$$dz - \frac{\partial z}{\partial x} dx - \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0,$$

et nous aurons défini ainsi deux dérivées premières de la fonction z: l'une, représentée par le signe $\frac{\partial z}{\partial x}$, sera dite dérivée de z relative à x, l'autre $\frac{\partial z}{\partial y}$ dérivée relative à y.

Les deux identités

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y$$

permettront de même d'associer à $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ deux fonctions $d\frac{\partial z}{\partial x}$ et $d\frac{\partial z}{\partial y}$ définies par les relations

$$d\frac{\partial z}{\partial x} = f_{xx}\, dx + f_{xy}\, dy,$$

$$d\frac{\partial z}{\partial y} = f_{yx}\, dx + f_{yy}\, dy,$$

et par suite de définir pour chacune des expressions $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ deux dérivées premières à l'aide des identités

$$d\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy = 0,$$
$$d\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = 0.$$

Nous remarquerons immédiatement que les polynomes f_{xy} et f_{yx} sont identiques; il en résulte donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

et trois dérivées secondes seulement sont distinctes. On les représente par les signes $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Il est clair qu'en continuant de la sorte nous définirons d'une seule manière les dérivées de z d'un ordre quelconque ([1]); nous constaterons en particulier que $(n+1)$ dérivées d'ordre n seulement sont distinctes et nous les représenterons par

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^n}.$$

On verrait aisément qu'il n'existe pas d'autres relations entre les dérivées d'un polynome de degré quelconque, que celles qui résultent de la remarque précédente.

Le calcul des fonctions entières de x, y, z et des dérivées successives de z jusqu'à un ordre déterminé possède encore la propriété que nous avons signalée dans le cas d'une seule variable. Si dans une relation

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0,$$

dont le premier membre est un polynome et que l'on suppose vérifiée

---

([1]) Lorsque z est un polynome d'ordre m, les dérivées d'ordre supérieur à m sont toutes nulles, mais comme nous nous proposons de donner des définitions applicables à tout polynome quel que soit son degré, nous devons regarder ce fait comme un simple accident.

par les éléments précédemment définis ([1]), on remplace respectivement $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ par $x + dx, y + dy, z + dz, \frac{\partial z}{\partial x} + d\frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n} + d\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$, l'ensemble des termes qui sont du premier degré par rapport aux différentielles est identiquement nul.

On a, par conséquent,

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz + \varphi_{\frac{\partial z}{\partial x}} d\frac{\partial z}{\partial x} + \ldots + \varphi_{\frac{\partial^n z}{\partial y^n}} d\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0,$$

et si l'on substitue aux différentielles leur expression à l'aide de dx et dy, on pourra en conclure, puisque dx et dy sont deux variables indépendantes, deux relations aux dérivées

$$\varphi_x + \varphi_z \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi_{\frac{\partial z}{\partial x}} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \ldots + \varphi_{\frac{\partial^n z}{\partial y^n}} \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^n \partial x} = 0,$$

$$\varphi_y + \varphi_z \frac{\partial z}{\partial y} + \varphi_{\frac{\partial z}{\partial x}} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \ldots + \varphi_{\frac{\partial^n z}{\partial y^n}} \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n+1}} = 0,$$

qui seront des conséquences nécessaires de la relation $\varphi = 0$. Ajoutons que ces relations renferment nécessairement des dérivées d'ordre $(n+1)$ lorsque les dérivées qui sont dans φ de l'ordre le plus élevé sont d'ordre n.

3. Un examen attentif des résultats qui précèdent montre qu'on peut les obtenir en faisant simplement les hypothèses suivantes :

1° *A tout élément u, pris dans le système des polynomes à une ou plusieurs variables, est associé un élément du, sa différentielle, tel que l'on ait identiquement*

$$d(u+v) = du + dv,$$
$$d(uv) = u\,dv + v\,du;$$

2° *La différentielle d'une constante est nulle ;*

3° *Les différentielles des variables indépendantes sont de nouvelles variables indépendantes.*

([1]) C'est-à-dire qu'en remplaçant dans le polynome φ ces éléments par leur expression en x et y, on obtient un polynome identiquement nul.

Ces hypothèses permettent en effet de former l'expression qui donne la différentielle dz d'un polynome à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$dz = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_n dx_n,$$

où les a_i sont des polynomes dépendant de toutes les variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ ou de quelques-unes d'entre elles seulement, mais dont aucun n'est nul. *Ces coefficients seront, par définition, les dérivées premières du polynome* z; *ils ne dépendent pas des* dx_i.

On parviendra de même aux dérivées d'ordre supérieur.

Les relations qui lient les dérivées d'ordre n d'un polynome, relations signalées plus haut dans le cas de deux variables, expriment simplement que *les dérivations relatives à des variables* indépendantes *sont échangeables*.

Enfin toute relation

$$b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + \ldots + b_n dx_n = 0$$

où les x sont des variables indépendantes entraîne nécessairement

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0.$$

4. Ces observations vont nous permettre de donner d'une manière précise la définition des éléments généraux dont nous allons maintenant nous occuper : les *fonctions dérivables d'une et de plusieurs variables*. Nous désignerons ainsi tous les éléments qui satisfont aux conditions suivantes :

1° Ils se composent entre eux et avec les polynomes à coefficients rationnels suivant deux modes distincts qui possèdent les propriétés générales de l'addition et de la multiplication de ces polynomes : propriétés qui ont servi à définir les variables.

2° A chacun d'eux u, peut être associé un élément du, qu'on appelle sa *différentielle*, de telle sorte que l'on ait

$$d(u + v) = du + dv,$$
$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

La différentielle d'une constante est nulle.

Les différentielles des variables indépendantes sont de nouvelles variables indépendantes.

3° Lorsque z désigne une fonction dérivable des n variables x_1, x_2, ..., x_n, on a identiquement

$$dz = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_n dx_n,$$

et aucun des coefficients a_1, a_2, ..., a_n n'est égal à zéro.

Ces coefficients a_i sont appelés *dérivées premières* de la fonction z et représentés par les expressions

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n};$$

ce sont encore des fonctions dérivables des seuls éléments x_1, x_2, ..., x_n.

4° Nous exigeons enfin que les *dérivations relatives à des variables indépendantes soient échangeables.*

On a, par exemple, $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1}$ et toutes les identités analogues.

Toutes ces conditions étant satisfaites par les polynomes à une ou plusieurs variables ne sont point contradictoires en elles-mêmes. Nous allons montrer qu'il existe effectivement d'autres fonctions dérivables que les polynomes et, pour commencer, nous établirons que *les fonctions rationnelles et les fonctions algébriques sont dérivables.*

5. Prenons, pour fixer les idées, la fonction rationnelle de deux variables x et y définie par l'identité

$$Az + B = 0,$$

dans laquelle A et B sont des polynomes sans diviseur commun. On en pourra conclure

$$A\,dz + z\,dA + dB = 0,$$

ce qui définit la différentielle dz; comme, d'autre part,

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy,$$

$$dB = \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

les deux équations

$$A\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial x}=0,$$

$$A\frac{\partial z}{\partial y}+z\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial y}=0$$

détermineront $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}\cdot$ Il n'est pas inutile de faire remarquer qu'elles sont toujours résolubles en $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, puisque le coefficient de ces éléments est A.

En appliquant aux deux équations précédentes la même méthode, on obtiendra trois dérivées distinctes du second ordre par des équations du premier degré toujours résolubles, et ainsi de suite, chaque dérivée étant donnée par une seule équation. *Cela suffit à établir que la fonction z est dérivable.*

Le système formé par ces équations est irréductible, puisque chacune d'elles renferme au premier degré un élément qui ne figure pas dans les précédentes; toute relation rationnelle entre z et ses dérivées compatible avec ces équations en est donc une simple combinaison linéaire. On voit alors directement que cette relation $\varphi=0$ entraîne nécessairement $d\varphi=0$ et la propriété du calcul des dérivées d'un polynome, que nous avons établie au début de ce Chapitre, subsiste sous la même forme pour les dérivées d'une fraction rationnelle.

Passons aux fonctions algébriques et considérons, pour simplifier l'écriture, une fonction y de la seule variable x définie par la relation irréductible

$$f(x,y)=0.$$

Nous pouvons conclure de cette relation

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0,$$

le polynome $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'étant pas nul; la dérivée première y' est donc définie d'une manière unique par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Celle-ci donnera de même

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}y' dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y' dy + \frac{\partial f}{\partial y}dy' = 0,$$

c'est-à-dire, en tenant compte des expressions de dy, dy',

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}y'' = 0,$$

et détermine y'' d'une manière unique, etc.

La fonction algébrique y de x est donc dérivable.

Comme dans le cas d'une fonction rationnelle, le système des équations obtenues est irréductible et toute équation entre $x, y, y' y'', \ldots,$ compatible avec les précédentes est une combinaison linéaire de ces dernières.

On peut ajouter qu'aucune des dérivées ainsi définies n'est égale à zéro.

Nous avons supposé que la relation $f(x, y) = 0$, qui définit y, est irréductible; le cas général se ramène à celui-là en observant que, si l'on a

$$f(x, y) = g(x, y)\, h(x, y),$$

on en peut conclure

$$df = g\, dh + h\, dg$$

d'où il résulte que le système

$$f = 0, \qquad df = 0$$

se *décompose* en deux systèmes

$$g = 0, \qquad dg = 0 \qquad \text{et} \qquad h = 0, \qquad dh = 0.$$

Les mêmes remarques s'étendraient aux fonctions algébriques de plusieurs variables.

6. L'existence de fonctions dérivables autres que les polynomes étant établie, nous allons présenter à leur sujet quelques observations immédiates, mais d'une grande importance.

Si l'on a

$$b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + \ldots + b_n dx_n = 0,$$

les x étant des variables indépendantes, on a aussi

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0.$$

Si l'on a

$$b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + \ldots + b_n dx_n = 0,$$

et si b_1, par exemple, n'est pas nul, x_1 est une fonction des éléments $x_2, \ldots, x_n$ ou de quelques-uns d'entre eux.

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_p$ des fonctions de n variables indépendantes, ou de quelques-unes d'entre elles; nous avons les identités

$$dz_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z_1}{\partial x_n} dx_n,$$
$$dz_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z_2}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z_2}{\partial x_n} dx_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$dz_p = \frac{\partial z_p}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z_p}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z_p}{\partial x_n} dx_n;$$

nous dirons que *les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ sont indépendantes, s'il n'existe aucune identité de la forme*

$$\lambda_1 dz_1 + \lambda_2 dz_2 + \ldots + \lambda_p dz_p = 0,$$

où les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ne sont pas tous nuls.

Les déterminants d'ordre p formés avec les coefficients des dx ne sont donc pas tous nuls et l'on peut résoudre les relations précédentes par rapport à p des différentielles dx.

Il ne peut exister entre les éléments indépendants $z_1, z_2, \ldots, z_p$ aucune relation

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_p) = 0,$$

car on en pourrait déduire, la fonction f étant supposée dérivable,

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_p} dz_p = 0,$$

les coefficients $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_p}$ n'étant pas tous nuls.

Nous venons de voir que, réciproquement, toute relation identique

$$\lambda_1 dz_1 + \ldots + \lambda_p dz_p = 0,$$

où les λ ne sont pas tous nuls, exige que l'un des éléments $z_1, z_2, \ldots, z_p$ soit fonction des autres ou de quelques-uns d'entre eux. Il en résultera qu'on peut définir l'*indépendance* de p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en disant qu'il n'existe aucune relation de la forme

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_p) = 0$$

entre ces fonctions, où f est une fonction dérivable quelconque des arguments $z_1, z_2, \ldots, z_p$.

Il n'existe pas plus de n fonctions indépendantes de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ désignent de telles fonctions, les dx peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $dz_1, dz_2, \ldots, dz_n$; on en peut donc conclure que les x sont des fonctions des éléments $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Les identités

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial z_1} dz_1 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial z_n} dz_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

permettront d'obtenir les dérivées $\frac{\partial x_i}{\partial z_k}$ à l'aide des dérivées premières des z par rapport aux x, par des équations du premier degré toujours résolubles.

Ces dérivées $\frac{\partial x_i}{\partial z_k}$ sont elles-mêmes des fonctions de $z_1, z_2, \ldots, z_n$, dont on obtiendra aisément les dérivées $\frac{\partial^2 x_i}{\partial z_h \partial z_k}$ à l'aide des dérivées premières et secondes des z par rapport aux x. Les équations à résoudre seront toujours du premier degré et résolubles; etc.

7. Nous venons de voir quels sont les principes qui permettent de définir les différentielles et les dérivées des fonctions de plusieurs variables. Il résulte immédiatement des définitions données, qu'il est possible de considérer plusieurs systèmes de différentielles en prenant pour $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ plusieurs systèmes de variables nouvelles. Soient $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ les éléments d'un nouveau système; on aura évidemment si z désigne une fonction quelconque des x

$$\delta z = a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 + \ldots + a_n \delta x_n$$

et, si nous rappelons que *les dérivées de z sont des fonctions des seuls éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lorsque les dx sont des variables arbitraires*, on en pourra conclure

$$a_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \qquad a_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, \qquad \ldots, \qquad a_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

En d'autres termes, *les dérivées ne dépendent pas du système de différentielles considéré*. Ceci s'étend manifestement aux dérivées d'ordre supérieur.

On considère parfois aussi *simultanément* plusieurs systèmes de différentielles relatifs aux mêmes variables indépendantes.

Supposons qu'ayant défini un premier système par les éléments dx_1, $dx_2, \ldots, dx_n$, on en forme un second en considérant $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, comme les variables indépendantes. On devra regarder les différentielles $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n, \delta\, dx_1, \delta\, dx_2, \ldots, \delta\, dx_n$ comme de nouvelles variables indépendantes et appliquer les règles données plus haut.

On aura, par exemple,

$$\left.\begin{aligned} \delta z &= \sum \frac{\partial z}{\partial x_i}\,\delta x_i \\ \delta\, dz &= \sum \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\delta x_i\, dx_k + \sum \frac{\partial z}{\partial x_h}\,\delta\, dx_h \end{aligned}\right\} \qquad (i, h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Parmi les systèmes obtenus de cette manière, l'un des plus importants est celui où l'on suppose $\delta x_i = dx_i$; on aura alors, en employant le signe d pour les deux systèmes de différentielles,

$$\left.\begin{aligned} dz &= \sum \frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx_i \\ d\, dz &= \sum \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_k}\,dx_i\, dx_k + \sum \frac{\partial z}{\partial x_h}\,d\, dx_h \end{aligned}\right\} \qquad (i, h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

L'expression $d\,dx_h$ est une nouvelle variable, indépendante des x et des dx; on la représente par $d^2 x_h$ et on la nomme *différentielle seconde*.

Enfin on peut, dans le cas où les x sont des variables indépendantes, supposer, pour définir le second système de différentielles, les éléments $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ constants; on aura alors

$$\delta\, dx_i = 0$$

et, par conséquent,

$$\delta\, dz = \sum \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_k} \delta x_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

L'expression $\delta\, dz$ est alors identique à celle qu'on obtiendrait pour $d\delta z$, en supposant les δx_i constants.

Dans le cas particulier où les δx_i sont identiques aux dx_i, on a simplement

$$d^2 z = \sum \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_k} dx_i\, dx_k,$$

et l'on obtiendrait aisément des formules analogues représentant $d^3 z$, $d^4 z$, ...

II. — Systèmes complètement intégrables.

8. L'impossibilité de vérifier une relation algébrique entière

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

donnée arbitrairement, en mettant à la place de y une fonction rationnelle de x, nous a conduits à étudier directement les éléments y qui possèdent les propriétés générales de composition des éléments rationnels et peuvent satisfaire à la relation (1). Nous sommes ainsi parvenus à définir les fonctions algébriques d'une variable et à fixer, dans la mesure où il est déterminé, le calcul de ces éléments. C'est en traitant par la même méthode un problème analogue que nous allons parvenir aux éléments qui font l'objet essentiel de cette étude et que nous appelons *fonctions dérivables à définition algébrique*.

Les définitions données pour les dérivées et les différentielles nous permettent aisément de former des relations entières liant une fonction algébrique donnée à ses dérivées des différents ordres. Peut-on inversement choisir arbitrairement l'une de ces relations, à condition de laisser la fonction algébrique à déterminer? Il est facile de voir qu'il n'en est rien.

Si l'on écrit arbitrairement une relation algébrique entière

$$\varphi(x, y, y', \ldots) = 0,$$

il n'existe aucune fonction algébrique y de la variable x, liée à ses dérivées y', y'', ... par cette relation.

Un exemple simple de cette circonstance est donné par la relation du premier ordre : $y' = y$.

Admettons, en effet, un instant, que la fonction algébrique y de x, définie par la relation irréductible

$$f(x, y) = 0,$$

vérifie la relation $y' = y$; nous pourrons en déduire une identité en x et y

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = cf, \tag{1}$$

dans laquelle c est une constante à déterminer. Or, si l'on pose

$$f(x, y) = \mathrm{A}y^n + \mathrm{A}_1 y^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n,$$

l'identité (1) donnera, en égalant les coefficients de y^n,

$$\frac{d\mathrm{A}}{dx} + n\mathrm{A} = c\mathrm{A},$$

ce qui exige, puisque A est un polynome,

$$c = n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A} = \text{const.}$$

On aura ensuite, en égalant les coefficients de y^{n-1},

$$\frac{d\mathrm{A}_1}{dx} + (n-1)\mathrm{A}_1 = n\mathrm{A}_1,$$

d'où l'on conclut cette fois,

$$\mathrm{A}_1 = 0;$$

on aurait de même

$$\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_3 = \ldots = \mathrm{A}_n = 0.$$

Le polynome $f(x, y)$ se réduirait donc à y^n, ce qui établit la proposition annoncée.

9. Considérons alors une relation algébrique entière

$$\varphi(x, y, y', \ldots) = 0, \tag{1}$$

qui n'est satisfaite par aucune fonction algébrique de x; peut-on trouver, *dans l'ensemble des fonctions dérivables de* x, des éléments qui la vérifient? Quelles seront leurs propriétés?

Nous pouvons, dès à présent, répondre affirmativement à la première question; il suffira pour cela de montrer que les conséquences de la relation (1), où l'on suppose y dérivable, ne sont pas contradictoires en elles-mêmes. La seconde question est beaucoup plus délicate; ce n'est que dans le Chapitre suivant qu'elle sera traitée et qu'on donnera, pour les fonctions considérées, des propriétés *caractéristiques*.

Examinons, par exemple, le cas simple, signalé plus haut, où la relation donnée est $y' = y$.

On peut conclure de cette relation, en supposant la fonction y dérivable, toutes les identités

$$y^{(i)} = y$$

et celles-là seulement. Une fonction dérivable qui les vérifie ne peut satisfaire à aucune relation algébrique entière

$$f(x, y, y', \ldots) = 0,$$

non conséquence des précédentes, car cette relation pourrait s'écrire

$$f(x, y, y, \ldots) = 0,$$

et nous avons vu que y ne peut être une fonction algébrique.

Les relations $y^{(i)} = y$ qui déterminent toutes les dérivées de la fonction y, définissent donc une fonction dérivable de x; on la nomme *fonction exponentielle*.

La forme particulière de la relation $y' = y$ nous permet d'ajouter une observation : si z désigne une autre fonction dérivable vérifiant la relation $z' = z$, on pourra conclure de là

$$y'z - z'y = 0$$

et, par suite,

$$z = cy,$$

où c désigne une constante arbitraire.

Toutes les fonctions qui vérifient la relation $y' = y$ s'obtiennent donc en multipliant l'une d'elles par une constante arbitraire; les relations $y^{(i)} = y$ ne permettent pas de les distinguer l'une de l'autre. Nous verrons plus loin de nombreux exemples d'une indétermination analogue et nous mettrons en évidence le rôle qu'elle joue dans l'étude des fonctions correspondantes.

Considérons maintenant une relation algébrique entière

$$\varphi(x, y, y') = 0$$

quelconque, qui n'est satisfaite par aucune fonction algébrique de x. En supposant que y représente une fonction dérivable, on pourra en déduire une suite bien déterminée de relations

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}y'' = 0, \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}y''' = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{gathered}$$

qui définiront y'', y''', ... par des équations du premier degré toujours résolubles, à l'aide des éléments x, y, y'; ce sont d'ailleurs les seules conséquences de nos hypothèses.

Cela suffit pour établir qu'il existe au moins une fonction dérivable satisfaisant à la relation

$$\varphi(x, y, y') = 0,$$

et il est clair que les mêmes conclusions s'étendent *a fortiori* à une relation

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots) = 0,$$

qui renfermerait des dérivées d'ordre supérieur.

Les fonctions y dont nous venons d'établir l'existence sont dites *fonctions de la variable x, à définition algébrique*. D'une manière générale, nous désignerons sous le nom de fonctions *à définition algébrique,* les fonctions dérivables d'une ou de plusieurs variables, qui sont liées à leurs dérivées et aux variables par des relations entières. Les équations qui lient plusieurs de ces fonctions sont alors en nombre suffisant pour qu'aucune d'elles ne puisse être choisie arbitrairement. Les systèmes qui possèdent cette propriété seront dits *à solutions déterminées;* on verra plus tard comment on les distingue des autres.

10. Nous avons vu qu'une relation entière entre les éléments $x, y, y', \ldots$ est toujours vérifiée par *au moins une* fonction dérivable y de la variable x; il s'en faut qu'il soit toujours aussi simple de reconnaître l'existence de fonctions dérivables vérifiant des relations entières données, en particulier quand ces relations renferment à la fois plusieurs fonctions et leurs dérivées. Néanmoins, *on peut toujours, par un nombre limité d'opérations, fixé à l'avance, décider s'il existe ou non des fonctions dérivables qui vérifient des relations entières données.*

C'est là une des conséquences d'une très remarquable proposition [1] qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Soient $z_1, \ldots, z_p$ des fonctions dérivables des n variables $x_1, \ldots, x_n$, qui sont liées à leurs dérivées et aux variables par des relations algébriques entières; il existe un ordre fini de dérivation P *tel que toutes les équations distinctes d'ordre* $(P + Q)$ *s'obtiennent en dérivant simplement jusqu'à cet ordre les équations d'ordre égal à* P.

Nous indiquons seulement ici les grandes lignes de la démonstration que nous avons exposée dans un autre travail [2].

On ramène d'abord le cas de plusieurs fonctions $z_1, \ldots, z_p$ au cas d'une seule fonction. Nous posons pour cela

$$Z = u_1 z_1 + \ldots + u_p z_p,$$

les u désignant de nouvelles variables indépendantes; il en résulte

$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = z_i,$$

et les équations données où figuraient $z_1, \ldots, z_p$ se changent en relations où ne figurent plus que les dérivées de Z. Il suffit d'ajouter les équations

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u_i \, \partial u_k} = 0,$$

---

(1) Cette proposition a été, sous une forme légèrement différente, donnée et démontrée pour la première fois par M. Tresse, *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations* (*Acta mathematica*, t. XVIII).

(2) *Sur les systèmes différentiels les plus généraux et le problème de Cauchy* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1898), *Cf.* aussi *Comptes rendus* (26 octobre 1897).

en nombre $\frac{p(p+1)}{2}$ pour exprimer que Z est linéaire par rapport aux variables u.

A toute fonction Z qui vérifie les équations ainsi obtenues correspond, si Z n'est pas une fonction des u seuls, un système de fonctions $z_1, \ldots, z_p$ qui vérifient les équations initiales et réciproquement.

Il suffira, par conséquent, d'établir la proposition de M. Tresse pour une seule fonction z des variables $x_1, \ldots, x_n$ (1).

Elle résulte alors des observations suivantes :

Soit $\frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ une dérivée d'ordre p de z; nous lui attribuerons le *poids* $\alpha_1 g^{n-1} + \alpha_2 g^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} g + \alpha_n$, où g est un entier positif très grand, et nous rangerons les dérivées d'ordre p de façon que leurs poids aillent en décroissant.

Si un système d'équations d'ordre p est résoluble par rapport à k dérivées d'ordre p, il est résoluble par rapport aux k premières.

Soit $\alpha_1 g^{n-1} + \alpha_2 g^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} g + \alpha_n$ le poids de la $k^{\text{ième}}$ dérivée d'ordre p; le système qu'on déduit du précédent par une dérivation est résoluble par rapport à toutes les dérivées dont le poids surpasse

$$\alpha_1 g^{n-1} + \alpha_2 g^{n-2} + \ldots + (\alpha_n + 1).$$

En ajoutant un nombre fini et assignable d'équations nouvelles d'ordre supérieur à p, on obtient un système résoluble par rapport à toutes les dérivées d'un certain ordre $p + p'$. Il est manifeste qu'alors le système ne peut plus renfermer qu'un nombre limité d'équations nouvelles.

