ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉDOUARD LE ROY

Sur l'intégration des équations de la chaleur

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 379-465

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__379_0>

SUR L'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS DE LA CHALEUR,

PAR M. ÉDOUARD LE ROY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

INTRODUCTION.

1. L'objet du présent Mémoire est la résolution de quelques-uns des problèmes de Calcul intégral que soulève la Théorie mathématique de la chaleur.

Ces problèmes se rapportent à certaines équations aux dérivées partielles dont le type est l'équation de Laplace. Chacun d'eux consiste en l'établissement d'une proposition très analogue au principe de Dirichlet.

2. Les équations de la chaleur sont les plus simples des équations de la Physique : elles méritent sans doute à ce titre une étude approfondie. On sait d'ailleurs qu'elles ne régissent pas seulement les phénomènes de conduction thermique : elles reparaissent dans les théories de la diffusion et de la viscosité des liquides; on les retrouve encore à propos de l'équilibre ou du mouvement de l'électricité dans les conducteurs métalliques. C'est dire que leur considération s'impose au physicien. Mais c'est au point de vue purement analytique de la détermination de leurs intégrales que je les envisagerai surtout.

Préoccupés d'une idée qui régnait autrefois, d'après laquelle une intégration n'était réputée faite que si l'on parvenait à découvrir la forme explicite de la fonction inconnue, les géomètres par qui fut inaugurée la Théorie de la chaleur ont employé dans toutes leurs recherches une méthode uniforme : leur projet a toujours été, suivant l'expression de Lamé ([1]), de construire la solution d'un problème de Physique à l'aide d'une série de *solutions simples* jouant le rôle d'*éléments analytiques* que tiennent les fonctions circulaires dans les séries de Fourier. C'est encore à ce point de vue que s'est placé M. Poincaré dans un Ouvrage récent ([2]). Mais ce point de vue, si intéressant en lui-même et si fécond dans les cas particuliers où les calculs peuvent être poussés jusqu'au bout, doit être abandonné quand il s'agit des cas généraux, auxquels j'ai l'intention de me limiter ici.

Plusieurs exemples de la marche qu'il convient alors de suivre ont été donnés par MM. Schwarz, Neumann et Poincaré pour la démonstration du principe de Dirichlet. Or les procédés de ces géomètres, ou d'autres tout semblables, réussissent encore dans les circonstances plus complexes que nous rencontrerons. C'est donc leur perfectionnement et leur généralisation que nous allons chercher. Ils ne conduisent du reste qu'à des *théorèmes d'existence*, sans fournir l'expression analytique des inconnues. Mais de ces théorèmes, il est possible de déduire ensuite les séries mêmes que l'emploi de la méthode des solutions simples eût fait considérer *a priori*. Voilà les deux points que je me propose d'établir en ce Mémoire.

3. Les lois différentielles qui règlent la circulation de la chaleur à l'intérieur d'un corps solide isotrope et athermane ont été trouvées par Fourier au début de ce siècle.

Imaginons une surface fermée S qui délimite à l'intérieur d'un corps une portion T de celui-ci. Soient

$d\sigma$ un élément de S,
$d\tau$ un élément de T,
V la température du point (x, y, z) à l'instant t,

([1]) Lamé, *Théorie analytique de la chaleur*, Discours préliminaire.
([2]) H. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*. Paris, Carré, 1895.

$\frac{dV}{dn}$ la dérivée de V estimée en un point de S dans la direction de la normale à S vers l'extérieur de cette surface,

k le coefficient de conductibilité thermique du corps.

Je n'ai pas à redire ici par quelle suite de raisonnements Fourier fut conduit à reconnaître au *flux de chaleur* qui traverse pendant le temps dt l'élément $d\sigma$ de S l'expression

$$-k\frac{dV}{dn}\,d\sigma\,dt.$$

Je rappellerai seulement que, d'après les conventions habituelles, cette formule donne en grandeur et en signe la valeur du flux qui *sort* du domaine T par l'élément $d\sigma$ de sa frontière.

4. Négligeons l'influence des variations de la température sur les paramètres qui définissent en chaque point l'état physique du corps.

En vertu de ce qui précède, la quantité de chaleur qui, pendant le temps dt, *entre par conduction* dans le volume T, est représentée par l'intégrale double

$$\int_{(S)} k\frac{dV}{dn}\,d\sigma\,dt,$$

étendue à tous les éléments $d\sigma$ de la surface S. Si l'on pose

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

$$\sum \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z},$$

et si l'on applique la formule de Green, on voit que l'intégrale précédente peut s'écrire

$$\int_{(T)} k\,\Delta V\,d\tau\,dt + \int_{(T)} \sum \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\,d\tau\,dt,$$

les intégrations se rapportant cette fois aux divers éléments $d\tau$ du volume T.

Supposons maintenant que chaque élément $d\tau$ de T contienne *une* *source de chaleur* dont le débit pendant le temps dt soit

$$\varphi(x, y, z, t)\, d\tau\, dt,$$

φ désignant une fonction connue du temps t et des coordonnées (x, y, z) du centre de gravité de $d\tau$. De ce chef, le volume T reçoit une quantité de chaleur

$$\int_{(T)} \varphi(x, y, z, t)\, d\tau\, dt,$$

qui s'ajoute à la chaleur reçue par conduction.

Admettons enfin, pour n'omettre aucune circonstance possible, qu'une *cause de déperdition calorifique* agisse sur chaque élément $d\tau$ du corps. Cela se présenterait par exemple pour une plaque très mince dont les faces parallèles seraient soumises à un rayonnement extérieur d'intensité connue. La quantité de chaleur *perdue* de la sorte par le volume T pendant le temps dt peut être représentée par l'intégrale

$$\int_{(T)} f(x, y, z, V)\, d\tau\, dt.$$

L'expérience nous amène d'ailleurs à faire l'hypothèse que la fonction donnée f est croissante avec V et nulle pour $V = 0$.

Faisons la somme des trois quantités précédentes, en tenant compte de leurs signes respectifs. Il vient

$$\int_{(T)} \left[k\,\Delta V + \sum \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \varphi(x, y, z, t) - f(x, y, z, V) \right] d\tau\, dt.$$

Tel est le *gain total* de chaleur fait par le volume T pendant le temps dt.

On peut trouver une autre expression de cette même quantité: Chaque élément $d\tau$ de T, passant pendant le temps dt de la température V à la température $V + \frac{\partial V}{\partial t} dt$, emmagasine une quantité de chaleur dont l'expression est, en vertu des lois calorimétriques,

$$CD \frac{\partial V}{\partial t}\, d\tau\, dt,$$

C désignant la chaleur spécifique de l'élément $d\tau$ et D sa densité. L'intégrale triple

$$\int_{(T)} \mathrm{CD}\frac{\partial V}{\partial t} d\tau\, dt$$

représente donc aussi le gain total de chaleur évalué plus haut.

Égalons entre elles les deux expressions différentes que nous venons de trouver successivement pour la même quantité. On a l'identité

$$\int_{(T)} \left[k\,\Delta V + \sum \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \varphi(x, y, z, t) - f(x, y, z, V) - \mathrm{CD}\frac{\partial V}{\partial t}\right] d\tau\, dt = 0,$$

qui doit avoir lieu pour tous les choix possibles du domaine T à l'intérieur du corps étudié.

On conclut de là, par un raisonnement bien connu, que l'équation aux dérivées partielles

$$k\,\Delta V + \sum \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \varphi(x, y, z, t) = f(x, y, z, V) + \mathrm{CD}\frac{\partial V}{\partial t}$$

est vérifiée par la fonction V.

5. Si l'on remarque que les fonctions

$$k(x, y, z), \quad C(x, y, z), \quad D(x, y, z)$$

sont essentiellement positives et que, par suite, leurs logarithmes népériens et leurs quotients deux à deux sont finis et uniformes, on voit sans peine qu'un simple changement de notation permet d'écrire notre équation sous la forme

$$(1) \qquad \Delta V + a(x, y, z)\frac{\partial V}{\partial x} + b(x, y, z)\frac{\partial V}{\partial y} + c(x, y, z)\frac{\partial V}{\partial z}$$
$$= f(x, y, z, V) + \varphi(x, y, z, t) + \psi(x, y, z)\frac{\partial V}{\partial t},$$

l'expression

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

étant une différentielle exacte.

Il faut noter que la fonction ψ est essentiellement positive et non nulle et que la fonction f, nulle pour $V = 0$, croît avec V.

Je donnerai à l'équation (1), sur laquelle vont porter mes recherches, le nom d'*Équation de Fourier*.

Un cas particulièrement intéressant de l'équation de Fourier est celui où $f(x, y, z, V)$ est de la forme $f(x, y, z)V$, f étant nécessairement alors une fonction positive. Dans ce cas, l'équation devient *linéaire* et cela correspond à l'hypothèse d'une cause de déperdition calorifique agissant conformément à la loi de refroidissement indiquée par Newton.

Un autre cas à signaler comme digne d'une attention spéciale est celui où la variable t ne figure pas dans l'équation. Celle-ci prend alors la forme

$$(2) \qquad \Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = f(x, y, z, V) + \varphi(x, y, z),$$

et l'on dit que *l'équilibre thermique est établi* ou que *le régime est permanent*.

6. Voici comment on peut énoncer d'une façon générale les problèmes d'intégration qui vont nous occuper.

Regardons les fonctions a, b, c, f, φ, ψ comme données et prenons V pour inconnue. Deux cas sont à distinguer.

Notre premier but sera de construire une intégrale $V(x, y, z)$ de l'équation (2), définie et continue en tout point d'un domaine clos, à la frontière duquel la fonction cherchée sera astreinte à prendre des valeurs données d'avance.

Notre second but sera de construire une intégrale $V(x, y, z, t)$ de l'équation (1), définie et continue en tout point d'un domaine clos et pour toute valeur positive du temps, se réduisant pour $t = 0$ à une fonction de (x, y, z) donnée d'avance et prenant à la surface du corps des valeurs assignées *a priori*.

Dans chacun de ces deux cas, diverses conditions de possibilité s'imposent, qui seront expliquées en leur place. Au reste, ces énoncés se préciseront par la suite; mais on voit déjà l'étroite analogie avec le problème de Dirichlet.

On pourra remarquer que je laisse entièrement de côté l'examen du cas classique où il y a *rayonnement* à la surface du corps. Ce sera l'objet d'un Mémoire ultérieur, dont les principales conclusions ont été sommairement indiquées dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [1].

7. Il me reste à faire savoir le plan que j'ai suivi dans le présent Travail et les sources où j'ai puisé.

Une remarque faite par M. Paraf dans sa Thèse de Doctorat [2] intervient en la plupart de mes raisonnements : elle m'a permis d'étendre aux équations d'un type général, quel que soit le nombre des variables indépendantes, les principales propositions que divers artifices avaient fait connaître pour l'équation de Laplace. Je puis de la sorte réduire à une forme canonique la méthode célèbre exposée par M. Poincaré sous le nom de *Méthode du Balayage* [3] et c'est de là que je déduis, par un procédé uniforme, la résolution complète des problèmes relatifs à la Théorie de la chaleur, en ce qui concerne au moins les théorèmes d'existence.

Je considère tout d'abord *les équations de l'équilibre thermique au point de vue de la généralisation du principe de Dirichlet.* M. Picard s'est déjà beaucoup occupé de ces questions dans plusieurs Mémoires bien connus [4]. J'en reprends l'étude, en m'attachant surtout au cas où *trois* variables ponctuelles (x, y, z) figurent dans les calculs, et j'emploie une méthode indépendante de toute théorie préalable de l'équation de Laplace. C'est la méthode du balayage, pour les équations linéaires; je fais un raisonnement qui démontre le principe de Dirichlet en même temps que ses généralisations et qui s'applique aussi bien dans le plan que dans l'espace. Pour les équations non linéaires, en me bornant toutefois aux types dont la théorie de la chaleur suggère l'étude, car sans cette restriction le domaine à explorer

---

(1) E. Le Roy, *Sur le problème de Fourier* (*Comptes rendus*, 18 mars 1895).

(2) A. Paraf, *Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VI, Chap. III, § 2, 1892).

(3) H. Poincaré, *American Journal of Mathematics*, t. XII. — *Voir* aussi : *Théorie du Potentiel newtonien*, Chap. VII. Paris, Carré, 1897.

(4) E. Picard, *Acta mathematica*, t. XII. — *Journal de Mathématiques*, 1890 et 1896. — *Journal de l'École Polytechnique*, LXe Cahier.

serait immense, je propose une méthode nouvelle qui réussit dans tous les cas.

Dans la seconde Partie, je définis certaines fonctions que j'appelle les *fonctions harmoniques fondamentales attachées à une surface fermée* et j'étudie leurs propriétés les plus simples. Mon guide est, cette fois encore, un Mémoire de M. Poincaré (¹). Je montre que l'établissement préalable des théorèmes d'existence permet d'obtenir comme conséquences les développements en séries par lesquels, si l'on adoptait les idées de Lamé, on chercherait à construire la solution du problème de Dirichlet. Les équations générales où figurent dans les coefficients des signes fonctionnels arbitraires sont naturellement à écarter ici : je me limite à l'équation de Laplace. Les propositions que je démontre fournissent le moyen de perfectionner sur plus d'un point la théorie des fonctions harmoniques : c'est par là que je finis.

Enfin j'arrive *aux équations du refroidissement des corps solides et à la résolution du problème de Fourier*. Je traite d'abord le cas d'un corps *homogène*, par une méthode imitée de celle du balayage. Puis je montre qu'il est possible, ici encore, de trouver *a posteriori*, sous la forme des séries auxquelles il est juste de donner le nom de Lamé, les solutions dont l'existence a été mise hors de doute. Cela procure des renseignements nouveaux sur plusieurs questions de Physique, entre lesquelles je cite seulement *le problème des membranes vibrantes*. Je termine enfin par des indications rapides sur la possibilité d'appliquer aux équations générales du régime variable les procédés imaginés par M. Picard pour les équations du régime permanent.

Les principaux résultats que je dois exposer ont été présentés à l'Académie des Sciences dans les séances des 28 janvier 1895, 17 février, 7 et 28 décembre 1896, 28 juin 1897. Leur caractère commun est de constituer une préparation à l'étude générale des équations de la Physique.

(¹) H. POINCARÉ, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894. — *Voir* aussi : *Acta mathematica*, 1896.

PREMIÈRE PARTIE.

LES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE THERMIQUE ET LA GÉNÉRALISATION DU PRINCIPE DE DIRICHLET.

I. — Généralités. — Hypothèses fondamentales. — Détermination unique d'une intégrale continue par ses valeurs sur une surface fermée.

8. Soient a, b, c, φ quatre fonctions données et V une fonction inconnue des coordonnées x, y, z d'un point de l'espace. Désignons par $f(x, y, z, \mathrm{V})$ une dernière fonction, dont la forme est supposée connue d'avance.

Je me propose d'étudier, au point de vue de son intégration, l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\Delta \mathrm{V} + a\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + c\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = f(x, y, z, \mathrm{V}) + \varphi. \tag{1}$$

Je résoudrai à son égard un problème analogue au problème de Dirichlet : on sait que ce problème consiste à déterminer une intégrale continue par les valeurs qu'elle prend sur une surface fermée.

Il convient tout d'abord de donner une précision complète à l'énoncé précédent. Cela m'amène à déclarer les hypothèses que je fais.

9. Les fonctions a, b, c sont supposées *uniformes, finies et continues,* ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, dans une région R de l'espace. En outre, l'expression

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

est par hypothèse une *différentielle exacte* $d\mu$.

Les fonctions f, φ sont de même *uniformes, finies et continues* en tout point de R pour toutes les valeurs réelles de V. Elles ont de plus, par rapport aux variables dont elles dépendent, des dérivées partielles du premier ordre qui jouissent des mêmes propriétés.

Je rappelle enfin que les principes de la théorie de la chaleur nous invitent à supposer la fonction $f(x, y, z, V)$ *croissante avec* V *et nulle en même temps que cette variable.*

Cela posé, soit S une surface fermée tracée dans la région R : ce sera la frontière d'un *domaine connexe* T. Cette surface pourra être formée de plusieurs nappes, entièrement séparées; mais, en chacun de ses points, elle aura *un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux bien déterminés.*

Assujettissons d'avance la fonction V que nous voulons construire aux conditions de continuité suivantes :

1° La fonction V doit être uniforme, finie et continue dans le domaine T;

2° Les dérivées partielles des deux premiers ordres de V doivent être uniformes, finies et continues dans tout domaine T' contenu dans T.

Nous appellerons ces conditions les *conditions de continuité fondamentales.*

A chaque point M de S, attachons un nombre Φ_M, de telle façon que l'ensemble Φ des nombres Φ_M soit continu. Nous désignerons Φ par le nom de *fonction périphérique donnée.* Nous supposerons cette fonction uniforme, finie et continue sur S, mais nous ne ferons aucune hypothèse sur la continuité ni même sur l'existence de ses dérivées.

Voici enfin ce que nous entendrons en disant d'une fonction V qu'*elle prend sur* S *les valeurs* Φ *ou qu'elle se réduit à* Φ *sur* S. Soit M un point de S auquel est attaché le nombre Φ_M; soit A un point de T en lequel V a la valeur V_A; soit C un chemin continu allant de A en M sans sortir de T. Dire que V se réduit à Φ sur S, c'est dire que $V(x, y, z)$ tend vers Φ_M quand le point courant (x, y, z) décrit C, quels que soient A, M et C.

Tout cela posé, *notre but est de construire une intégrale de l'équation* (1) *remplissant les conditions de continuité fondamentales, se réduisant sur* S *à la fonction périphérique donnée* Φ *et vérifiant l'équation aux dérivées partielles étudiée en tout point situé à l'intérieur de* T.

Nous écrirons

$$\left|\begin{array}{l} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = f(x, y, z, V) + \varphi, \\ V_S = \Phi. \end{array}\right.$$

L'ensemble de ces deux égalités sera pour nous une notation abrégée de l'énoncé précédent.