Un système formé d'un nombre limité d'équations étant donné, des méthodes régulières permettront de déterminer le nombre désigné par P. Supposons que le système donné ne renferme pas d'équation d'ordre supérieur à h et qu'en passant de l'ordre h à l'ordre $(h+1)$, c'est-à-dire en dérivant les équations d'ordre h, *qui sont en nombre* k, on obtienne précisément autant d'équations distinctes qu'il y a de dérivées d'ordre $(h+1)$ de poids supérieur à

$$\alpha_1 g^{n-1} + \alpha_2 g^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} g + (\alpha_n + 1),$$

(1) Le principe de cette démonstration est dû à M. Delassus (Cf. *Annales de l'École Normale supérieure*, 1896).

où $\alpha_1 g^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} g + \alpha_n$ est le poids de la $k^{\text{ième}}$ dérivée d'ordre h; on n'aura pas non plus d'équations nouvelles en passant de l'ordre $h+1$ à l'ordre $h+2$, ... On pourra, par conséquent, poser $P = h$.

On sait donc, en définitive, au moyen d'un nombre assignable d'opérations, reconnaître si un système donné est formé d'équations *compatibles,* c'est-à-dire admet une solution au moins, ou d'équations *incompatibles*. Un système formé d'équations compatibles et continué jusqu'à l'ordre P sera désigné, dans la suite, sous le nom de *système complètement intégrable.*

11. Les systèmes complètement intégrables offrent, *a priori*, une diversité considérable; on peut cependant montrer qu'ils se ramènent à un nombre de types assez restreint.

Nous avons déjà vu qu'on peut se borner à considérer des systèmes à une seule fonction inconnue; supposons pour un tel système l'ordre P fixé et soit n le nombre des variables. Prenons comme inconnues toutes les dérivées de z qui sont d'ordre P ou d'ordre inférieur et ajoutons les conditions d'intégrabilité d'ordre $(P+1)$.

On montre aisément qu'on obtient ainsi un système complètement intégrable formé d'équations *du premier ordre* (1), mais avec un nombre N d'inconnues.

Appliquons à ce système la transformation indiquée pour le ramener à une seule inconnue, en augmentant de N le nombre des variables. On obtiendra un *système d'équations* du second ordre *au plus, à une seule fonction inconnue.*

Tout système complètement intégrable se ramène donc à un système du second ordre à une seule fonction inconnue. Le nombre des variables devient alors le premier élément de classification; mais nous n'insisterons pas ici sur ce sujet, qui demanderait d'autres développements.

---

(1) Nous renverrons, pour plus de détails, au travail cité plus haut : *Annales de l'École Normale supérieure,* 1898.

III. — L'intégration logique [1].

12. Considérons un système complètement intégrable S [2] formé d'équations algébriques entières entre les variables $x_1, \ldots, x_n$, la fonction z de ces variables et ses diverses dérivées jusqu'à un ordre déterminé et proposons-nous de rechercher ce qu'il faut faire pour parvenir à une connaissance, aussi complète que possible, des propriétés des divers éléments z qui vérifient les équations S. Nous nous attacherons particulièrement ici à celles de ces propriétés qui se traduisent par des relations rationnelles entre les éléments z et leurs dérivées d'ordre quelconque.

Nous appelons *solution* du système S *toute fonction z dépendant des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ou de quelques-unes seulement d'entre elles qui vérifie les équations* S. Il peut se faire que cette fonction dépende de variables ou de fonctions arbitraires de moins de n éléments; nous ne préjugeons rien sur son étendue.

Si nous envisageons d'abord l'ensemble des relations rationnelles qui lient une solution z à ses dérivées et aux variables, deux cas peuvent se présenter :

1° Toutes les relations rationnelles entre z, ses dérivées d'ordre quelconque et les variables, *compatibles avec les équations* S, c'est-à-dire formant avec ces équations un nouveau système complètement intégrable, sont des conséquences *nécessaires* des équations S. La ou les relations considérées s'obtiennent alors par différentiation des équations S et combinaison linéaire des résultats.

Il est clair que, dans ce cas, les diverses solutions du système S ne peuvent être distinguées par la seule considération des relations ra-

---

[1] Le terme « intégration logique » est adopté ici par opposition à celui d' « intégration géométrique » que l'on peut employer pour désigner le problème de Cauchy. Il distingue le problème que nous indiquons de tout problème d'intégration, *avec ou sans conditions aux limites,* où l'on ne tient aucun compte de la nature transcendante *déterminée* des solutions.

[2] On pourra naturellement supposer tout de suite que le système S est algébriquement irréductible et qu'il n'est pas le produit de systèmes irréductibles identiques.

tionnelles qui lient une quelconque d'entre elles à ses dérivées et aux variables. Le système S envisagé à ce point de vue est *irréductible*.

2° Il existe des relations rationnelles entre z, les dérivés de z et les variables, compatibles avec les équations S et qui n'en sont pas des conséquences nécessaires. On peut évidemment, pour chaque système de telles relations, supposer qu'elles forment avec les équations S un système *irréductible* S_1, au sens que nous venons de préciser, sans quoi on pourrait continuer le raisonnement et ajouter de nouvelles relations.

Il est alors possible de distinguer, par la seule considération des relations rationnelles vérifiées par une solution et ses dérivées, les solutions du système S_1 des autres solutions du système S. L'étude des solutions z du système S est donc un *problème réductible*.

La première recherche aura donc pour but de reconnaître si le système S, regardé comme définissant les solutions z, est ou non réductible.

Il faudra examiner les divers types de relations *rationnelles* que l'on peut ajouter aux équations S, de manière à former un système complètement intégrable. Dans certains cas, la forme même des équations S donnera immédiatement des indications sur les types possibles *a priori;* nous en verrons des exemples plus tard. En général, on n'aura d'indications que sur le nombre et l'ordre des équations qu'il est possible d'ajouter aux équations S [1]; les conditions d'intégrabilité se traduiront par un nombre déterminé d'équations aux dérivées partielles, toujours algébriques et entières par rapport aux éléments qu'elles renfermeront et formant un système complètement intégrable σ. Ces équations σ devront, si le système est réductible, admettre des solutions rationnelles ou des solutions entières.

Il y aura donc lieu de *chercher des procédés pratiques permettant de reconnaître si un système d'équations* DONNÉ *admet des solutions rationnelles et de les déterminer si elles existent*. C'est malheureusement un problème que l'on ne sait résoudre que dans des cas très particuliers : la

---

(1) Nous rencontrerons plus loin de nombreux exemples où le nombre des types différents de ces équations est fini; il n'en est pas de même dans tous les cas : nous y reviendrons prochainement.

résolution en est assurée quand on peut fixer à l'avance un nombre limité d'essais, c'est-à-dire de calculs élémentaires, après lesquels on aura trouvé les différents systèmes de solutions, ou bien on pourra affirmer qu'il n'existe pas de solutions. Nous aurons plus loin à revenir sur ce sujet.

13. Supposons la question précédente résolue; admettons, par conséquent, que l'on ait formé un système *irréductible* S_1, ce système pouvant être S lui-même; continuons à le désigner par S. Il est impossible de séparer les solutions de S par la seule considération des relations rationnelles qui lient l'une d'entre elles, z, à ses dérivées et aux variables. Que peut-on faire pour arriver à une connaissance plus complète des propriétés de ces diverses solutions?

La méthode suivante s'offrira immédiatement :

Soit ζ une fonction transcendante des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, définie par un système complètement intégrable *irréductible* Σ; *nous l'adjoignons* (¹) *au domaine de rationalité,* c'est-à-dire nous écrivons, à côté des équations S qui définissent z, les équations Σ qui définissent ζ, et nous étudions le système à deux fonctions inconnues, z et ζ, formé par la réunion des équations S et Σ. Nous savons que le système $(\Sigma + S)$ peut être remplacé par un système à une seule fonction inconnue, mais il n'est pas nécessaire de faire cette transformation pour le but que nous avons en vue.

Ce système $(\Sigma + S)$, à deux inconnues (z, ζ), peut être réductible ou irréductible. Nous disons qu'il est *irréductible* si toutes les relations rationnelles entre les variables, les fonctions z, ζ et leurs dérivées d'ordre quelconque, que l'on peut ajouter aux équations $(\Sigma + S)$ sans cesser d'avoir un système complètement intégrable, sont des conséquences *nécessaires* des équations du système $(\Sigma + S)$.

Il est alors impossible de distinguer un couple (z, ζ) de solutions des équations $(\Sigma + S)$ de tout autre couple vérifiant les mêmes équations, par la seule considération des relations rationnelles qui lient les

(¹) Insistons sur la différence entre l'opération *algébrique* que nous appelons *adjonction d'un élément au domaine de rationalité* et l'opération *idéale* qu'on désigne parfois sous le même nom.

variables aux fonctions z, ζ et à leurs dérivées. L'adjonction de ζ au domaine de rationalité paraît sans effet utile; examinons, d'un peu plus près, dans quel cas cette circonstance se présente.

14. Les équations rationnelles S et Σ permettent de calculer rationnellement certaines des dérivées de z et de ζ, que l'on nomme *dérivées principales,* à l'aide des autres, qui sont les dérivées paramétriques. On peut donc se borner à considérer les relations *nouvelles* qui ne renferment que les dérivées paramétriques.

Nous avons à chercher si l'on peut ajouter aux équations $(\Sigma + S)$ des relations entières entre les dérivées paramétriques de z et de ζ,

$$(\Phi) \qquad \varphi(z, \zeta) = 0,$$

de manière à obtenir un nouveau système complètement intégrable.

Les conditions d'intégrabilité des équations S, Σ et Φ donneront un certain nombre d'*équations résolvantes,* rationnelles par rapport à tous les éléments qui y figurent, auxquelles devront satisfaire les fonctions φ. Il faudra donc reconnaître si ces résolvantes admettent ou non des solutions entières par rapport à tous les éléments dont elles dépendent.

On voit tout de suite que, si l'on ne parvient pas à limiter l'ordre des dérivées paramétriques de z et de ζ qui entrent dans les fonctions φ que l'on doit considérer, il y aura pour les systèmes (Φ) un nombre illimité de types différents. La limitation dont nous venons de parler n'est pas toujours possible, *dès que les équations* S *ou* Σ *renferment des arbitraires* (constantes ou fonctions); mais il paraît extrêmement probable que, *dans chaque cas particulier,* c'est-à-dire quand tous les éléments figurant dans S et dans Σ sont déterminés et définis algébriquement, *on pourra se borner à considérer des fonctions entières* φ *dans lesquelles les dérivées paramétriques de* z *et de* ζ *ne figurent que jusqu'à un ordre déterminé*. Nous en verrons tout à l'heure, des exemples.

Supposons maintenant que; quelles que soient les dérivées paramétriques qui figurent dans les φ, les équations résolvantes dont ils dépendent n'admettent pas de solutions entières. Il sera impossible de former un système complètement intégrable en ajoutant aux équateurs $(\Sigma + S)$ des relations entières entre les dérivées paramétriques.

L'adjonction de ζ au domaine de rationalité n'a pas d'effet utile; nous dirons que *les transcendantes z et ζ sont étrangères l'une à l'autre*.

Dans tous les autres cas, l'adjonction de ζ au domaine de rationalité réduit les équations (S); en d'autres termes, le système $(\Sigma + S)$ est *réductible*. Considérons l'un quelconque des systèmes (Φ) de relations entières, dont nous supposons l'existence; il est clair que les couples (z, ζ) qui, avec les équations $(\Sigma + S)$, vérifient également les équations (Φ), sont distingués des autres. D'ailleurs, si l'on cherche à éliminer ζ entre les équations (Σ) et (Φ), on ne pourra obtenir que des équations du système (S); il suit de là que toute solution z de S peut être obtenue en associant à une solution convenablement choisie ζ de (Σ) une solution du système (Φ). Nous dirons que le système (S) est *imprimitif* et que l'adjonction de ζ met cette imprimitivité en évidence.

Aux divers systèmes tels que (Φ) correspondent naturellement divers modes d'imprimitivité des équations (S). Il y aura lieu d'étudier les rapports qu'ont entre eux ces différents systèmes (Φ).

15. Ces observations peuvent être complétées si l'on fait appel à la transcendante $\xi = az + b\zeta$, où a et b désignent des fonctions rationnelles arbitraires des variables et au système *particulier* X, nécessairement *irréductible*, qui la définit. On démontrera aisément que z et ζ peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de ξ et de ses dérivées, c'est-à-dire appartiennent au domaine $[\xi]$; soit $z = F(\xi)$, on aura en même temps

$$b\zeta = \xi - aF(\xi).$$

Supposons que la relation

$$\xi - aF(\xi) = \xi_1 - aF(\xi_1),$$

jointe aux équations X et X_1 qui définissent respectivement ξ et ξ_1, conduise nécessairement à

$$\xi = \xi_1;$$

on pourra établir que ξ est une fonction rationnelle de $\xi - aF(\xi)$ et de ses dérivées, c'est-à-dire que ξ appartient au domaine $[\zeta]$.

La relation $\xi = az + b\zeta$ montre alors que z appartient au même domaine. L'étude de la fonction z est donc ramenée à celle de la fonction ζ.

Supposons maintenant que le système formé par les équations X, X_1 et

$$\xi - aF(\xi) = \xi_1 - aF(\xi_1)$$

admette d'autres solutions que $\xi = \xi_1$ (1). A deux solutions distinctes ξ_1 et ξ_2 correspondent deux solutions z_1 et z_2 également distinctes; donc *à une même solution ζ correspond plus d'une solution z.*

Considérons alors le système formé par la relation

$$F(\xi) = F(\xi_1)$$

jointe aux équations X et X_1; ce système, qui admet la solution $\xi = \xi_1$, peut ou non admettre d'autres solutions. S'il n'admet que la solution $\xi = \xi_1$, on peut affirmer que ξ est une fonction rationnelle de z. Il en résulte que ζ *est aussi une fonction rationnelle de z*, et la réduction du système S par l'adjonction de ζ est manifeste.

Lorsque le dernier système admet d'autres solutions que $\xi = \xi_1$, à une solution z correspondent plusieurs solutions ξ et, par conséquent, plusieurs solutions ζ. La réduction du système S obtenue par l'adjonction de ζ n'est plus aussi évidente.

16. Pour approfondir cette question, considérons dans le domaine $[\xi]$ toutes les fonctions qui peuvent indifféremment s'exprimer à l'aide de z et de ses dérivées ou bien à l'aide de ζ et de ses dérivées. Il en est d'évidentes; ce sont les fonctions de $[z]$ ou de $[\zeta]$ qui, en vertu des équations S ou Σ, s'expriment rationnellement à l'aide de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. S'il y en a d'autres, c'est-à-dire s'il existe des fonctions de $[z]$ qui, sans pouvoir s'exprimer rationnellement à l'aide de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, appartiennent à $[\zeta]$, il y a effectivement une réduction de S produite par l'adjonction de ζ.

Les éléments communs à $[z]$ et à $[\zeta]$ forment un domaine de rationalité, puisque, d'une part, la somme, le produit, le quotient de deux

(1) Ce système à deux fonctions inconnues est nécessairement réductible.

de ces éléments, d'autre part, les dérivées d'un de ces éléments appartiennent encore à $[z]$ et à $[\zeta]$. Ce domaine de rationalité est le *plus grand commun diviseur de* $[z]$ *et de* $[\zeta]$; nous le désignerons par $\Delta(z, \zeta)$.

Il est facile d'établir que toutes les fonctions de $\Delta(z, \zeta)$ peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide d'un nombre limité d'entre elles, rationnellement indépendantes, de leurs dérivées et des variables.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_k$ les fonctions considérées; il est clair qu'on aura des identités de la forme

$$C_i(\xi, x) = B_i(\zeta, x) = A_i(z, x),$$

où les A et les B sont des fonctions des domaines $[z]$ et $[\zeta]$.

Posons maintenant

$$\theta = u_1 A_1 + \ldots + u_k A_k,$$

où les u sont rationnels en $x_1, \ldots, x_n$ et arbitraires; la transcendante θ dépend d'un système irréductible T qu'il est facile de former, et il est manifeste que les fonctions $A_1, \ldots, A_k$ s'expriment rationnellement à l'aide de θ et de ses dérivées. Toute fonction qui appartient à $[\theta]$ appartient d'ailleurs évidemment à $[z]$ et à $[\zeta]$ en vertu de l'identité

$$\theta = u_1 B_1 + \ldots + u_k B_k.$$

Le domaine $\Delta(\zeta, z)$ est donc *identique* au domaine $[\theta]$.

L'adjonction de la transcendante θ, *qui appartient cette fois au domaine* $[z]$, *produit donc une réduction du système* S *analogue à celle produite par l'adjonction de* ζ. L'effet produit par cette dernière est ainsi mis en évidence.

17. Le système $(\Sigma + S)$ étant remplacé par le système $(\Phi + \Sigma + S)$, on poursuivra l'application de la méthode, si z n'appartient pas au domaine $[\zeta]$, en adjoignant une nouvelle transcendante ζ_1 définie toujours par un système irréductible; et ainsi de suite.

Il nous paraît inutile d'insister sur ce fait que le nombre des dérivées *principales* de z augmente constamment et que, par conséquent, le nombre total des adjonctions utiles est limité.

Signalons cependant, avant de quitter ces généralités, une circonstance remarquable qui se présentera parfois : il peut arriver que les équations résolvantes dont dépendent les φ admettent des solutions dépendant rationnellement de constantes ou de fonctions arbitraires d'arguments rationnels, de telle sorte que les équations $(\Phi + \Sigma)$ conduisent nécessairement par l'élimination de ces arbitraires aux équations (S). Nous dirons alors que les équations $(\Sigma + S)$ admettent une *intégration immédiate partielle;* nous n'insisterons pas ici sur le parti qu'on pourrait en tirer.

Bornons-nous à faire observer que, en remplaçant les arbitraires par des éléments déterminés, définis algébriquement, on a une infinité de systèmes irréductibles tels que $(\Phi + \Sigma + S)$.

18. *Soient à étudier, par exemple, les fonctions y de la variable qui satisfont à la relation*

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1}$$

où f représente, pour plus de précision, *un polynome en x, y, y'.* Toute relation rationnelle entre $x, y, y', y'', \ldots$ se ramène immédiatement à la forme

$$\varphi(x, y, y') = 0,$$

où φ est un polynome qui doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'} f(x, y, y') = \mathrm{L}\varphi, \tag{2}$$

dans laquelle L est un polynome en x, y, y' de degré inférieur d'une unité au degré de f.

S'il n'existe pas de polynome φ vérifiant l'équation (2), l'équation (1) sera *irréductible.*

Dans cette hypothèse, adjoignons au domaine de rationalité la transcendante z définie par l'équation *irréductible* (c'est-à-dire sans solution algébrique) du premier ordre

$$z' = g(x, z), \tag{3}$$

où g est une fraction rationnelle.

Toute relation rationnelle compatible avec les relations (1) et (3) se ramène à la forme

$$\Phi(x, z, y, y') = 0,$$

Φ désignant un polynome qui devra satisfaire à la relation

$$(4) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} g(x, z) + \frac{\partial\Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial\Phi}{\partial y'} f(x, y, y') = \mathrm{M}\Phi,$$

où M est une fraction rationnelle dont les deux termes sont de degré limité.

Si l'équation (4) n'admet pas de solution entière telle que Φ, l'adjonction de z au domaine de rationalité est sans effet : les transcendantes y et z sont *étrangères* l'une à l'autre.

Si l'équation (4) admet *une seule* solution entière $\Phi(x, z, y, y')$, on peut remplacer l'équation du second ordre (1) par le système des deux équations du premier ordre

$$z' = g(x, z),$$
$$\Phi(x, z, y, y') = 0;$$

l'équation irréductible (1) est *imprimitive* et réduite par l'adjonction de z. Les couples (z, y) qui annulent Φ sont distingués des autres.

Il existe une fonction algébrique, et par conséquent aussi une *fonction rationnelle,* de x, y, y', dont la détermination dépend d'une équation du premier ordre.

Supposons enfin que l'équation (4) admette plusieurs solutions entières Φ_1, Φ_2, ...; sans admettre, d'ailleurs, de solution Φ qui renferme une constante arbitraire.

A chaque solution z de l'équation (3) correspondent les solutions définies par l'équation

$$\Phi_i(x, z, y, y') = 0.$$

Deux polynomes différents Φ_1, Φ_2 font correspondre à une même solution z des solutions différentes.

A une même solution y, y' correspondent, par des polynomes différents, des solutions z différentes, et si l'on a

$$\Phi_1(x, z_1, y, y') = 0,$$
$$\Phi_2(x, z_2, y, y') = 0,$$

on en peut déduire algébriquement y et y' à l'aide des solutions z_1 et z_2.

Le cas *exceptionnel* où la résolution n'est pas possible ne peut se présenter que si z_1 et z_2 sont liées algébriquement, c'est-à-dire s'il existe un polynome $\chi(x, z_1, z_2)$ satisfaisant à la relation

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z_1} g(x, z_1) + \frac{\partial \chi}{\partial z_2} g(x, z_2) = \mathrm{N}\chi;$$

on pourra supposer $g(x, z)$ choisi de telle sorte que cette circonstance n'ait pas lieu.

Il resterait à examiner le cas où l'équation (4) admet une solution Φ dépendant d'une constante arbitraire. L'élimination de z entre les équations

$$\Phi(x, z, c_1, y, y') = 0,$$
$$\Phi(x, z, c_2, y, y') = 0$$

donnerait une relation entre x, y, y' et les constantes; ce cas ne peut donc se présenter quand on suppose l'équation donnée *irréductible.*

Examinons maintenant les circonstances qui peuvent se présenter quand on adjoint au domaine de rationalité une transcendante t définie par *une équation irréductible du second ordre*

$$t'' = h(x, t, t'), \tag{5}$$

sur laquelle on pourrait, d'ailleurs, faire d'autres hypothèses restrictives.

Les relations rationnelles possibles sont de la forme

$$\Phi(x, t, t', y, y') = 0,$$

Φ étant un polynome qui satisfera à l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} f + \frac{\partial \Phi}{\partial t} t' + \frac{\partial \Phi}{\partial t'} h = \mathrm{L}\Phi, \tag{6}$$

où L est une fraction rationnelle dont les termes ont des degrés limités.

S'il n'existe aucune solution entière de (6) les transcendantes y et t sont *étrangères* l'une à l'autre.

S'il existe *une seule* solution entière Φ, l'adjonction de t réduit l'équation imprimitive (1). Deux cas sont à considérer suivant que les équations

$$\Phi(x, t, t', y_1, y'_1) = 0,$$
$$\Phi(x, t, t', y_2, y'_2) = 0$$

sont résolubles ou non en t et t'. Si elles le sont, t et t' sont des fonctions algébriques de deux solutions y_1, y_2, y'_1, y'_2 qui satisfont à des équations du second ordre; il y a donc des fonctions rationnelles de deux solutions qui possèdent cette propriété, l'une d'elles étant même, si l'on veut, la dérivée de l'autre.

Sinon, il existe une fonction entière de x, t, t' qui s'exprime algébriquement à l'aide de x, y_1, y'_1 ou de x, y_2, y'_2. Toutes les solutions, distinctes de y_1, de la relation

$$\Phi(x, t, t', y_1, y'_1) = 0$$

sont liées à y_1 par une relation entière

$$\Psi(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2) = 0.$$

On ramène donc l'équation (1) au premier ordre par l'adjonction de l'une de ses solutions.

Supposons qu'il existe plus d'une solution entière de (6); soient Φ_1 et Φ_2 deux de ces solutions. Les équations

$$\Phi_1(x, t, t', y, y') = 0, \qquad \Phi_2(x, t, t', y, y') = 0$$

peuvent : 1° permettre ou non la détermination de t et de t' à l'aide de x, y, y'; 2° permettre ou non la détermination de y et y' à l'aide de x, t et t'.

Si les deux déterminations sont possibles, l'élimination de t' donnera une relation entière

$$\Phi(x, t, y, y') = 0,$$

et, par suite, la seconde relation sera

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} t' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} f = 0$$

et déterminera t'; t est donc algébrique en x, y, y' et la réciproque est vraie.

Les deux transcendantes t et y sont de même espèce; si l'on se donne arbitrairement $\Phi(x, t, y, y')$, on se trouvera, en général, dans ce cas.

Supposons la première détermination seule possible : t est algébrique en x, y, y', mais la réciproque n'est pas vraie. Les équations

$\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ ne renferment qu'une seule fonction de y et y'; l'élimination de cette fonction donnera pour t une équation du premier ordre. Ce cas est donc à écarter.

Enfin, si aucune des déterminations n'était possible, on en déduirait des relations algébriques entre x, t, t' ou entre x, y, y'. Ce cas ne peut donc se présenter avec nos hypothèses.

On verrait de même que trois équations distinctes

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \Phi_3 = 0$$

ne peuvent être compatibles si les équations (1) et (5) sont irréductibles. Mais il nous paraît inutile d'insister plus longuement sur ce sujet, dont une étude complète ne semble pas présenter de difficultés.

19. La méthode précédente, qui repose sur des adjonctions de transcendantes $\zeta, \ldots$ définies indépendamment de la transcendante z que l'on étudie, n'a d'intérêt que si, pour une raison quelconque, ces transcendantes $\zeta, \ldots$ peuvent être regardées comme mieux connues que la transcendante z ou possèdent des propriétés plus simples. L'application de cette méthode exige donc la recherche préliminaire de transcendantes dont les propriétés sont simples; nous en définirons dans la suite des classes étendues.

Il est possible d'indiquer, pour l'étude des solutions z d'un système irréductible S, une méthode plus précise qui a l'avantage de ne faire appel à aucun élément étranger à ce système S et qui paraît justifiée par les résultats auxquels conduit la méthode précédente. Cette méthode consiste dans *l'adjonction successive de solutions distinctes du système irréductible* S *lui-même, ou de fonctions rationnelles de ces solutions et de leurs dérivées*.

Le système S étant irréductible, on ne peut espérer le rendre réductible par l'adjonction d'une fonction rationnelle de z et de ses dérivées; néanmoins, dans le cas où il est *imprimitif*, une semblable adjonction peut amener une décomposition du système.

Nous aurons donc à chercher s'il existe des fonctions rationnelles de z et de ses dérivées

$$\zeta = \mathrm{F}\left(x_1, \ldots, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots\right),$$

dont l'adjonction ne suffit pas à déterminer z, c'est-à-dire telles qu'en vertu des équations Σ qui définissent ζ, l'équation précédente ne permette pas d'exprimer z et ses dérivées en fonction rationnelle des x, de ζ et de ses dérivées.

Considérons, parmi les fonctions qui possèdent la propriété indiquée, celles qui sont d'ordre minimum par rapport aux dérivées paramétriques de z; le nombre de ces fonctions rationnellement indépendantes est limité. On pourra donc en trouver *une au moins*, θ, telle que l'on puisse calculer, en fonction rationnelle de θ et de ses dérivées, le plus grand nombre possible de dérivées paramétriques de z.

Il est clair que l'adjonction de θ permet de décomposer le système S en deux autres : l'un T irréductible et définissant θ en partant des variables, l'autre S_0 définissant z dans le domaine $[\theta]$ et qui sera certainement, d'après la définition de θ, irréductible et *primitif* (1).

Il suffira donc d'appliquer la même méthode au système T pour parvenir, après un nombre limité d'opérations, à un système T_k qui sera certainement irréductible et primitif.

Nous aurons donc remplacé tout système imprimitif par une chaîne de systèmes irréductibles et primitifs. Il y aura lieu de continuer pour chacun de ces systèmes à une seule inconnue, les autres étant déjà adjointes au domaine de rationalité, l'application de la méthode, comme nous allons l'indiquer.

Le système S étant irréductible et primitif, c'est-à-dire tel que l'adjonction au domaine de rationalité d'un nouvel élément, dépendant rationnellement de ζ et de ses dérivées, entraîne nécessairement l'adjonction de z lui-même, nous écrirons à côté des équations S, qui définissent z, les équations S_1 qui définissent une *autre* solution z_1, et nous étudierons le système à deux inconnues z, z_1 ainsi obtenu.

Ce système $S_{0,1}$ peut être ou non réductible. S'il est irréductible on devra rechercher, comme plus haut, s'il est imprimitif et le ramener à une chaîne de systèmes primitifs, puis adjoindre une nouvelle solution z_2 définie par le système S_2 et distincte de z et de z_1, et *ainsi de suite*.

---

(1) Il est clair qu'on aurait pu s'arranger également de façon que le système T soit certainement primitif; mais alors S_0 ne le serait pas.

Si le système $S_{0,1}$ est réductible, divers cas peuvent se présenter :

Il peut arriver que les équations $S_{0,1}$, regardées comme définissant z dans le domaine $[z_1]$, admettent une *intégration immédiate complète*. Nous voulons dire par là que les équations $S_{0,1}$ et leurs dérivées sont les seules conséquences nécessaires des équations S_1 et de relations A qui permettent d'exprimer rationnellement z à l'aide des variables, de z_1 et de ses dérivées, de constantes arbitraires ou de fonctions arbitraires d'arguments déterminés appartenant au domaine $[z_1]$ et des dérivées de ces fonctions arbitraires.

En remplaçant par des transcendantes *bien définies* ces fonctions arbitraires, on aura un nombre illimité de types de systèmes irréductibles contenus dans le système $S_{0,1}$. Le système S étant irréductible, toutes les transcendantes z sont de même nature et leur étude est simplement celle du système S_1, faite plus haut.

En général, cette circonstance ne se présentera pas et il y aura lieu d'étudier directement les divers systèmes irréductibles que l'on peut former en ajoutant aux relations $S_{0,1}$ des relations rationnelles convenables, dépendant à la fois de z et de z_1.

Une recherche directe permettra, dans chaque cas particulier, de trouver les relations possibles de cette nature. L'étude de chacun des systèmes irréductibles, auxquels on parvient ainsi, se poursuivra en appliquant la même méthode. Nous nous bornerons à faire observer qu'on ne rencontrera de systèmes *réductibles* qu'un nombre limité de fois, puisqu'on augmente chaque fois le nombre des dérivées principales.

Dans le cas où les systèmes $S_{0,1}$, $S_{0,1,2}$, ..., *sont tous irréductibles*, les opérations précédentes paraissent pouvoir se continuer indéfiniment; il serait très important de reconnaître tous les cas où il suffit d'aller jusqu'à un nombre limité de solutions pour obtenir tous les types de relations distinctes entre ces solutions, de telle sorte que toute relation possible entre $(p+q)$ solutions et leurs dérivées soit, quel que soit q, une conséquence nécessaire des relations qui lient entre elles p solutions prises parmi les $(p+q)$ considérées. Pour ces systèmes particuliers, il est clair que la théorie qui précède gagnera beaucoup en précision et en portée; nous pourrons nous en rendre compte en étudiant les équations linéaires aux dérivées partielles.

20. L'application régulière de la méthode conduit d'ailleurs à considérer spécialement tous les systèmes pour lesquels *une solution arbitraire peut s'exprimer d'une manière déterminée, toujours la même, où figurent rationnellement, à côté des variables, un certain nombre de solutions particulières quelconques, leurs dérivées des différents ordres et aussi des constantes ou des fonctions arbitraires d'arguments bien déterminés, rationnels par rapport aux mêmes éléments, ainsi que leurs dérivées.*

Toutes les réductions possibles s'obtiennent alors dans le domaine défini par *un nombre déterminé* de solutions particulières, et il suffira de pousser jusque-là l'application de la méthode ou d'adjoindre dès le début au système S les équations S_1, S_2, ..., qui définissent les solutions particulières considérées.

Nous dirons que les systèmes précédents possèdent des *systèmes fondamentaux d'intégrales.* On peut ranger dans cette classe les équations différentielles linéaires, l'équation de Riccati et ses analogues, enfin les équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre et les systèmes complets de ces équations. C'est à l'étude de ces dernières qu'est particulièrement consacré ce travail.

L'*intégration logique* du système S, c'est-à-dire l'étude des systèmes S, $S_{0,1}$, ..., faite en suivant la marche que nous venons d'indiquer, est un problème en général inabordable. On devra se borner presque toujours à étudier, non pas des solutions *particulières* du système S, mais des solutions *étendues,* c'est-à-dire qui dépendent de constantes ou de fonctions arbitraires.

Il faudra, dans chacun de ces cas, mettre en évidence la généralité de la solution que l'on étudie par la manière dont on posera la question, et remplacer, en conséquence, les équations S par de nouvelles équations.

Par exemple, si l'on étudie des solutions de S qui dépendent d'un nombre déterminé de constantes arbitraires, il faudra regarder ces constantes comme des fonctions de z et des dérivées de z, et approfondir la nature des transcendantes ainsi définies. L'étude des solutions de l'équation rationnelle

$$y' = f(x, y),$$

qui dépendent d'une constante c, est ainsi remplacée par l'étude des solutions particulières de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} f(x, y) = 0,$$

problème en apparence, mais en apparence seulement, plus compliqué.

21. Précisons par un exemple simple les généralités qui précèdent. *Soit à étudier l'équation du premier ordre*

$$(1) \qquad y' = f(x, y),$$

où f est une fonction rationnelle de x et y. Toute relation rationnelle en $x, y, y', y'', \ldots$, compatible avec l'équation (1), peut être ramenée à l'ordre zéro, c'est-à-dire à la forme

$$\varphi(x, y) = 0,$$

où φ est un polynome. On déduit de là l'identité

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + f \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \lambda\varphi,$$

où λ est une fonction rationnelle, ou encore en posant $f = \frac{P}{Q}$, P et Q désignant des polynomes

$$(2) \qquad Q \frac{\partial\varphi}{\partial x} + P \frac{\partial\varphi}{\partial y} = L\varphi,$$

L étant cette fois un polynome en x, y, de degré limité, inférieur d'une unité à celui des polynomes P, Q, dont le degré est le plus grand.

Si la relation (2) n'admet pas, pour un choix convenable du polynome L, un polynome φ comme solution, l'équation (1) est *irréductible;* elle n'admet aucune solution algébrique.

Dans le cas contraire, pour déterminer les solutions algébriques, il faut former les polynomes φ, que l'on peut supposer irréductibles. C'est là un problème très difficile et que l'on ne sait résoudre que dans des cas particuliers; nous renverrons, pour ce point, aux belles recherches de MM. Painlevé, Poincaré et Autonne ([1]). Nous affirmons seulement qu'il n'existe qu'un nombre limité de polynomes irréductibles, réellement distincts, satisfaisant à l'équation (2).

C'est là une conséquence évidente de résultats obtenus par M. Darboux dans un Mémoire fondamental ([2]) et des recherches signalées plus haut. M. Darboux établit, en effet, que si les polynomes $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ sont des solutions de l'équation (2), et si leur nombre surpasse une limite immédiatement assignable, la fonction y la plus générale, qui satisfait à la relation (1), est définie par l'équation

$$\alpha_1 \log\varphi_1 + \ldots + \alpha_k \log\varphi_k = c,$$

où $\log u$ désigne la transcendante z définie par

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{u},$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ désignant des nombres rationnels ou algébriques. Sous cette forme on voit que les seules solutions algébriques de l'équation (1) sont données par les relations

$$\varphi_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

lorsque parmi les α figurent des nombres algébriques.

Si tous les α sont rationnels, l'intégrale générale de (1) est algébrique. Elle est alors définie par une relation

$$f(x, y) + cg(x, y) = 0,$$

où f et g sont des polynomes irréductibles. En dehors des polynomes irréductibles $f + cg$, où c est arbitraire, qui sont tous du même type, il n'existe qu'un nombre limité de types distincts de solutions algébriques, car il n'existe qu'un nombre limité de valeurs de c, nécessairement algébriques, pour lesquelles $f + cg$ se décompose.

Nous ne pouvons insister ici sur ce point qu'on établirait aisément d'une manière élémentaire.

---

(1) *Comptes rendus*, PAINLEVÉ (mai 1890, 1891, etc.); POINCARÉ (avril 1891); AUTONNE (1890, etc.).

(2) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1876.

22. Supposons maintenant qu'on introduise dans le domaine de rationalité une solution de l'équation $y' = f(x, y)$, c'est-à-dire considérons le système

$$y'_1 = f(x, y_1), \qquad y'_2 = f(x, y_2), \tag{3}$$

qui définit deux solutions : y_1 et y_2. Nous remarquerons encore que toute relation rationnelle compatible avec les équations (3) peut être ramenée à la forme

$$\varphi(x, y_1, y_2) = 0,$$

où φ est un polynome irréductible. Si l'on néglige les relations évidentes qui lient les solutions algébriques, lorsqu'il en existe, on peut supposer qu'il existe *une seule* relation de cette forme. On en déduira l'identité en x, y_1, y_2

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + f(x, y_1)\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + f(x, y_2)\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} = \lambda\varphi, \tag{4}$$

où λ est rationnel en x, y_1, y_2, son dénominateur n'admettant pas le facteur φ. En posant, comme tout à l'heure, $f = \frac{P}{Q}$, l'équation

$$Q(x, y_1)\,Q(x, y_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Q(x, y_2)\,P(x, y_1)\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + Q(x, y_1)\,P(x, y_2)\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} = L\varphi$$

devra, pour une détermination convenable du polynome de degré limité L, admettre comme solution un polynome. Il existera parfois alors un nombre illimité de polynomes irréductibles tels que φ. Chacun d'eux permettra d'associer à toute solution y_1 de l'équation (1) une nouvelle solution y_2 de la même équation, liée algébriquement à x et à y [1].

---

[1] Nous supposons, bien entendu, qu'aucun de ces polynomes φ ne renferme de constante arbitraire, auquel cas la solution générale de (1) est une fonction algébrique de x et d'une solution particulière quelconque y_1.

Les équations du premier ordre dont la solution *générale* est fonction algébrique d'un certain nombre de solutions particulières quelconques et de la variable x se ramènent, par des transformations algébriques, à l'équation $y' = Ay^2 + By + C$ dite de *Riccati;* cela résulte des recherches de MM. Kœnigsberger et Vessiot (*Acta mathematica,* III; *Annales de l'École Normale,* 1893).

Si nous admettons, en effet, qu'à la solution y_1 corresponde la solution y_2 définie par la relation

$$\varphi(x, y_1, y_2) = 0,$$

on pourra faire correspondre à y_2 la solution y_3 définie par

$$\varphi(x, y_2, y_3) = 0,$$

etc.; les solutions y_3, ... ainsi définies sont liées algébriquement à y_1 et définissent de nouveaux polynomes φ. Il existe des équations pour lesquelles on obtient ainsi un nombre illimité de polynomes φ; on peut aisément en former. Il est néanmoins vraisemblable qu'elles se ramènent toutes par des transformations algébriques à l'équation de Riccati et qu'il existe alors des polynomes φ dépendant d'une constante arbitraire.

Dans le cas où l'on ne peut faire correspondre à la solution y_1 qu'un nombre limité de solutions, par l'emploi du polynome φ, elles dérivent manifestement de l'une d'entre elles par les transformations d'un groupe. L'équation donnée est alors une relation entre les invariants de ce groupe ou, d'une manière plus précise, entre l'invariant de ce groupe et sa dérivée par rapport à x. L'équation donnée est manifestement imprimitive.

L'exemple le plus simple que l'on en puisse donner est l'équation

$$y^{m-1} y' = \varphi(x, y^m),$$

qui admet, avec la solution $y = y_1$, les solutions $y = \varepsilon y_1$, $(\varepsilon^m = 1)$.

Lorsque deux solutions y_1 et y_2 sont des transcendantes étrangères l'une à l'autre, il faudra adjoindre une nouvelle solution y_3 au domaine de rationalité et étudier le système à trois inconnues qui en résulte; mais nous pensons que ce qui précède suffira pour faire comprendre l'esprit de la méthode.

CHAPITRE III.

LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE ET LES GROUPES DE TRANSFORMATIONS PONCTUELLES.

I. — Généralités sur l'équation linéaire aux dérivées partielles.

1. Nous allons étudier les fonctions z liées aux variables $x, x_1, \ldots, x_n$ par une relation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

linéaire et homogène par rapport aux dérivées premières de la fonction et dont les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des fonctions rationnelles des variables; ces fonctions sont appelées *solutions* ou *intégrales* de l'équation (1).

Énonçons d'abord relativement à ces solutions quelques propositions immédiates, qui résultent des définitions données pour les différentielles et les dérivées.

Si z_1 est une solution, $f(z_1)$ sera encore une solution, quelle que soit la fonction d'une seule variable indiquée par la lettre f; si z_1 et z_2 sont deux solutions, $g(z_1, z_2)$ sera encore une solution quelle que soit la fonction de deux variables indiquée par la lettre g; etc.

Enfin, si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont n solutions *indépendantes*, c'est-à-dire n fonctions dont les différentielles $dz_1, dz_2, \ldots, dz_n$ sont des formes linéaires indépendantes des différentielles $dx, dx_1, \ldots, dx_n$, toute autre solution z vérifiera la relation

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial x} & \frac{\partial z_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

Réciproquement, toute fonction z qui vérifie la relation (2) dans laquelle $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont n solutions indépendantes de l'équation (1), vérifie aussi l'équation (1). Il suffit pour le voir de remplacer dans le déterminant Δ les éléments $\frac{\partial z_i}{\partial x}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ par les expressions $-A_1\frac{\partial z_i}{\partial x_1} - A_2\frac{\partial z_i}{\partial x_2} - \ldots - A_n\frac{\partial z_i}{\partial x_n}$ correspondantes.

Mais la relation (2) exprime simplement qu'il existe entre les éléments de chaque colonne de Δ une même relation linéaire et homogène dont les coefficients ne sont pas tous nuls, relation qu'on peut écrire d'après les hypothèses faites sur $z_1, z_2, \ldots, z_n$

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = b_1\frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \ldots + b_n\frac{\partial z_n}{\partial x_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n);$$

nous pouvons donc conclure de là

$$dz = b_1 dz_1 + \ldots + b_n dz_n,$$

et par suite affirmer que z est une fonction des seuls éléments $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Aucune restriction n'est apportée à la nature de cette fonction, car si l'on pose

$$z = \Phi(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

on pourra en déduire

$$dz = \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} dz_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial z_n} dz_n,$$

ou encore

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial x_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

et ces relations entraînent $\Delta = 0$.

La solution la plus générale de l'équation

$$\text{(1)} \qquad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

est donc une fonction arbitraire de n solutions indépendantes, choisies d'une manière quelconque.

2. La proposition précédente ramène l'étude des éléments z les plus généraux qui vérifient la relation (1) à celle d'un système de solutions

indépendantes $z_1, z_2, \ldots, z_n$; nous nommerons un tel système *système fondamental* de solutions de l'équation (1).

On obtient aisément les équations que doivent vérifier les éléments d'un système fondamental; il suffit d'identifier les formes (1) et (2) de l'équation considérée, ce qui conduit aux relations

$$(3) \qquad \frac{D}{1} = \frac{D_1}{A_1} = \ldots = \frac{D_n}{A_n},$$

où l'on a désigné par $D, D_1, \ldots, D_n$ les coefficients des éléments de la première ligne du déterminant Δ dans le développement de ce déterminant. Les hypothèses faites sur $z_1, z_2, \ldots, z_n$ exigent, en outre, que les divers déterminants $D, D_1, \ldots, D_n$ ne soient pas tous nuls.

Il est clair que, réciproquement, tout système de fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ qui, sans annuler tous les D_i, vérifient les équations (3) est un système fondamental de solutions de l'équation (1).

Ces remarques supposent qu'il existe pour toute équation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

à coefficients rationnels, un système fondamental de solutions. Pour établir ce point d'une manière rigoureuse, il faut montrer que les équations (3), où D est différent de zéro, forment un système complètement intégrable, quelles que soient les fonctions $A_1, \ldots, A_n$.

La démonstration est immédiate : Les équations (3) sont résolubles par rapport aux éléments $\frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x}$; toutes celles qu'on en peut déduire par une dérivation sont en nombre $n(n+1)$ et résolubles par rapport aux $n(n+1)$ dérivées $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial x_n}$ de ces éléments. Il ne peut donc y avoir de conditions d'intégrabilité.

Il résulte des observations que nous venons de faire qu'en désignant par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les éléments d'un système fondamental *particulier* et par $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ ceux d'un système fondamental *quelconque*, on a nécessairement n relations

$$(4) \qquad Z_i = F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dans lesquelles $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des fonctions indépendantes des arguments $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Inversement, il suffit que les fonctions F_1, $F_2, \ldots, F_n$ soient indépendantes, c'est-à-dire que le déterminant fonctionnel $\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)}$ soit différent de zéro, pour que les éléments $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ constituent un système fondamental.

3. On conclut de là que les équations (3) et leurs conséquences nécessaires, c'est-à-dire les équations qui peuvent s'en déduire par différentiation et combinaison linéaire, ne permettent pas de distinguer l'un de l'autre les divers systèmes fondamentaux qui se déduisent de l'un d'entre eux par les formules (4).

N'est-il donc pas possible de définir avec plus de précision les éléments qui constituent un système fondamental particulier? *A priori* deux cas peuvent se présenter [1] :

1° *Toute relation rationnelle entre les variables $x, x_1, \ldots, x_n$, les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et leurs dérivées des différents ordres, compatible avec les équations* (3), c'est-à-dire formant avec ces équations un système complètement intégrable, *en est une conséquence nécessaire.*

Le système formé par les équations (3) est *irréductible,* au sens que nous avons donné à ce mot.

Il est clair qu'alors aucune distinction ne peut être faite entre les divers systèmes fondamentaux de l'équation (1); nous dirons que *l'équation* (1) *est générale.*

2° *Il existe des relations rationnelles en $x, x_1, \ldots, x_n$; $z_1, \ldots, z_n$ $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots$, compatibles avec les équations* (3) *et qui n'en sont pas des conséquences nécessaires.*

Le système des équations (3) est *réductible.* On peut distinguer parmi les divers systèmes fondamentaux de l'équation (1) ceux qui vérifient les relations nouvelles; nous dirons que l'équation (1) est *spéciale.*

Plaçons-nous dans ce dernier cas et considérons le nouveau système complètement intégrable S qu'on obtient en ajoutant aux équations (3) les équations nouvelles, dont nous supposons l'existence. Si ce système S n'est pas irréductible, c'est qu'on peut encore ajouter des

(1) On verra dans la suite qu'ils se présentent effectivement.

équations nouvelles formant avec S un système complètement intégrable et distinguer parmi les solutions de S celles qui satisfont aux équations nouvelles. Nous pouvons donc supposer tout de suite que S est irréductible.

Désignons par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les éléments d'un système fondamental particulier qui vérifie les équations S; les éléments $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ définis par les relations

$$(4) \qquad Z_i = F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ne vérifient pas les équations S quelles que soient les fonctions indépendantes $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Les conditions que doivent remplir ces fonctions donnent évidemment la mesure de l'arbitraire qui subsistera dans la définition des éléments $z_1, z_2, \ldots, z_n$, c'est-à-dire en d'autres termes *la mesure de la transcendance de ces éléments.* Ces conditions sont exprimées par un nombre limité de relations rationnelles entre les éléments $z_1, z_2, \ldots, z_n$, les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de ces éléments et leurs dérivées des différents ordres, relations avec lesquelles on peut former un système complètement intégrable Σ; il est clair qu'on peut les obtenir immédiatement si l'on connaît les relations qui constituent le système irréductible S.

L'étude des solutions de l'équation linéaire

$$(1) \qquad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

se décompose ainsi naturellement en deux parties :

1° *Formation d'un système irréductible* S, *vérifié par un système fondamental de solutions* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *de l'équation* (1).

2° *Étude de l'arbitraire qui subsiste dans la définition des éléments* z_1, $z_2, \ldots, z_n$, c'est-à-dire *étude du système complètement intégrable* Σ *correspondant au système* S.

4. Il est essentiel de répondre immédiatement à une question que suggère la méthode précédente : *Pour une même équation* (1), *il peut exister divers systèmes irréductibles* S; *quels sont les rapports qui existent entre ces différents systèmes et y a-t-il avantage à choisir l'un d'eux de préférence aux autres?*

Soient, par exemple,

$$(\mathrm{S}) \qquad f_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \ldots\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h),$$

les équations du système S vérifié par les éléments $z_1, \ldots, z_n$ et

$$(\Sigma) \qquad \mathrm{W}_i\left(z_1, \ldots, z_n, \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n, \frac{\partial \mathrm{Z}_1}{\partial z_1}, \ldots\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

celles du système Σ correspondant qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que $z_1, \ldots, z_n$ vérifient également les équations S.