Enfin le nom de *Principe de Dirichlet généralisé* désignera la proposition qui affirme l'existence d'une solution de notre problème.

10. Je commencerai par démontrer le théorème suivant : *si la fonction $f(x, y, z, V)$ est croissante avec* V, *le problème qui nous occupe comporte au plus une solution.*

L'étude de cette question a déjà longtemps retenu M. Picard (1). Deux méthodes différentes ont été proposées par ce géomètre. L'une, très naturelle, très simple, et toujours applicable en Physique mathématique, est fondée sur la considération de certaines intégrales définies qui sont essentiellement positives. M. Poincaré en a fait souvent usage (2). Mais, outre qu'elle ne permet pas facilement à l'analyste de traiter tous les cas qu'il rencontre, elle impose aux énoncés des restrictions surnuméraires que rien ne justifie. L'autre méthode n'offre pas un moindre inconvénient, car elle oblige à supposer *holomorphes* les coefficients de l'équation aux dérivées partielles qui, elle-même, doit être *linéaire*. Pour ces diverses raisons, je préfère aux précédents un procédé de démonstration dont le principe est dû à M. Paraf (3).

Supposons que le problème de Dirichlet généralisé puisse recevoir deux solutions distinctes V_1 et V_2. Leur différence V remplirait les conditions de continuité fondamentales et s'annulerait sur S. *Elle atteindrait donc, en un point situé à l'intérieur de* T, *soit un maximum positif, soit un minimum négatif.* Nous allons voir qu'une pareille circonstance est impossible lorsque $f(x, y, z, V)$ croît avec V. On a, dès

---

(1) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. I, § III.
(2) H. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la Chaleur*, Chap. II.
(3) A. Paraf, *loc. cit.*

lors, forcément,

$$V \equiv 0, \qquad V_1 \equiv V_2,$$

et le théorème annoncé se trouve établi.

Pour démontrer la proposition à laquelle nous ramène le raisonnement qui précède, je m'appuierai sur la remarque de M. Paraf que j'ai signalée dans l'Introduction comme devant me servir constamment.

11. Envisageons d'abord le cas d'une équation linéaire. Si V désigne la différence $V_1 - V_2$, on a

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = fV.$$

Supposons

$$f > 0,$$

l'inégalité excluant l'égalité. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point M_0 où V atteint un maximum positif. En ce point, on a

$$f > 0, \qquad V > 0.$$

Mais V satisfait aux conditions de continuité fondamentales; d'où

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

en M_0, les fonctions a, b, c étant en même temps finies et déterminées. La formule de Taylor, limitée au second terme, est ici applicable. Si l'on emploie la forme du reste indiquée par Lagrange, il vient

$$V(x, y_0, z_0) - V(x_0, y_0, z_0) = \frac{(x - x_0)^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\xi, y_0, z_0),$$

$$V(x_0, y, z_0) - V(x_0, y_0, z_0) = \frac{(y - y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x_0, \eta, z_0),$$

$$V(x_0, y_0, z) - V(x_0, y_0, z_0) = \frac{(z - z_0)^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(x_0, y_0, \zeta),$$

ξ, η, ζ étant respectivement compris entre x et x_0, y et y_0, z et z_0. Le point M_0 étant le lieu d'un maximum positif pour V, on conclut de là sans peine

$$\Delta V \leqq 0,$$

pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Finalement, en M_0, on a

$$\Delta V \leqq 0, \qquad a\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad b\frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad c\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad fV > 0.$$

Alors l'équation que doit vérifier V ne peut pas être satisfaite au point considéré. Cela est contraire à l'hypothèse. Donc V ne peut pas avoir de maximum positif à l'intérieur de T.

L'impossibilité d'un minimum négatif se prouverait de la même manière.

Le problème de Dirichlet généralisé comporte donc au plus une solution, dans le cas de l'équation linéaire, lorsque le coefficient f de cette équation est positif et non nul en tout point du domaine T *envisagé.*

La discussion peut être poussée plus loin. Soit $\lambda(x, y, z)$ une fonction arbitraire, mais toujours positive dans T, ne s'annulant même pas sur S et vérifiant les conditions de continuité fondamentales ainsi que ses dérivées de tous les ordres. Posons

$$V = \lambda U.$$

On a

$$\lambda \Delta U + \left(2\frac{\partial \lambda}{\partial x} + a\lambda\right)\frac{\partial U}{\partial x} + \left(2\frac{\partial \lambda}{\partial y} + b\lambda\right)\frac{\partial U}{\partial y} + \left(2\frac{\partial \lambda}{\partial z} + c\lambda\right)\frac{\partial U}{\partial z} + F(\lambda)\,U = \varphi,$$

en posant

$$F(\lambda) = \Delta\lambda + a\frac{\partial \lambda}{\partial x} + b\frac{\partial \lambda}{\partial y} + c\frac{\partial \lambda}{\partial z} - f\lambda.$$

Si λ est connu, la recherche de V se ramène immédiatement à celle de U; cette dernière fonction prend d'ailleurs sur S les valeurs données $\frac{\Phi}{\lambda}$ qui sont finies pour $\lambda \neq 0$. Supposons que l'on parvienne à choisir λ de façon que l'on ait en tout point de S et de T :

$$\lambda > 0, \qquad F(\lambda) < 0,$$

les égalités étant exclues. On pourra répéter le raisonnement précédent et l'on verra que, cette fois encore, *le problème de Dirichlet généralisé comporte au plus une solution.* L'équation qui définit U est d'ailleurs de même forme que celle qui définit V.

Si l'on prend

$$\lambda = e^{\lambda'},$$

la condition de signe imposée à λ sera satisfaite et il suffira de choisir λ' de manière à réaliser, outre les circonstances de continuité prescrites par l'énoncé, l'inégalité

$$\Delta\lambda' + \left(\frac{\partial\lambda'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda'}{\partial z}\right)^2 + a\frac{\partial\lambda'}{\partial x} + b\frac{\partial\lambda'}{\partial y} + c\frac{\partial\lambda'}{\partial z} - f < 0.$$

Approfondissons quelques exemples.

Soit

$$f \geqq 0 \text{ dans } T.$$

Prenons

$$\lambda' = -\frac{\alpha}{M} e^{Mx},$$

α et M étant deux constantes laissées indéterminées pour le moment. On doit réaliser l'inégalité

$$M + a > \alpha e^{Mx}.$$

Choisissons M positif et tel que $M + a$ soit supérieur à un certain nombre positif N. Puisque le domaine T est limité, on peut trouver un nombre positif L tel que le module de x reste inférieur à L en tout point de T. Prenons alors pour α un nombre compris entre 0 et Ne^{-ML}. Toutes les conditions voulues seront remplies. *Le problème de Dirichlet généralisé comporte donc au plus une solution si le coefficient f de l'équation linéaire ne devient négatif en aucun point du domaine envisagé.*

Par exemple, l'équation

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = \varphi$$

rentre dans la catégorie précédente, quel que soit T. L'équation

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = z^2(x^2 + y^2 + z^2 - 1)[z + 2 - (x^2 + y^2)]V + \varphi$$

appartient au même type, pourvu que la surface S soit tracée dans l'espace compris entre la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

et le paraboloïde de révolution

$$z + 2 = x^2 + y^2,$$

espace qui est illimité.

Prenons encore, dans un nouvel exemple,

$$\lambda' = -(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

α, β, γ désignant des constantes. L'inégalité à réaliser est

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < a\alpha + b\beta + c\gamma + f.$$

Voici une application. Soit

$$\alpha = \beta = \gamma = 1, \qquad \xi^2 > 3.$$

L'équation

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = [\xi^2 - (a + b + c)]V + \varphi$$

appartient au type signalé. *Remarquons que le coefficient qui joue le rôle de f y peut avoir un signe quelconque.*

Il serait facile de multiplier les exemples de ce genre. Contentons-nous de noter que l'on procède toujours par réduction de l'équation à la forme canonique caractérisée par l'inégalité $f > 0$.

Dans ce qui précède, je n'ai fait aucune hypothèse sur a, b, c. Voyons maintenant ce qui se passe si

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

est une différentielle exacte $d\mu$. Soit

$$\lambda' = -\frac{\mu}{2}.$$

Il vient

$$\Delta U = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f\right]U + e^{\frac{\mu}{2}}\varphi.$$

Si l'on a, en tout point de T,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f > 0,$$

on est assuré que le problème de Dirichlet généralisé comporte au plus une solution.

Lorsque a, b, c sont les dérivées partielles d'une même fonction, on voit que l'équation linéaire peut toujours être ramenée à la forme canonique

$$\Delta V = f V + \varphi.$$

Convenons de désigner l'équation dans ce cas par le nom d'*équation linéaire réductible*. Cette équation est spécialement importante pour la Physique mathématique. Aussi vais-je en faire une étude particulière, toujours au point de vue de la détermination unique d'une intégrale continue par ses valeurs sur une surface fermée, mais en ne faisant plus sur f aucune hypothèse de signe.

12. C'est à M. Picard que l'on doit les premiers résultats relatifs à la question qui va nous occuper. Dans un Mémoire inséré en 1890, au *Journal de Mathématiques*, ce géomètre a énoncé un théorème d'après lequel le problème de Dirichlet généralisé comporte au plus une solution *si la surface* S *s'écarte suffisamment peu d'un des points de l'espace*. Un second Mémoire du même auteur (*Journal de Mathématiques*, 1896) est venu compléter le premier : il suffit que *le volume du domaine* T *soit assez petit*. Nous retrouverons ces deux propositions. Mais la méthode de M. Paraf nous permettra, en outre, de bien voir que la seule condition nécessaire est *une certaine petitesse du domaine* T et de fixer le sens précis qu'il faut attribuer à cette expression.

Pour plus de simplicité, je supposerai les coefficients f et φ de l'équation réduite *continus ainsi que leurs dérivées* dans tout l'espace. Je chercherai, dans ces conditions, comment on peut choisir le domaine T de façon que le problème de Dirichlet généralisé comporte au plus une solution. Il va de soi que, si f et φ n'étaient définis que dans une région R, une première condition imposée au domaine T serait d'être contenu dans R.

Soit L une limite supérieure de $|f|$. Tout revient à trouver une fonction continue λ vérifiant les conditions

$$\lambda > 0, \qquad \Delta\lambda + L\lambda = 0,$$

dans T et sur S. Cherchons, de diverses manières, à calculer λ.

Soient α, β, γ les cosinus directeurs d'une direction dans l'espace. Prenons

$$\lambda = \sin\left[\sqrt{\mathrm{L}}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta)\right].$$

Toutes les conditions voulues seront remplies en choisissant δ de façon que l'on ait, en tout point de T,

$$0 < \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta < \frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{L}}}.$$

Donc, *le problème de Dirichlet généralisé comporte au plus une solution si la surface* S *est comprise entre deux plans parallèles dont l'écartement n'excède pas* $\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{L}}}$. Dans ce cas, le volume de T peut dépasser toute limite assignée.

Prenons encore un autre exemple. Soit

$$\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

et

$$\lambda = \frac{\sin\sqrt{\mathrm{L}}(\rho - \mathrm{R})}{\rho},$$

R étant une constante arbitraire et (x_0, y_0, z_0) les coordonnées d'un point quelconque de l'espace. Toutes les conditions prescrites seront remplies si l'on a

$$\rho > \mathrm{R}, \qquad \rho < \mathrm{R} + \frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{L}}}.$$

Donc, *il n'y a qu'une solution possible du problème de Dirichlet généralisé si le domaine* T *peut être placé tout entier entre deux sphères concentriques limitant une couche sphérique dont l'épaisseur ne surpasse pas* $\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{L}}}$. *Un cas particulier est celui où* T *est contenu dans une sphère de rayon* $\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{L}}}$. Ici, de nouveau, le domaine T peut s'éloigner autant qu'on veut d'un point quelconque et avoir un volume arbitraire.

Il serait aisé de multiplier sans fin ces exemples, par lesquels on voit ce que signifie la condition de *petitesse* imposée au domaine T.

Cherchons maintenant des théorèmes plus généraux et voyons qu'une condition suffisante est que *le volume du domaine* T *ne dépasse pas une* *certaine limite*. Calculons λ par une méthode d'approximations successives. Soit

$$\lambda = \lambda_0 + L\lambda_1 + L^2\lambda_2 + \ldots + L^i\lambda_i + \ldots.$$

Partons de $\lambda_0 = 1$. Il vient

$$\Delta\lambda_i + \lambda_{i-1} = 0,$$

pour les valeurs entières de l'indice i depuis 1 jusqu'à l'infini. Soit $d\tau$ un élément d'un volume T_0 un peu plus grand que T. Appelons

x', y', z' les coordonnées du centre de gravité de $d\tau$;
λ'_i la valeur de λ_i en (x', y', z');
r la distance du point courant (x, y, z) au point (x', y', z').

On peut prendre

$$\lambda_i = \frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{\lambda'_{i-1}}{r}\, d\tau \qquad (i = 1, 2, 3, 4, \ldots).$$

Les λ_i peuvent être ainsi calculés de proche en proche; ils sont tous positifs, et ce sont les potentiels newtoniens de certaines distributions continues de matière attirante à l'intérieur du domaine T_0. On peut assigner un nombre positif g tel que

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{d\tau}{r} < g$$

en tout point de T_0. On a alors

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_1 < g, \qquad \lambda_2 < g^2, \qquad \ldots, \qquad \lambda_i < g^i, \qquad \ldots.$$

Donc, la série

$$\Sigma\lambda_i L^i$$

est absolument et uniformément convergente dans T_0 si Lg est inférieur à 1. Dans ce cas, comme chacun de ses termes est une fonction continue de (x, y, z), sa somme λ est aussi une fonction continue des mêmes variables. On peut donc former l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{L\lambda'}{r}\, d\tau,$$

l'accent désignant la substitution des variables (x', y', z') aux variables (x, y, z). Écrivons

$$S_{n+1} = \lambda_0 + L\lambda_1 + \ldots + L_n \lambda^n,$$
$$R_{n+1} = L^{n+1}\lambda_{n+1} + \ldots,$$
$$\lambda = S_{n+1} + R_{n+1}.$$

La différence bien déterminée

$$\lambda - \frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{L\lambda'}{r}\,d\tau$$

devient

$$\lambda_0 + R_{n+2} - \frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{LR'_{n+1}}{r}\,d\tau$$

si l'on tient compte de la définition des λ_i. Or, on peut choisir n assez grand pour que, ε étant un nombre positif donné à l'avance aussi petit qu'on veut, on ait, quels que soient (x, y, z), les inégalités simultanées

$$R_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad R_{n+2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cela entraîne

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{LR'_{n+1}}{r}\,d\tau < Lg\,\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où

$$\left|\lambda - \lambda_0 - \frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{L\lambda'}{r}\,d\tau\right| < \varepsilon.$$

Mais le premier membre de cette inégalité est une quantité bien déterminée. On a donc

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{L\lambda'}{r}\,d\tau.$$

Il résulte de là, d'après les propriétés bien connues des potentiels newtoniens, l'existence et la continuité des dérivées de tous les ordres de λ, ainsi que la relation

$$\Delta\lambda + L\lambda = 0 \qquad \text{dans } T_0.$$

Nous avons donc réussi à calculer λ. On sait la conclusion qui en découle.

Calculons g. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions intégrables ainsi que leurs carrés, si α et β sont deux paramètres réels, on a

$$\int_{(T_0)} (\alpha f_1 + \beta f_2)^2 d\tau > 0,$$

quels que soient (α, β), c'est-à-dire

$$\alpha^2 \int_{(T_0)} f_1^2 d\tau + 2\alpha\beta \int_{(T_0)} f_1 f_2 d\tau + \beta^2 \int_{(T_0)} f_2^2 d\tau > 0.$$

En appliquant à ce trinome en (α, β) la règle élémentaire relative au discriminant d'une forme quadratique binaire définie et positive, on trouve

$$\left[\int_{(T_0)} f_1 f_2 d\tau\right]^2 < \int_{(T_0)} f_1^2 d\tau \int_{(T_0)} f_2^2 d\tau.$$

Il est à remarquer que cette inégalité, dite *inégalité de Schwarz*, n'est qu'une généralisation de l'inégalité bien simple

$$(\Sigma ab)^2 < \Sigma a^2 \Sigma b^2$$

qu'on déduit sans peine de l'identité de Lagrange. Nous en ferons souvent usage. Dès à présent, nous voyons que

$$\frac{1}{16\pi^2}\left[\int_{(T_0)} \frac{d\tau}{r}\right]^2 < \frac{1}{16\pi^2}\int_{(T_0)} \frac{d\tau}{r^2} \int_{(T_0)} d\tau.$$

Or, on a

$$\int_{(T_0)} \frac{d\tau}{r^2} < 4\pi l,$$

l étant la plus grande dimension de T_0, c'est-à-dire la plus grande distance de deux points de ce domaine. On a donc

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{d\tau}{r} < \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{l}\sqrt{T_0},$$

en désignant aussi par la lettre T_0 le volume du domaine T_0. On peut donc poser

$$g = \frac{\sqrt{l T_0}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Finalement, si

$$T_0 < \frac{4\pi}{L^2 l},$$

le problème de Dirichlet généralisé ne comporte certainement qu'une seule solution pour tout domaine T *contenu dans le domaine* T_0.

J'arrêterai là l'étude des équations linéaires. On voit la multiplicité des cas que l'on peut distinguer et la marche uniforme qu'il faut suivre pour les traiter. L'équation doit toujours être ramenée, sans cesser d'appartenir à la classe des équations réductibles, au type simple pour lequel le coefficient f est positif. Ces résultats ne sont pas bien nouveaux; sauf de légères modifications, ils sont dus, pour le fond, à M. Picard et, pour la forme, à M. Paraf. Mais je devais les exposer, parce que le raisonnement qui les démontre reparaîtra continuellement dans la suite.

13. Je finirai ce Chapitre par l'examen d'un cas simple relatif à l'équation non linéaire

$$\Delta V = f\left(x, y, z, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

plus générale que l'équation de Fourier.

Soient V_1 et V_2 deux intégrales de l'équation précédente remplissant les conditions de continuité fondamentales et prenant les mêmes valeurs sur S. Je considère leur différence

$$V = V_1 - V_2$$

et j'ai à voir sous quelles conditions cette différence V ne peut pas avoir, par exemple, de maximum positif.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M_0 de T en lequel V aurait un maximum positif. En ce point, les relations suivantes seraient vérifiées

$$V > 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \Delta V \leqq 0,$$

comme nous l'avons déjà vu (n° 11). D'ailleurs, on aurait aussi en M_0

$$\Delta V = f\left(x, y, z, V_1, \frac{\partial V_1}{\partial x}, \frac{\partial V_1}{\partial y}, \frac{\partial V_1}{\partial z}\right) - f\left(x, y, z, V_2, \frac{\partial V_2}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial y}, \frac{\partial V_2}{\partial z}\right).$$

Posons

$$u = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial V}{\partial z}$$

et supposons que les dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial w}, \quad \frac{\partial f}{\partial V}$$

existent et soient continues, comme f, pour toutes les valeurs de (x, y, z, V, u, v, w). Appelons

$$U, \quad \xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

des quantités respectivement comprises entre

$$V_1, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

et

$$V_2, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial z}$$

pour

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0.$$

On a, par la formule des accroissements finis,

$$\begin{aligned} \Delta V = {} & \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u}(x, y, z, U, \xi, \eta, \zeta) + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial v}(x, y, z, U, \xi, \eta, \zeta) \\ & + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial w}(x, y, z, U, \xi, \eta, \zeta) + V \frac{\partial f}{\partial V}(x, y, z, U, \xi, \eta, \zeta) \end{aligned}$$

pour

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0.$$

Un raisonnement déjà fait (n° 11) montre encore ici l'impossibilité d'un maximum positif ou d'un minimum négatif de V en tout point M_0 de T, si l'on a, pour toutes les valeurs admissibles de (x, y, z, V, u, v, w), l'inégalité

$$\frac{\partial f}{\partial V} > 0.$$

Donc le problème de Dirichlet généralisé comporte au plus une solution si la fonction f est croissante avec V.

Un changement bien simple de la fonction inconnue permettrait de pousser plus loin la discussion, toujours par les mêmes procédés. Mais je m'en tiendrai à ce cas. C'est, en effet, précisément celui que l'on rencontre dans la théorie de la chaleur.

II. — L'équation linéaire réductible. — Établissement de quelques lemmes. — Théorème de Harnack généralisé. — Réduction du problème à une forme simple.

14. L'équation aux dérivées partielles du second ordre que j'ai nommée *l'équation linéaire réductible* est de la forme

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = fV + \varphi,$$

a, b, c étant liés à une certaine fonction uniforme $\mu(x, y, z)$ par les relations

$$a = \frac{\partial \mu}{\partial x}, \qquad b = \frac{\partial \mu}{\partial y}, \qquad c = \frac{\partial \mu}{\partial z}.$$

Ce type d'équation présente un intérêt spécial, au point de vue des applications parce qu'on le rencontre constamment en Physique, au point de vue de l'Analyse parce qu'il peut être ramené à une forme canonique très simple qui le caractérise.

Sous quelles conditions une intégrale continue de l'équation précédente est-elle déterminée sans ambiguïté par les valeurs qu'elle prend sur une surface fermée? Il suffit que la fonction donnée f reste toujours positive à l'intérieur du domaine envisagé. Nous supposerons dorénavant, comme nous en avons le droit, cette circonstance réalisée, au besoin par un calcul préalable (Chap. I).

Le problème de Dirichlet généralisé ne peut pas recevoir deux solutions distinctes : c'est entendu, c'est du moins le cas où nous nous plaçons. Mais cette unique solution possible existe-t-elle effectivement toujours? C'est à quoi nous allons répondre par un *théorème d'existence*. Ici va nous servir cette *méthode du balayage*, donnée par M. Poincaré pour l'équation de Laplace, mais dont je veux montrer la généralité.

La méthode du balayage fut exposée pour la première fois par M. Poincaré dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de* *l'Académie des Sciences* (¹) : elle ne s'appliquait alors qu'à la résolution du problème de l'équilibre électrique sur un conducteur isolé dans l'espace. Un peu plus tard, M. Poincaré le mit sous une forme qui lui permit de traiter complètement le problème de Dirichlet (²). Puis M. Paraf (³) indiqua les modifications importantes que demandait l'emploi de la même méthode dans le plan. Voyons maintenant ce que je me suis proposé de faire.

Le principal avantage signalé par M. Poincaré dans sa nouvelle méthode est qu'elle fournit une démonstration du principe de Dirichlet directement valable pour tous les cas. Suivant la même voie, je montrerai qu'une certaine transformation dans le point de départ du raisonnement confère à la méthode un caractère plus général encore : plus n'est besoin de faire appel aux propriétés trop particulières des potentiels newtonien ou logarithmique, aucune différence ne sépare les cas de l'espace et du plan : le principe de Dirichlet simple et le principe de Dirichlet généralisé s'établissent concurremment. J'ajoute que, ayant réduit la méthode du balayage à ce qu'elle a d'essentiel et de fondamental, celle-ci se trouvera toute prête à recevoir les généralisations que nous lui ferons subir, pour des problèmes très différents de ceux qui nous occupent en ce moment, dans la troisième Partie de ce Mémoire. Tels sont les motifs qui me portent à publier mes recherches, bien qu'elles ne procurent aucun résultat positif nouveau.

15. Je suppose connus les éléments de la théorie des fonctions harmoniques et de la théorie des fonctions de Green. Je rappelle seulement les énoncés de quelques théorèmes devenus classiques : on trouvera les démonstrations dans tous les Traités (⁴).

(¹) H. Poincaré, *Sur le problème de la distribution électrique* (*Comptes rendus*, 1887).

(²) H. Poincaré, *Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique* (*American Journal*, t. XII; 1890). — *Voir* aussi : *Théorie du potentiel newtonien*. Paris, Carré; 1897.

(³) A. Paraf, *Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale*, Chapitre I (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1892). — *Voir* aussi : E. Picard, *Traité d'Analyse*, Tome II, Chapitre IV.

(⁴) *Voir* par exemple : E. Picard, *Traité d'Analyse*, Tomes I et II. — H. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*.

Il est facile de former la fonction de Green relative à une sphère Σ et à un point situé à l'intérieur de celle-ci. Soient

R le rayon de la sphère;
(x', y', z') les coordonnées courantes;
(x, y, z) celles du pôle;
(x_1, y_1, z_1) celles du point conjugué harmonique principal du pôle par rapport à la sphère;
ρ la distance du centre au pôle;
r et r' les distances respectives du point courant au pôle et à son conjugué.

On a

$$G = \frac{1}{r} - \frac{R}{\rho r'},$$

G étant la fonction de Green : c'est une fonction de x, y, z, x', y', z'.

Si l'on appelle $d\sigma$ un élément de la surface de la sphère Σ, et (x', y', z') les coordonnées du centre de gravité de $d\sigma$, la fonction

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R} \int_{(\Sigma)} \frac{(R^2 - \rho^2)\Phi}{r^3}\, d\sigma,$$

ou bien

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma)} \Phi \frac{dG}{dn_i}\, d\sigma,$$

en désignant par $\frac{dG}{dn_i}$ la dérivée de G par rapport à (x', y', z'), suivant la normale intérieure à Σ, est la fonction harmonique qui prend sur Σ les valeurs Φ : le problème de Dirichlet est ainsi résolu pour le cas de la sphère [1].

On déduit de là sans peine qu'une fonction harmonique dans un domaine ne peut avoir ni maximum ni minimum dans ce domaine, et que c'est, par conséquent, sur la frontière qu'elle atteint sa plus grande et sa plus petite valeur.

---

[1] E. Picard, *Traité d'Analyse*, Tome I, Chapitre VI, § II. — H. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*, Chapitre V.

Considérons encore le problème (1)

$$\left|\begin{array}{l}\Delta V + \varphi = 0,\\ V_\Sigma = 0.\end{array}\right.$$

La solution est, en appelant Θ le volume limité par Σ,

$$V = \frac{1}{4\pi}\int_\Theta \varphi(x', y', z')\, G(x, y, z, x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz'.$$

L'inégalité

$$|\varphi| < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$|V| < \alpha\frac{R^2}{6}.$$

La fonction V a des dérivées des deux premiers ordres et remplit toutes les conditions prescrites, pourvu que la fonction donnée φ soit continue dans Θ et sur Σ et possède des dérivées partielles du premier ordre finies et continues dans tout domaine Θ' intérieur à Θ.

Soit enfin une série de fonctions V_i harmoniques dans un domaine de forme quelconque. Les propositions que je viens de rappeler permettent de démontrer le double théorème suivant :

1° ..... *Si la série* V_i *est uniformément convergente dans le domaine envisagé, elle a pour somme une fonction harmonique dans ce même domaine.*

2° ..... *Si les fonctions* V_i *sont toutes positives dans le domaine envisagé et si la série qu'elles forment est convergente en un point de ce domaine, ladite série est uniformément convergente dans tout domaine intérieur au domaine en question.*

On donne généralement à cette double proposition le nom de *Théorème de Harnack* (2).

16. On connaît les *fonctions sphériques* ou *fonctions de Laplace* désignées d'ordinaire par la notation Y_n. M. Picard (3) a montré qu'étant

(1) *Voir* le Mémoire déjà cité de M. Paraf, Chap. II.
(2) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. II, § 1.
(3) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, Chap. IX, § 4.

donnée une fonction continue quelconque des angles θ et ψ, en même temps qu'un nombre positif ε si petit qu'il soit, on peut toujours trouver une suite limitée de fonctions sphériques

$$Y_0, \quad Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_p$$

d'ordres respectifs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p,$$

telles que la somme

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_p$$

représente la fonction considérée à moins de ε près.

Appelons $\Phi(\theta, \psi)$ une fonction continue quelconque définie sur une sphère. Soit

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \ldots, \quad \varepsilon_i, \quad \ldots$$

une suite de nombres positifs décroissants ayant zéro pour limite et formant les termes successifs d'une série convergente.

Soit

$$S_i = Y_0^{(i)} + Y_1^{(i)} + \ldots + Y_{p_i}^{(i)},$$

une somme de fonctions sphériques telle que

$$|\Phi - S_i| < \varepsilon_i.$$

La considération des sommes S_i va nous permettre de résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace compris entre deux sphères concentriques de rayons R et R' $(R' < R)$.

Remarquons d'abord que l'on peut écrire

$$\Phi = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots + (S_{i+1} - S_i) + \ldots,$$

et que Φ se trouve ainsi développé en série absolument et uniformément convergente dont chaque terme est une somme de fonctions sphériques. On a

$$|S_{i+1} - S_i| < \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} < 2\varepsilon_i$$

évidemment.

Soient Σ et Σ' les deux sphères concentriques, R et R' leurs rayons, (ρ, θ, ψ) les coordonnées polaires d'un point de la couche sphérique

$$R' < \rho < R.$$

Nous voulons trouver une fonction $V(\rho, \theta, \psi)$ harmonique dans l'espace Θ compris entre les sphères, se réduisant sur Σ et Σ' à deux fonctions continues de θ et ψ respectivement données Φ et Φ'. Supposons d'abord que l'on ait

$$\Phi = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_p$$

et

$$\Phi' = Y'_0 + Y'_1 + Y'_2 + \ldots + Y'_{p'}.$$

La fonction

$$\frac{\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{1}{R'}}{\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R'}} = \xi_0$$

est harmonique dans Θ et se réduit à 1 sur Σ et à 0 sur Σ'.

De même

$$\frac{\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{1}{R}}{\dfrac{1}{R'} - \dfrac{1}{R}} = \xi'_0$$

est harmonique et se réduit à 1 sur Σ' et à 0 sur Σ. On voit encore que les fonctions

$$\frac{\left(\dfrac{R}{\rho}\right)^{m+1} - \left(\dfrac{\rho}{R}\right)^m}{\left(\dfrac{R}{R'}\right)^{m+1} - \left(\dfrac{R'}{R}\right)^m} Y'_m = \xi'_m Y'_m$$

et

$$\frac{\left(\dfrac{R'}{\rho}\right)^{m+1} - \left(\dfrac{\rho}{R'}\right)^m}{\left(\dfrac{R'}{R}\right)^{m+1} - \left(\dfrac{R}{R'}\right)^m} Y_m = \xi_m Y_m$$

sont harmoniques et se réduisent la première à 0 sur Σ et à Y'_m sur Σ', la seconde à Y_m sur Σ et à 0 sur Σ'.

L'expression

$$\begin{aligned} V = {} & \xi_0 Y_0 + \xi_1 Y_1 + \ldots + \xi_p Y_p \\ & + \xi'_0 Y'_0 + \xi'_1 Y'_1 + \ldots + \xi'_{p'} Y'_{p'} \end{aligned}$$

donne dans ce cas la solution cherchée : la vérification ne soulève aucune difficulté.

Cela posé, si Φ et Φ' sont deux fonctions continues quelconques, nous savons que l'on peut toujours écrire

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_i + \ldots,$$
$$\Phi' = \Phi'_1 + \Phi'_2 + \ldots + \Phi'_i + \ldots,$$

les séries étant absolument et uniformément convergentes. Chaque terme (Φ_i, Φ'_i) est de la forme que nous venons de considérer. Nous savons donc construire une fonction harmonique V_i qui se réduit à Φ_i sur Σ et à Φ'_i sur Σ'. Alors la série

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_i + \ldots,$$

en vertu du théorème de Harnack, est absolument et uniformément convergente et représente une fonction harmonique : sa somme V résout le problème de Dirichlet pour l'espace compris entre les deux sphères concentriques.

Cela fait, l'existence de la fonction de Green relative à une couche sphérique et à un pôle situé dans cette couche se trouve établie. Toutes les propositions rappelées au n° 15 concernant la sphère s'étendent ainsi d'elles-mêmes au nouveau cas que nous venons d'examiner.

Finalement on voit que des procédés élémentaires permettent d'achever la théorie des fonctions harmoniques et celle des fonctions de Green, lorsque le domaine envisagé est formé par l'espace compris soit à l'intérieur d'une sphère, soit entre deux sphères concentriques. Ce n'est que dans cette hypothèse que je supposerai dorénavant le principe de Dirichlet établi.

17. Arrivons au principal objet de ce Chapitre : *la résolution du problème de Dirichlet généralisé en ce qui concerne l'équation linéaire réductible.* Je me bornerai dans le présent paragraphe à la considération d'un domaine T limité par une sphère S de rayon R. Nous avons

$$\left|\begin{array}{l} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = fV + \varphi, \\ V_S = \Phi. \end{array}\right.$$

Posons

$$f_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f$$

et

$$\varphi_1 = e^{\frac{\mu}{2}}\,\varphi, \qquad \Phi_1 = e^{\frac{\mu}{2}}\,\Phi, \qquad V_1 = e^{\frac{\mu}{2}}\,V.$$

Il vient

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V_1 = f_1 V_1 + \varphi_1 \ldots \text{dans } T, \\ V_1 = \Phi_1 & \ldots \text{ sur } S, \end{array}\right.$$

et, pour connaître V, il suffit de calculer V_1.

Soit W la fonction harmonique qui prend sur S les valeurs Φ_1 : nous savons la déterminer. Posons

$$V_1 = W + U$$

avec

$$\left|\begin{array}{l} \Delta U = f_1 U + f_1 W + \varphi_1, \\ U_S = 0. \end{array}\right.$$

Tout revient à obtenir U. Finalement, changeons de notation de la façon suivante :

$$f_2 = f_1, \qquad \varphi_2 = f_1 W + \varphi_1$$

On a

$$\left|\begin{array}{l} \Delta U = f_2 U + \varphi_2, \\ U_S = 0. \end{array}\right.$$

On remarquera que la fonction connue φ_2 est continue dans toute la sphère, mais que ses dérivées partielles, comme celles de W, peuvent cesser d'être finies sur S : cela ne nous gênera pas.

Cherchons à construire une fonction U satisfaisant aux conditions de continuité fondamentales et vérifiant les relations

$$\left|\begin{array}{l} \Delta U = \xi f_2 U + \varphi_2, \\ U_S = 0, \end{array}\right.$$

ξ étant une constante quelconque. En faisant ensuite

$$\xi = 1,$$

nous aurons la fonction U qui résout le problème que nous nous étions posé tout d'abord.

Considérons U comme une fonction de ξ et cherchons à développer cette fonction en série entière, ordonnée suivant les puissances croissantes de ξ. Posons donc

$$U = U_0 + \xi U_1 + \xi^2 U_2 + \ldots + \xi^i U_i + \ldots.$$

Nous sommes ainsi conduits à employer *la méthode des approximations successives de M. Picard*

$$\begin{array}{ll}
\Delta U_0 = \varphi_2, & U_0^{(S)} = 0, \\
\Delta U_1 = f_2 U_0, & U_1^{(S)} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
\Delta U_i = f_2 U_{i-1}, & U_i^{(S)} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots
\end{array}$$

Sachant résoudre le problème de Dirichlet et former la fonction de Green pour le cas où le domaine T est une sphère, on sait faire les approximations précédentes. Il est donc possible de calculer de proche en proche les fonctions U_i. On a

$$U_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \varphi_2' \, G \, d\tau$$

et

$$U_i = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} f_2' U_{i-1}' \, G \, d\tau,$$

en appelant G la fonction de Green de pôle (x, y, z) et en posant

$$\begin{aligned}
d\tau &= dx'\,dy'\,dz', \\
\varphi_2' &= \varphi_2(x', y', z'), \\
f_2' &= f_2(x', y', z'), \\
U_{i-1}' &= U_{i-1}(x', y', z').
\end{aligned}$$

Soit

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} G\,d\tau < g, \qquad |f_2'| < L, \qquad |\varphi_2'| < \alpha.$$

On sait que l'on peut prendre

$$g = \frac{R^2}{6}.$$

On conclut d'un lemme rappelé plus haut (n° 15) :

$$|U_0| < g\alpha, \quad |U_1| < g^2\alpha L, \quad |U_2| < g^3\alpha L^2, \quad \ldots, \quad |U_i| < g^{i+1}\alpha L^i, \quad \ldots.$$

La série

$$U = \Sigma \xi^i U_i$$

est donc absolument et uniformément convergente dans T, si l'on a

$$|\xi| < \frac{1}{gL},$$

c'est-à-dire

$$|\xi| < \frac{6}{R^2 L}.$$

Dans ce cas, U est une fonction de (x, y, z) définie et continue en tout point de T : cette fonction s'annule sur S.