Soient, d'autre part,

$$(\mathrm{S}') \qquad f'_i\left(z'_1, \ldots, z'_n, \frac{\partial z'_1}{\partial x}, \ldots\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h')$$

et

$$(\Sigma') \qquad \mathrm{W}'_i\left(z'_1, \ldots, z'_n, \mathrm{Z}'_1, \ldots, \mathrm{Z}'_n, \frac{\partial \mathrm{Z}'_1}{\partial z'_1}, \ldots\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k')$$

les équations analogues du système irréductible S′ et du système Σ' correspondant.

Nous savons *a priori* qu'il existera, entre les z et les z', n relations

$$z_i = \Phi_i(z'_1, z'_2, \ldots, z'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les Φ_i sont des fonctions distinctes des n éléments $z'_1, \ldots, z'_n$ et d'où l'on pourra déduire les dérivées des z relatives à $x, x_1, \ldots, x_n$, au moyen des dérivées des z' relatives aux mêmes variables.

Si l'on porte les expressions obtenues dans le système S, on retrouvera nécessairement le système S′, puisque ce système a été supposé irréductible.

Il résulte de là que les fonctions $\Phi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ devront satisfaire à certaines équations aux dérivées partielles formant un système complètement intégrable (A); équations qu'on obtiendra en écrivant l'identité du système S′ et du système déduit de S.

Ces mêmes relations (A) exprimeront également qu'en posant

$$z_i = \Phi_i(z'_1, \ldots, z'_n), \qquad \mathrm{Z}_i = \Phi_i(\mathrm{Z}'_1, \ldots, \mathrm{Z}'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et portant ces expressions des z et des Z, ainsi que celles des dérivées $\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}$ qu'on en peut déduire, dans les équations Σ, on obtiendra les équations Σ'.

Remarquons en outre que les équations Σ et Σ' sont *rationnelles* par rapport à tous les éléments qui y figurent. *Les fonctions Φ_i qui vérifient les équations* (A) *sont donc choisies de façon à transformer un système de relations* RATIONNELLES, *tel que Σ, en un système Σ' possédant la même propriété.*

II. — Existence et propriétés générales des groupes de transformations. Le groupe de rationalité.

5. Suivant la voie déjà indiquée pour l'étude des nombres algébriques, nous donnerons aux généralités qui précèdent une forme plus précise *en introduisant d'une manière explicite les éléments qui permettent de définir l'arbitraire qui subsiste toujours dans la détermination des solutions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de l'équation*

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0. \tag{1}$$

Considérons les formules

$$u_i = F_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{F}$$

dans lesquelles $F_1, F_2, \ldots, F_n$ représentent des fonctions indépendantes des arguments $v_1, v_2, \ldots, v_n$: nous dirons qu'elles définissent une *transformation à n variables* qui, appliquée aux éléments $u_1, u_2, \ldots, u_n$, les remplace par les éléments $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Les éléments $u_1, u_2, \ldots, u_n$, étant des variables quelconques, la transformation est entièrement définie par les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$; nous la représenterons souvent par la seule lettre F.

Envisageons maintenant une deuxième transformation, définie par les formules

$$s_i = G_i(t_1, t_2, \ldots, t_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{G}$$

il est clair que cette transformation G, appliquée aux éléments $v_1, v_2, \ldots, v_n$, les remplacera par les éléments $w_1, w_2, \ldots, w_n$ qui satisfont aux relations

$$v_i = G_i(w_1, w_2, \ldots, w_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Mais ces derniers éléments $w_1, w_2, \ldots, w_n$ peuvent s'obtenir immédiatement en appliquant aux éléments $u_1, u_2, \ldots, u_n$ la transformation H définie par les formules

$$(\mathrm{H}) \qquad u_i = \mathrm{H}_i(w_1, w_2, \ldots, w_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on a posé identiquement

$$\mathrm{H}_i = \mathrm{F}_i(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{G}_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il existe donc un mode de composition des transformations à n variables qui conduit des deux transformations F et G à une transformation H bien déterminée; nous indiquerons cette composition en écrivant l'identité

$$\mathrm{H} = (\mathrm{F}, \mathrm{G}).$$

On vérifie immédiatement que *la composition est associative*, c'est-à-dire qu'on a, quelles que soient les transformations A, B, C,

$$(\mathrm{A}, (\mathrm{B}, \mathrm{C})) = ((\mathrm{A}, \mathrm{B}), \mathrm{C}).$$

Deux transformations distinctes composées avec une même transformation donnent des transformations qui sont encore distinctes. On peut donc conclure des identités

$$\mathrm{F} = (\mathrm{G}, \mathrm{H}),$$
$$\mathrm{F} = (\mathrm{G}, \mathrm{K})$$

l'identité

$$\mathrm{H} = \mathrm{K}.$$

Ces remarques suffisent pour établir que *les transformations à n variables, composées entre elles comme il vient d'être dit, forment un groupe* Γ_n. Ce groupe est appelé *groupe général à n variables;* M. Lie, pour des raisons géométriques évidentes, le nomme *groupe ponctuel général* de l'espace E_n.

6. Dans les formules

$$(\mathrm{F}) \qquad u_i = \mathrm{F}_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui définissent une transformation à n variables, supposons que les u et les v soient des fonctions de p variables quelconques $x_1, x_2, \ldots, x_p$;

il sera facile d'exprimer les dérivées des u à l'aide des dérivées des v. Nous pouvons, en effet, conclure des relations (F)

$$du_i = \frac{\partial F_i}{\partial v_1} dv_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial v_n} dv_n,$$

et, comme, d'autre part,

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial u_i}{\partial x_p} dx_p,$$

$$dv_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial v_k}{\partial x_p} dx_p,$$

nous en déduirons

$$(\mathrm{F}_1) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_h} = \frac{\partial F_i}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_h} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial x_h} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots, p).$$

Le même procédé, appliqué aux équations (F_1), donnerait les dérivées secondes, et ainsi de suite.

On peut d'ailleurs obtenir ces formules en faisant usage des différentielles d'ordre supérieur et partant des identités

$$du_i = \frac{\partial F_i}{\partial v_1} dv_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial v_n} dv_n,$$

$$d^2 u_i = \frac{\partial F_i}{\partial v_1} d^2 v_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial v_n} d^2 v_n + \sum \frac{\partial^2 F_i}{\partial v_h \partial v_k} dv_h dv_k,$$

. . . .

Les formules (F), (F_1), . . . , ainsi trouvées, définissent une transformation des éléments u_i, $\frac{\partial u_i}{\partial x_h}$, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h \partial x_k}$, $\cdots$; on dit qu'elle est la transformation F *prolongée* ou *étendue* en regardant les u comme des fonctions de p variables non transformées. Il est clair que, si les transformations F forment un groupe, il en sera de même des transformations qu'on obtient en prolongeant ou étendant les F d'une manière quelconque.

7. Nous revenons maintenant à l'équation

$$(1) \qquad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

pour laquelle z_1, z_2, $\ldots$, z_n forment un système fondamental de solutions. Toute transformation à n variables effectuée sur $z_1, z_2, \ldots, z_n$, conduit à un nouveau système fondamental. Comme les éléments d'un système fondamental quelconque vérifient les équations

$$(3) \qquad \frac{D}{1} = \frac{D_1}{A_1} = \ldots = \frac{D_n}{A_n},$$

on peut en conclure que *les expressions* $\frac{D_1}{D}, \ldots, \frac{D_n}{D}$ *demeurent invariables pour toute transformation à n variables portant sur les éléments* $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Nous dirons que *les expressions* $\frac{D_1}{D}, \ldots, \frac{D_n}{D}$ *sont des invariants différentiels pour le groupe* Γ_n, *formé des transformations à n variables* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *quand on étend ce groupe en y regardant les z comme des fonctions des* $(n+1)$ *variables* $x, x_1, \ldots, x_n$ *non transformées.*

Il est clair que les dérivées des fonctions $\frac{D_i}{D}$ prises par rapport aux variables $x, x_1, \ldots, x_n$ non transformées, sont également des invariants différentiels du groupe précédent; nous ne les regarderons pas comme indépendants des précédents.

Le sens du mot « *invariant différentiel* du groupe Γ_n » étant fixé par ce que nous venons de dire, proposons-nous de rechercher s'il existe pour ce groupe Γ_n, étendu comme il a été dit, d'autres invariants différentiels que les expressions $\frac{D_i}{D}$ et leurs dérivées par rapport aux x. Nous allons montrer qu'il n'y en a pas, c'est-à-dire que *tout invariant différentiel du groupe* Γ_n *est une fonction des expressions* $\frac{D_i}{D}$ *et de leurs dérivées par rapport aux* x. On traduira ce fait en disant que les expressions $\frac{D_i}{D}$ forment, pour le groupe Γ_n étendu comme il a été dit, *un système complet d'invariants différentiels.*

Admettons en effet que la fonction

$$J\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x_n}, \ldots\right)$$

demeure invariable par une transformation quelconque du groupe Γ_n.

Les équations

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z_i}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z_i}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et celles qui s'en déduisent par différentiation, permettent d'exprimer rationnellement toutes les dérivées des z, prises une fois au moins par rapport à x, à l'aide des dérivées de ces fonctions relatives à $x_1, \ldots, x_n$, des éléments $A_1 = \frac{D_1}{D}, \ldots, A_n = \frac{D_n}{D}$ et de leurs dérivées.

La fonction J peut donc se mettre sous la forme

$$K\left(A_i, \frac{\partial A_i}{\partial x_p}, \ldots, z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots\right);$$

nous allons montrer qu'*elle ne peut dépendre d'aucun des éléments* $z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots$.

Il est clair, en premier lieu, que si l'on remplace z_1 par $z_1 + a_1$, a_1 étant une constante arbitraire, K ne doit pas changer; on a donc

$$\frac{\partial K}{\partial a_1} = 0$$

et, par suite,

$$\frac{\partial K}{\partial z_1} = 0;$$

la fonction K *ne peut renfermer aucun des éléments* $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Faisons maintenant sur les z une transformation arbitraire, définie par

$$Z_i = \varphi_i(z_1, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

nous devons avoir, identiquement,

$$K\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots\right) = K\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots\right),$$

quelles que soient les fonctions indépendantes φ_i. Supposons que les φ_i dépendent d'un paramètre variable t, et désignons par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ les dérivées $\frac{d\varphi_1}{dt}, \frac{d\varphi_2}{dt}, \ldots, \frac{d\varphi_n}{dt}$; nous pouvons affirmer, si les φ_i sont arbitraires en $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et t, que les dérivées $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ sont arbitraires en $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *ou encore en* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, c'est-à-dire ne sont liées à leurs dérivées relatives à $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ par aucune relation. C'est là une conséquence des formules du changement de variables.

Exprimons alors que $K\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots\right)$ est indépendant de t, ainsi qu'il résulte de l'identité précédente; nous aurons la relation identique

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial K}{\partial \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1 \partial x_2}} \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots = 0.$$

Nous allons, dans cette relation, remplacer $\frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \cdots$ par leurs expressions à l'aide de $\frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots$, que donnent les formules

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \zeta_1}{\partial Z_n} \frac{\partial Z_n}{\partial x_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \sum \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial Z_i \partial Z_k} \frac{\partial Z_i}{\partial x_1} \frac{\partial Z_k}{\partial x_2} + \sum \frac{\partial \zeta_1}{\partial Z_l} \frac{\partial^2 Z_l}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et nous remarquerons que $\frac{dK}{dt}$ s'annule *identiquement*, et, par conséquent, que les coefficients des éléments $\frac{\partial \zeta_1}{\partial Z_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta_n}{\partial Z_n}, \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial Z_1 \partial Z_2}, \ldots$ sont tous nuls.

Supposons que les dérivées d'ordre maximum qui figurent dans K soient d'ordre p, et considérons les équations obtenues en égalant à zéro les coefficients des dérivées d'ordre p de $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ par rapport aux éléments $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$. Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux dérivées de K, considéré comme fonction des dérivées d'ordre p de $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ relatives à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, c'est-à-dire aux éléments

$$\frac{\partial K}{\partial\left(\frac{\partial^p Z_l}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)}.$$

De plus, le déterminant des coefficients de ces derniers éléments est précisément le déterminant des coefficients des éléments

$$\frac{\partial^p \zeta_i}{\partial Z_1^{\alpha_1} \partial Z_2^{\alpha_2} \dots \partial Z_n^{\alpha_n}},$$

dans les formules du changement de variables écrites plus haut, où l'on a changé les lignes en colonnes; il est donc essentiellement différent de zéro.

Les équations considérées entraînent alors nécessairement

$$\frac{\partial K}{\partial\left(\dfrac{\partial^p Z_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)} = 0,$$

et K ne peut renfermer de dérivées d'ordre p des Z.

Nous avons donc établi que K ne peut renfermer que les éléments A_i, $\frac{\partial A_i}{\partial x_h}$, ..., et, par conséquent, que *tout invariant différentiel rationnel du groupe* Γ_n *est une fonction rationnelle des éléments* $\frac{D_1}{D}$, ..., $\frac{D_n}{D}$ *et de leurs dérivées par rapport aux variables* $x, x_1, \dots, x_n$.

8. Reprenons maintenant ce qui a été dit au début sur l'équation

$$(1) \qquad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0.$$

Supposons d'abord l'équation (1) *générale*, c'est-à-dire le système

$$(3) \qquad \frac{D}{1} = \frac{D_1}{A_1} = \dots = \frac{D_n}{A_n}$$

irréductible; toutes les relations rationnelles qui lient les éléments z_1, z_2, ..., z_n d'un système fondamental particulier sont vérifiées par tout autre système fondamental. *L'ensemble de ces relations demeure invariable par toute transformation du groupe ponctuel général* Γ_n.

Un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire pour établir que les $\frac{D_i}{D}$ sont les seuls invariants indépendants de Γ_n montre immédiatement que *tout invariant du groupe* Γ_n,

$$J\left(z_1, \dots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial x_n}, \dots\right),$$

qui dépend rationnellement de tous ses arguments, peut s'exprimer RATIONNELLEMENT *à l'aide des coefficients* A *et de leurs dérivées*. Tout invariant rationnel du groupe Γ_n est donc égal à une fonction rationnelle de x, $x_1, \ldots, x_n$.

Supposons ensuite l'équation (1) *spéciale*, c'est-à-dire le système (3) réductible et considérons l'un des systèmes irréductibles S vérifié par les éléments $z_1, \ldots, z_n$ d'un système fondamental particulier. Les équations qui constituent le système S ne sont vérifiées par les éléments $Z_1, \ldots, Z_n$, où l'on a posé

$$Z_i = F_i(z_1, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

que si les fonctions indépendantes F_i vérifient les équations Σ. *Les seules transformations du groupe* Γ_n *qui laissent invariables les équations* S *sont donc celles où les fonctions* F_i *vérifient les équations* Σ. Ces transformations de Γ_n forment manifestement un groupe, car la composition de deux transformations qui n'altèrent pas l'ensemble des équations S donne une transformation qui possède évidemment la même propriété. Ce groupe Γ dont les transformations appartiennent à Γ_n, et qui est dit pour cela *sous-groupe* de Γ_n, nous le nommerons le *groupe de rationalité* de l'équation (1). Il possède des propriétés très remarquables que nous allons établir.

Considérons, pour cela, les relations nouvelles qui, ajoutées aux équations

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z_i}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z_i}{\partial x_n} = 0,$$

constituent le système irréductible S. Si nous y remplaçons toutes les dérivées des z prises une fois au moins par rapport à x par leur expression en fonction des autres dérivées et des variables $x, x_1, \ldots, x_n$, les équations S peuvent se mettre sous la forme

$$\text{(S)} \qquad \gamma_{i1} V_1 + \ldots + \gamma_{ip} V_p + \gamma_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h),$$

où l'on désigne par $\gamma_{1i}, \ldots, \gamma_{pi}, \gamma_i$ des polynomes entiers en x, $x_1, \ldots, x_n$ et par $V_1, \ldots, V_p$ des fonctions rationnelles de z_1, $z_2, \ldots, z_n$ et de leurs dérivées successives par rapport aux variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

Quelles sont, par conséquent, les relations distinctes qui existent entre deux systèmes fondamentaux $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ qui vérifient les équations (S)? Il est clair qu'elles sont toutes comprises, pour un choix convenable des V, parmi les conséquences des relations

$$(\mathrm{T}) \qquad \gamma_{i1}V_1(z)+\ldots+\gamma_{ip}V_p(z)+\gamma_i=\gamma_{i1}V_1(Z)+\ldots+\gamma_{ip}V_p(Z)+\gamma_i \qquad (i=1, 2, \ldots, h),$$

que l'on obtient en égalant les premiers membres des équations (S) à ce qu'ils deviennent quand on y remplace les z par les Z de même indice.

Ces relations entre les z et les Z, indépendantes des variables x, $x_1, \ldots, x_n$, seront donc exprimées par un certain nombre d'égalités de la forme

$$(\Theta) \qquad \Omega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots\right)=\Omega_i\left(Z_1, \ldots, Z_n, \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \ldots\right) \qquad (i=1, 2, \ldots, k),$$

dont les premiers membres sont des fonctions rationnelles des z et de leurs dérivées par rapport aux n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et qui constituent un système (Θ) équivalent au système (T). Ainsi, chacune des relations Θ est une combinaison linéaire des équations T et réciproquement.

Les équations (Θ) expriment d'ailleurs que, par les transformations du groupe Γ, les premiers membres $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ demeurent invariables; *ces premiers membres sont, par suite, des invariants différentiels du groupe* Γ.

Tout autre invariant différentiel du même groupe Γ, rationnel par rapport à tous les éléments qu'il renferme, peut s'exprimer rationnellement à l'aide de ceux-là et de leurs dérivées en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En effet, la relation

$$\mathrm{U}\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots\right)=\mathrm{U}\left(Z_1, \ldots, Z_n, \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \ldots\right)$$

est une conséquence nécessaire des équations (Θ). Éliminons de U, en tenant compte des équations (Θ) et de leurs dérivées, le plus grand nombre possible d'éléments, nous obtiendrons évidemment une identité. La proposition est donc établie.

Les invariants $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ forment, par conséquent, pour le groupe Γ, *un système complet d'invariants* (1).

Nous avons vu que les systèmes (T) et (Θ) sont équivalents; on peut conclure de cette équivalence la possibilité de déduire du système (T) un système de la forme

$$\beta_{i1}[(\Omega_1(z) - \Omega_1(Z)] + \ldots + \beta_{ik}[\Omega_k(z) - \Omega_k(Z)] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où les β_{ij} sont des polynomes en $x, x_1, \ldots, x_n$ *dont le déterminant n'est pas nul.*

Il en résulte immédiatement qu'on peut déduire des équations (S), par de simples combinaisons linéaires, des équations de la forme

$$(\mathrm{S}_1) \qquad \beta_{i1}\Omega_1(z) + \ldots + \beta_{ik}\Omega_k(z) + \beta_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où les β_i sont également des polynomes ou des fractions rationnelles des variables $x, x_1, \ldots, x_n$. Ces dernières équations peuvent donc être résolues par rapport à $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$, et donnent, pour ces invariants, des fonctions rationnelles des variables. Il est clair qu'on pourra, inversement, déduire les équations (S) des équations (S_1).

Ainsi, *les relations rationnelles* (S), *invariantes par les transformations du groupe* Γ, *peuvent se mettre sous la forme canonique*

$$\Omega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \cdots\right) = \alpha_i(x, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

dans laquelle les Ω_i sont des invariants différentiels de Γ *formant un système complet, et les α_i des fonctions rationnelles des variables.*

Les résultats auxquels nous sommes parvenus peuvent aussi s'énoncer de la manière suivante, qui met en évidence deux propriétés essentielles du groupe de rationalité Γ.

1° *Tout invariant rationnel de* Γ *est égal à une fonction rationnelle des variables $x, x_1, \ldots, x_n$.*

2° *Toute fonction rationnelle de $z_1, \ldots, z_n$ et de leurs dérivées, qui est égale à une fonction rationnelle de $x, x_1, \ldots, x_n$, est un invariant rationnel de* Γ.

(1) Ajoutons que rien n'autorise à les regarder comme fonctionnellement indépendants : il existe, en effet, des cas où ils sont liés par une ou plusieurs relations algébriques.

9. Les équations canoniques

$$(\Theta)\qquad \Omega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots\right) = \Omega_i\left(Z_1, \ldots, Z_n, \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \ldots\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

qui renferment toutes les liaisons entre deux systèmes fondamentaux de solutions $z_1, \ldots, z_n, Z_1, \ldots, Z_n$ des équations (S), sont évidemment équivalentes aux équations (Σ) signalées plus haut, qui expriment les mêmes liaisons. On obtiendra le système Σ, ou un système équivalent en remplaçant les dérivées $\frac{\partial Z_i}{\partial x_h}, \ldots$, au moyen des formules

$$\frac{\partial Z_i}{\partial x_h} = \frac{\partial Z_i}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_h} + \ldots + \frac{\partial Z_i}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial x_h},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en observant que les équations obtenues sont des identités par rapport aux dérivées $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots$.

Il n'est pas nécessaire de faire cette transformation pour déduire les équations (Σ) des équations (Θ). Si l'on remarque, en effet, que les liaisons entre les z et les Z, exprimées par ces dernières, sont les mêmes, quelles que soient les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il suffira de prendre, pour ces variables, les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ elles-mêmes. On obtiendra ainsi un système canonique

$$(\Sigma)\qquad \Omega_i\left(Z_1, \ldots, Z_n, \frac{\partial Z_1}{\partial z_1}, \ldots\right) = \omega_i(z_1, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

qui est équivalent au système Σ et qu'on peut, par conséquent, regarder comme étant le système Σ lui-même.

Les équations canoniques (Θ) ou (Σ), que nous venons de former, sont dites *équations de définition du groupe* Γ; leur forme particulière met aisément en évidence un grand nombre de propriétés de Γ, et, réciproquement, on peut conclure du fait qu'elles définissent un groupe, des propriétés des fonctions rationnelles $\Omega_i(z)$. Nous nous bornerons à énoncer ici quelques-unes de ces propriétés dont l'établissement n'offre aucune difficulté :

Les équations (Σ) admettent la solution $Z_i = z_i$, qui correspond à la *transformation identique* de Γ. Les équations (Σ) ne changent pas de forme lorsqu'on y remplace les éléments $z_1, \ldots, z_n$, ou les éléments

$Z_1, \ldots, Z_n$, ou simultanément les uns et les autres, par ceux qui en dérivent, à l'aide d'une transformation quelconque de Γ.

Inversement, toute transformation à n variables qui, effectuée sur les z ou sur les Z, n'altère pas les équations (Σ), appartient au groupe Γ.

10. Nous avons fait observer déjà qu'il existe, pour une même équation

$$(1) \qquad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

différents systèmes irréductibles tels que S, et différents systèmes Σ correspondants. On passe des équations (Σ) à celles d'un autre système Σ' en faisant sur les z et les Z la même transformation

$$z_i = \Phi_i(z'_1, z'_2, \ldots, z'_n),$$
$$Z_i = \Phi_i(Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_n),$$

où les Φ sont des fonctions indépendantes, des n éléments qui y figurent.

Toute transformation de cette forme qui change les équations (Σ) en d'autres équations (Σ') *rationnelles par rapport à tous les éléments qui y figurent,* permet de remplacer le système S par un autre système S' également irréductible.

Précisons la nature des rapports qui existent entre le groupe Γ défini par les équations (Σ) et le groupe Γ' défini par les équations (Σ').

Rappelons, dans ce but, que, si la lettre F désigne la transformation

$$Z_i = F_i(z_1, \ldots, z_n),$$

qui remplace les z par les Z, on définit les *puissances successives* de F en posant

$$F^2 = (F, F) = F \cdot F \quad (^1),$$
$$F^3 = (F^2, F) = F^2 \cdot F,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(1) On emploie ici, pour représenter la composition des transformations, le signe ordinaire de la multiplication; il ne faut pas oublier que cette composition n'est, en général, pas commutative.

La transformation *inverse* de F se représente par F^{-1}, et l'on a

$$I = (F^{-1}, F) = F^{-1}.F,$$

en désignant par I la transformation identique.

Soit maintenant F une transformation quelconque de Γ remplaçant les z par les Z. Il est clair qu'on peut remplacer cette transformation par les suivantes, effectuées successivement :

1° La transformation Φ, qui remplace les z par les z' ;

2° Une transformation F' de Γ, qui remplace les z' par les Z' ;

3° La transformation Φ^{-1}, qui remplace les Z' par les Z.

On a donc l'identité

$$F = \Phi F' \Phi^{-1}$$

ou l'identité analogue

$$F' = \Phi^{-1} F \Phi;$$

on dit, pour exprimer ces identités, que *la transformation* F *est la transformée de* F' *par la transformation* Φ, ou encore que F' *est la transformée de* F *par la transformation* Φ^{-1}.