Cela posé, nous pouvons former l'intégrale [1]

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} (\varphi'_2 + \xi f'_2 U')\, G\, d\tau.$$

En vertu de la définition de G et des propriétés bien connues du potentiel newtonien d'un volume attirant, la somme

$$U + \frac{1}{4\pi}\int_{(T)} (\varphi'_2 + \xi f'_2 U')\, G\, d\tau$$

est une fonction de (x, y, z) continue et bien déterminée dans T.

Soit

$$\left|\begin{array}{l} S_n = U_0 + \xi U_1 + \xi^2 U_2 + \ldots + \xi^n U_n, \\ U = S_n + R_n. \end{array}\right.$$

Donnons-nous un nombre positif ε aussi petit qu'il nous plaira. On peut choisir n assez grand pour que les inégalités

$$|R_{n'}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|\xi^{n'} U_{n'}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

soient assurées, quels que soient (x, y, z), dès que n' est supérieur

---

(1) Les lettres accentuées désignent, dans tout ce qui suit, les mêmes fonctions que les lettres ordinaires correspondantes, mais après remplacement de (x, y, z) par (x', y', z').

à n. On a alors

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \xi^{n'+1} f'_2 U'_{n'} G\, d\tau\right| < |\xi| L g \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \xi f'_2 R'_{n'} G\, d\tau\right| < |\xi| L g \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3},$$

puisque

$$|\xi| L g < 1.$$

Choisissons alors un nombre n'_1 supérieur à n. On peut écrire

$$U + \frac{1}{4\pi}\int_{(T)} (\varphi'_2 + \xi f'_2 U')\, G\, d\tau = R_{n'_1} + \frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \xi^{n'_1+1} f'_2\, U'_{n'_1} G\, d\tau + \frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \xi f'_2 R'_{n'_1} G\, d\tau,$$

en vertu des formules qui servent à calculer de proche en proche les U_i. D'où

$$\left| U + \frac{1}{4\pi}\int_{(T)} (\varphi'_2 + \xi f'_2 U')\, G\, d\tau\right| < \varepsilon.$$

Or, le premier membre de cette inégalité est bien déterminé; le second est arbitraire; donc

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} (\varphi'_2 + \xi f'_2 U')\, G\, d\tau.$$

Reportons-nous enfin aux propositions énoncées au n° 15 et appliquons les résultats de la théorie du potentiel newtonien. On peut énoncer les théorèmes suivants :

1° Les fonctions φ'_2, f'_2, U' sont continues dans toute la sphère T. *Donc* U *a des dérivées partielles du premier ordre, finies et continues dans tout domaine* T′ *intérieur à* T.

2° Les fonctions φ'_2, f'_2, U' ont, par rapport à (x', y', z'), des dérivées partielles du premier ordre continues dans tout domaine T′ intérieur à T. *Donc* U *a, par rapport à* (x, y, z), *des dérivées partielles du second ordre, finies et continues dans les mêmes conditions.*

3° Si φ'_2 et f'_2 ont des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p, U en a jusqu'à l'ordre $p+1$. En particulier, *si* φ'_2 *et* f'_2 *ont des dérivées partielles de tous les ordres,* U *en a aussi.*

4° Enfin on a

$$\Delta U = \xi f_2 U + \varphi_2,$$

en vertu de *l'équation de Poisson*.

En résumé, la fonction U résout le problème proposé.

Nous n'avons rencontré qu'une seule condition de possibilité

$$|\xi|\,LR^2 < 6.$$

Si R est quelconque, elle exige que $|\xi|$ ne dépasse pas une certaine limite. Si ξ est quelconque, c'est au contraire R qui doit rester inférieur à une limite assignable. En particulier, faisons $\xi = 1$. *Le problème de Dirichlet généralisé est résolu pour le cas d'une sphère dont le rayon vérifie l'inégalité*

$$R < \sqrt{\frac{6}{L}}.$$

Ce résultat nous sera très utile dans la suite.

Considérons, pour terminer, le cas d'un domaine T de forme quelconque. Supposons que l'on sache construire la fonction de Green G relative à ce domaine et à un point intérieur. Tous les raisonnements précédents pourront alors être faits dans ce nouveau cas et la conclusion restera la même. Il est d'ailleurs facile de voir alors ce que serait le nombre g. On a

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} G\,d\tau < \frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \frac{d\tau}{r} < g.$$

Nous avons vu (n° 12) que l'on peut prendre

$$g = \frac{\sqrt{lT}}{2\sqrt{\pi}}.$$

La condition de possibilité serait donc

$$T < \frac{4\pi}{lL^2}.$$

Elle serait remplie pour tout domaine de *volume suffisamment petit*. Mais c'est un point sur lequel nous n'insisterons pas et dont nous ne nous servirons pas, parce que son emploi nous obligerait à supposer le problème de Dirichlet résolu pour un domaine quelconque.

Il y a toutefois un cas particulier qui nous intéresse : c'est celui où le domaine T est formé par l'espace compris entre deux sphères concentriques de rayons R et R' ($R' < R$). Dans ce cas, on sait construire la fonction de Green. On a, du reste,

$$l = 2R, \qquad T = \frac{4}{3}\pi(R^3 - R'^3).$$

Le problème de Dirichlet généralisé est donc aussi résolu pour tout domaine T *limité par deux sphères concentriques telles que*

$$E < \frac{1}{2}\frac{1}{L^2 R^3},$$

E *étant l'épaisseur de la couche sphérique envisagée.*

18. Une méthode d'extension progressive, due à M. Picard ([1]), et imitée de la célèbre méthode alternée de M. Schwarz, va nous permettre de passer, par un véritable prolongement analytique, du cas d'une petite sphère au cas d'une sphère de rayon arbitraire et du cas d'une couche sphérique mince au cas d'une couche sphérique d'épaisseur quelconque.

Commençons par envisager une sphère S. Soit Γ une sphère concentrique assez petite pour que le problème de Dirichlet généralisé puisse être résolu en ce qui la concerne au moyen des approximations successives définies dans le paragraphe précédent. Je veux montrer qu'il est toujours possible de tracer une sphère C concentrique à la sphère Γ, d'ailleurs extérieure à celle-ci, et telle que l'on sache résoudre le même problème pour l'espace intérieur à C. *Il est clair que, si cela a lieu, on arrivera de la sorte, après un nombre limité d'opérations, à posséder la solution du problème en question pour la sphère* S *elle-même.* J'aurai besoin, dans ce qui va suivre, de considérer une sphère γ concentrique à S, intérieure à Γ et limitant avec C une couche sphérique assez mince pour que les approximations successives du n° 17 y soient convergentes : la sphère C devra être choisie en conséquence, et c'est là la seule condition restrictive à laquelle elle soit soumise.

Un lemme est d'abord nécessaire. Soit V une fonction de (x, y, z) remplissant dans un domaine T les conditions de continuité fondamen-

---

([1]) É. Picard, *Journal de Mathématiques*, 1896.

tales et vérifiant en tout point de ce domaine l'équation

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = fV. \tag{1}$$

Nous supposons toujours la fonction f positive et non nulle.

Alors un raisonnement déjà fait au n° 11 montre que V ne peut avoir ni maximum positif ni minimum négatif à l'intérieur de T. D'où les théorèmes suivants, que je me contente d'énoncer :

1° *Le maximum du module de* V *dans* T *est le même que le maximum du module de* V *sur* S.

2° *Si toutes les valeurs prises par* V *sur* S *ont le même signe, toutes les valeurs de* V *dans* T *ont ce même signe.*

Cela posé, désignons par U une intégrale de notre équation prenant sur la frontière S de T la valeur 1 et admettons pour l'instant l'existence et la continuité d'une pareille intégrale. Il est manifeste que U ne pourra prendre en un point A situé à l'intérieur de T ni une valeur supérieure à 1 ni même la valeur 1. Si donc on pose

$$U_A = q,$$

U_A désignant la valeur de U en A, on aura

$$q < 1,$$

l'égalité étant exclue. Appelons maintenant h une limite supérieure du module de V sur S. On a

$$hU - V > 0,$$
$$hU + V > 0,$$

en vertu d'un lemme rappelé plus haut. D'où

$$|V_A| < hq.$$

Ainsi donc, *la valeur de* V *en un point* A *quelconque situé dans* T *est inférieure en module au produit du module maximum de* V *sur* S *par un nombre plus petit que* 1, *qui ne dépend pas de l'ensemble des valeurs prises par* V *sur* S, *mais qui varie avec le point* A *considéré.* Cela suppose essentiellement $f > 0$: nous savons (Chap. I) que l'on peut se borner à considérer ce cas.

Le théorème précédent est vrai quelle que soit la forme du domaine T. Mais il exige que l'on ait le droit d'affirmer l'existence de la fonction U. Nous nous bornerons donc à l'admettre pour le cas où S est une sphère ou l'ensemble de deux sphères concentriques limitant un volume assez petit pour que les approximations successives du n° 17 y soient applicables.

Cela posé, venons-en à notre méthode d'extension progressive et reprenons pour cela les notations définies plus haut.

Soit Φ la fonction périphérique donnée sur C. Nous savons par hypothèse former une intégrale continue de l'équation

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = fV + \varphi, \tag{2}$$

qui se réduise à 1 sur Γ. Appelons U_1 cette intégrale : U_1 prendra certaines valeurs sur γ. Formons alors l'intégrale continue de l'équation (2) qui prend sur C les valeurs Φ et sur γ les mêmes valeurs que U_1 : par hypothèse encore, nous pouvons le faire. Appelons V_1 cette intégrale : V_1 prendra certaines valeurs sur Γ et remplira de plus les conditions de continuité fondamentales dans l'espace compris entre γ et C. Considérons ensuite l'intégrale continue de (2) qui se réduit à V_1 sur Γ : soit U_2. Enfin continuons de la sorte indéfiniment. Nous obtiendrons deux suites de fonctions jouissant des propriétés de continuité fondamentales :

$$\begin{array}{llllll} U_1, & U_2, & U_3, & \ldots, & U_i, & \ldots, \\ V_1, & V_2, & V_3, & \ldots, & V_i, & \ldots, \end{array}$$

les premières U_i définies et continues dans Γ, les autres V_i définies et continues entre γ et C. On a d'ailleurs

$$\begin{array}{lll} U_1 = 1, & U_i = V_{i-1} & \text{sur } \Gamma, \\ V_1 = \Phi, & V_i = \Phi & \text{sur } C, \\ V_1 = U_1, & V_i = U_i & \text{sur } \gamma. \end{array}$$

Je vais démontrer la convergence des deux suites que nous venons de définir.

Soit q le plus grand des nombres inférieurs à 1 correspondant au lemme préliminaire :

1° Pour tous les points de γ considérée comme sphère intérieure à Γ;

2° Pour tous les points de Γ considérée comme sphère intérieure à la couche sphérique (γ, C).

On a certainement
$$q < 1.$$

Cela étant, posons
$$u_i = U_{i+1} - U_i, \qquad v_i = V_{i+1} - V_i.$$

Chacune des fonctions u_i, v_i vérifie l'équation (1). De plus, on a
$$\left| \begin{array}{ll} u_{i+1} = v_i & \text{sur } \Gamma, \\ v_i = 0 & \text{sur } C, \\ u_i = v_i & \text{sur } \gamma. \end{array} \right.$$

Appliquons alors notre lemme. Il vient
$$\text{max. de } |v_1| \text{ sur } \Gamma < q \times \text{max. de } |v_1| \text{ sur } \gamma,$$
et, par conséquent,
$$\text{max. de } |v_1| \text{ sur } \Gamma < q \times \text{max. de } |u_1| \text{ sur } \gamma.$$

Or
$$\text{max. de } |u_1| \text{ sur } \gamma < q \times \text{max. de } |u_1| \text{ sur } \Gamma.$$

Par suite
$$\text{max. de } |v_1| \text{ sur } \Gamma < q^2 \times \text{max. de } |u_1| \text{ sur } \Gamma.$$

Mais on a
$$\text{max. de } |v_1| \text{ sur } \Gamma = \text{max. de } |u_2| \text{ sur } \Gamma;$$
d'où
$$\text{max. de } |u_2| \text{ sur } \Gamma < q^2 \times \text{max. de } |u_1| \text{ sur } \Gamma.$$

On trouve ainsi de proche en proche
$$\text{max. de } |u_i| \text{ sur } \Gamma < q^{2(i-1)} \times \text{max. de } |u_1| \text{ sur } \Gamma.$$

Mais
$$\text{max. de } |u_i| \text{ dans } \Gamma = \text{max. de } |u_i| \text{ sur } \Gamma.$$

Donc
$$\text{max. de } |u_i| \text{ dans } \Gamma < q^{2(i-1)} \times \text{max. de } |u_1| \text{ sur } \Gamma.$$

Donc, on peut assigner un nombre positif N tel que
$$\text{max. de } |u_i| \text{ dans } \Gamma < q^{2(i-1)} N.$$

On conclut de là que la série

$$\Sigma u_i$$

est absolument et uniformément convergente dans Γ : elle définit dans ce champ une fonction continue u. *Nous verrons dans un instant que l'on peut conclure de là que u jouit des propriétés de continuité fondamentales et vérifie la relation*

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} = fu.$$

La convergence de la suite U_i vers une limite U est ainsi prouvée. On a

$$U = U_1 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_i + \ldots,$$

série absolument et uniformément convergente à la façon d'une progression géométrique décroissante de raison q^2. Enfin U possède dans Γ les propriétés de continuité fondamentales et satisfait dans le même domaine à l'équation

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = fU + \varphi.$$

Les relations

$$v_i = 0 \quad \text{sur } C,$$
$$v_i = u_i \quad \text{sur } \gamma$$

permettent d'établir de même l'existence d'une limite V pour la suite V_i. La fonction V possède entre γ et C les propriétés de continuité fondamentales et vérifie dans le même espace l'équation

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = fV + \varphi.$$

Enfin on a

$$U = V \quad \text{sur } \Gamma \text{ et } \gamma,$$
$$V = \Phi \quad \text{sur } C.$$

Tout cela est presque évident et nous allons en tirer la solution de notre problème.

Sur Γ et γ, U et V prennent les mêmes valeurs. De plus, ces fonctions possèdent toutes deux les propriétés de continuité fondamentales et vérifient la même équation (2). On a d'ailleurs

$$f > 0.$$

Donc,

$$U = V \quad \text{entre } \gamma \text{ et } \Gamma,$$

d'après les théorèmes du Chapitre I. Considérons alors une fonction W qui coïncide avec U dans γ, avec $U = V$ entre γ et Γ, avec V entre Γ et C. Cette fonction possède évidemment dans C les propriétés de continuité fondamentales et vérifie l'équation (2) en tout point du même domaine. Enfin W se réduit à Φ sur C. *Donc* W *résout le problème de Dirichlet généralisé en ce qui concerne la sphère* C.

On voit comment une méthode de prolongement analytique nous a permis de passer de la solution du problème de Dirichlet pour la sphère Γ à la même solution pour la sphère un peu plus grande C. Rien n'empêche de recommencer les mêmes calculs en faisant jouer cette fois à C le rôle de Γ et en prenant une sphère C' un peu plus grande que C. Il est visible qu'au bout d'un nombre fini d'opérations de cette espèce nous aurons la solution du problème de Dirichlet généralisé pour une sphère S quelconque.

Si l'on supposait le principe de Dirichlet préalablement établi dans toute sa généralité, on pourrait employer la méthode précédente d'extension progressive pour démontrer le principe de Dirichlet généralisé au sujet d'un domaine quelconque. Je ne le ferai pas. Mais il faut cependant remarquer que nos hypothèses fondamentales et les lemmes rappelés aux nos 16 et 17 nous autorisent à regarder comme résolu le problème de Dirichlet généralisé *pour l'espace compris entre deux sphères concentriques d'écartement arbitraire*.

Toutefois, j'ai laissé de côté la démonstration d'un théorème que je vais maintenant établir sous le nom de *Théorème de Harnack généralisé*.

19. Considérons l'équation réductible, linéaire et homogène

$$\left|\begin{array}{l} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = fV, \\ a\,dx + b\,dy + c\,dz = d\mu. \end{array}\right.$$

Soient

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots, \quad V_i, \quad \ldots$$

une suite illimitée de fonctions possédant les propriétés de continuité fondamentales dans un domaine T limité par une surface fermée S et satisfaisant à l'équation précédente en tout point de ce même domaine. Appelons

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \Phi_3, \quad \ldots, \quad \Phi_i, \quad \ldots$$

les valeurs prises respectivement par ces fonctions sur le bord du domaine envisagé. Supposons enfin que la série

$$\Sigma\Phi_i$$

soit uniformément convergente. *Je dis alors que la série*

$$\Sigma V_i$$

sera, elle aussi, uniformément convergente, le champ de convergence étant T.

En effet, posons

$$\Phi_{i,j} = \Phi_i + \Phi_{i+1} + \ldots + \Phi_{i+j},$$
$$V_{i,j} = V_i + V_{i+1} + \ldots + V_{i+j}.$$

La fonction $V_{i,j}$ vérifiera, dans T, l'équation aux dérivées partielles et prendra, sur S, les valeurs $\Phi_{i,j}$. Mais, par hypothèse, si ε est un nombre positif donné à l'avance, quelque petit que soit ce nombre, on peut calculer une valeur i_0 de l'indice i assez grande pour que l'inégalité

$$i > i_0$$

entraîne l'inégalité

$$|\Phi_{i,j}| < \varepsilon,$$

quel que soit j. J'ajoute même que la détermination de i_0 pour ε donné ne dépend pas du point de la frontière S où l'on se place. Dans les mêmes conditions, on a

$$|V_{i,j}| < \varepsilon$$

en tout point de T, d'après un lemme vu plus haut; et la proposition annoncée se trouve ainsi démontrée. Posons

$$\Phi = \Sigma\Phi_i, \qquad V = \Sigma V_i.$$

La fonction V est continue dans le domaine T et se réduit à Φ sur S.

Étudions maintenant la série uniformément convergente

$$V = \Sigma V_i.$$

Je dis que sa somme V *possède dans* T *les propriétés de continuité fondamentales et satisfait à l'équation aux dérivées partielles.*

On se rappelle que nous avons fait appel à ce théorème dans le paragraphe précédent. La preuve en est bien simple.

Posons

$$V = e^{-\frac{\mu}{2}} U, \qquad V_i = e^{-\frac{\mu}{2}} U_i,$$

d'où

$$U = \Sigma U_i,$$

et la nouvelle série est uniformément convergente comme l'ancienne.

On a, d'ailleurs,

$$\left| \begin{array}{l} \Delta U_i = f_1 U_i, \\ U_i = \Phi_{1,i}, \end{array} \right.$$

si l'on écrit

$$\left| \begin{array}{l} f_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f, \\ \Phi_{1,i} = e^{\frac{\mu}{2}} \Phi_i. \end{array} \right.$$

Soit Ω une sphère quelconque tracée dans T. Désignons par W la fonction, harmonique dans Ω, qui prend sur Ω les mêmes valeurs que U et, d'une façon générale, par W_i la fonction, harmonique dans Ω, qui prend sur Ω les mêmes valeurs que U_i. La série

$$\Sigma U_i$$

est uniformément convergente sur Ω. Donc, en vertu des propriétés fondamentales des fonctions harmoniques et du théorème de Harnack rappelé au n° 15, la série

$$\Sigma W_i$$

est, elle aussi, uniformément convergente et a W pour somme. Cela étant, posons

$$U = W + w, \qquad U_i = W_i + w_i.$$

On a

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta w_i = f_1 w_i + f_1 W_i & \text{dans } \Omega, \\ w_i = 0 & \text{sur } \Omega, \end{array} \right.$$

d'où

$$w_i = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega)} (f'_1 w'_i + f'_1 W'_i)\, G\, d\tau,$$

G étant la fonction de Green relative à la sphère Ω et au point (x, y, z) intérieur à celle-ci et l'accent désignant la substitution à (x, y, z) de (x', y', z'), coordonnées du centre de gravité de $d\tau$. La convergence uniforme des séries

$$\Sigma W_i, \quad \Sigma w_i$$

et les relations

$$W = \Sigma W_i, \qquad w = \Sigma w_i$$

permettent alors d'écrire

$$w = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega)} (f'_1 w' + f'_1 W')\, G\, d\tau.$$

Une discussion toute semblable à celle du n° 17 fait enfin conclure de là que w jouit dans Ω des propriétés de continuité fondamentales et vérifie l'équation

$$\Delta w = f_1 (w + W).$$

Comme on a

$$U = W + w, \qquad \Delta W = 0,$$

on voit que

$$\Delta U = f_1 U \qquad \text{dans } \Omega,$$

les propriétés de continuité fondamentales étant assurées. D'où, en fin de compte, la conclusion annoncée pour V. Cette dernière conclusion est vraie de V à l'intérieur d'une sphère Ω quelconque : elle est donc valable pour tout le domaine T.

On peut encore donner une autre forme à la démonstration précédente. Soient

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots, \quad V_i, \quad \ldots$$

des fonctions continues formant une suite uniformément convergente dont la limite est une fonction V continue dans T. Il est supposé que chacune des fonctions V_i remplit les conditions de continuité fondamentales et que l'on a

$$\Delta V_i + a\frac{\partial V_i}{\partial x} + b\frac{\partial V_i}{\partial y} + c\frac{\partial V_i}{\partial z} = f V_i + \varphi.$$

Prenons la sphère Ω assez petite pour que les approximations successives directes du n° 17 y soient applicables. On peut alors déterminer une fonction continue V' vérifiant les relations

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V' + a\dfrac{\partial V'}{\partial x} + b\dfrac{\partial V'}{\partial y} + c\dfrac{\partial V'}{\partial z} = fV' + \varphi & \text{dans } \Omega, \\ V' = V & \text{sur } \Omega. \end{array}\right.$$

Par hypothèse, il est encore possible de fixer i assez grand pour que l'on ait, en tout point de T et, par suite, de Ω,

$$|V - V_i| < \frac{\varepsilon}{2},$$

quelque petit que soit ε. On a alors

$$|V' - V_i| < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$|V' - V| < \varepsilon.$$

Or les deux fonctions V et V' sont bien déterminées. Par conséquent l'inégalité que nous venons d'écrire signifie

$$V \equiv V'.$$

Donc V, comme V' qui lui est identique, possède les propriétés de continuité fondamentales et vérifie l'équation aux dérivées partielles. Cela a lieu dans Ω, qui est quelconque, et par suite en tout point du domaine T.

Je démontrerai encore un théorème appartenant au même ordre de questions : nous en verrons plus loin l'utilité.

Considérons toujours le domaine T limité par la surface fermée S. Soit une série

$$\Sigma V_i$$

dont chaque terme est une fonction jouissant dans T des propriétés de continuité fondamentales, vérifiant l'équation

$$\Delta V_i + a\frac{\partial V_i}{\partial x} + b\frac{\partial V_i}{\partial y} + c\frac{\partial V_i}{\partial z} = f V_i$$

et restant toujours positive. Supposons la série convergente en tout point de T, sa somme étant une fonction finie de (x, y, z). *Je dis alors que cette série est uniformément convergente dans tout domaine* T′ *contenu dans* T. En vertu d'un théorème précédent, sa somme est par conséquent une intégrale continue de l'équation aux dérivées partielles dans le même domaine.

En effet, posons comme plus haut

$$f_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f,$$

et soit

$$|f_1| < \mathrm{L}.$$

Il suffit évidemment d'établir le théorème annoncé pour le cas d'une sphère Ω quelconque située à l'intérieur de T. Nous pouvons même, sans inconvénient, faire l'hypothèse que le rayon R de cette sphère est inférieur à

$$\frac{\pi}{4\sqrt{\mathrm{L}}}.$$

Posons

$$\mathrm{V}_i = e^{-\frac{\mu}{2}}\mathrm{U}_i,$$

μ ayant la même signification que ci-dessus. On a

$$\Delta \mathrm{U}_i = f_1 \mathrm{U}_i.$$

Les inégalités

$$\mathrm{V}_i > 0, \qquad \mathrm{U}_i > 0$$

sont simultanées. De plus, les séries

$$\Sigma \mathrm{V}_i, \quad \Sigma \mathrm{U}_i$$

sont convergentes en même temps. Tout revient enfin à prouver notre théorème pour la seconde série.

Calculons des fonctions continues W_i par les formules suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta \mathrm{W}_i + \mathrm{L}\mathrm{W}_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathrm{W}_i = \mathrm{U}_i & \text{sur } \Omega. \end{array}\right.$$

Il faut employer, pour cela, la méthode d'approximations successives du n° 17. Il vient

$$\mathrm{W}_i = \mathrm{W}_i^{(0)} + \mathrm{L}\mathrm{W}_i^{(1)} + \mathrm{L}^2\mathrm{W}_i^{(2)} + \ldots + \mathrm{L}^p\mathrm{W}_i^{(p)} + \ldots,$$

d'où

$$\begin{array}{llll}
\text{dans } \Omega & \Delta W_i^{(0)} = 0, & W_i^{(0)} = U_i & \text{sur } \Omega, \\
\text{dans } \Omega & \Delta W_i^{(1)} + W_i^{(0)} = 0, & W_i^{(1)} = 0 & \text{sur } \Omega, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots & \cdots\cdots, \\
\text{dans } \Omega & \Delta W_i^{(p)} + W_i^{(p-1)} = 0, & W_i^{(p)} = 0 & \text{sur } \Omega, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

Ces approximations sont convergentes (n° 17) si l'on a

$$R < \sqrt{\frac{6}{L}},$$

ce qui a lieu ici. D'autre part, on a

$$W_i^{(0)} > 0, \qquad W_i^{(1)} > 0, \qquad \ldots, \qquad W_i^{(p)} > 0, \qquad \ldots,$$

d'où

$$W_i > 0.$$

Posons

$$\tau_i = W_i - U_i,$$

Il vient

$$(1) \qquad \left|\begin{array}{ll} \Delta\tau_i + L\tau_i + (L + f_1)U_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \tau_i = 0 & \text{sur } \Omega. \end{array}\right.$$

On a

$$L + f_1 > 0, \qquad U_i > 0.$$

Donc la méthode des approximations successives, applicable au calcul de τ_i, montre que l'on a

$$\tau_i > 0.$$

On est d'ailleurs assuré que ce procédé de calcul direct pour obtenir τ_i donne bien la même fonction que celle définie par l'égalité

$$\tau_i = W_i - U_i,$$

car il n'y a certainement (n° 12) qu'une seule fonction remplissant les conditions (1) si le rayon de Ω est inférieur à $\frac{\pi}{\sqrt{L}}$, ce qui est vrai ici. On a donc

$$U_i < W_i.$$

Nous sommes ramenés ainsi, en fin de compte, à démontrer la convergence uniforme de la série

$$\Sigma W_i$$

dans une sphère Ω' quelconque intérieure à Ω. Si nous y parvenons, le théorème que nous avons en vue sera établi.

Occupons-nous désormais de la série ΣW_i. Soient

x, y, z les coordonnées d'un point fixe situé à l'intérieur de Ω';
x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque situé dans Ω;
r la distance qui sépare (x, y, z) de (x', y', z').

La fonction

$$\frac{\cos r\sqrt{L}}{r}$$

vérifie l'équation

$$\Delta W + LW = 0$$

en tout point (x', y', z') distinct de (x, y, z). Cette fonction est d'ailleurs positive dans Ω si l'on a

$$2R\sqrt{L} < \frac{\pi}{2},$$

ce qui a lieu ici. Définissons enfin une fonction continue Γ par les relations

$$\Delta\Gamma + L\Gamma = 0 \qquad \text{dans } \Omega,$$

$$\Gamma = \frac{\cos r\sqrt{L}}{r} \qquad \text{sur } \Omega.$$

Cela est possible, et l'on a

$$\Gamma > 0.$$

Posons

$$G = \frac{\cos r\sqrt{L}}{r} - \Gamma.$$

On vérifie aisément que G, qui dépend de (x, y, z, x', y', z'), est une fonction tout à fait semblable à la fonction de Green de pôle (x, y, z).

On admettra sans peine l'existence et la continuité de la dérivée $\frac{dG}{dn_i}$ prise en un point de Ω, par rapport à (x', y', z'), dans la direction de la normale à Ω vers le centre de cette sphère. Il serait, au reste, bien facile d'établir rigoureusement cette proposition : il suffirait pour cela d'employer un mode de raisonnement qui sera expliqué plus loin (n° 23) et sur lequel, à cause de cela, je n'insiste pas pour le moment.

Un théorème, indiqué par Kirchhoff comme une généralisation du théorème de Green ([1]), permet maintenant d'écrire

$$W_i(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega)} W_i(x', y', z')\frac{dG}{dn_i}\,d\omega,$$

$d\omega$ étant un élément de la surface de Ω dont (x', y', z') est le centre de gravité. Remarquons que l'on a

$$G = 0 \quad \text{sur } \Omega, \qquad G > 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

d'où

$$\frac{dG}{dn_i} > 0.$$

Cette dernière fonction admet une limite supérieure A tant que (x, y, z) reste à l'intérieur de Ω'. On a alors

$$W_i < \frac{1}{4\pi}A\int_{(\Omega)} W_i(x', y', z')\,d\omega.$$

Or la série

$$\Sigma\, W_i(x', y', z') = \Sigma\, U_i(x', y', z')$$

a tous ses termes positifs et est convergente par hypothèse. On peut, en outre, assigner un nombre B tel que

$$W_1(x', y', z') + W_2(x', y', z') + \ldots + W_n(x', y', z') < B,$$

quel que soit n. On a, dans ces conditions,

$$\int_{(\Omega)} W_1(x', y', z')\,d\omega + \ldots + \int_{(\Omega)} W_n(x', y', z')\,d\omega < B.4\pi R^2.$$

Donc la série à termes purement numériques

$$\sum\int_{(\Omega)} W_i(x', y', z')\,d\omega$$

([1]) H. Poincaré, *Théorie mathématique de la lumière*, t. II, p. 141.

est convergente. *On déduit immédiatement de là la convergence uniforme de la série* ΣW_i *dans* Ω'. Notre théorème est ainsi démontré.

20. Donnons, dès à présent, une application du théorème de Harnack généralisé.

Le problème que nous voulons résoudre est le suivant :

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = f V + \varphi & \text{dans } T, \\ V_S = \Phi & \text{sur } S. \end{array} \right.$$

Posons

$$V = U + W$$

avec

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta W + a\dfrac{\partial W}{\partial x} + b\dfrac{\partial W}{\partial y} + c\dfrac{\partial W}{\partial z} = f W + \varphi & \text{dans } T, \\ W_S = 0 & \text{sur } S \end{array} \right.$$

et

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta U + a\dfrac{\partial U}{\partial x} + b\dfrac{\partial U}{\partial y} + c\dfrac{\partial U}{\partial z} = f U & \text{dans } T, \\ U_S = \Phi & \text{sur } S. \end{array} \right.$$

Il est clair que tout revient à calculer séparément U et W.

La détermination de W peut se ramener à la détermination d'une autre fonction définie de la même façon que U. Soit, en effet, Ω une sphère contenant tout le domaine T à son intérieur. Les coefficients (a, b, c, f, φ) sont supposés définis dans cette sphère. Nous savons (n^{os} 17 et 18) construire une fonction W_1 vérifiant les relations

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta W_1 + a\dfrac{\partial W_1}{\partial x} + b\dfrac{\partial W_1}{\partial y} + c\dfrac{\partial W_1}{\partial z} = f W_1 + \varphi & \text{dans } \Omega, \\ W_1 = 0 & \text{sur } \Omega. \end{array} \right.$$

Posons alors

$$W_2 = W_1 - W.$$

On doit avoir

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta W_2 + a\dfrac{\partial W_2}{\partial x} + b\dfrac{\partial W_2}{\partial y} + c\dfrac{\partial W_2}{\partial z} = f W_2 & \text{dans } T, \\ W_2 = W_1 & \text{sur } S. \end{array} \right.$$

Nous voyons ainsi que tous les théorèmes d'existence que nous avons en vue seront démontrés dès que nous aurons établi la possibilité de former une fonction V remplissant les conditions suivantes :

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = f V & \text{dans T,} \\ V_S = \Phi & \text{sur S.} \end{array} \right.$$

Je me bornerai désormais à la considération de ce cas.

Considérons encore la sphère Ω. Soit $\Psi(x, y, z)$ une fonction continue de (x, y, z) prenant sur S les valeurs Φ et définie en tout point de Ω : quand on connaît Φ, on peut toujours, d'une infinité de manières, construire une pareille fonction Ψ. Un théorème, démontré par M. Picard [1] pour le cas de deux variables, mais évidemment général, va nous servir.

D'après ce théorème, la fonction Ψ continue dans Ω peut toujours être développée en série

$$\Psi = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_i + \ldots,$$

les conditions suivantes étant remplies :

1° Chaque terme P_i est un polynome entier en x, y, z;

2° Si

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \ldots, \quad \varepsilon_i, \quad \ldots,$$

sont des nombres positifs, décroissants, ayant zéro pour limite et tels que la série $\Sigma\varepsilon_i$ soit convergente, on a

$$|P_i| < \varepsilon_i$$

en tout point de Ω, en sorte que la série ΣP_i est absolument et uniformément convergente dans le même domaine.

La seule hypothèse exigée est la continuité de Ψ.

Cela posé, admettons que l'on sache construire des fonctions V_i satisfaisant aux équations

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta V_i + a\dfrac{\partial V_i}{\partial x} + b\dfrac{\partial V_i}{\partial y} + c\dfrac{\partial V_i}{\partial z} = f V_i & \text{dans T.} \\ V_i = P_i & \text{sur S.} \end{array} \right.$$

---

(1) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 262.

On aura manifestement

$$|V_i| < \varepsilon_i.$$

Donc la série

$$\Sigma V_i$$

sera absolument et uniformément convergente dans T. En vertu du théorème de Harnack généralisé, sa somme V vérifiera les relations

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = fV & \text{dans T,} \\ V_S = \Phi & \text{sur S.} \end{array}\right.$$

Il est aisé de conclure de ce qui précède que nous pouvons désormais nous contenter de déterminer une intégrale continue de l'équation linéaire réductible prenant sur S *les mêmes valeurs qu'un polynome* P *entier en* (x, y, z).

21. Dans le paragraphe précédent, nous avons dû supposer à un moment que les coefficients a, b, c, f, φ de notre équation étaient définis dans la sphère désignée par Ω et bientôt il nous sera utile de regarder les mêmes coefficients comme présentant dans tout l'espace les caractères énumérés au n° 9. Je vais montrer que le cas général se ramène à celui-là.

D'abord, si les conditions du n° 9 sont remplies dans une région R contenant le domaine T, comme les valeurs des coefficients dans T sont les seules qui nous intéressent, il est permis de concevoir que l'on change les définitions de a, b, c, f, φ de manière que les nouvelles fonctions coïncident avec les anciennes dans T et remplissent en outre les conditions prescrites dans tout l'espace. N'ayant en vue qu'un théorème d'existence, il importe peu que nous nous bornions à apercevoir la possibilité de cette opération. Cependant je vais montrer comment on peut l'effectuer.