Les transformations de Γ' sont donc les transformées des transformations de Γ par la transformation Φ. On écrit souvent cela, d'une manière abrégée,

$$\Gamma = \Phi.\Gamma'.\Phi^{-1}.$$

Faisons encore remarquer en passant que, si l'on a, entre trois transformations de Γ, la relation

$$A.B = C,$$

on a, entre leurs transformées par Φ, la même relation

$$\Phi.A.\Phi^{-1}.\Phi B \Phi^{-1} = \Phi.C.\Phi^{-1}.$$

Deux groupes Γ et Γ', tels que l'on puisse passer de l'un à l'autre par une transformation Φ convenablement choisie, sont dits appartenir au même *type*. Nous voyons donc que, *à toute équation*

$$\text{(1)} \qquad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

correspond un TYPE *de groupes* Γ, *qui est seul bien déterminé;* on pourra choisir arbitrairement un groupe appartenant à ce type, sous la seule condition que la transformation Φ transforme les équations rationnelles (Σ) en d'autres également rationnelles.

11. L'étude des éléments $z_1, z_2, \ldots, z_n$ d'un système fondamental de solutions de l'équation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \tag{1}$$

se décompose maintenant, d'une manière fort nette, en diverses parties qui paraissent indépendantes, et que nous étudierons séparément :

1° Formation effective des systèmes Σ *différents*, c'est-à-dire des équations de définition d'un représentant Γ de chaque type de groupe contenu dans le groupe ponctuel général Γ_n.

2° Détermination du système Σ, qui correspond au groupe de rationalité Γ de l'équation (1); par conséquent *détermination de ce groupe* Γ.

3° *Étude particulière du groupe de rationalité* Γ, ainsi déterminé, permettant d'approfondir les liaisons des transcendantes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ avec leurs dérivées des différents ordres et les variables, et, par conséquent, de préciser la nature de leur *transcendance*.

III. — Détermination du groupe de rationalité.

a. Formation des types de groupes ponctuels à n variables.

12. Nous avons à nous occuper d'abord de *la détermination effective, pour une valeur de n donnée, des équations de définition* (Σ) *de tous les* TYPES *de groupes contenus dans le groupe ponctuel général à n variables.* La théorie précédente exige, en effet, la connaissance des invariants différentiels indépendants pour chacun de ces types. Ce problème général n'est pas encore résolu d'une manière complète; les recherches de M. Lie et de ses élèves, notamment de M. Engel, résolvent des questions voisines; mais, même quand on suppose le groupe *fini*, c'est-à-dire formé de transformations qui dépendent seulement d'un nombre

limité de paramètres arbitraires, le problème que nous venons de poser reste à traiter [1].

Nous donnerons simplement quelques indications générales, dont une étude qui ne peut trouver place ici établirait l'utilité, et un résumé rapide des résultats obtenus par MM. Lie et Engel.

Nous savons que tout groupe de transformations à n variables $z_1, \ldots, z_n$ est entièrement défini par un système complètement intégrable d'équations rationnelles

$$(\Sigma) \quad \Omega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \cdots\right) = \Omega_i\left(Z_1, \ldots, Z_n, \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \cdots\right) \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

où les Z sont les variables transformées des z, et où les variables $x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas transformées. Les Ω_i constituent pour le groupe considéré *un système complet d'invariants différentiels* qui conduit, par de simples dérivations, aux invariants fonctionnellement distincts d'un ordre quelconque, supérieur à l'ordre maximum des Ω_i.

Les équations (Σ) établissent des relations entre les z et les Z; *elles ne dépendent donc des variables x qu'en apparence.* Il suit de là que, si l'on fait sur les x une transformation quelconque

$$x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n),$$

ce qui entraîne, d'une manière générale,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_k} + \sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial y_\alpha} \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x_i \partial x_k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

le système transformé est équivalent au système

$$\Omega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial y_1}, \cdots\right) = \Omega_i\left(Z_1, \ldots, Z_n \frac{\partial Z_1}{\partial y_1}, \cdots\right) \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

qu'on déduit de (Σ) en remplaçant simplement les x par les y de même indice.

---

[1] *Cf.* S. Lie, *Transformationsgruppen,* Erster Abschnitt, Kap. 28.

La condition précédente, nécessaire pour que les équations (Σ) soient les équations de définition d'un groupe, est aussi suffisante. En effet, la composition de deux transformations qui laissent les Ω_i invariables, donne une transformation qui possédera évidemment la même propriété. Posons

$$\Phi_i(x) = \Omega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots\right) - \Omega_i\left(Z_1, \ldots, Z_n, \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \ldots\right);$$

la détermination des types de groupes à n variables revient à celle de tous les systèmes d'équations rationnelles, complètement intégrables

$$(\Sigma) \qquad \Phi_i(x) = 0, \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

tels que l'on ait, pour toute transformation des x en y

$$\Phi_i(y) = \Sigma_k A_{ik} \Phi_k(x).$$

On observe immédiatement que les coefficients A_{ik} ne peuvent dépendre, ni des z et de leurs dérivées, ni des Z et de leurs dérivées; *ce sont des fonctions des éléments de la transformation* $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}, \ldots$. D'ailleurs, il est clair que le déterminant des A_{ik} ne peut s'annuler si les y sont *n fonctions distinctes* des x.

On peut faire sur les équations (Σ) d'autres remarques faciles qui ne sont pas sans importance : Les formules de transformation des dérivées $\frac{\partial u}{\partial y_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_k}, \cdots$ remplacent des dérivées d'ordre k par des dérivées d'ordre égal à k et des dérivées d'ordre inférieur. Par conséquent, si les équations (Σ) ne sont pas toutes du même ordre, *celles qui sont d'ordre égal ou inférieur à k, prises isolément, forment un système invariant pour toute transformation des x*; *elles définissent donc un groupe.*

Par exemple, les équations (Σ) qui sont d'ordre minimum μ définissent un groupe; les équations d'ordre μ et d'ordre $(\mu + 1)$ définissent un nouveau groupe compris dans le précédent, etc.

Supposons maintenant que, pour toute transformation des x, certaines des équations d'ordre μ du système (Σ) forment un système invariant; elles définiront un groupe qui comprendra parmi ses transformations celles du groupe défini par toutes les équations d'ordre μ. La remarque s'étend naturellement à tout système compris dans (Σ) qui reste invariant par toute transformation des x.

Observons enfin que les fonctions Φ_i ne renferment pas les variables $x_1, \ldots, x_n$, mais seulement les dérivées $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \cdots$; les transformations à considérer sont donc *les transformations linéaires et homogènes des dérivées* $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \cdots$ *qui résultent d'un changement arbitraire des variables* $x_1, \ldots, x_n$. On y peut regarder les dérivées $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k \partial x_h}, \cdots$ comme des *paramètres arbitraires indépendants*.

13. Nous avons jusqu'à présent conservé les deux séries de variables z et Z; il est facile de se restreindre à la considération des z et de leurs dérivées. En effet, l'expression

$$\Omega_i(y) - \Sigma_k A_{ik} \Omega_k(x),$$

où figurent seulement les z, ne change pas quand on y remplace les z par les Z; elle ne dépend donc que des éléments $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k \partial x_h}, \cdots$. Nous avons alors, pour toute transformation des x en y,

$$\Omega_i(y) = \Sigma_k A_{ik} \Omega_k(x) + B_i,$$

où les A et les B ne dépendent que des dérivées $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k \partial x_h}, \cdots$. La recherche des fonctions rationnelles Ω_i est évidemment un simple problème d'Algèbre dès qu'on limite l'ordre des dérivées qui peuvent y figurer. Mais il n'est pas certain que sans autre donnée que le nombre n on puisse limiter l'ordre des Ω_i pour tous les types de groupes contenus dans Γ_n; les types de groupes *imprimitifs* semblent devoir faire exception.

Nous disons, comme en Algèbre, qu'un groupe G contenu dans Γ_n est *imprimitif* quand il existe des fonctions indépendantes, de $z_1, \ldots, z_n$, *en nombre inférieur à n* qui s'échangent les unes dans les autres par les transformations de G. Quand on recherche les types de groupes, on peut supposer tout de suite que ces fonctions sont $z_1, \ldots, z_k$; les transformations du groupe G laissent alors invariant le système d'équations

$$\frac{\partial f}{\partial z_{k+1}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0.$$

Ces transformations consistent en une transformation des éléments $z_1, \ldots, z_k$ associée à une transformation de $z_{k+1}, \ldots, z_n$ qui dépend, en général, des éléments de la première.

Un groupe qui n'est pas imprimitif est dit *primitif*. Il résulte évidemment des observations générales déjà faites que dans la recherche des Ω_i on peut commencer par en considérer *un nombre minimum,* qui seront alors transformés par un groupe linéaire *primitif* lorsqu'on fera sur les x une transformation arbitraire. Ce groupe linéaire *primitif* sera manifestement *isomorphe* (¹) au groupe des transformations que subissent les dérivées $\frac{\partial Z_i}{\partial y_k}, \cdots$ quand on fait sur les y une transformation quelconque.

On continuera à déterminer les Ω_i en ajoutant chaque fois le plus petit nombre possible d'équations d'ordre minimum de façon à définir un groupe, et nous savons qu'au bout d'un certain temps on ne pourra plus ajouter d'équations nouvelles sans obtenir autant d'équations que de dérivées, c'est-à-dire sans tomber sur la transformation identique. Ces remarques mériteraient, d'ailleurs, une étude que nous n'avons pas l'intention de faire ici (²).

14. M. Lie a déterminé effectivement, par des méthodes sur lesquelles nous ne pouvons insister (³), tous les types de groupes *finis*

(¹) Pour la signification de ce terme, on peut se reporter à la théorie des substitutions, ou aux pages suivantes consacrées à l'étude du groupe de rationalité.

(²) Ajoutons un beau théorème dû à M. Lie duquel il résulte que, *parmi les équations de définition d'un groupe à n variables, il y en a toujours du premier ou du second ordre;* théorème établi par l'emploi des *transformations infinitésimales* et de leurs développements au voisinage d'un point. On peut l'énoncer aussi en disant que le groupe général Γ_n seul renferme toutes les transformations quadratiques.

On peut déduire immédiatement de là qu'*il suffit d'exprimer que les équations* (Σ) *demeurent invariantes par toute transformation quadratique des x pour qu'elles définissent un groupe*. L'adjonction des relations $\frac{\partial^3 y}{\partial x_h \partial x_k \partial x_l} = 0$ simplifie considérablement les formules de transformation des dérivées; la recherche des Ω_i en se servant des transformations infinitésimales est aussi ramenée par cette remarque à une forme simple. Mais ce sont là des questions dont nous devons remettre l'étude à un autre moment. Il en est de même des rapports de la méthode adoptée avec celle employée par M. Engel pour former les équations de définition des transformations infinitésimales d'un groupe et aussi avec celle due à M. Picard (^{a}); nous ne pouvons que renvoyer le lecteur à ces travaux.

(³) Cf. *Transformationsgruppen,* Dritter Abschnitt, p. 1 à 313.

(^{a}) ENGEL, *Math. Ann.*, Bd. 27, 1886; E. PICARD, *Journal de Liouville*, 1892; P. MEDOLAGHI, *Annali di Matematica*, t. XXV, 1897.

à une et deux variables et sauf une classe particulière de groupes imprimitifs, les types de groupes finis à trois variables.

Il a formé, d'autre part [1], tous les types de groupes *infinis* (dont les transformations dépendent de fonctions arbitraires) à deux variables et déterminé des classes importantes de groupes *infinis primitifs* à n variables.

Il y aurait lieu de préciser dans les tableaux des groupes imprimitifs donnés par l'illustre géomètre norvégien, la nature des fonctions *déterminées* qui figurent dans les transformations du groupe, *de façon que les équations de définition* (Σ) *des transformations finies soient rationnelles par rapport à tous les éléments qu'elles renferment;* nous avons vu, en effet, que c'est seulement sous cette restriction que ces résultats peuvent nous servir. Cette observation immédiate ne s'applique pas aux groupes primitifs qui possèdent, en général, des équations de définition très simples. Énonçons à leur égard, les résultats obtenus par M. Lie :

Groupes primitifs finis à deux variables : 1° groupe projectif général, formé des transformations

$$x' = \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \qquad y' = \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''};$$

2° groupe linéaire général :

$$x' = ax+by+c, \qquad y' = a'x+b'y+c';$$

3° groupe linéaire spécial :

$$x' = ax+by+c, \qquad y' = a'x+b'y+c', \qquad ab'-ba' = 1.$$

Groupes primitifs finis à trois variables : 1° groupe projectif général, à quinze paramètres; 2° groupe linéaire général à douze paramètres; 3° groupe linéaire spécial à onze paramètres; 4° groupe projectif à dix paramètres qui laisse invariant le complexe linéaire

$$dz + x\,dy - y\,dx = 0;$$

---

[1] *Abhandlungen d. K. S. Gesellschaft d. Wissenschaften* zu Leipzig, XXI; 1895.

5° groupe projectif à six paramètres qui n'altère pas la surface

$$z - xy = 0;$$

6° groupe des mouvements euclidiens; 7° groupe à sept paramètres formé des déplacements et des homothéties; 8° groupe à dix paramètres des transformations conformes de l'espace x, y, z.

Groupes primitifs infinis à deux variables : 1° groupe général Γ_2; 2° groupe des transformations qui multiplient les aires par une constante :

$$d\left[\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}\right] = 0;$$

3° groupe des transformations qui n'altèrent pas les aires :

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = 1.$$

Ces trois types de groupes existent quel que soit le nombre n des variables.

15. L'étude que nous aborderons tout à l'heure du groupe de rationalité montrera l'importance d'une classe de groupes : *les groupes simples,* lorsqu'il s'agit de définir des transcendantes de nature essentiellement nouvelle. Rappelons, tout de suite, les résultats classiques obtenus dans la détermination des structures de groupes simples par MM. Lie, Killing, Cartan, Engel, etc.

Groupes infinis : 1° groupe général Γ_n; 2° groupe des transformations de contact en $z, x_1, \ldots, x_n$; 3° groupe des transformations de contact homogènes en $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$; 4° groupe qui n'altère pas les volumes à n dimensions : il est défini par la seule équation

$$\frac{\partial(X_1, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 1.$$

Groupes finis (¹) : 1° groupe linéaire et homogène spécial à $(n^2 - 1)$ paramètres; 2° groupe linéaire et homogène à $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres, qui

(¹) *Cf.* pour plus de détails : E. CARTAN, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus,* p. 147.

n'altère pas $x_1^2 + \ldots + x_n^2$; 3° si n est pair, le groupe linéaire et homogène à $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres qui n'altère pas l'expression

$$x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1 + \ldots + x_{n-1}\,dx_n - x_n\,dx_{n-1}.$$

En dehors de ces types, qui peuvent ne pas être tous distincts ($n = 2, 3, 4, 5, 6$), il en est d'exceptionnels : (α) G_{14} pour $n = 7$; (β) G_{52} pour $n = 26$; (γ) G_{78} pour $n = 27$, G_{133} pour $n = 56$, G_{248} pour $n = 248$.

b. Formation des résolvantes.

16. Quand on a fixé, pour chaque type de groupes contenu dans le groupe général Γ_n, des invariants différentiels formant un système complet, que reste-t-il à faire pour déterminer le groupe de rationalité d'une équation linéaire donnée?

Nous savons qu'il faut : 1° *former les équations résolvantes dont dépend, pour chacun de ces types, la détermination des invariants différentiels,* puis 2° *reconnaître pour lequel d'entre eux ces équations résolvantes admettent un système de solutions rationnelles.* Ces deux problèmes sont de difficulté très inégale; le premier n'exige que des calculs algébriques immédiatement réalisables, le second est un des problèmes les plus difficiles de l'Analyse et n'a été résolu que dans des cas très particuliers, par MM. Painlevé, Poincaré et Autonne (*loc. cit.*).

Les invariants différentiels d'un groupe Γ se partagent, suivant leur ordre, en différentes classes, ceux d'un ordre donné et d'ordre inférieur définissant à eux seuls un groupe qui renferme Γ. Considérons parmi les invariants de Γ, ceux qui sont *d'ordre minimum* (on sait que cet ordre est *un* ou *deux*) et parmi ceux-là ceux qui, *associés en nombre minimum*, définissent un groupe. Soient $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ ces invariants et G_1 le groupe défini par les équations

$$\Phi_i\left(z_1, \ldots, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots\right) = \Phi_i\left(Z_1, \ldots, \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \ldots\right);$$

si les Φ sont du second ordre, G_1 n'est contenu dans aucun groupe plus grand, sauf Γ_n, car les invariants de ce groupe plus grand devraient être des fonctions des éléments $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$; si les Φ sont du premier ordre, il peut arriver que certaines fonctions des Φ et de leurs dérivées définissent un groupe G contenant G_1 et qui ne sera, lui, contenu dans aucun groupe autre que Γ_n. On commencera, dans tous les cas, par former les résolvantes pour un groupe *maximum* dans Γ_n (G_1 ou G) de la manière suivante : les équations

$$\Phi_i = \Phi_i\left(z_1, \ldots, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots\right)$$

étant écrites, on les différentie par rapport aux $(n+1)$ variables x, $x_1, \ldots, x_n$ et l'on y remplace les dérivées relatives à x par leurs expressions à l'aide des autres dérivées et des invariants différentiels de Γ_n déduites des équations $X(z_i) = 0$, et des équations dérivées.

En éliminant les dérivées $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots$, ce que l'on pourra évidemment faire après un nombre limité de dérivations, on aura les équations résolvantes que vérifient les Φ_i. De plus, le groupe considéré (G_1 ou G) étant maximum dans Γ_n, il n'est pas possible de réduire l'ordre des résolvantes en faisant choix de fonctions rationnelles des Φ comme nouvelles inconnues; le nombre des invariants Φ_i d'ordre égal à *un* ou à *deux* qui définissent le groupe est également invariant.

On continuera l'application de la méthode en n'ajoutant jamais que le nombre minimum d'équations nouvelles et en les supposant d'ordre minimum. Le raisonnement fait sur G_1 peut être répété sur G_2; on peut donc toujours s'arranger pour que chacun des groupes $\Gamma_n, G_1, G_2, \ldots, \Gamma$ soit *maximum* dans le précédent : le système formé par les résolvantes est alors *primitif*.

Nous n'insisterons pas sur le développement des remarques qui précèdent, mais nous ferons remarquer, en passant, que *l'adoption d'une méthode régulière dans la formation des équations résolvantes est indispensable pour reconnaître exactement quels problèmes précis on devra traiter pour déterminer effectivement le groupe de rationalité* Γ *d'une équation donnée*. Le plus simple de ces problèmes, celui qu'il est nécessaire d'avoir résolu pour fixer le groupe de rationalité de l'équation $\frac{\partial z}{\partial x} + A\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, consiste en la détermination des solutions particulières *algébriques* de l'équation $y' = A$, et n'a pas encore été traité.

IV. — Étude du groupe de rationalité.

a. Décomposition normale du groupe Γ.

17. Le groupe de rationalité Γ de l'équation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial x_1}{\partial z} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

défini par les équations (Σ) étant déterminé, la nature des transcendantes $z_1, \ldots, z_n$, qui forment un système fondamental de solutions de (1) vérifiant les relations

$$\Omega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots\right) = \omega_i(x, x_1, \ldots, x_n), \tag{S}$$

est également déterminée et *ne dépend pas du système fondamental choisi.*

Pour étudier ces transcendantes *attachées au groupe* Γ, il suffit d'étudier le groupe Γ lui-même; c'est ce que nous allons faire en suivant *pas à pas* la marche adoptée pour l'étude des groupes de substitutions.

Donnons d'abord quelques définitions, qui fourniront la généralisation naturelle des notions communes relatives aux substitutions.

Soient F et G deux groupes de transformations entre lesquels nous supposons qu'il existe une correspondance telle que :

1° *A toute transformation g de* G *correspond une transformation bien déterminée f de* F;

2° *Au produit gg′ de deux transformations de* G *correspond le produit ff′ des transformations correspondantes de* F.

Nous dirons que *le groupe* F *est isomorphe à* G.

A des transformations de G formant un groupe G′ correspondent alors des transformations de F formant un groupe F′.

Considérons les transformations de G qui correspondent à la transformation identique de F. Soient g_1 et g_2 deux de ces transformations; le produit $g_1 g_2$ aura pour correspondant dans Γ le produit 1.1, c'est-à-dire la transformation identique. *Les transformations de* G *qui correspondent à la transformation identique de* F *forment donc un groupe* H.

Soit g l'une des transformations de G qui correspondent à la transformation f; il est clair que le produit gh, où h est une transformation quelconque de H, correspond aussi à f. La même observation s'applique à toute transformation hg et ces transformations sont évidemment les seules qui peuvent correspondre à f.

Si l'on considère, d'ailleurs, la transformation ghg^{-1} de G, la transformation correspondante de F sera ff^{-1}, c'est-à-dire la transformation identique. On a donc

$$ghg^{-1} = h_1$$

ou encore

$$gh = h_1 g,$$

ce qu'on exprime en disant que *le groupe* H *demeure invariant lorsqu'on le transforme par une transformation de* G.

Un sous-groupe H du groupe G, qui possède la propriété exprimée par l'identité

$$ghg^{-1} = h_1,$$

est dit *sous-groupe invariant* de G. Nous venons d'établir que, s'il existe un groupe F isomorphe à G, les transformations de G qui correspondent à la transformation identique de F forment un sous-groupe invariant H de G. La réciproque est évidente. *Si* G *possède un sous-groupe invariant* H, *il existe un groupe* F *isomorphe à* G *pour lequel* H *correspond à la transformation identique*.

Associons, en effet, les transformations de G en faisceaux de la manière suivante. Deux transformations g_1 et g_2 appartiendront au même faisceau si l'on a une identité de la forme

$$g_1 = g_2 h$$

h appartenant à H, à des faisceaux différents s'il n'y a pas d'identité de cette nature.

Désignons par une même lettre f l'une quelconque des transformations gh ou hg, où g est déterminé et h arbitraire dans H. Ces conventions faites, il est clair que si l'on a

$$gg' = g'',$$

on a aussi

$$ff' = f'';$$

les faisceaux de transformations f se composent donc entre eux de manière à former un groupe F.

Ce groupe F sera, comme dans la théorie des substitutions, appelé *quotient* de G par H, et l'on écrira $F = G/H$ pour rappeler sa formation.

Ajoutons une observation sur l'*isomorphisme*. Lorsque F est isomorphe à G, la réciproque n'est vraie que si à une transformation f de F ne correspond qu'une transformation de G; on dit alors que F est *holoédriquement isomorphe* à G.

18. Supposons que le groupe de rationalité Γ possède un sous-groupe invariant G; quelles conclusions pouvons-nous en déduire relativement au système (S)?

Le groupe G est entièrement défini par un nombre limité d'invariants rationnels par rapport à $z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \cdots$, qui s'ajoutent aux invariants de Γ. Nous supposerons ces invariants nouveaux classés de la manière suivante :

n_0 invariants d'ordre ν, $I_1, \ldots, I_{n_0}$;
n_1 invariants d'ordre $\nu+1$, $I'_1, \ldots, I'_{n_1}$, qui ne s'expriment pas avec les invariants de Γ et les dérivées des précédents;
n_2 invariants d'ordre $\nu+2$, $I''_1, \ldots, I''_{n_2}$, etc.

Soit, en définitive, N le nombre des invariants nouveaux jusqu'à un ordre tel que tous les invariants distincts d'un ordre supérieur s'obtiennent en dérivant jusqu'à cet ordre ceux déjà obtenus et les invariants de Γ; soit, d'autre part, J une fonction rationnelle quelconque de ces invariants.

Nous savons que, si g est une transformation quelconque de G et γ une transformation quelconque de Γ, on a

$$\gamma g \gamma^{-1} = g_1 \quad \text{ou} \quad \gamma g = g_1 \gamma,$$

g_1 appartenant encore à G. Appliquons la transformation γg aux éléments $z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \cdots$, qui figurent dans J; nous aurons

$$\gamma g(J) = g_1 \gamma(J),$$

et comme

$$g(J) = J,$$

il en résulte

$$\gamma(\mathrm{J}) = g_1 \gamma(\mathrm{J}).$$

La fonction transformée $\gamma(\mathrm{J})$ *est donc un invariant de* G et s'exprime à l'aide des invariants de G qui sont au plus d'ordre égal à celui de J, puisque la transformation ne peut élever l'ordre de dérivation. On doit naturellement comprendre ici, parmi les invariants de G, ceux de Γ; mais on remarquera tout de suite qu'ils sont inaltérés par les transformations γ.

Les invariants $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_{n_0}, \frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial x_1}, \cdots, \mathrm{I}'_1, \ldots, \mathrm{I}'_{n_1}, \ldots$ du groupe G, qui sont en nombre N, sont donc transformés entre eux lorsqu'on transforme $z_1, \ldots, z_n$ par les transformations de Γ, et les transformations qu'ils subissent forment un groupe *isomorphe* à Γ, dans lequel la transformation identique correspond à une transformation quelconque de G. Si l'on compare ce groupe au groupe des transformations subies par les faisceaux γg, considéré plus haut et représenté par Γ/G, on constate qu'*ils sont holoédriquement isomorphes*. Nous désignerons dans la suite les deux groupes par le même signe Γ/G.

Le groupe de transformations des invariants de G que nous venons de définir possède des invariants différentiels, qui sont évidemment, lorsqu'on les regarde comme dépendant de $z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \cdots$, des invariants du groupe Γ. Ceux d'entre eux qui s'expriment rationnellement à l'aide des éléments $\Omega, \mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_{n_0}, \frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial x_1}, \cdots$ sont donc aussi des fonctions rationnelles des variables $x, x_1, \ldots, x_n$.

Considérons un système complet de ces invariants (¹); les relations correspondantes

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{A}_j\left(\Omega_i, \mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_{n_0}, \frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial x_1}, \cdots\right) = \alpha_j(x, x_1, \ldots, x_n),$$

d'où l'on a exclu les équations évidentes,

$$\Omega_i = \omega_i(x, x_1, \ldots, x_n),$$

(¹) On obtiendra manifestement un tel système en exprimant tous les Ω à l'aide des invariants nouveaux $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_{n_0}; \mathrm{I}'_1, \ldots$ du groupe G.

sont des équations aux dérivées partielles qui définissent les éléments $I_1, \ldots, I_{n_0}; I'_1, \ldots$. Toute solution du système (A) s'obtient d'ailleurs en appliquant à une solution particulière une transformation convenable du groupe Γ/G.

Les éléments $I_1, \ldots, I_{n_0}; I'_1, \ldots$ étant ainsi définis, on définira les transcendantes $z_1, \ldots, z_n$ à l'aide des équations

$$(B) \qquad \begin{cases} \Omega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots\right) = \Omega_i, \\ I_k\left(z_1, \ldots, z_n, \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots\right) = I_k, \end{cases}$$

où les seconds membres sont tous les invariants distincts du groupe G.

L'introduction explicite des invariants nouveaux $I_1, \ldots, I_{n_0}; I'_1, \ldots$ du groupe G permet donc une décomposition des équations (S). Nous observerons que les équations (S) définissent les éléments $z_1, \ldots, z_n$, c'est-à-dire les invariants de la transformation identique, au moyen des invariants de Γ, et nous énoncerons les résultats obtenus de la manière suivante :

Soient Γ *un groupe quelconque de transformations des éléments* $z_1, \ldots, z_n$, G *un sous-groupe invariant de* Γ; *considérons le système* (S) *qui définit* $z_1, \ldots, z_n$ *en partant des invariants de* Γ, *on peut y mettre en évidence :*

1° *Un système* (A) *qui définit les invariants de* G *en partant des invariants de* Γ;

2° *Un système* (B) *qui définit* $z_1, \ldots, z_n$ *en partant des invariants de* G.

Ces deux systèmes sont entièrement analogues au système initial *et les groupes de rationalité correspondants sont respectivement* Γ/G *et* G.

19. Si l'un ou l'autre de ces groupes possède un sous-groupe invariant, on peut continuer la décomposition. Pour n'avoir à faire cette opération que dans un sens, il suffira de choisir G de façon que l'un des groupes G et Γ/G soit *simple*, c'est-à-dire ne possède pas d'autre sous-groupe invariant que la transformation identique.

Montrons, par exemple, que *le groupe* Γ/G *est simple, si le groupe* G *n'est pas contenu dans un autre sous-groupe invariant* F *de* Γ *et seulement dans ce cas.*

Supposons, en effet, F invariant dans Γ et renfermant G; considérons les groupes que nous avons désignés plus haut par Γ/F, Γ/G et F/G, il est clair que les faisceaux fg de F/G appartiennent à Γ/G; mais, d'autre part, on a

$$\gamma . fg . \gamma^{-1} = f_1,$$

le groupe F/G est donc invariant dans Γ/G.

Enfin, si nous faisons correspondre à la transformation identique de Γ/G le groupe F/G, on obtiendra précisément le groupe Γ/F isomorphe à Γ/G.

Supposons maintenant que Γ/G possède un sous-groupe invariant H; parmi les faisceaux γg, il en est qui se transforment entre eux. Soient $\gamma_1 g_a$, $\gamma_2 g_b$ deux de ces faisceaux

$$\gamma_1 g_a . \gamma_2 g_b = \gamma_1 \gamma_2 . g_c,$$

puisque l'on a, G étant invariant dans Γ,

$$g_a \gamma_2 = \gamma_2 g_d.$$

Les transformations $\gamma_1 g_a$, $\gamma_2 g_b$, ..., où g est quelconque dans G, forment donc un groupe F qui renferme G.

Si H est invariant dans Γ/G, on aura, par exemple, pour tout γ

$$\gamma . \gamma_1 g_a . \gamma^{-1} = \gamma_2 g_b,$$

ce qui exprime que F est invariant dans Γ.

Lorsqu'un groupe G invariant dans Γ n'est contenu dans aucun sous-groupe invariant F de Γ, on dit qu'il est un sous-groupe invariant *maximum* de Γ. Il résultera donc des propositions établies que *tout groupe* Γ *donne une suite limitée* (1) *de groupes*

$$\Gamma, \quad G, \quad G_1, \quad \ldots, \quad G_\mu, \quad 1,$$

dans laquelle chaque terme est un sous-groupe invariant maximum du

---

(1) La limitation de la suite résulte des deux observations suivantes :

Tout groupe de transformations est entièrement défini par un nombre limité d'invariants différentiels.

Tout sous-groupe invariant d'un groupe possède au moins un invariant différentiel nouveau.

précédent. Les groupes Γ/G, G/G_1, ..., $G_\mu/1$ correspondants sont, par conséquent, des groupes *simples*.

A la suite Γ, G, G_1, ..., G_μ, 1 correspond une *décomposition normale* du groupe Γ, que nous indiquons en écrivant

$$\Gamma = \Gamma/G . G/G_1 \ldots\ldots G_\mu/1,$$

et qui nous permet de mettre en évidence dans les équations (S), par l'introduction explicite des invariants nouveaux des groupes G, G_1, ..., G_μ, 1, des systèmes d'équations pour chacun desquels on a un groupe de rationalité simple. D'une manière plus précise, la détermination de $z_1, \ldots, z_n$ en partant des invariants de Γ (groupe de rationalité Γ) se ramène aux opérations suivantes :

1° Détermination des invariants de G en partant de ceux de Γ (groupe Γ/G);

2° Détermination des invariants de G_1 en partant de ceux de G (groupe G/G_1);

....

$(\mu + 2)$° Détermination des invariants $z_1, \ldots, z_n$ de la transformation identique en partant des invariants de G_μ (groupe $G_\mu/1$).

D'après la définition que nous avons donnée de l'*adjonction*, on peut encore résumer les résultats qui précèdent en disant :

Les transcendantes $z_1, \ldots, z_n$ qui forment un système fondamental de solutions de l'équation

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

et qui sont attachées au groupe de rationalité Γ, *peuvent être amenées à faire partie du domaine de rationalité par des adjonctions successives de transcendantes attachées à des groupes simples* (¹).

Il resterait à montrer comment, lorsqu'on donne les invariants différentiels du groupe Γ, on peut *former effectivement une décomposition normale du groupe* Γ, c'est-à-dire déterminer les invariants nouveaux des groupes G, G_1, ... C'est là un problème *algébrique* qui exige une

(¹) A quelque point de vue que l'on se place pour l'étude des transcendantes $z_1, \ldots, z_n$, il est clair que cette proposition doit gouverner toutes les recherches.

étude spéciale [1]. Nous nous bornerons à faire observer que lorsqu'un groupe H est un sous-groupe invariant maximum de G, *les invariants nouveaux de* H *sont nécessairement tous du même ordre*.

b. Invariants de la décomposition normale.

20. Revenons à la décomposition du groupe de rationalité Γ et proposons-nous d'étudier les différentes décompositions normales possibles d'un même groupe.

Soient donc

$$\begin{array}{llllll} \Gamma, & G, & G_1, & \ldots, & 1, \\ \Gamma, & H, & H_1, & \ldots, & 1 \end{array}$$

deux *décompositions normales* du groupe Γ, où nous supposons que G et H ne coïncident pas, sans quoi il suffirait de considérer les suites à partir du moment où elles diffèrent.

Les transformations de la forme gh forment évidemment un groupe contenu dans Γ; ce groupe est *invariant* dans Γ, car on a

$$\gamma g h \gamma^{-1} = \gamma g \gamma^{-1} . \gamma h \gamma^{-1} = g_1 h_1.$$

Mais, d'autre part, ce groupe contient G qui est un sous-groupe invariant *maximum* de Γ; il se confond donc avec le groupe Γ lui-même. Ainsi, *toute transformation de* Γ *peut être obtenue comme produit d'une transformation de* G *et d'une transformation de* H [2].

Considérons maintenant les transformations communes à G et à H, elles forment un groupe K; montrons que *ce groupe* K *est un sous-groupe invariant de* G *et de* H.

Soit k une transformation quelconque de K; la transformation gkg^{-1} appartiendra à H puisque k appartient à H qui est invariant dans Γ; mais elle appartiendra aussi à G puisque k appartient à G. Cette trans-

---

(1) Dans un beau Travail, publié par l'*American Journal of Mathematics* (t. XVIII, 1896), M. Cartan a fait cette étude pour les groupes dont les transformations dépendent d'un nombre fini de paramètres, en partant des résultats relatifs à la structure de ces groupes.

(2) Cette conclusion subsiste sous la condition que le groupe G, seul, soit un sous-groupe invariant *maximum* de Γ.

formation est donc une transformation de K :

$$g k g^{-1} = k_1,$$

ce qui exprime que K *est invariant dans* G. Le même raisonnement montre que K est invariant dans H.

Nous pouvons également conclure de là que K *est un sous-groupe invariant de* Γ. On a, en effet, manifestement puisque, pour tout γ, on peut poser $\gamma = gh$

$$gh . k . h^{-1} g^{-1} = g k_1 g^{-1} = k_2,$$

c'est-à-dire

$$\gamma k \gamma^{-1} = k_2,$$

ce qui établit la proposition.

Envisageons maintenant les transformations des faisceaux que l'on peut faire correspondre d'une part à Γ et H, d'autre part à G et K, c'est-à-dire les deux groupes Γ/H et G/K.

Un faisceau du premier groupe Γ/H est défini par les transformations γh où γ est déterminé, et h arbitraire dans H. Si l'on remarque qu'on a toujours $\gamma = gh$, on peut également le définir comme l'ensemble des transformations gh où g est fixe et h arbitraire dans H.

Soient g et g_1 deux transformations *différentes* de G ; à quelle condition donneront-elles des faisceaux différents? Il faut et il suffit évidemment qu'il n'existe aucune identité

$$g = g_1 h_1;$$

mais une telle identité exprime que h_1 est égal à $g_1^{-1} g$, c'est-à-dire appartient à G : h_1 appartenant à la fois à G et à H appartient à K. On conclut de là, que *deux transformations différentes g et g_1 de* G *donneront dans* Γ/H *deux faisceaux différents s'il n'existe aucune identité*

$$g = g_1 k$$

où k appartient à K.

On reconnaît manifestement là la condition nécessaire et suffisante pour que les deux transformations g et g_1 de G donnent dans G/K deux faisceaux différents.

Si nous regardons comme correspondants deux faisceaux de Γ/H et de G/K qui correspondent à la même transformation g de G, il résultera de cette correspondance que *les deux groupes* Γ/H *et* G/K *sont holoédriquement isomorphes.*

Nous avons supposé le groupe H *maximum* dans Γ et par conséquent le groupe Γ/H simple; on peut donc conclure des propositions qui précèdent, que le groupe G/K est simple et par conséquent que le groupe K est un sous-groupe invariant *maximum* de G.

En résumé, nous avons établi que *si*

$$\begin{array}{llllll} \Gamma, & G, & G_1, & \ldots, & 1, \\ \Gamma, & H, & H_1, & \ldots, & 1, \end{array}$$

sont deux décompositions normales de Γ *et si l'on désigne par* K *le groupe des transformations communes à* G *et à* H :

1° *Le groupe* K *est un sous-groupe invariant de* Γ;

2° *Les groupes* Γ/H *et* G/K *sont holoédriquement isomorphes;*

et il est bien clair que la même conclusion s'applique aux groupes

$$\Gamma/G \quad \text{et} \quad H/K.$$

21. Il est facile de déduire de là les propriétés invariantes d'une décomposition normale.

Supposons en premier lieu que K se réduise à la transformation identique. Les deux décompositions se réduiront manifestement à

$$\begin{array}{lll} \Gamma, & G, & 1, \\ \Gamma, & H, & 1, \end{array}$$

les groupes Γ/H et G seront holoédriquement isomorphes et il en sera de même des groupes Γ/G et H. En passant d'une suite à l'autre, on permute seulement l'ordre des groupes simples qu'il y a à considérer.

Supposons maintenant que K ne se réduise pas à la transformation identique et formons une décomposition normale de K :

$$K, \quad K_1, \quad \ldots, \quad 1.$$

Nous pourrons en déduire les deux décompositions normales de Γ

$$\begin{array}{llllll} \Gamma, & G, & K, & K_1, & \ldots, & 1, \\ \Gamma, & H, & K, & K_1, & \ldots, & 1, \end{array}$$

pour lesquelles les deux suites

$$\Gamma/G, \quad G/K, \quad K/K_1, \quad \ldots,$$
$$\Gamma/H, \quad \Gamma/K, \quad K/K_1, \quad \ldots,$$

renferment, à l'ordre près, les mêmes éléments ou du moins des groupes holoédriquement isomorphes. Pour établir que cette proposition subsiste pour deux décompositions quelconques

$$\Gamma, \quad G, \quad G_1, \quad \ldots, \quad 1,$$
$$\Gamma, \quad H, \quad H_1, \quad \ldots, \quad 1,$$

il suffira de comparer chacune d'elles à l'une des décompositions intermédiaires que nous venons de former.

Mais les suites

$$\Gamma, \quad G, \quad G_1, \quad \ldots, \quad 1,$$
$$\Gamma, \quad G, \quad K, \quad \ldots, \quad 1$$

ont *deux* éléments identiques; il en résulte manifestement que, si l'on suppose la proposition établie pour le groupe G, c'est-à-dire pour un groupe dont toute décomposition normale renferme m termes, elle sera vraie pour tout groupe Γ dont la décomposition normale renferme $(m+1)$ termes. Or la proposition est évidente pour un groupe simple, c'est-à-dire lorsque $m = 2$; elle est donc générale.

Soit Γ *un groupe de transformations et*

$$\Gamma, \quad G, \quad G_1, \quad \ldots, \quad 1$$

une décomposition normale quelconque de Γ; *dans cette décomposition, les éléments de la suite*

$$\Gamma/G, \quad G/G_1, \quad \ldots,$$

qui sont tous des groupes simples, sont déterminés à l'ordre près, chacun d'eux pouvant, tout au plus, être remplacé par un groupe qui lui est holoédriquement isomorphe.

Cette proposition, qui est à peu près évidente, est d'une grande importance dans l'étude des transcendantes $z_1, \ldots, z_n$ *attachées* au groupe Γ; elle établit en effet que toutes les adjonctions de transcendantes, auxquelles nous avons ramené l'adjonction de $z_1, \ldots, z_n$, sont *essentielles*.

22. Cherchons à compléter les résultats qui précèdent. Nous venons de voir que, dans une décomposition normale, l'ordre des groupes simples Γ/G, G/G_1, ... n'est pas complètement déterminé. Toute permutation de ces éléments est-elle possible; sinon, quelles sont celles que l'on peut obtenir?

Il est bien évident d'abord que *si* H *est un sous-groupe invariant de* Γ, *on peut former une décomposition normale de* Γ *qui renferme* H. En effet, si H est un sous-groupe invariant maximum de Γ, on le prendra pour premier terme de la décomposition; sinon, on prendra pour premier terme le plus grand sous-groupe invariant de Γ, G, qui renferme H.

Si H est maximum dans G, on le prendra pour second terme; sinon, on prendra pour second terme le plus grand sous-groupe invariant de G qui renferme H, etc.

Cela posé, dans une décomposition normale quelconque de Γ, chaque terme est un sous-groupe invariant du précédent, mais non de tous les précédents. Les termes qui sont, comme le premier G et le dernier 1, des sous-groupes invariants de Γ, méritent une attention particulière; c'est sur eux que va porter notre étude.

Soit G_{i-1} un terme de la décomposition qui est un sous-groupe invariant de Γ, le terme suivant G_i étant invariant dans G_{i-1}, mais non dans Γ. Considérons le groupe transformé de G_i par une transformation γ de Γ qui n'appartient pas à G_{i-1}; *ce groupe* $\gamma G_i \gamma^{-1}$ *est encore un sous-groupe invariant maximum de* G_{i-1}.

En effet, les deux groupes transformés $\gamma G_{i-1} \gamma^{-1}$ et $\gamma G_i \gamma^{-1}$ sont respectivement isomorphes holoédriquement aux groupes G_{i-1} et G_i; le groupe $\gamma G_i \gamma^{-1}$ est donc un sous-groupe invariant maximum de $\gamma G_{i-1} \gamma^{-1}$; mais ce dernier groupe est simplement G_{i-1}, puisque G_{i-1} est invariant dans Γ.

Il suit de là que *si* G_{i-1} *est invariant dans* Γ, *mais non* G_i, *on peut remplacer* G_i *par un quelconque des transformés* $\gamma G_i \gamma^{-1}$. Qu'en résulte-t-il pour les termes suivants de la décomposition? Nous désignerons par K le groupe des transformations communes à G_i et à tous ses transformés $\gamma G_i \gamma^{-1}$, et nous remarquerons que *ce groupe* K *est invariant dans* Γ.

Considérons ensuite le groupe H des transformations communes à G_i et à $\gamma G_i \gamma^{-1}$; ce groupe H sera, d'après des propositions précédentes, un sous-groupe invariant *maximum* de G_i et de $\gamma G_i \gamma^{-1}$. Nous pouvons donc prendre, pour continuer la décomposition, les termes

$$G_{i-1}, \quad G_i, \quad H \qquad \text{ou bien} \qquad G_{i-1}, \quad \gamma G_i \gamma^{-1}, \quad H,$$

et il importe de remarquer que les groupes G_{i-1}/G_i et $\gamma G_i \gamma^{-1}/H$ sont holoédriquement isomorphes. Comme il en est de même des groupes G_{i-1}/G_i et $G_{i-1}/\gamma G_i \gamma^{-1}$, on peut en conclure que *les deux groupes* G_{i-1}/G_i *et* G_i/H, *qui se suivent, sont holoédriquement isomorphes.*

Supposons que le groupe H des transformations communes à G_i et à $\gamma G_i \gamma^{-1}$ ne soit pas identique à K, groupe des transformations communes à G_i et *à tous ses transformés dans* Γ; considérons alors un autre groupe transformé de G_i, $\gamma_1 G_i \gamma_1^{-1}$, et désignons par H_1 le groupe des transformations communes aux trois groupes G_i, $\gamma G_i \gamma^{-1}$, $\gamma_1 G_i \gamma_1^{-1}$. Ce groupe H_1 est contenu dans H et n'est pas identique à H lorsque γ_1 est convenablement choisi; il peut ou non être égal à K. Représentons d'une manière générale par H_l le groupe des transformations communes aux groupes

$$G_i, \quad \gamma G_i \gamma^{-1}, \quad \gamma_1 G_i \gamma_1^{-1}, \quad \ldots, \quad \gamma_l G_i \gamma_l^{-1},$$

en supposant les transformations $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_l$ de Γ choisies de telle sorte que H_l soit contenu dans H_{l-1}, H_{l-1} dans H_{l-2}, etc. Il est clair que l'un des groupes de la suite

$$H, \quad H_1, \quad \ldots, \quad H_l$$

se réduira à K et que tous les groupes suivants seront égaux à K; en effet, le groupe K étant complètement défini par un nombre limité d'équations et chaque groupe H_k possédant au moins un invariant de plus que le précédent, *le nombre* l, *tel que* $H_l = K$, *est nécessairement limité*.

Nous allons établir que *l'on peut faire figurer, dans une décomposition normale de* Γ, *la suite*

$$G_{i-1}, \quad G_i, \quad H, \quad H_1, \quad \ldots, \quad H_{l-1}, \quad K,$$

et que *tous les groupes*

$$G_{i-1}/G_i, \quad G_i/H, \quad H/H_1, \quad \ldots, \quad H_{l-1}/K$$

sont holoédriquement isomorphes.

23. La proposition est démontrée pour les trois premiers termes; supposons-la vraie pour toute suite

$$G_{i-1}, \quad G_i, \quad H, \quad H_1, \quad \ldots, \quad H_{k-1},$$

et démontrons-la pour la suite

$$G_{i-1}, \quad G_i, \quad H, \quad H_1, \quad \ldots, \quad H_{k-1}, \quad H_k.$$

Le groupe H_{k-1} est formé des transformations communes aux groupes

$$G_i, \quad \gamma G_i \gamma^{-1}, \quad \ldots, \quad \gamma_{k-1} G_i \gamma_{k-1}^{-1},$$

et le groupe H_k des transformations communes aux groupes

$$G_i, \quad \gamma G_i \gamma^{-1}, \quad \ldots, \quad \gamma_{k-1} G_i \gamma_{k-1}^{-1}, \quad \gamma_k G_i \gamma_k^{-1}.$$

Considérons le groupe H'_{k-1} formé des transformations communes aux groupes G_i, $\gamma G_i \gamma^{-1}$, ..., $\gamma_{k-2} G_i \gamma_{k-2}^{-1}$, $\gamma_k G_i \gamma_k^{-1}$; il est clair que la suite

$$G_{i-1}, \quad G_i, \quad H, \quad H_1, \quad \ldots, \quad H_{k-2}, \quad H'_{k-1}$$

figure dans une décomposition normale de Γ et donne les groupes simples :

$$G_{i-1}/G_i, \quad G_i/H, \quad \ldots, \quad H_{k-1}/H'_{k-1},$$

qui sont holoédriquement isomorphes, puisqu'on suppose la proposition vraie pour toute suite de $k+2$ termes.

Par définition, H_k est formé des transformations communes à H'_{k-1} et à H_{k-1} : c'est donc, d'après un théorème établi plus haut, un sous-groupe invariant *maximum* de chacun de ces groupes et si l'on considère les suites

$$H_{k-2}, \quad H_{k-1}, \quad H_k,$$
$$H_{k-2}, \quad H'_{k-1}, \quad H_k,$$

les groupes H_{k-2}/H_{k-1} et H'_{k-1}/H_k sont holoédriquement isomorphes, ainsi que les groupes H_{k-2}/H'_{k-1} et H_{k-1}/H_k.

Comme, d'autre part, H_{k-2}/H'_{k-1} est holoédriquement isomorphe à H_{k-2}/H_{k-1}, on peut en conclure que H_{k-2}/H_{k-1} et H_{k-1}/H_k sont holoédriquement isomorphes, ce que nous voulions démontrer.

Toute décomposition normale de Γ *peut donc s'écrire sous une forme*

$$\Gamma,\quad G,\quad G_1,\quad \ldots,\quad 1,$$

pour laquelle G_i *est un sous-groupe invariant de* Γ *chaque fois que* G_{i-1}/G_i *et* G_i/G_{i+1} *ne sont pas holoédriquement isomorphes.*

24. Nous sommes parvenus à la détermination de $z_1, \ldots, z_n$, transcendantes attachées au groupe Γ, par des adjonctions successives de transcendantes attachées à des groupes simples : les invariants nouveaux des groupes $G, G_1, \ldots, G_\mu$ qui forment une décomposition normale de Γ. On peut arriver au même résultat par une voie un peu différente qui présente un intérêt particulier.

Considérons, à côté de la décomposition normale

$$\Gamma,\quad G,\quad G_1,\quad \ldots,\quad G_\mu,\quad 1,$$

la suite de groupes $F, F_1, \ldots, F_\mu, F_{\mu+1}$, où F_i représente le *plus grand sous-groupe de* G_{i-1} *qui renferme le groupe* G_i. Ce groupe F_i existe toujours, mais il peut se réduire à G_i.