Je me servirai pour cela de certains résultats connus relatifs au mouvement de la chaleur dans un espace indéfini [1].

On conçoit sans aucune difficulté la fonction $\mu(x, y, z)$, *prolongée à l'extérieur de* R, de manière à former une nouvelle fonction coïnci-

[1] H. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, Chap. IX, n° 89.

dant dans T avec la première et restant continue dans tout l'espace. Posons

$$M(x, y, z, t) = \frac{1}{8\sqrt{\pi^3 t^3}} \int \mu(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t}} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

ce qu'un changement des variables d'intégration conduit à écrire

$$M(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int \mu(x + 2\alpha\sqrt{t}, y + 2\beta\sqrt{t}, z + 2\gamma\sqrt{t}) e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)} d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

t étant un paramètre arbitraire et les intégrations s'étendant dans les deux cas à l'espace entier.

Regardons la première expression de M. On constate aisément que M est, dans tout l'espace, pour $t > 0$, une fonction de (x, y, z) continue ainsi que ses dérivées des divers ordres. Cela a lieu en particulier dans la sphère Ω considérée au n° 20.

Regardons maintenant la seconde expression de M et faisons tendre t vers zéro, le point (x, y, z) restant situé dans T ou sur S. On voit que

$$M, \quad \frac{\partial M}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}$$

tendent *uniformément* vers

$$\mu, \quad a, \quad b, \quad c, \quad \frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial b}{\partial y}, \quad \frac{\partial c}{\partial z}.$$

Quant aux dérivées troisièmes de M, elles tendent uniformément vers les dérivées secondes de (a, b, c), pourvu que le point (x, y, z) reste dans un domaine T′ intérieur à T.

Faisons la même opération avec f et φ. Les mêmes conclusions sont vraies, *mutatis mutandis*. Soient $F(x, y, z, t)$ et $\Phi(x, y, z, t)$ les fonctions ainsi créées. On peut évidemment supposer la fonction f prolongée *positive en tout point de l'espace :* il en est alors de même de F pour $t > 0$.

Cela posé, donnons à t la valeur positive t_i. Soient (M_i, F_i, Φ_i) ce que deviennent (M, F, Φ). Supposons que l'on sache résoudre le problème de Dirichlet généralisé pour l'équation

$$\Delta V + \frac{\partial M_i}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial M_i}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial M_i}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} = F_i V + \Phi_i.$$

Soit V_i la solution prenant sur S des valeurs données Ψ. Posons

$$V_i = e^{-\frac{M_i}{2}} U_i, \qquad W_i = U_i - U_{i+1}.$$

Il vient

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta U_i = H_i U_i + e^{\frac{M_i}{2}} \Phi_i & \text{dans T,} \\ U_i = e^{\frac{M_i}{2}} \Psi & \text{sur S,} \end{array} \right.$$

si l'on pose

$$H_i = \frac{1}{2} \Delta M_i + \frac{1}{4} \sum \left(\frac{\partial M_i}{\partial x} \right)^2 + F_i.$$

On a encore

$$\Delta W_i = H_i W_i + (H_i - H_{i+1}) U_{i+1} + e^{\frac{M_i}{2}} \Phi_i - e^{\frac{M_{i+1}}{2}} \Phi_{i+1}$$

dans T et

$$W_i = \left(e^{\frac{M_i}{2}} - e^{\frac{M_{i+1}}{2}} \right) \Psi$$

sur S. Écrivons

$$W_i = \tau_i + \theta_i$$

avec

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta \tau_i = H_i \tau_i \ldots & \Delta \theta_i = H_i \theta_i + (H_i - H_{i+1}) U_{i+1} + e^{\frac{M_i}{2}} \Phi_i - e^{\frac{M_{i+1}}{2}} \Phi_{i+1}; \\ \tau_i = W_i \ \ldots & \theta_i = 0; \end{array} \right.$$

les équations de la première ligne étant relatives aux points du domaine T et celles de la seconde ligne aux points de la surface S. Soit enfin

$$\tau_i = e^{\frac{M_i}{2}} \tau'_i, \qquad \theta_i = e^{\frac{M_i}{2}} \theta'_i.$$

On trouve

$$\Delta \tau'_i + \frac{\partial M_i}{\partial x} \frac{\partial \tau'_i}{\partial x} + \frac{\partial M_i}{\partial y} \frac{\partial \tau'_i}{\partial y} + \frac{\partial M_i}{\partial z} \frac{\partial \tau'_i}{\partial z} = F_i \tau'_i,$$

$$\begin{aligned} \Delta \theta'_i + \frac{\partial M_i}{\partial x} \frac{\partial \theta'_i}{\partial x} + \frac{\partial M_i}{\partial y} \frac{\partial \theta'_i}{\partial y} + \frac{\partial M_i}{\partial z} \frac{\partial \theta'_i}{\partial z} \\ = F_i \theta'_i + e^{-\frac{M_i}{2}} \left[(H_i - H_{i+1}) U_{i+1} + e^{\frac{M_i}{2}} \Phi_i - e^{\frac{M_{i+1}}{2}} \Phi_{i+1} \right] \end{aligned}$$

dans T et

$$\tau'_i = e^{-\frac{M_i}{2}} W_i, \qquad \theta'_i = 0$$

sur S.

Désignons par h une limite supérieure du module de la fonction donnée Ψ. On peut choisir les nombres décroissants et tendant vers zéro

$$t_1, \quad t_2, \quad t_3, \quad \ldots, \quad t_i, \quad \ldots,$$

de façon que l'on ait

$$\left| e^{\frac{M_i}{2}} - e^{\frac{M_{i+1}}{2}} \right| < \varepsilon_i,$$

le nombre positif ε_i étant le terme général d'une série convergente, puisque $e^{\frac{M}{2}}$ tend uniformément vers $e^{\frac{\mu}{2}}$ quand t tend vers zéro et quand le point (x, y, z) ne sort pas de T. Alors on a

$$|\tau'_i| < k\varepsilon_i h,$$

k étant une limite supérieure commune des quantités $e^{-\frac{M_i}{2}}$, car la fonction F_i est positive. Donc la série $\Sigma\tau'_i$ est absolument et uniformément convergente dans T.

Les expressions

$$H_i, \quad e^{-\frac{M_i}{2}}, \quad e^{\frac{M_i}{2}}\Phi_i$$

tendent uniformément vers

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f, \quad e^{-\frac{\mu}{2}}, \quad e^{\frac{\mu}{2}}\varphi.$$

D'autre part on peut assigner une limite inférieure α commune à toutes les quantités positives F_i et une limite supérieure β commune à toutes les quantités $|\Phi_i|$. Un raisonnement déjà fait (n° 11) montre alors que V_i ne peut prendre aucune valeur dont le module dépasse $h + \frac{\beta}{\alpha}$. On peut donc assigner aux quantités $|V_i|$ et $|U_i|$ des limites supérieures indépendantes de l'indice i. On conclut de là que l'on peut réaliser par un choix convenable des t_i, en même temps que l'inégalité relative à $|\tau'_i|$, celle-ci

$$\left| e^{\frac{M_i}{2}} \left[(H_i - H_{i+1}) U_{i+1} + e^{\frac{M_i}{2}} \Phi_i - e^{\frac{M_{i+1}}{2}} \Phi_{i+1} \right] \right| < \varepsilon_i.$$

Cela conduit à affirmer, toujours par le raisonnement du n° 11, que l'on a

$$|\theta'_i| < \frac{\varepsilon_i}{\alpha}.$$

La série $\Sigma\theta'_i$ est donc, elle aussi, absolument et uniformément convergente dans T.

La convergence absolue et uniforme des séries $\Sigma\tau'_i$ et $\Sigma\theta'_i$ entraîne celle des séries $\Sigma\tau_i$ et $\Sigma\theta_i$ puisque $e^{\frac{M_i}{2}}$ tend uniformément vers $e^{\frac{\mu}{2}}$. Alors la série ΣW_i est, elle aussi, absolument et uniformément convergente dans T. *Enfin on peut conclure de tout cela que* V_i *tend uniformément vers une limite* V *qui est une fonction continue dans* T *prenant sur* S *les valeurs* Ψ.

Cela posé, on a

$$V_i = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{M_i}{2}} \int_{(\Omega)} V'_i e^{\frac{M'_i}{2}} \frac{dG}{dn} d\omega - \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{M_i}{2}} \int_{(\Omega)} \left(H'_i e^{\frac{M'_i}{2}} V'_i + e^{\frac{M'_i}{2}} \Phi'_i \right) G \, d\tau,$$

en appelant Ω une sphère tracée dans T, $d\omega$ et $d\tau$ un élément de la surface et du volume de Ω, G la fonction de Green relative à Ω et au point (x, y, z) intérieur à cette sphère et en désignant par les lettres accentuées les mêmes fonctions que par les lettres ordinaires sauf le remplacement de (x, y, z) par les coordonnées (x', y', z') de $d\omega$ ou de $d\tau$.

Les diverses quantités qui figurent dans la formule précédente tendent uniformément vers leurs limites respectives. On peut donc écrire

$$V = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{\mu}{2}} \int_{(\Omega)} V' e^{\frac{\mu'}{2}} \frac{dG}{dn} d\omega - \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{\mu}{2}} \int_{(\Omega)} \left(H' e^{\frac{\mu'}{2}} V' + e^{\frac{\mu'}{2}} \varphi' \right) G \, d\tau,$$

en posant pour abréger

$$H' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a'}{\partial x'} + \frac{\partial b'}{\partial y'} + \frac{\partial c'}{\partial z'} \right) + \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{4} + f'.$$

Une discussion déjà faite plusieurs fois montre alors que V possède les propriétés de continuité fondamentales dans T. Si de plus on pose

$$V = e^{-\frac{\mu}{2}} U,$$

il vient

$$\Delta U = HU + e^{\frac{\mu}{2}}\varphi,$$

d'où

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = fV + \varphi$$

dans T. Le problème de Dirichlet généralisé est ainsi complètement résolu par la fonction V.

En conséquence, nous nous bornerons désormais à considérer le cas où les coefficients a, b, c, f, φ possèdent *dans tout l'espace* les propriétés énumérées au n° 9.

III. — La méthode du balayage. — Examen de quelques difficultés. Extension au cas de n variables.

22. M. Poincaré a montré [1], et c'est un point sur lequel je n'insisterai pas, que l'on pouvait toujours trouver un ensemble dénombrable de sphères Ω_i jouissant des deux propriétés suivantes :

1° Chacune des sphères Ω_i est tout entière intérieure à T.

2° Un point quelconque intérieur à T est intérieur à l'une au moins des sphères Ω_i.

La construction de ces sphères ne présente aucune difficulté, et l'on peut même supposer celles-ci aussi petites que l'on veut.

En vertu des hypothèses faites sur S, si M est un point de cette surface, il est toujours possible de tracer une sphère Σ_M tangente à S en M et tout entière extérieure à T. Soit Σ'_M une sphère concentrique à Σ_M contenant à son intérieur tout le domaine T. Il est clair que, lorsque le point M se meut d'une façon quelconque sur S, le rayon de Σ_M n'est pas astreint à descendre au-dessous d'une certaine limite et que, dans les mêmes conditions, le rayon de Σ'_M peut ne pas dépasser une autre limite également assignable. Nous pouvons donc tracer une sphère Ω assez grande pour contenir à son intérieur toutes les sphères Σ'_M et, par suite, tout le domaine T.

---

[1] H. Poincaré, *American Journal of Mathematics*, t. XII, 1890. *Voir* aussi : E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 94.

Cela posé, soit $P(x, y, z)$ le polynome donné dont la fonction cherchée V doit prendre les valeurs sur S. Posons

$$-\psi = \Delta P + a\frac{\partial P}{\partial x} + b\frac{\partial P}{\partial y} + c\frac{\partial P}{\partial z} - fP.$$

La fonction ψ est uniforme, finie et continue dans Ω ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres. Supposons en outre que ψ ne prenne dans Ω aucune valeur négative : nous généraliserons plus tard.

Construisons encore la fonction W_0 définie par les égalités

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta W_0 + a\dfrac{\partial W_0}{\partial x} + b\dfrac{\partial W_0}{\partial y} + c\dfrac{\partial W_0}{\partial z} = fW_0 - \psi & \text{dans } \Omega, \\ W_0 = 0 & \text{sur } \Omega. \end{array}\right.$$

Nous savons le faire (n^{os} 17 et 18).

Si W_0 prenait en quelque point de Ω une valeur négative, ce serait nécessairement à l'intérieur de cette sphère. Il y aurait un tel point en lequel W_0 atteindrait un minimum négatif, ce qui impliquerait

$$\Delta W_0 \geqq 0, \qquad a\frac{\partial W_0}{\partial x} = 0, \qquad b\frac{\partial W_0}{\partial y} = 0, \qquad c\frac{\partial W_0}{\partial z} = 0$$

et

$$fW_0 < 0, \qquad \psi \geqq 0.$$

Il y a impossibilité, car on en déduirait

$$\Delta W_0 + a\frac{\partial W_0}{\partial x} + b\frac{\partial W_0}{\partial y} + c\frac{\partial W_0}{\partial z} \geqq 0$$

et

$$fW_0 - \psi < 0,$$

d'où

$$\Delta W_0 + a\frac{\partial W_0}{\partial x} + b\frac{\partial W_0}{\partial y} + c\frac{\partial W_0}{\partial z} - (fW_0 - \psi) \neq 0,$$

contrairement à l'hypothèse. Donc

$$W_0 \geqq 0$$

dans Ω.

Posons enfin

$$\Theta = W_0 - P.$$

On a

$$\Delta\Theta + a\frac{\partial\Theta}{\partial x} + b\frac{\partial\Theta}{\partial y} + c\frac{\partial\Theta}{\partial z} = f\Theta$$

dans Ω, et les propriétés de continuité fondamentales sont assurées.

Cela étant, définissons les opérations auxquelles, suivant l'exemple de M. Poincaré, nous donnerons le nom de *balayages*.

Nous rangerons les sphères Ω_i dans l'ordre suivant :

$$\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \Omega_4,\ \Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \Omega_4,\ \Omega_5,\ \ldots,$$

de manière à considérer chacune d'elles une infinité de fois.

Prenons la sphère Ω_1. Déterminons une fonction U_1 par les relations suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U_1 + a\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + b\dfrac{\partial U_1}{\partial y} + c\dfrac{\partial U_1}{\partial z} = f U_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ U_1 = W_0 & \text{sur } \Omega_1. \end{array}\right.$$

Les n^{os} 17 et 18 nous ont appris à le faire. On a

$$U_1 > 0.$$

Posons

$$\tau_1 = W_0 - U_1.$$

Il vient

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta\tau_1 + a\dfrac{\partial\tau_1}{\partial x} + b\dfrac{\partial\tau_1}{\partial y} + c\dfrac{\partial\tau_1}{\partial z} = f\tau_1 - \psi & \text{dans } \Omega_1, \\ \tau_1 = 0 & \text{sur } \Omega_1. \end{array}\right.$$

Un raisonnement déjà fait plusieurs fois nous permet d'écrire

$$\tau_1 \geqq 0.$$

Concevons alors une fonction W_1 qui coïncide avec W_0 à l'extérieur de Ω_1 et avec U_1 à l'intérieur de Ω_1. On a

$$W_1 > 0, \qquad W_1 \leqq W_0,$$

en tout point de la région Ω.

La fonction W_1 est continue dans Ω, mais il n'en est pas de même de ses dérivées, pour lesquelles Ω_1 est une surface de discontinuité. Ces dérivées sont d'ailleurs continues à l'intérieur et à l'extérieur de Ω_1 ; il n'y a de difficulté que pour les points mêmes de Ω_1.

Soient $\frac{d}{dn_i}$ et $\frac{d}{dn_e}$ les symboles des dérivations effectuées en un point de Ω_1 suivant la normale à cette sphère respectivement vers l'intérieur et vers l'extérieur de celle-ci. Les quantités

$$\frac{dW_0}{dn_i}, \qquad \frac{dW_0}{dn_e}$$

existent évidemment et sont continues en tout point de Ω_1. On a, de plus,

$$\frac{dW_0}{dn_i} + \frac{dW_0}{dn_e} = 0.$$

Admettons provisoirement l'existence et la continuité de $\frac{dU_1}{dn_i}$; nous reviendrons tout à l'heure sur ce point.

On a évidemment

$$\frac{d\tau_1}{dn_i} \geqq 0$$

en tout point de Ω_1. Or

$$\frac{d\tau_1}{dn_i} = \frac{dW_0}{dn_i} - \frac{dU_1}{dn_i} = -\left(\frac{dW_0}{dn_e} + \frac{dU_1}{dn_i}\right) = -\left(\frac{dW_1}{dn_e} + \frac{dW_1}{dn_i}\right),$$

d'où

$$\frac{dW_1}{dn_e} + \frac{dW_1}{dn_i} \leqq 0.$$

Telle est l'équation qui définit les discontinuités éprouvées par les dérivées de W_1 quand on traverse Ω_1.

Prenons maintenant la sphère Ω_2. Une nouvelle opération, semblable à la précédente, nous donnera une nouvelle fonction W_2, qui se déduira de W_1 comme celle-ci de W_0.

Si Ω_2 est intérieure à Ω_1, on aura

$$W_2 \equiv W_1.$$

Si Ω_2 est extérieure à Ω_1, le calcul à faire pour obtenir W_2 sera identique à celui que nous avons fait pour obtenir W_1, et l'on aura encore

$$W_2 > 0, \qquad W_2 \leqq W_1, \qquad \frac{dW_2}{dn_i} + \frac{dW_2}{dn_e} \leqq 0,$$

la dernière inégalité ayant lieu en tout point de Ω_1 et en tout point de Ω_2. Reste à voir ce qui arrive si Ω_2 coupe Ω_1 ou la renferme à son intérieur.

Nous distinguerons alors deux régions dans Ω_2 : l'une (1) extérieure à Ω_1, l'autre (2) intérieure à Ω_1.