Soient $J_1, J_2, \ldots, J_k$ les invariants de G_i qui ne sont pas des invariants de G_{i-1}; ces invariants sont tous du même ordre et subissent, quand on transforme $z_1, \ldots, z_n$ par les transformations de G_{i-1}, les transformations du groupe *simple* G_{i-1}/G_i. Le groupe F_i, qui a évidemment G_i comme sous-groupe invariant maximum, est défini par des invariants

$$\varphi_1,\quad \varphi_2,\quad \ldots,\quad \varphi_l,$$

qui n'appartiennent pas à G_{i-1} et qui sont des fonctions de $J_1, \ldots, J_k$ et de leurs dérivées, toutes du même ordre de dérivation. Ce sont précisément les invariants différentiels du groupe *simple* F_i/G_i de transformations des éléments $J_1, \ldots, J_k$.

On peut former les résolvantes dont dépend la détermination de $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ en partant des invariants de G_{i-1}; ce sont ces résolvantes R que nous allons étudier.

Tous les groupes $F_i, F'_i, \ldots$, transformés de F_i par une transformation de G_{i-1}, n'ont en commun que les transformations de G_i; on peut d'ailleurs en choisir un nombre limité m, de telle sorte que les transformations communes à

$$F_i, \quad F'_i, \quad \ldots, \quad F_i^{(m-1)}$$

soient seulement celles de G_i. Il résulte de là que les invariants $J_1, \ldots, J_k$ de G_i peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide des m systèmes de solutions

$$\varphi_1^h, \ldots, \varphi_l^h \qquad [h = 0, 1, \ldots, (m-1)]$$

des résolvantes R.

Comme, d'autre part, les invariants d'un transformé quelconque de F_i dans G_{i-1} sont des fonctions de $J_1, \ldots, J_k$ et de leurs dérivées, *tout système de solutions des résolvantes* R *s'exprimera rationnellement à l'aide de m systèmes convenablement choisis* (¹) *de solutions particulières.* Les résolvantes R possèdent des *systèmes fondamentaux d'intégrales* et l'adjonction de la solution la plus générale de ces résolvantes réduit le groupe de rationalité à G_i, c'est-à-dire produit le même effet que l'adjonction de $J_1, \ldots, J_k$.

Les observations précédentes permettraient de voir, d'une manière générale, ce qui se passe lorsqu'on veut adjoindre au domaine de rationalité les invariants nouveaux d'un groupe G qui n'est pas invariant dans le groupe de rationalité Γ; il est nécessaire d'adjoindre en même temps la solution la plus générale des résolvantes dont ils dépendent. On parviendrait ainsi à la généralisation du théorème bien connu de Lagrange; nous n'insisterons pas sur ce sujet. Pour le moment, nous nous bornerons à faire observer que les groupes simples F_i/G_i, F'_i/G_i, ..., $F_i^{(m-1)}/G_i$ sont des sous-groupes maxima de G_{i-1}/G_i et qu'ils n'ont en commun que la transformation identique. Toute transformation de G_{i-1}/G_i peut être obtenue comme produit de transformations de ces m groupes. Enfin *ces groupes sont permutables.*

La manière dont nous les avons définis suffit à mettre en évidence :

1° *L'invariance du nombre m,*

2° *L'invariance du type de l'un des groupes* F_i/G_i, lorsqu'on passe d'une décomposition normale de Γ à une autre, puisqu'on remplace

(¹) Ils ne sont assujettis qu'à ne pas vérifier des relations d'égalité faciles à former.

simplement les groupes simples G_{i-1}/G_i par des groupes qui leur sont holoédriquement isomorphes ([1]).

c. La résolvante générale.

25. La théorie générale des équations linéaires que nous venons d'esquisser pourrait être présentée en suivant de plus près encore la voie ouverte par Galois en Algèbre et adoptée par M. Picard dans sa théorie des équations différentielles linéaires. Nous nous bornerons à indiquer rapidement la méthode à suivre.

Soit toujours

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} \tag{1}$$

l'équation à étudier, dont les coefficients sont rationnels, et $z_1, \ldots, z_n$ un système fondamental de solutions.

Posons

$$Z = u_1 z_1 + \ldots + u_n z_n,$$

où les u sont des fonctions rationnelles arbitraires des variables x, $x_1, \ldots, x_n$; la fonction Z vérifie, quel que soit le système fondamental $z_1, \ldots, z_n$, une équation facile à former et qui suffira à la définir.

Nous remarquerons, en effet, qu'on a identiquement

$$X(Z) = X(u_1) z_1 + \ldots + X(u_n) z_n,$$

et c'est là, d'ailleurs, la seule équation indépendante des dérivées premières de $z_1, \ldots, z_n$ que l'on puisse former en dérivant une seule fois. La même remarque donnera donc aussi

$$\begin{gathered} X_2(Z) = X_2(u_1) z_1 + \ldots + X_2(u_n) z_n, \\ X_3(Z) = X_3(u_1) z_1 + \ldots + X_3(u_n) z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

si l'on convient d'écrire

$$X[X_i(\alpha)] = X_{i+1}(\alpha).$$

([1]) On pourra comparer les indications qui précèdent avec la généralisation, donnée par MM. Lie et Vessiot, du théorème de Jordan, pour la décomposition normale des groupes *finis :* Vessiot (*Annales de l'École Normale*, 1892); Lie (*Transformationsgruppen*, III, p. 104).

On conclut de là que Z vérifie l'équation aux dérivées partielles d'ordre n,

$$(2)\qquad R(Z) = \begin{vmatrix} Z & u_1 & \dots & u_n \\ X(Z) & X(u_1) & \dots & X(u_n) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ X_n(Z) & X_n(u_1) & \dots & X_n(u_n) \end{vmatrix} = 0.$$

C'est cette équation que nous appelons la *résolvante générale* de l'équation (1).

Il résulte de la remarque faite plus haut que cette équation est l'équation d'*ordre minimum* que vérifie Z; il est facile de montrer que toute équation d'ordre supérieur à n satisfaite par Z est une combinaison linéaire de la résolvante générale et des équations dérivées.

Toutes les équations indépendantes des dérivées des z_i appartiennent évidemment à la suite

$$X_i(Z) = X_i(u_1)z_1 + \dots + X_i(u_n)z_n;$$

toutes les équations en Z qui peuvent s'en déduire s'écrivent sous forme de déterminant analogue à R; mais, d'autre part, l'équation $R(Z) = 0$ et celles qui s'en déduisent en appliquant l'opération $X(f)$, c'est-à-dire

$$X[R(Z)] = 0, \qquad X_2[R(Z)] = 0, \qquad \dots$$

permettent d'exprimer $X_n(Z)$, $X_{n+1}(Z)$, ... en fonction linéaire et homogène de $Z, X(Z), X_2(Z), \dots, X_{n-1}(Z)$. L'équation considérée d'ordre supérieur à n se ramène ainsi à l'ordre $(n-1)$; elle ne peut être alors qu'une identité.

26. La fonction Z regardée comme dépendant des éléments $z_1, \dots, z_n$ ne demeure invariable par aucune transformation de ces éléments; c'est un invariant caractéristique pour la transformation identique.

A toute solution Z de (2), où les u sont fixés, correspondent n solutions $z_1, \dots, z_n$ de l'équation (1). Pour les obtenir, nous considérons les relations, en nombre n,

$$\begin{aligned} Z &= u_1 z_1 + \dots + u_n z_n, \\ X(Z) &= X(u_1)z_1 + \dots + X(u_n)z_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_{n-1}(Z) &= X_{n-1}(u_1)z_1 + \dots + X_{n-1}(u_n)z_n, \end{aligned}$$

et nous les résolvons par rapport à $z_1, \ldots, z_n$. Cela est possible à la seule condition que le déterminant

$$\| u_1, X(u_2), \ldots, X_{n-1}(u_n) \|$$

soit différent de zéro, ce qui a évidemment lieu pour une infinité de déterminations des u.

Remarquons aussi que cette condition exprime simplement qu'il est impossible d'éliminer les z entre les équations

$$X_i(Z) = X_i(u_1) z_1 + \ldots + X_i(u_n) z_n \qquad (i = 0, 1, \ldots, k)$$

tant que k est inférieur à n.

Toute solution Z *de la résolvante générale conduit donc à un système de solutions* $z_1, \ldots, z_n$ *de l'équation* $X(z) = 0$; *ces solutions s'expriment rationnellement à l'aide de* Z *et de ses dérivées jusqu'à l'ordre* $(n-1)$.

Pour que le système ainsi obtenu soit *fondamental,* il faut et il suffit que tous les déterminants fonctionnels des z pris par rapport à n des variables $x, x_1, \ldots, x_n$ ne soient pas nuls simultanément. Si l'on observe que le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial x}$ dans $X(z)$ a été supposé égal à l'unité, de telle sorte que

$$D_1 = A_1 D, \qquad \ldots, \qquad D_n = A_n D,$$

on voit qu'il suffira d'écrire que D n'est pas nul.

En portant dans

$$D = \frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 0,$$

l'expression des z au moyen de Z et de ses dérivées, on trouve une équation d'ordre n

$$\Delta(Z) = 0,$$

que nous appellerons *équation discriminante. Toute solution* Z *de la résolvante générale qui n'annule pas* $\Delta(Z)$ *donnera un système fondamental de solutions de l'équation* (1).

27. Soit Z une solution de $R(Z) = 0$ qui conduit à un système fondamental $z_1, \ldots, z_n$; toute autre solution Z′, de même nature, de la résolvante générale pourra s'écrire

$$u_1 \varphi_1(z_1, \ldots, z_n) + u_2 \varphi_2 + \ldots + u_n \varphi_n,$$

où les φ désignent n fonctions indépendantes de $z_1, \ldots, z_n$. Elle s'exprimera donc avec Z et ses dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ sous une forme déterminée, qu'on obtient en remplaçant $z_1, \ldots, z_n$ par leur expression à l'aide de Z, $X(Z), \ldots, X_{n-1}(Z)$. Inversement, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions indépendantes de $z_1, \ldots, z_n$, la solution Z peut s'exprimer rationnellement à l'aide de Z', $X(Z'), \ldots, X_{n-1}(Z')$.

L'équation résolvante $R(Z) = 0$ possède, par conséquent, la propriété remarquable suivante : *La solution la plus générale de cette équation peut s'obtenir par une formule déterminée où figurent n fonctions arbitraires de n arguments déterminés qui dépendent rationnellement d'une solution fondamentale* Z *et des combinaisons* $X(Z), \ldots, X_{n-1}(Z)$.

La résolvante appartient donc à la classe si importante des équations qui possèdent des systèmes fondamentaux d'intégrales.

28. Ces préliminaires établis, nous pourrions interpréter, dans le domaine [Z] d'une solution fondamentale de la résolvante, les résultats démontrés par d'autres voies; mais l'application de la théorie générale esquissée au Chap. II sous le nom d'*intégration logique* suffit à obtenir les points essentiels sans aucune difficulté.

D'abord, pour déterminer la solution générale de $R(Z) = 0$, il suffira d'en étudier une solution fondamentale Z. Le système $R(Z) = 0$ qu'il y a lieu de considérer est irréductible ou réductible.

Dans le premier cas, les seules relations rationnelles vérifiées par Z sont les conséquences nécessaires de $R(Z) = 0$; aucune réduction n'est possible.

Dans l'autre cas, il existe des relations rationnelles en Z et en ses dérivées compatibles avec l'équation $R(Z) = 0$ et qui n'en sont pas des conséquences nécessaires. Considérons l'un des systèmes irréductibles en lesquels $R(Z) = 0$ se décompose, et les fonctions rationnelles de Z et de ses dérivées qui s'expriment rationnellement en $x, x_1, \ldots, x_n$, en vertu des équations de ce système. Ces fonctions s'expriment rationnellement à l'aide d'un nombre limité d'entre elles, $A_1, \ldots, A_k$, rationnellement indépendantes et de leurs dérivées; si l'on pose

$$\Theta = V_1 A_1 + \ldots + V_k A_k,$$

où les V sont des fonctions rationnelles arbitraires de $x, x_1, \ldots, x_n$, on peut affirmer que tous les A s'expriment rationnellement en Θ et ses dérivées. L'équation

$$(3) \qquad \Theta\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x_1}, \ldots\right) = \alpha(x, x_1, \ldots, x_n)$$

est irréductible et définit complètement la réduction de l'équation $R(Z) = 0$. Les transformations qui font passer d'une solution fondamentale Z de (3) à une autre solution fondamentale Z' de la même équation, forment un groupe qui est holoédriquement isomorphe au *groupe de rationalité* Γ déjà défini. La fonction Θ est, pour ce groupe, un invariant caractéristique; d'où la double propriété du groupe de rationalité.

Enfin, si l'on fait sur Z, X(Z), ..., $X_{n-1}(Z)$ une transformation qui n'appartient pas à Γ, on obtient une autre équation

$$(3') \qquad \Theta'\left(Z', \frac{\partial Z'}{\partial x_1}, \ldots\right) = \alpha(x, x_1, \ldots, x_n),$$

qui définit un groupe de rationalité Γ' transformé de Γ et qui lui est, par conséquent, holoédriquement isomorphe.

La théorie de la réduction aux transcendantes attachées à des groupes simples se poursuivrait manifestement sans difficulté. Nous n'insisterons pas davantage sur ce point, quitte à y revenir ultérieurement.

V. — Applications diverses.

a. Étude de l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + A\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

où A est rationnel en x et y.

29. Les types de sous-groupes du groupe ponctuel général à une variable, dont la transformation générale est

$$F = \varphi(f),$$

φ désignant une fonction arbitraire, renferment tous un nombre fini de paramètres, au plus égal à trois. Ces types sont :

α, le groupe projectif général, formé des transformations

$$F = \frac{af+b}{cf+d};$$

β, le groupe linéaire général

$$F = af + b;$$

γ, le groupe complexe des transformations

$$F = \theta f + b,$$

où θ est une solution de l'équation $\theta^n = 1$;

δ, le groupe linéaire et homogène

$$F = af$$

qu'on peut remplacer par le groupe de translation

$$F = f + b;$$

ε, la transformation identique

$$F = f.$$

Il existe donc six classes de fonctions de deux variables x et y qui peuvent vérifier une équation de la forme (1).

Classe générale. — Le groupe de rationalité est le groupe ponctuel général. Quelle que soit la solution particulière $f(x, y)$, elle ne vérifie pas d'autres relations rationnelles que celles qu'on obtient en combinant linéairement l'équation (1) avec ses dérivées.

Classes spéciales. — α. L'équation de définition des transformations du groupe est

$$\frac{\dfrac{\partial^3 F}{\partial f^3}}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial f^2}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial f^2}}{\dfrac{\partial F}{\partial f}}\right) = 0.$$

L'invariant caractéristique I peut s'écrire

$$I = \frac{\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\right)^2;$$

la résolvante dont il dépend et qui doit admettre une solution rationnelle est

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x} + \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial y} + 2\mathrm{I}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} + \frac{\partial^3 \mathrm{A}}{\partial y^3} = 0.$$

β. L'équation de définition des transformations du groupe est

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial f^2} = 0.$$

L'invariant caractéristique

$$\mathrm{J} = \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}};$$

la résolvante dont il dépend et qui doit admettre une solution rationnelle est

$$\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{AJ} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right) = 0.$$

Les invariants I et J sont liés par la relation

$$\mathrm{I} = \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y} - \frac{1}{2}\mathrm{J}^2.$$

γ. L'équation de définition du groupe complexe

$$\mathrm{F} = \theta f + b, \qquad \text{où} \qquad \theta^n = 1$$

peut s'écrire

$$\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial f}\right)^n = 1.$$

L'invariant caractéristique K sera

$$\mathrm{K} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^n;$$

la résolvante dont il dépend et qui devra avoir une solution rationnelle sera

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x} + \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y} + n\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} = 0.$$

On a, d'ailleurs, entre K et J, la relation

$$J = \frac{1}{nK}\frac{\partial K}{\partial y}.$$

Il est bien évident que le type γ, dont l'équation de définition renferme un entier arbitraire n est, au fond, le représentant d'une infinité de types distincts, correspondant aux diverses valeurs de cet entier.

δ. Le groupe de rationalité est le groupe de translation

$$F = f + a$$

dont l'équation de définition est

$$\frac{\partial F}{\partial f} = 1.$$

L'invariant caractéristique

$$\frac{\partial f}{\partial y} = L$$

vérifie la relation

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(AL) = 0$$

qui n'est autre que l'équation au multiplicateur de Jacobi. Il y a donc un multiplicateur L qui est rationnel.

Ajoutons que ce type peut être regardé comme compris dans la famille précédente, lorsqu'on y fait $n = 1$.

ε. Le groupe de rationalité étant formé par la transformation identique, l'équation (1) admet une solution rationnelle en x et y.

30. La classification précédente constitue également une classification des divers types de transcendantes qui peuvent vérifier l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dy}{dx} = A(x, y), \tag{2}$$

et qui dépendent d'une constante arbitraire c. La fonction y étant, en effet, définie par l'équation implicite

$$f(x, y) = c,$$

la fonction f satisfait à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + A\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

et réciproquement. Il y a donc cinq types de transcendantes qui peuvent vérifier l'équation (2).

Nous ferons remarquer, en passant, que l'équation générale dite *de Riccati :*

$$\frac{dy}{dx} = X + X_1 y + X_2 y^2$$

appartient toujours au type (α). L'équation en I dans laquelle $\frac{\partial^3 A}{\partial y^3} = 0$ admet, en effet, la solution rationnelle $I = 0$.

Il suffit, au contraire, de prendre pour A une fraction dont les deux termes sont des polynomes généraux du troisième degré en x et y pour obtenir des transcendantes du *type général,* c'est-à-dire pour lesquelles l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} + A\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ appartient à la classe générale.

Les types que nous venons d'établir sont évidemment très généraux; il suffit pour s'en convaincre de considérer le plus simple, qui est formé de toutes les fonctions définies par une quadrature de différentielle totale exacte portant sur une fonction rationnelle de deux variables

$$dz = A\,dx + B\,dy \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x};$$

le groupe de rationalité Γ est $z_1 = z + \text{const.}$

Cet exemple nous montre aussi de quelle nature seront les classifications ultérieures. En effet, le cas où l'intégration se fait algébriquement étant écarté, une simplification ne peut se présenter que *si la transcendante z peut s'obtenir à l'aide de transcendantes attachées à différents sous-groupes de* Γ, *mais dépendant d'un moins grand nombre de variables* [1].

Dans l'exemple que nous adoptons, les seules transcendantes attachées au groupe $z_1 = z + c$ et qui dépendent d'une variable se réduisent

---

[1] Il faut naturellement que ces sous-groupes soient choisis de telle sorte que toutes les transformations de Γ puissent résulter de la combinaison de leurs transformations.

à la fonction logarithmique. Nous devons donc rechercher si l'on n'a pas

$$dz = d\mathrm{R} + \alpha_1 \frac{du_1}{u_1} + \alpha_2 \frac{du_2}{u_2} + \ldots + \alpha_p \frac{du_p}{u_p},$$

où les éléments R, u_1, ..., u_p sont des fonctions rationnelles de x et y et les éléments α_1, α_2, .., α_p des constantes nécessairement rationnelles ou appartenant au même domaine de rationalité que les coefficients de A et de B.

Si l'on introduit, dans le domaine de rationalité, une fonction algébrique θ de x et y, on augmente beaucoup le nombre des types qui correspondent à l'équation du premier ordre, écrite cette fois sous la forme

$$y' = f(x, y, \theta) \qquad \text{avec} \qquad \varphi(x, y, \theta) = 0.$$

Ainsi, dans le cas d'une seule variable x, on trouve pour transcendantes attachées au groupe de translation toutes les intégrales abéliennes; dans le cas de deux variables on aura toutes les intégrales de différentielles totales attachées à une surface algébrique, étudiées par M. Picard.

Le groupe de rationalité étant $z_1 = z + c$, les réductions ultérieures, s'il en existe, ne peuvent que ramener ces derniers éléments, qui dépendent des variables x et y, à des sommes d'intégrales abéliennes qui dépendent d'un seul argument algébrique en x et y et à des fonctions algébriques et logarithmiques. Bien entendu, l'étude du domaine $[\theta]$ amènera aussi à considérer des cas analogues à ceux qui se présentent dans la réduction des intégrales abéliennes d'un certain genre à un genre inférieur; toutes ces réductions n'affectent en rien le groupe de rationalité.

31. Il existe évidemment pour une équation linéaire aux dérivées partielles quelconques

$$\mathrm{X}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{A}_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + \mathrm{A}_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \tag{1}$$

à coefficients rationnels en x, x_1, ..., x_n, des cas remarquables de réduction identiques à ceux que nous venons de trouver pour l'équation à deux variables et qui se présentent quand on étudie les relations rationnelles qui lient à ses dérivées et aux variables *une seule solution* z de l'équation (1). Nous nous bornons à les signaler pour montrer le parti que l'on peut tirer de la connaissance de la transformation $Z = f(z)$ qui laisse invariante l'équation (1), quelle que soit la fonction d'un seul argument, désignée par f.

Ces cas se présenteront quand le groupe de rationalité Γ de l'équation (1) sera *imprimitif, l'une des solutions étant attachée au groupe ponctuel général à une variable ou à l'un de ses sous-groupes.*

Si l'on pose

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x_1}}{B_1} = \ldots = \frac{\frac{\partial z}{\partial x_n}}{B_n},$$

on aura

$$1 + A_1 B_1 + \ldots + A_n B_n = 0,$$

et les résolvantes dont dépend la détermination de $B_1, \ldots, B_n$ admettront une solution rationnelle.

On aura évidemment des réductions analogues dans tous les cas où le groupe Γ est imprimitif.

b. — Équations différentielles ordinaires du second ordre.

32. L'étude de l'intégrale *générale* (avec deux constantes) de l'équation

$$(1) \qquad y'' = f(x, y, y')$$

où f est rationnel, amène à considérer, lorsqu'on la définit par les deux équations

$$\varphi_1(x, y, y') = c_1, \qquad \varphi_2(x, y, y') = c_2,$$

les divers *types* de groupes contenus dans le groupe ponctuel Γ_2, puisque φ_1 et φ_2 forment un système fondamental de solutions de l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} f(x, y, y') = 0.$$

Le nombre de ces types est d'environ soixante, alors même qu'on néglige les *groupes complexes* qu'on obtient en associant à un groupe défini par un système d'équations algébriquement irréductible un groupe fini g (composé d'un nombre limité de transformations) contenu dans le plus grand groupe G qui renferme H comme sous-groupe invariant. Nous ne pouvons songer à faire une étude tant soit peu complète de ces différents types.

Les types primitifs, finis ou infinis, sont au nombre de six. Les types primitifs finis sont linéaires ou projectifs; ils ne donneront rien de particulier. Quant aux autres, on les caractérise en quelques mots : Le groupe général Γ_2 correspond à l'équation (2) *générale;* le groupe défini par la relation

$$d\left[\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}\right] = 0$$

correspond à une équation (2) pour laquelle *les dérivées logarithmiques d'un multiplicateur de Jacobi sont rationnelles;* le groupe défini par la relation

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2)} = 1$$

correspond à une équation (2) pour laquelle il y a *un multiplicateur rationnel et un seul.*

Ces observations évidentes faites, nous indiquerons quelques réductions remarquables pour lesquelles le groupe de rationalité de l'équation (2) est imprimitif. On peut alors se proposer de déterminer *successivement* φ_1 et φ_2; c'est d'ailleurs le seul cas où il en est ainsi.

Les deux groupes imprimitifs et infinis que nous signalons sont formés des transformations [1] $\Phi_1 = F(\varphi_1)$ où F est arbitraire, avec

$$\Phi_2 = \frac{1}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}}\left(\varphi_2 + \frac{\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial\varphi_1^2}}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}}\right)$$

ou bien

$$\Phi_2 = \frac{1}{\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}\right)^2}\left[\varphi_2 + \frac{\dfrac{\partial^3\Phi_1}{\partial\varphi_1^3}}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial\varphi_1^2}}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}}\right)^2\right].$$

---

(1) Cf. *Abhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig,* XXI, 1895.

Pour l'un et pour l'autre, il existera une équation linéaire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + A(x, y, y')\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

où A est rationnel, compatible avec l'équation (2) et qui définira la solution φ_1. Or, si l'on forme l'équation que doit vérifier A, on trouve

$$f\left[\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}y' + \frac{\partial A}{\partial y'}f(x, y, y')\right] = (A - y')\left(\frac{\partial f}{\partial x} + A\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Les autres invariants différentiels des groupes considérés sont simplement

$$J = \varphi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}} \qquad \text{et} \qquad I = \varphi_2\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 - \left[\frac{\dfrac{\partial^3 \varphi_1}{\partial y^3}}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}}\right)^2\right];$$

on formera aisément les résolvantes dont ils dépendent et qui devront admettre des solutions rationnelles. Observons seulement que la détermination de ces invariants équivaut à celle de la solution φ_2, lorsque φ_1 est déterminé.

Dans le cas général où le groupe de rationalité est imprimitif, on ne sait rien sur l'équation rationnelle $A(x, y, y') = \text{const.}$, qui est *une intégrale première* de l'équation (1) : on aura en particulier tous les cas d'abaissement considérés pour le premier ordre.

c. — Équations différentielles linéaires.

33. Nous nous proposons d'indiquer rapidement ici comment on peut rattacher à la théorie générale donnée pour l'équation

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

la théorie classique donnée par M. Picard pour les équations différentielles linéaires.

Soit, par exemple,

$$(1) \qquad f(u) = \lambda u + \lambda_1\frac{du}{dx} + \ldots + \lambda_n\frac{d^n u}{dx^n} = 0$$

l'équation à étudier. Cherchons les relations de la forme

$$\varphi(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) = \text{const.},$$

où $u', u'', \ldots, u^{(n-1)}$ désignent respectivement $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$, compatibles avec l'équation

$$f(u) = 0.$$

On obtient immédiatement pour φ l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(2) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u} u' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial u^{n-1}} u^{(n)} = 0,$$

où $u^{(n)}$ doit être remplacé par son expression déduite de (1). Il résulte de là que, si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ désignent les éléments d'un système fondamental de solutions de (2), les équations

$$\varphi_i(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) = \varphi_i(x_0, u_0, u'_0, \ldots, u_0^{(n-1)}) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

sont compatibles avec l'équation (1) et définissent une solution de cette équation qui dépend de n constantes arbitraires, c'est-à-dire la solution générale.

L'étude de l'équation (1) se ramène donc, à ce point de vue, à celle de l'équation (2).

Nous allons profiter des résultats acquis par M. Picard pour fixer le groupe de rationalité de l'équation (2). Il suffit, pour cela, d'observer qu'on peut définir un système fondamental de solutions de l'équation (2) de la manière suivante :

Exprimons que le produit $v f(u)$, où v est une simple fonction de x, est la dérivée exacte, par rapport à x, d'une fonction de $u, u', \ldots, u^{(n-1)}$. Une suite d'intégrations par parties donnera

$$v f(u) - u g(v) = \frac{d\Phi}{dx},$$

où l'on a posé

$$g(v) = \lambda v - \frac{d(\lambda_1 v)}{dx} + \frac{d^2(\lambda_2 v)}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n(\lambda_n v)}{dx^n}$$

et

$$\Phi(u,v) = u\left[\lambda_1 v - \frac{d}{dx}(\lambda_2 v) + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}(\lambda_n v)}{dx^{n-1}}\right]$$
$$+ u'\left[\lambda_2 v - \frac{d}{dx}(\lambda_3 v) + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}(\lambda_n v)}{dx^{n-2}}\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ u^{(n-1)}[\lambda_n v].$$

Il suffit de prendre pour v une solution particulière de *l'équation différentielle linéaire d'ordre n*

$$g(v) = 0 \tag{3}$$

pour obtenir une solution $\Phi(u,v) = \text{const.}$ de l'équation (2).

A n solutions $v_1, v_2, \ldots, v_n$ formant un système fondamental correspondent n solutions formant également un système fondamental; un calcul facile le montrerait.

La détermination des éléments $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ est donc ramenée à celle des solutions particulières $v_1, \ldots, v_n$ de l'équation (3). Cette équation (3) est dite *adjointe de Lagrange* de l'équation (1), et l'on démontre que la liaison entre ces équations est réciproque; l'intégration de l'équation (2) et celle de (3) sont donc deux problèmes équivalents. D'une manière plus précise, les équations

$$v_i f(u) = \frac{d\Phi_i}{dx}$$

montrent que *le groupe de rationalité de l'équation*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}u' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial u^{(n-1)}}u^{(n)} = 0 \tag{2}$$

relatif aux solutions linéaires $\Phi_i(u,v)$ est identique au groupe de rationalité G *de M. Picard pour l'équation linéaire*

$$g(v) = 0; \tag{3}$$

ce groupe est donc, dans tous les cas, un groupe linéaire. Les deux groupes subissent d'ailleurs simultanément la même réduction.

34. Quand on n'impose plus aux solutions de l'équation (2) la con-

dition d'être linéaires en u, u', ..., $u^{(n-1)}$, le groupe de rationalité de cette équation n'est plus nécessairement le groupe G. Il pourra être un sous-groupe de l'un de ses transformés *non linéaires*.

Cette circonstance se présentera toujours s'il existe des combinaisons homogènes des intégrales linéaires de l'équation (2) qui admettent des transformations de G. Ces intégrales homogènes sont, en effet, déterminées par un système incompatible avec celui qui définit les intégrales linéaires.

Ainsi, dans tous les cas où il existe un sous-groupe de G qui admet des invariants homogènes en $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ces invariants, ou plutôt ceux du groupe commun à H et à ses transformés dans G, conduiront à des intégrales de (2) qui correspondront à un groupe plus simple que G. Le groupe de rationalité de (2) sera, en général, *intransitif*.

Dans le cas particulier où le groupe G possède des invariants homogènes en $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ces invariants donneront des intégrales rationnelles de l'équation (2). S'il y en a r fonctionnellement distincts, le groupe de rationalité de (2) sera à $(n-r)$ variables et transformé d'un groupe linéaire à n variables.

On peut rattacher ces observations à deux Notes importantes de M. Darboux [1], dans lesquelles l'éminent géomètre s'est proposé de déduire les propriétés des intégrales de l'équation (2) de celles de l'équation différentielle linéaire (1).

d. Systèmes complets.

35. Les considérations qui nous ont conduit à l'intégration logique de l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

permettent aussi de classer les transcendantes qui satisfont simultanément à plusieurs équations linéaires, où nous supposerons toujours, pour fixer les idées, les coefficients rationnels.

---

(1) *Comptes rendus*, 1880.

Soit un système de la forme

$$(1)\qquad X_i(f) = a_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2^i \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + a_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, q),$$

où nous supposons les équations *indépendantes,* c'est-à-dire telles qu'il n'existe pas d'identité

$$\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_q X_q = 0;$$

proposons-nous d'étudier les propriétés des intégrales communes à ces q équations.

Le nombre q ne peut être supérieur à n; si l'on a $q = n$, le déterminant des a_i^k étant différent de zéro, on peut conclure des équations données

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

La solution commune f est une constante.

Supposons donc q inférieur à n : Toute solution f commune aux équations

$$X_i(f) = 0, \qquad X_k(f) = 0$$

vérifie aussi l'équation linéaire du *premier ordre*

$$X_i[X_k(f)] - X_k[X_i(f)] = 0,$$

qu'on écrit simplement

$$[X_i(f), X_k(f)] = 0.$$

Si parmi les équations nouvelles, qu'on déduit des équations (1) de cette manière, il en est qui soient indépendantes des équations primitives, il faudra les leur adjoindre et recommencer les mêmes opérations sur le nouveau système. Après $(n - q)$ opérations au plus [1], deux cas peuvent se présenter :

1° On aura au moins n équations distinctes; la solution commune sera une constante;

---

[1] Si l'une des opérations ne donne pas d'équation nouvelle, les suivantes n'en donneront évidemment pas.

2° On aura moins de n équations distinctes, donc un système de r équations

$$X_i(f)=0 \qquad (i=1, \ldots, r),$$

avec des identités

$$[X_i(f), X_k(f)]=\alpha_1^{ik}X_1+\ldots+\alpha_r^{ik}X_k,$$

où les α sont des fonctions rationnelles des x. Ce système s'appelle *système complet*.

Tout système équivalent à un système complet est encore complet. Cette proposition permet de remplacer tout système complet de m équations à $(m+n)$ variables $x_1, \ldots, x_{m+n}$ par un système équivalent

$$X_i(f)=\frac{\partial f}{\partial x_i}+a_1^i\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}+\ldots+a_n^i\frac{\partial f}{\partial x_{m+n}}=0 \qquad (i=1, \ldots, m),$$

où l'on a résolu les équations par rapport à m dérivées convenablement choisies

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_m}.$$

Sous cette forme, les expressions $[X_i(f), X_k(f)]$ sont nulles; on dit que *le système est jacobien*. C'est à ces systèmes que nous bornerons notre étude (¹).

36. *Un système jacobien de m équations à $(m+n)$ variables admet n solutions fonctionnellement indépendantes.* — Cette proposition se démontre exactement comme on a démontré qu'une seule équation à $(m+1)$ variables admettait m solutions distinctes.

On reconnaît immédiatement que si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont n solutions du système, pour lesquelles tous les déterminants fonctionnels relatifs à n des variables ne sont pas nuls; tout autre système de solutions distinctes se déduit de celui-là par une transformation ponctuelle des éléments $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Les raisonnements déjà employés montrent alors que *les coefficients a_k^i du système jacobien sont des invariants différentiels, formant un*

(¹) Les généralités qui précèdent forment la théorie classique des systèmes complets, due essentiellement à Jacobi et à Clebsch.

système complet, pour les éléments $f_1, f_2, \ldots, f_n$ considérés comme fonctions des $(m+n)$ variables $x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_{m+n}$, lorsqu'on transforme ces éléments par le groupe ponctuel général Γ_n.

Cela peut d'ailleurs se conclure de la remarque suivante : L'équation

$$X_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + a_1^1 \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \ldots + a_n^1 \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} = 0$$

a pour solutions $f_1, f_2, \ldots, f_n, x_2, \ldots, x_m$; elle admet donc $(m-1)$ solutions rationnelles et son groupe de rationalité est le groupe ponctuel général en $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ou l'un de ses sous-groupes, quand on regarde les variables $x_2, \ldots, x_m$ comme des constantes. Les invariants différentiels du groupe Γ_n, lorsqu'on regarde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ comme des fonctions des $(n+1)$ variables $x_1, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$, sont précisément $a_1^1, \ldots, a_n^1$ d'après la théorie des équations linéaires.

Nous pouvons à volonté, maintenant, ou appliquer la théorie générale d'*intégration logique* du Chapitre II, ou répéter les raisonnements faits dans le Chapitre III quand nous avons défini le groupe de rationalité. En résumé, il existe un groupe Γ de transformations en $f_1, f_2, \ldots, f_n$ entièrement défini par un nombre limité d'invariants rationnels par rapport aux f et à leurs dérivées relatives aux variables (¹) $x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$, et possèdant les propriétés suivantes :

Toute fonction rationnelle des f et de leurs dérivées qui peut s'exprimer rationnellement à l'aide de $x_1, \ldots, x_{m+n}$ est un invariant de Γ et s'exprime rationnellement à l'aide des invariants formant le système complet et de leurs dérivées.

Tout invariant rationnel de Γ peut s'exprimer rationnellement en $x_1, \ldots, x_{m+n}$.

Les transcendantes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont donc des fonctions, de $(m+n)$ variables, de même nature que celles que nous avons étudiées; *elles peuvent également s'obtenir par l'adjonction de transcendantes attachées à des groupes simples.*

Il est d'ailleurs manifeste que, lorsqu'on les considère comme fonc-

---

(¹) En effet, toutes les dérivées des f relatives aux variables $x_1, \ldots, x_m$ se calculent rationnellement à l'aide des dérivées relatives à $x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ et des invariants du groupe Γ_n.

tions des $(n+1)$ variables $x_i, x_{m+1}, \ldots, x_n$, elles sont les mêmes que celles qui se présentent dans l'étude d'une équation linéaire à $(n+1)$ variables.

La seule différence qui apparaisse entre cette étude et celle d'une équation linéaire, c'est que, dans la détermination du groupe de rationalité, les invariants différentiels étant exactement les mêmes, il y a n systèmes de résolvantes identiques relatifs aux variables $x_1, \ldots, x_n$ au lieu d'un seul.

CONCLUSION.

1. La théorie générale d'intégration que nous avons essayé d'esquisser présente des lacunes considérables, et plusieurs d'entre elles nous ont paru, pour longtemps encore, au-dessus de nos forces. C'est pourquoi nous nous sommes résigné à présenter ce travail sous sa forme actuelle, bien que la disproportion entre la longueur des parties et leur importance soit manifeste et que beaucoup de démonstrations ne soient qu'ébauchées.

Nous espérons qu'une étude plus approfondie permettrait de défendre le point de vue, un peu étroit au premier abord, auquel nous nous sommes placé pour définir les *fonctions dérivables*, et justifierait en quelque mesure les développements considérables donnés à des théories élémentaires. Disons tout de suite que, dans la voie purement formelle où nous nous sommes engagé, la théorie algébrique de la divisibilité et les beaux travaux de M. Dedekind sur les *idéaux* se prêteront à une extension naturelle et que les propriétés des transcendantes que l'on pourra atteindre par cette voie sont loin d'être aussi superficielles qu'on pourrait le croire à un premier examen.

Essayons maintenant de dégager quelques conséquences positives des théories que nous avons indiquées. Si l'on considère d'abord la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles ou des systèmes complets de telles équations, dont les coefficients sont rationnels, on voit qu'*en général les transcendantes* $z_1, \ldots, z_n$, *qui en constituent un système fondamental de solutions, sont des éléments inséparables*.

Toute tentative faite pour déterminer un ou plusieurs d'entre eux, sans déterminer les autres, n'a de sens que dans des cas particuliers, lorsque le groupe de rationalité correspondant est *imprimitif* ou *intransitif* et il nous semble que la seule manière *régulière* de faire l'intégration soit de déterminer le groupe de rationalité.

2. La même observation s'applique aux éléments qui définissent une *intégrale complète* d'une équation non linéaire du premier ordre ou d'un système en involution.

On sait qu'une intégrale complète de l'équation

$$Z(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a \tag{1}$$

est définie par un système d'équations

$$X_i(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

où les X satisfont aux relations

$$[Z, X_i] = 0, \qquad [X_i, X_k] = 0. \tag{3}$$

A tout système de fonctions X_i on peut associer des fonctions P_i, qui s'expriment rationnellement à l'aide des X_i et de leurs dérivées, de telle sorte qu'on ait identiquement

$$dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = \rho(dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n). \tag{4}$$

On passe d'un système $X_1, \ldots, X_n$ de solutions des équations (3) à tout autre système de solutions $Y_1, \ldots, Y_n$ en satisfaisant simplement à l'identité

$$dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = \sigma(dZ - Q_1 dY_1 - \ldots - Q_n dY_n), \tag{5}$$

mais cette identité exprime que les éléments $Y_1, \ldots, Y_n$ dépendent à la fois, en général, des X et des P. Les équations (3) ne définissent pas les X seuls. Les éléments X *et* P *déterminés par l'identité* (4) *sont des éléments inséparables;* ils sont définis à un groupe de transformations de contact près, qui, dans le cas général, est le groupe des transformations en $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ qui n'altèrent pas Z. Ce groupe de transformations de contact peut être regardé, comme le groupe de rationalité de l'équation linéaire à $(2n+1)$ variables :

$$(6)\qquad [Z, \Phi] = 0,$$

pour un choix particulier : $Z, X_1, \ldots, X_n, \frac{P_2}{P_1}, \ldots, \frac{P_n}{P_1}$ des éléments d'un système fondamental.

Lorsque Z est de la forme $z + F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$, ou, d'une manière générale, lorsque l'équation dont dépend ρ

$$(7)\qquad [Z, \rho] = \rho \frac{\partial Z}{\partial z} - \rho^2,$$

admet une solution rationnelle, le groupe de rationalité est simplement le groupe de transformations homogènes en X, P, défini par l'identité

$$P_1 dX_1 + \ldots + P_n dX_n = Q\, dY_1 + \ldots + Q_n dY_n,$$

ou l'un de ses sous-groupes (dont, comme toujours, le type seul est défini).

On ne peut déterminer les X seuls que *si le groupe de rationalité est un groupe ponctuel à n variables étendu*, et non un groupe *irréductible* de transformations de contact; l'équation (6) fait alors partie d'un système complet de n équations linéaires à coefficients rationnels.

La détermination d'une intégrale complète d'un système en involution

$$Z = a, \qquad X_1 = a_1, \qquad \ldots, \qquad X_q = a_q,$$

conduit de même à résoudre l'identité (4). *Les éléments* $X_{q+1}, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ *sont encore inséparables* et définis, en général, aux transformations près du groupe des transformations de contact en $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$, qui n'altèrent pas $Z, X_1, \ldots, X_q$.

3. Les considérations qui nous ont servi jusqu'à présent trouvent encore leur application dans l'étude d'un problème classique, *le problème de Pfaff*, qui, au point de vue des intégrations qu'il exige, ne paraît pas non plus avoir jamais été traité d'une manière satisfaisante.

On sait qu'il s'agit de ramener une forme différentielle donnée

$$\Theta_d = X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n,$$

à l'un ou à l'autre des types

$$dy - z_1 dy_1 - \ldots - z_p dy_p,$$
$$z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p,$$

où les y et les z sont *des fonctions indépendantes* de $x_1, \ldots, x_n$.

On détermine aisément *a priori* celui des deux types qu'il faut adopter, ainsi que le nombre p.

Cette opération faite, nous voyons qu'on passe d'une forme réduite à une autre en satisfaisant à l'identité

$$dY - Z_1 dY_1 - \ldots - Z_p dY_p = dy - z_1 dy_1 - \ldots - z_p dy_p,$$

ou à l'identité

$$Z_1 dY_1 + \ldots + Z_p dY_p = z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p.$$

Les éléments Y et Z sont donc en général *inséparables;* ils sont définis à un groupe de transformations de contact près, qui est un sous-groupe du groupe général à $(2p+1)$ éléments ou du groupe homogène à $2p$ éléments, suivant le cas. Toute tentative de détermination *successive* des y ou des z n'a de sens que dans les cas exceptionnels où le groupe considéré est imprimitif ou intransitif; l'étude de ce groupe (dont le type seul est défini) conduit d'ailleurs à une méthode régulière pour déterminer la transcendance des éléments y et z; etc.

4. Un grand nombre d'équations du second ordre (d'une manière précise *toutes celles qui se ramènent au premier ordre ou s'intègrent par les méthodes de Monge, d'Ampère ou de M. Darboux*) peuvent être traitées comme celles du premier.

Considérons, pour fixer les idées, une équation à deux variables de la forme de Monge

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0, \tag{1}$$

où les coefficients H, ..., N sont des fonctions (rationnelles) de x, y, z, p, q; supposons que, les racines de l'équation

$$\lambda^2 + 2K\lambda + HL - MN = 0$$

étant confondues, on se trouve dans le cas où les équations linéaires

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{L}{N}\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\lambda_1}{N}\frac{\partial V}{\partial q} = 0, \\ &\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\lambda_2}{N}\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{H}{N}\frac{\partial V}{\partial q} = 0 \end{aligned} \right.$$

forment un système complet, c'est-à-dire admettent trois solutions distinctes.

Si l'on désigne par u, v, w ces solutions, les équations

$$u = a, \qquad v = b, \qquad w = c$$

définissent une solution de (1) dépendant de trois constantes, d'où l'on peut déduire une solution qui dépend de deux fonctions arbitraires. La détermination de u, v, w, c'est-à-dire l'intégration du système complet (2), est un problème dont notre théorie donne tous les cas d'abaissement. Nous pouvons donc classer d'une manière précise toutes les transcendantes z, dépendant de trois constantes a, b, c qui vérifient l'équation (1).

Si l'on rappelle qu'on peut toujours associer aux éléments u, v, w des éléments ρ et σ, tels que l'on ait

$$dw - \rho\, du - \sigma\, dv = k(dz - p\, dx - q\, dy),$$

on voit que la transformation de contact, définie par les formules

$$X = -\rho, \qquad Y = -\sigma, \qquad Z = w - \rho u - \sigma v, \qquad P = u, \qquad Q = v,$$

ramène l'équation donnée à la forme

$$S^2 - RT = 0.$$

Les éléments X, Y, Z, P, Q sont donc définis à un groupe de transformations de contact près, qui n'altère pas la relation $S^2 - RT = 0$. Cette remarque permettrait de faire l'étude de l'équation (1) *directement*, c'est-à-dire sans utiliser les résultats que nous avons obtenus sur les systèmes complets.

Pour une équation du second ordre *quelconque*, on ne connait jusqu'à présent aucune classe de solutions (dépendant de constantes ou de fonctions arbitraires) dont on puisse préciser l'indétermination, c'est-à-dire pour lesquelles on connaisse la nature des opérations (formant nécessairement un groupe) qui permettent de passer d'une solution de la classe à une autre solution quelconque de la même classe. La recherche de ces classes est manifestement liée à celle des transformations, portant sur x, y, z, p, q, r, s, t, qui changent une équation du second ordre donnée en une autre quelconque, par exemple en l'équation $S = 0$. Mais c'est là un sujet qui n'a pas encore été abordé.

5. D'une manière générale, nous avons constaté que les éléments qui se présentent dans la théorie des équations différentielles, faite au point de vue spécial auquel nous nous sommes placé, sont toujours indissolublement liés à d'autres, dont ils ne peuvent être distingués algébriquement. C'est l'arbitraire qui subsiste dans leur *définition algébrique*, qui est la véritable mesure de leur transcendance.

Nous avons vu également que le calcul des fonctions rationnelles de ces éléments et de leurs dérivées d'ordre quelconque, rend manifestes, par les transformations qu'il admet en lui-même, leurs propriétés les plus importantes et donne, en particulier, pour des équations qui renferment des indéterminées, tous les cas possibles d'abaissement ou de dégénérescence.

Si l'on fait maintenant appel, pour représenter les transcendantes que nous étudions à des développements en série de puissances ou à toute autre expression analytique qu'on pourra *continuer*, au sens de Weierstrass, on reconnaîtra que ces transcendantes ne sont en général pas *uniformes*. En partant d'un point de situation générale dans le champ des variables et y revenant après avoir décrit des chemins fermés quelconques, on ne retrouvera pas les développements initiaux. Par exemple, pour les équations linéaires aux dérivées partielles, les développements des éléments d'un système fondamental subiront une transformation ponctuelle déterminée. Les transformations qu'on obtient ainsi forment un groupe qui sera le *groupe de monodromie* de l'équation donnée. Ce groupe est évidemment un sous-groupe du groupe de rationalité et il importe pour l'étudier de partir des équations qui définissent ce dernier, en d'autres termes de n'étudier que des systèmes différentiels *irréductibles*. Les recherches faites sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques, fourniront un guide naturel pour cette étude.

Ajoutons enfin que la méthode qui nous a servi pour ébaucher la classification des transcendantes qui vérifient des équations différentielles algébriques a une portée beaucoup plus générale. Elle s'appliquera encore, sans modifications essentielles, à l' « *intégration logique* » *des équations aux différences finies, aux différences mêlées, et, en général, de toutes équations fonctionnelles,* à condition de préciser convenablement le *domaine de rationalité;* il en résultera également une classification naturelle des transcendantes que l'on peut *définir algébriquement* de cette manière. Mais nous en avons dit assez pour montrer que nous n'avons fait qu'effleurer un sujet très vaste qui, nous l'espérons, pourra être pendant longtemps l'occasion de recherches fécondes.

Nous considérons comme un devoir de rappeler en terminant quelques lignes de la célèbre lettre écrite par Galois, la veille de sa mort (29 mai 1832), à son ami Auguste Chevalier. Dans cette lettre, comme on sait, Galois, avec une divination sans égale, n'a pas seulement donné son admirable théorie des équations algébriques; il a encore indiqué, d'une manière extrêmement nette, les propriétés essentielles des intégrales de différentielles algébriques, et ses indications ont été, vingt ans après, entièrement confirmées par les travaux mémorables de Riemann et de Weierstrass. Nous serions heureux si notre travail pouvait appeler l'attention sur les quelques lignes qui terminent la lettre de Galois, et s'il pouvait être regardé comme une première tentative d'éclaircissement de la pensée qu'elles expriment :

« Mes principales méditations, depuis quelque temps, étaient dirigées sur l'application à l'Analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. *Il s'agissait de voir,* a priori, *dans une relation entre des* *quantités ou fonctions transcendantes, quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données, sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher.* Mais je n'ai pas le temps, et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense. »