On a

$$\Delta W_1 + a\frac{\partial W_1}{\partial x} + b\frac{\partial W_1}{\partial y} + c\frac{\partial W_1}{\partial z} = f W_1 - \psi$$

en tout point de (1), et

$$\Delta W_1 + a\frac{\partial W_1}{\partial x} + b\frac{\partial W_1}{\partial y} + c\frac{\partial W_1}{\partial z} = f W_1$$

en tout point de (2). De plus, W_1 est finie et continue dans tout l'espace Ω. Enfin l'inégalité

$$\frac{dW_1}{dn_i} + \frac{dW_1}{dn_e} \leqq 0$$

est vérifiée en tout point situé sur Ω_1 et, en particulier, en tout point de la calotte sphérique appartenant à Ω_1 et située dans Ω_2. Construisons une fonction U_2 telle que

$$\begin{aligned} &\Delta U_2 + a\frac{\partial U_2}{\partial x} + b\frac{\partial U_2}{\partial y} + c\frac{\partial U_2}{\partial z} = f U_2 \qquad && \text{dans } \Omega_2, \\ &U_2 = W_1 && \text{sur } \Omega_2, \end{aligned}$$

et telle que, les propriétés de continuité fondamentales étant assurées, on ait

$$\frac{dU_2}{dn_i} + \frac{dU_2}{dn_e} = 0$$

en tous les points de Ω_1 qui sont intérieurs à Ω_2. On a

$$U_2 > 0.$$

Posons

$$\tau_2 = W_1 - U_2.$$

Il vient

$$\Delta\tau_2 + a\frac{\partial \tau_2}{\partial x} + b\frac{\partial \tau_2}{\partial y} + c\frac{\partial \tau_2}{\partial z} = f\tau_2 - \psi \qquad \text{dans (1)}$$

et

$$\Delta\tau_2 + a\frac{\partial \tau_2}{\partial x} + b\frac{\partial \tau_2}{\partial y} + c\frac{\partial \tau_2}{\partial z} = f\tau_2 \qquad \text{dans (2)}.$$

Enfin on a

$$\tau_2 = 0 \qquad \text{sur } \Omega_2$$

et

$$\frac{d\tau_2}{dn_i} + \frac{d\tau_2}{dn_e} \leqq 0,$$

en tout point de Ω_1 situé à l'intérieur de Ω_2.

Je veux montrer que τ_2 est positif ou nul. Soit

$$\tau_2 = e^{-\frac{\mu}{2}} \tau'_2.$$

Il suffit de montrer la même chose pour τ'_2.

On a

$$\begin{aligned} \Delta\tau'_2 &= f'\tau'_2 - e^{\frac{\mu}{2}}\psi && \text{dans (1)}, \\ \Delta\tau'_2 &= f'\tau'_2 && \text{dans (2)}, \\ \tau'_2 &= 0 && \text{sur } \quad \Omega_2, \end{aligned}$$

si l'on pose

$$f' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f.$$

Mais

$$\frac{d\mu}{dn_i} + \frac{d\mu}{dn_e} = 0$$

en tout point de Ω_1. Donc on a encore, en les mêmes points,

$$\frac{d\tau'_2}{dn_i} + \frac{d\tau'_2}{dn_e} \leqq 0.$$

Écrivons

$$\tau'_2 = \lambda \tau''_2,$$

λ étant une fonction que nous allons déterminer. Il vient

$$\lambda\,\Delta\tau''_2 + 2\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\tau''_2}{\partial x} + 2\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\tau''_2}{\partial y} + 2\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\tau''_2}{\partial z} + (\Delta\lambda - f'\lambda)\tau''_2 + e^{\frac{\mu}{2}}\psi = 0$$

dans (1) et

$$\lambda\,\Delta\tau''_2 + 2\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\tau''_2}{\partial x} + 2\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\tau''_2}{\partial y} + 2\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\tau''_2}{\partial z} + (\Delta\lambda - f'\lambda)\tau''_2 = 0$$

dans (2). En outre on a

$$\tau''_2 = 0$$

sur Ω_2, pourvu que λ soit différent de zéro, et

$$\lambda\left(\frac{d\tau_2''}{dn_i}+\frac{d\tau_2''}{dn_e}\right)+\tau_2''\left(\frac{d\lambda}{dn_i}+\frac{d\lambda}{dn_e}\right)\leqq 0$$

en tout point de Ω_1 situé dans Ω_2.

Si l'on parvient à déterminer une fonction λ jouissant des propriétés de continuité fondamentales dans (1) et dans (2) et telle que l'on ait

$$\begin{aligned} &\lambda > 0 && \text{dans } \Omega_2,\\ &\Delta\lambda - f'\lambda < 0 && \text{dans (1) et dans (2)},\\ &\frac{d\lambda}{dn_i}+\frac{d\lambda}{dn_e} < 0 && \text{sur la partie de } \Omega_1 \text{ située dans } \Omega_2, \end{aligned}$$

il est clair qu'on pourra écrire

$$\tau_2'' \geqq 0,$$

et que cela entraînera

$$\tau_2' \geqq 0.$$

En effet, dans ce cas, τ_2'' ne pourra avoir de minimum négatif ni dans (1) ni dans (2) en vertu d'un raisonnement déjà souvent employé. Il n'y en aura pas davantage sur Ω_2. Enfin, en tout point de la portion de Ω_1 intérieure à Ω_2, la présence d'un minimum négatif impliquerait pour le point où il aurait lieu les relations

$$\tau_2'' < 0, \qquad \frac{d\tau_2''}{dn_i}\geqq 0, \qquad \frac{d\tau_2''}{dn_e}\geqq 0,$$

qui, jointes aux relations

$$\lambda > 0, \qquad \frac{d\lambda}{dn_i}+\frac{d\lambda}{dn_e} < 0,$$

sont contradictoires à l'hypothèse

$$\lambda\left(\frac{d\tau_2''}{dn_i}+\frac{d\tau_2''}{dn_e}\right)+\tau_2''\left(\frac{d\lambda}{dn_i}+\frac{d\lambda}{dn_e}\right)\leqq 0.$$

On entend ici les mots *minimum négatif* dans le sens général de *limite inférieure négative atteinte.*

Pour pouvoir affirmer que τ_2'', et par suite τ_2, ne prend aucune valeur négative, il nous suffit donc de montrer qu'on peut calculer λ.

Or, posons

$$|f'| < L,$$

et définissons λ par les relations

$$\begin{array}{ll} \Delta\lambda + L\lambda = 0 & \text{dans (1) et dans (2),} \\ \lambda > 0 & \text{dans } \Omega_2, \\ \dfrac{d\lambda}{dn_i} + \dfrac{d\lambda}{dn_e} = -4\pi & \text{sur la portion de } \Omega_1 \text{ située dans } \Omega_2. \end{array}$$

Si cela est possible, nous aurons établi la conclusion que nous avons en vue.

Soient

x', y', z' les coordonnées d'un point de Ω_1;
x, y, z les coordonnées d'un point intérieur à Ω_2;
$d\omega_1$ un élément de Ω_1 ayant (x', y', z') pour centre de gravité;
r la distance de (x, y, z) à (x', y', z').

Considérons la fonction de (x, y, z) :

$$\lambda = \int_{(\Omega_1)} \frac{\cos r\sqrt{L}}{r} d\omega_1.$$

On sait (¹) que cette fonction est holomorphe et vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\lambda + L\lambda = 0$$

en tout point de l'espace, sauf sur Ω_1. Sur Ω_1, on a

$$\frac{d\lambda}{dn_i} + \frac{d\lambda}{dn_e} = -4\pi.$$

Enfin l'inégalité

$$\lambda > 0$$

est assurée en tout point de Ω_2, si, R étant une limite supérieure du rayon des Ω_i, on a

$$R < \frac{\pi}{8\sqrt{L}}.$$

(¹) H. Poincaré, *Théorie mathématique de la Lumière*, t. I, p. 105. La fonction considérée est tout à fait analogue au potentiel newtonien d'une surface attirante.

Nous pouvons toujours supposer que les sphères Ω_i ont été choisies assez petites pour que cette inégalité soit vérifiée pour chacune d'elles. Alors le calcul de λ est achevé.

Nous avons donc

$$\tau_2 \geqq 0,$$

d'où

$$U_2 \leqq W_1.$$

Concevons maintenant une fonction W_2 qui coïncide avec W_1 à l'extérieur de Ω_2 et avec U_2 à l'intérieur de cette sphère. On a

$$W_2 > 0, \qquad W_2 \leqq W_1.$$

Enfin la fonction W_2 est finie et continue à l'intérieur de la grande sphère Ω.

Admettons provisoirement, comme nous l'avons fait pour U_1, que la dérivée $\frac{dU_2}{dn_i}$ existe et est continue en tout point de Ω_2. On verrait alors, comme ci-dessus, que l'on a

$$\frac{dW_2}{dn_i} + \frac{dW_2}{dn_e} \leqq 0$$

sur Ω_2 et sur la portion de Ω_1 qui est située en dehors de Ω_2.

Il peut subsister quelques difficultés, en ce qui regarde cette relation, pour les points du cercle suivant lequel Ω_1 coupe Ω_2. Voici comment on lèvera ces difficultés. En un point de ce cercle C, désignons par $\frac{d}{dn_i}$ et $\frac{d}{dn_e}$ les dérivées suivant deux directions opposées tangentes à Ω_2 et normales à C. On a évidemment

$$\frac{dW_2}{dn_i} + \frac{dW_2}{dn_e} \leqq 0,$$

et cette nouvelle inégalité peut remplacer la précédente pour les points de C. On constate facilement du reste l'exactitude de cette inégalité par le procédé général qui a été indiqué plus haut.

Cela posé, déterminons, toujours de la même façon, des fonctions W_3 et W_4 qui jouissent de propriétés analogues aux précédentes. On doit, pour cela, vu l'ordre de succession assigné aux sphères Ω_i, considérer de nouveau Ω_1, puis Ω_2, et l'on a par conséquent à refaire des opérations identiques à celles qui ont donné naissance à W_2.

Quand on en arrive, aussitôt après, à calculer W_5, il peut se faire que Ω_3 coupe à la fois Ω_1 et Ω_2. Mais cela ne gêne en rien. On saura toujours trouver U_5. On posera encore

$$\tau_5 = W_4 - U_5,$$

et il faudra montrer que τ_5 ne prend aucune valeur négative. On y parviendra aisément en se servant d'une méthode toute semblable à celle des pages qui précèdent : ce qui joue le rôle de la fonction λ considérée accessoirement à propos de W_2 sera ici une nouvelle fonction λ donnée par la somme des deux intégrales

$$\int_{(\Omega_1)} \frac{\cos(r\sqrt{L})}{r}\, d\omega_1, \qquad \int_{(\Omega_2)} \frac{\cos(r\sqrt{L})}{r}\, d\omega_2.$$

Les hypothèses faites sur le rayon des sphères Ω_i suffiront encore pour assurer que λ reste positif dans Ω_3. Enfin, si $\frac{d\lambda}{dn_i}$ et $\frac{d\lambda}{dn_e}$ sont les dérivées de λ suivant deux directions opposées en un point de C, on aura

$$\frac{d\lambda}{dn_i} + \frac{d\lambda}{dn_e} < 0$$

en ce point et la présence du cercle singulier C ne modifiera donc en rien les raisonnements.

Nous nous trouvons maintenant avec la fonction W_5 dans les mêmes conditions que tout à l'heure avec la fonction W_2; nous pouvons en déduire une nouvelle fonction W_6. Les opérations qui donnent naissance à W_6 sont de même espèce que les précédentes et conduisent aux mêmes conclusions. *Ce sont ces opérations successives qui portent le nom de* BALAYAGES.

Balayons ainsi chaque sphère Ω_i à son tour, en prenant ces sphères l'une après l'autre dans l'ordre indiqué, de manière à balayer chacune d'elles une infinité de fois. Nous aurons toujours les mêmes opérations et les mêmes raisonnements à répéter.

On construit ainsi une série dénombrable de fonctions continues dans Ω :

$$W_0, \quad W_1, \quad W_2, \quad W_3, \quad \ldots, \quad W_i, \quad \ldots.$$

On a

$$W_i > 0, \qquad W_{i+1} \leqq W_i,$$

en tout point de Ω et pour toute valeur de l'indice i. *Donc la suite* W_i *est convergente*. Sa limite W est une fonction de (x, y, z) définie, uniforme et limitée en tout point de Ω. Proposons-nous d'étudier les propriétés de cette fonction W.

Considérons la sphère Ω_α. Supposons que cette sphère ait été balayée aux opérations numérotées :

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_i, \quad \ldots.$$

Ces balayages, portant sur Ω_α, sont certainement en nombre infini.

Soient les fonctions

$$W_{\alpha_1}, \quad W_{\alpha_2}, \quad W_{\alpha_3}, \quad \ldots, \quad W_{\alpha_i}, \quad \ldots$$

produites par les balayages successifs. La suite W_{α_i} est convergente et a W pour limite. On a

$$W_{\alpha_i} > 0, \qquad W_{\alpha_{i+1}} \leqq W_{\alpha_i},$$

en tout point de Ω_α. De plus, dans le même domaine,

$$\Delta W_{\alpha_i} + a\frac{\partial W_{\alpha_i}}{\partial x} + b\frac{\partial W_{\alpha_i}}{\partial y} + c\frac{\partial W_{\alpha_i}}{\partial z} = f W_{\alpha_i}.$$

La série

$$W_{\alpha_1} + (W_{\alpha_2} - W_{\alpha_1}) + (W_{\alpha_3} - W_{\alpha_2}) + \ldots + (W_{\alpha_{i+1}} - W_{\alpha_i}) + \ldots$$

est convergente et a W, fonction finie, pour somme. Enfin, chaque terme est négatif, sauf le premier, satisfait dans Ω_α aux conditions de continuité fondamentales et vérifie l'équation aux dérivées partielles. Alors, en vertu du théorème de Harnack généralisé, *la somme* W *de la série précédente possède dans* Ω_α *les propriétés de continuité fondamentales et est une intégrale de l'équation*

$$\Delta W + a\frac{\partial W}{\partial x} + b\frac{\partial W}{\partial y} + c\frac{\partial W}{\partial z} = f W,$$

dans le même domaine. Cela a lieu pour une sphère Ω_α quelconque; donc les balayages définis plus haut amènent à construire une intégrale continue W de l'équation linéaire réductible valable pour tout le domaine T.

Soit M un point de S. Envisageons les sphères Σ_M et Σ'_M; soit D_M l'espace compris entre elles. Prenons la fonction W_M définie par les relations :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta W_M + a\dfrac{\partial W_M}{\partial x} + b\dfrac{\partial W_M}{\partial y} + c\dfrac{\partial W_M}{\partial z} = f\,W_M & \text{dans } D_M \\ W_M = W_0 & \text{sur } \Sigma_M \text{ et } \Sigma'_M. \end{array}\right.$$

Sachant (n^{os} 17 et 18) résoudre le problème de Dirichlet généralisé pour l'espace compris entre deux sphères concentriques, nous savons calculer W_M. On a évidemment

$$W_0 \geqq W_K \geqq W_M,$$

d'où

$$W_0 \geqq W \geqq W_M,$$

en appelant W_K une quelconque des fonctions dues aux balayages. Ces inégalités ont lieu en tout point de D_M, on le verrait en refaisant les raisonnements qui montrent l'impossibilité d'un minimum négatif pour les différences $W_0 - W_K$ et $W_K - W_M$. Or, quand (x, y, z) tend vers M, W_0 et W_M tendent vers la valeur de W_0 en M. Il en est donc de même de W. *Donc* W *prend sur* S *le même ensemble de valeurs que* W_0.

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta W + a\dfrac{\partial W}{\partial x} + b\dfrac{\partial W}{\partial y} + c\dfrac{\partial W}{\partial z} = f\,W & \text{dans T,} \\ W_S = W_0 & \text{sur S.} \end{array}\right.$$

Posons

$$V = W - \Theta = W - W_0 + P,$$

Θ étant la fonction définie plus haut (p. 435). On a

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = f\,V & \text{dans T,} \\ V_S = P & \text{sur S,} \end{array}\right.$$

et les propriétés de continuité fondamentales sont assurées. *Le problème de Dirichlet généralisé est ainsi complètement résolu.*

Nous avons supposé

$$\psi \geqq 0.$$

Si ψ a un signe quelconque, voici comment on procédera : le polynome P étant donné, on peut diviser Ω en deux régions : l'une (1) où ψ est positif ou nul, l'autre (2) où ψ est négatif ou nul. Chacune de ces régions peut n'être pas connexe, mais il sera, en tout cas, possible d'écrire

$$\psi = \psi_1 - \psi_2,$$
$$P = P_1 - P_2,$$

avec

$$\psi_1 \geqq 0, \qquad \psi_2 \geqq 0,$$

dans Ω. On pourra alors, par la méthode du balayage, construire les fonctions V_1 et V_2 qui correspondent à ψ_1 et ψ_2 et qui prennent donc sur S les valeurs P_1 et P_2 respectivement. Soit

$$V = V_1 - V_2.$$

Ce sera la solution du problème de Dirichlet généralisé.

Il ne subsiste plus maintenant aucune restriction. *On remarquera que la méthode suivie dans tout ce Chapitre s'appliquerait sans modification notable, si les fonctions étudiées dépendaient seulement de deux variables x et y.*

23. Pour abréger les démonstrations précédentes, j'ai laissé de côté provisoirement un point sur lequel il me faut à présent revenir.

Envisageons la fonction U_1 qui prend sur Ω_1 (nº 22) les mêmes valeurs que W_0 et qui satisfait dans Ω_1 à l'équation

$$\Delta U_1 + a\frac{\partial U_1}{\partial x} + b\frac{\partial U_1}{\partial y} + c\frac{\partial U_1}{\partial z} = f U_1.$$

Il s'agit de prouver l'existence et la continuité des dérivées premières de U_1 sur Ω_1.

Changeons les coordonnées cartésiennes (x, y, z) pour des coordonnées polaires (ρ, θ, φ), le pôle étant au centre de Ω_1. Les valeurs W_0 de U_1 sur Ω_1 ont des dérivées du premier et du second ordre par rapport à θ et φ et ces dérivées sont continues; les mêmes propriétés appartiennent à U_1 à l'intérieur de Ω_1. Il est manifeste que l'on peut conclure de là la proposition suivante : *Les dérivées premières et secondes, par rapport à* θ *et* φ, *de la fonction* U_1 *supposée prolongée par* W_0 *à l'extérieur de* Ω_1 *restent continues quand on traverse cette sphère* Ω_1. Voyons ce qui arrive pour la dérivée normale de W_1.

Posons

$$U_1 = e^{-\frac{\mu}{2}} U'_1, \qquad W_0 = e^{-\frac{\mu}{2}} W'_0,$$

et

$$f' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f.$$

Il vient

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U'_1 = f' U'_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ U'_1 = W'_0 & \text{sur } \Omega_1 \end{array}\right.$$

et

$$\Delta W'_0 = f' W'_0 - e^{\frac{\mu}{2}} \psi,$$

à l'extérieur de Ω_1.

En coordonnées polaires, ces équations deviennent

$$\frac{\partial^2 U'_1}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial U'_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 U'_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial U'_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U'_1}{\partial \theta^2} = f' U'_1,$$

$$\frac{\partial^2 W'_0}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial W'_0}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 W'_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial W'_0}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 W'_0}{\partial \theta^2} = f' W'_0 - e^{\frac{\mu}{2}} \psi.$$

Si l'on se reporte à la définition de W_1 et si l'on pose

$$W_1 = e^{-\frac{\mu}{2}} W'_1,$$

on conclut de là que, les dérivées

$$\frac{\partial W'_1}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 W'_1}{\partial \varphi^2}, \quad \frac{\partial W'_1}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial^2 W'_1}{\partial \theta^2}$$

étant continues quand on traverse la sphère Ω_1, l'expression

$$\frac{\partial^2 W'_1}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial W'_1}{\partial \rho}$$

ne jouit pas de la même propriété; si R est le rayon de Ω_1 et si l'on fait tendre ρ vers R, *cette expression tend vers une limite déterminée qui* *est une fonction continue de* θ *et* φ; *la limite n'est pas la même suivant que* ρ *tend vers* R *par valeurs plus grandes ou plus petites que* R; *la différence entre les deux limites est égale à* $e^{\frac{\mu}{2}}\psi$ *en valeur absolue.*

Posons

$$W'_1 = \frac{1}{\rho} W''_1.$$

Les dérivées de W''_1 par rapport à θ et φ sont encore continues. Mais, cette fois, le théorème précédent signifie que $\frac{\partial^2 W''_1}{\partial \rho^2}$ subit un saut brusque quand on traverse Ω_1. Soit ρ_0 une valeur de ρ inférieure à R. On a

$$\frac{\partial W''_1}{\partial \rho} - \frac{\partial W''_1}{\partial \rho_0} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial^2 W''_1}{\partial \rho^2} d\rho.$$

On peut aisément conclure de là que $\frac{\partial W''_1}{\partial \rho}$ tend vers une limite qui est une fonction continue de θ et φ quand ρ tend vers R par valeurs plus petites que R. Le même procédé donne la même conclusion si ρ tend vers R par valeurs plus grandes que R.

Finalement, il est prouvé que

$$\frac{\partial W''_1}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial^2 W''_1}{\partial \rho^2}$$

tendent vers des limites finies, déterminées et continues, quand ρ *tend vers* R, *ces limites étant, en général, différentes suivant que* ρ *reste inférieur ou supérieur à* R.

Il est visible que la même chose a lieu pour les dérivées de W'_1 et, par suite, de W_1.

L'existence et la continuité de $\frac{dU_1}{dn_i}$ *sont ainsi prouvées.*

Pour U_2, on aurait évidemment les mêmes propositions, au moins en ce qui concerne les points de Ω_1 et de Ω_2 qui ne sont pas situés sur le cercle C d'intersection. Nous avons déjà vu que cela suffit pour la légitimité des raisonnements développés au n° 22.

Pour chacune des fonctions U_i successivement considérées, il faudrait répéter les mêmes remarques. Il ne reste donc plus aucune difficulté relative à l'emploi de la méthode du balayage et nous pouvons aborder l'étude des diverses généralisations dont est susceptible le théorème qu'elle nous a fourni.

24. Il a été supposé jusqu'ici que la surface S possède en chacun de ses points un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux bien déterminés. Je me propose maintenant de faire voir que cette hypothèse n'est pas indispensable et que l'on peut admettre la présence de certaines *singularités* sur S.

Je partagerai ces points singuliers en deux catégories : les *pointes* et les *arêtes*.

Sans entrer dans les détails d'une classification régulière des pointes possibles, je citerai seulement quelques exemples simples, et l'on verra facilement quelles extensions sont permises. Voici ces exemples :

1° Un point où il y a un nombre limité de plans tangents (sommet polyédrique).

2° Un point où il y a un cône de tangentes.

3° Un point en lequel la surface vient se confondre avec une droite (cas limite du précédent).

Je supposerai que la surface S ne possède qu'un nombre limité de pareils points.

Passons aux arêtes. Chacune d'elles est une courbe tracée sur S. Il y en aura un nombre limité, de façon que la surface soit divisée par elles en un nombre fini de morceaux où le plan tangent est unique, sauf la présence possible de pointes isolées dans chaque morceau. Ces arêtes seront, d'ailleurs, des lignes à tangente déterminée, du moins en général, car elles pourront avoir un nombre fini de points anguleux ou de points de rebroussement. Enfin, en un point ordinaire d'une arête, la surface admettra deux plans tangents, distincts ou confondus.

Cela posé, la méthode du balayage exposée au n° 22 s'applique en son ensemble au nouveau cas que nous envisageons. On peut toujours construire les sphères Ω_i et former les fonctions W_i. La fonction W qui résulte des calculs est encore une intégrale continue de l'équation. Cette fonction prend la même valeur que W_0 en tout point ordinaire de S. Il nous reste seulement à voir ce qu'elle devient en un point singulier de la surface. Tout ce que nous pouvons affirmer *a priori*, c'est que W reste finie au voisinage d'un pareil point.

Considérons des pointes ou arêtes *saillantes*. La construction d'une sphère Σ_M (n° 22), passant par le point de S que l'on étudie et extérieure à T, est encore possible. Il n'y a donc rien à changer aux raisonnements déjà faits : W prend en ces points la même valeur que W_0. Le problème de Dirichlet généralisé est ainsi résolu, par exemple, pour le cas d'un cube.

La même chose arrive si S possède une pointe *rentrante* venant s'appuyer sur une portion régulière de la même surface.

Des artifices permettent souvent de traiter des cas plus généraux. Mais la discussion, hors les cas simples signalés, est assez longue et n'apprend rien de vraiment nouveau. Je m'en abstiendrai donc.

25. J'ai dit (n° 22) que la méthode du balayage s'appliquait, sans modification notable, quel que soit le nombre des variables indépendantes. Le seul point, en effet, où les changements à faire ne soient pas absolument évidents est celui-ci : Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point fixe M, (x', y', z') les coordonnées d'un point mobile M', r la distance MM'. Nous nous sommes servis un moment de ce que la fonction

$$V = \frac{\cos r}{r}$$

vérifie l'équation

$$\Delta V + V = 0,$$

en tout point M' distinct de M. Par quoi faut-il remplacer cette fonction quand il n'y a, par exemple, que deux variables x et y? Remarquons que V est holomorphe en tout point de l'espace, sauf en M ; elle devient infinie pour $r = 0$, ayant en ce point un pôle simple avec un résidu égal à $+1$; enfin, elle reste positive dans une région assignable autour de M. Ce sont ces propriétés qu'il faut conserver.

Envisageons le cas du plan. L'équation aux dérivées partielles qu'il faut satisfaire est alors

$$\Delta V + V = \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + V = 0.$$

Or, on s'assure aisément [1] que la fonction

$$V = J_0(r) \log r + H(r),$$

$H(r)$ étant une certaine fonction entière de r, est solution de l'équation. Dans cette expression, $J_0(r)$ désigne la fonction de Bessel et l'on a, par conséquent,

$$J_0(0) = 1.$$

D'ailleurs, quand r est très petit, c'est le premier terme de V qui donne son signe. On conclut de là, sans difficulté, que la fonction $-V$ peut remplacer $\frac{\cos r}{r}$ lorsqu'on n'a affaire qu'à deux variables indépendantes.

Si le nombre des variables est n, on appelle celles-ci

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n,$$

et l'on pose

$$r^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2.$$

L'équation aux dérivées partielles devient

$$\Delta V + V = \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{dV}{dr} + V = 0.$$

On peut prendre

$$V = \frac{1}{r^{n-2}} H(r) \qquad \text{si } n \text{ est impair,}$$

$$V = H'(r) \log r + \frac{1}{r^{n-2}} H(r) \qquad \text{si } n \text{ est pair,}$$

H et H' désignant deux fonctions entières.

Il est donc bien vrai que la méthode du balayage réussit, sans modification notable, dans tous les cas.

Je termine en faisant remarquer que la méthode du balayage s'applique aussi bien, dans son fond, à l'équation linéaire *irréductible;* pour traiter ce nouveau cas, il suffirait de trouver une démonstration

---

[1] H. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, Chap. XVIII, § 172.

du théorème de Harnack généralisé qui ne fût pas fondée sur une réduction de l'équation, et c'est ce qui ne paraît pas soulever de bien sérieuses difficultés, si les coefficients de l'équation irréductible sont des fonctions *holomorphes* de (x, y, z).

IV. — Étude de certaines équations non linéaires. — Introduction d'un paramètre arbitraire dans l'équation. — Méthode de prolongement analytique.

26. Abordons maintenant l'étude de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre *non linéaires*. Nous nous bornerons aux types que l'on rencontre dans la théorie de la chaleur

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = F(x, y, z, V),$$

l'expression

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

étant toujours une différentielle exacte $d\mu$ et la dérivée

$$\frac{\partial F}{\partial V}$$

étant positive en tout point (x, y, z) du domaine T ou de sa frontière S. Nous voulons démontrer dans ce nouveau cas le principe de Dirichlet généralisé.

Soit H une fonction continue vérifiant dans T la relation

$$\Delta H + a\frac{\partial H}{\partial x} + b\frac{\partial H}{\partial y} + c\frac{\partial H}{\partial z} = 0,$$

et prenant sur S les mêmes valeurs données que V : nous savons (Chap. III) l'existence et la continuité de H. Posons

$$V = H + U.$$

La fonction U s'annule sur S et vérifie l'équation

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = F(x, y, z, U + H).$$

Écrivons

$$F(x, y, z, U + H) = F_1(x, y, z, U)$$
$$= [F_1(x, y, z, U) - F_1(x, y, z, o)] + F_1(x, y, z, o).$$

Soit

$$f(x, y, z, U) = F_1(x, y, z, U) - F_1(x, y, z, o), \qquad \varphi(x, y, z) = F_1(x, y, z, o).$$

Il vient finalement

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = f(x, y, z, U) + \varphi,$$

et nous sommes ramenés à calculer une intégrale continue de cette équation *s'annulant sur* S.

Voici les hypothèses que nous ferons sur les fonctions (a, b, c, f, φ). Les trois premières seront continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, tant que le point (x, y, z) ne sera pas extérieur à T; elles auront, en outre, des dérivées continues du second ordre dans tout domaine T' intérieur à T; elles seront enfin les dérivées partielles $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$, $\frac{\partial\mu}{\partial z}$ d'une fonction μ. De même, la fonction φ sera finie et continue dans T et possédera des dérivées premières continues dans T'. Quant à $f(x, y, z, U)$, ce sera une fonction définie et continue pour les valeurs de (x, y, z) correspondant à un point qui n'est pas extérieur à T et pour toute valeur réelle de U; cette fonction aura, par rapport à (x, y, z), des dérivées du premier ordre continues dans T'; elle s'annulera pour $U = o$; la dérivée $\frac{\partial f}{\partial U}$ sera déterminée, continue et positive en tout point de T et pour toute valeur de U.

Ici encore, je suppose

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = d\mu.$$

C'est le cas toujours réalisé en Physique. C'est aussi, au point de vue analytique, le seul cas où l'on sache intégrer l'équation linéaire d'une façon complète sans se restreindre à l'hypothèse des coefficients holomorphes et, par suite, comme on le verra, le seul où s'applique la méthode que je vais exposer pour passer des équations linéaires aux équations non linéaires.

Une conséquence résulte immédiatement de là. Posons

$$U = e^{-\frac{\mu}{2}} W.$$

Il vient

$$\Delta W = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \right] W + e^{\frac{\mu}{2}} \left[f\left(x, y, z, e^{-\frac{\mu}{2}} W\right) + \varphi \right].$$

Cette réduction de l'équation à une forme canonique nous servira constamment.

M. Picard [1] s'est déjà longuement occupé de l'intégration de pareilles équations non linéaires. Mais je suivrai ici une autre méthode.

27. Je commence par établir quelques lemmes relatifs à l'équation linéaire.

Considérons la fonction continue G définie par les relations

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta G + a \dfrac{\partial G}{\partial x} + b \dfrac{\partial G}{\partial y} + c \dfrac{\partial G}{\partial z} = -1 & \text{dans } T, \\ G_S = 0. & \text{sur } S. \end{array} \right.$$

Il existe une pareille fonction G et cette fonction est finie. On a, d'ailleurs,

$$G \geqq 0,$$

car G ne peut avoir de minimum négatif. Soit g une limite supérieure de G : le nombre g ne dépend que du domaine T.

Soit, maintenant, une fonction continue U satisfaisant aux égalités

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta U + a \dfrac{\partial U}{\partial x} + b \dfrac{\partial U}{\partial y} + c \dfrac{\partial U}{\partial z} = \varphi & \text{dans } T, \\ U_S = 0 & \text{sur } S, \end{array} \right.$$

et posons

$$|\varphi| < \alpha.$$

Écrivons

$$\tau = \alpha G - U, \qquad \theta = \alpha G + U.$$

[1] E. Picard, *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives* (*Journal de Mathématiques*, Chap. III; 1890).

Il vient

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta\tau + a\dfrac{\partial\tau}{\partial x} + b\dfrac{\partial\tau}{\partial y} + c\dfrac{\partial\tau}{\partial z} = -(\alpha+\varphi) & \text{dans T,} \\ \tau_S = 0 & \text{sur S,} \end{array}\right.$$

et

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta\theta + a\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + b\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + c\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = -(\alpha-\varphi) & \text{dans T,} \\ \theta_S = 0 & \text{sur S.} \end{array}\right.$$

On a

$$\alpha+\varphi > 0, \qquad \alpha-\varphi > 0,$$

les égalités étant exclues. D'où l'impossibilité d'un minimum négatif (n° 11) soit pour τ, soit pour θ, et, par suite,

$$\tau \geqq 0, \qquad \theta \geqq 0.$$

On conclut de là

$$|U| < \alpha G < \alpha g,$$

et cette inégalité va jouer un rôle essentiel.

28. Proposons-nous de résoudre le problème suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U + a\dfrac{\partial U}{\partial x} + b\dfrac{\partial U}{\partial y} + c\dfrac{\partial U}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U) + \varphi & \text{dans T,} \\ U_S = 0 & \text{sur S,} \end{array}\right.$$

ξ étant une constante que nous devrons finalement faire égale à l'unité.

Nous allons d'abord traiter le cas particulièrement simple où l'on a la double inégalité

$$0 \leqq \frac{\partial f}{\partial U} < \beta,$$

β étant un nombre positif assignable qui ne dépend pas de la valeur attribuée à U. Voici du reste deux exemples de ce genre :

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = 2U - \sin 2U + \varphi,$$

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = p^2 U + q^2\frac{U}{\sqrt{1+U^2}} + \varphi.$$

On remarquera que ces équations ne sont pas de celles que M. Picard avait étudiées par le procédé alterné de M. Schwarz et pour lesquelles il fallait supposer $f + \varphi > 0$, quel que soit U.

Nous allons regarder l'intégrale U qu'il faut déterminer comme une fonction du paramètre ξ et chercher à définir cette fonction de proche en proche pour toutes les valeurs réelles et positives de ξ.

29. Procédons par approximations successives de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\Delta U_0 + a\frac{\partial U_0}{\partial x} + b\frac{\partial U_0}{\partial y} + c\frac{\partial U_0}{\partial z} = \varphi,\\
&\Delta U_1 + a\frac{\partial U_1}{\partial x} + b\frac{\partial U_1}{\partial y} + c\frac{\partial U_1}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U_0) \quad + \varphi,\\
&\Delta U_2 + a\frac{\partial U_2}{\partial x} + b\frac{\partial U_2}{\partial y} + c\frac{\partial U_2}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U_1) \quad + \varphi,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\Delta U_i + a\frac{\partial U_i}{\partial x} + b\frac{\partial U_i}{\partial y} + c\frac{\partial U_i}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U_{i-1} \quad + \varphi,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

les fonctions U_i s'annulant toutes sur S. Sachant intégrer l'équation linéaire réductible, nous savons faire ces approximations.

Posons

$$\tau_i = U_i - U_{i-1}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
&\Delta U_0 + a\frac{\partial U_0}{\partial x} + b\frac{\partial U_0}{\partial y} + c\frac{\partial U_0}{\partial z} = \varphi,\\
&\Delta \tau_1 + a\frac{\partial \tau_1}{\partial x} + b\frac{\partial \tau_1}{\partial y} + c\frac{\partial \tau_1}{\partial z} = \xi[f(x, y, z, U_0)],\\
&\Delta \tau_2 + a\frac{\partial \tau_2}{\partial x} + b\frac{\partial \tau_2}{\partial y} + c\frac{\partial \tau_2}{\partial z} = \xi[f(x, y, z, U_1) \quad - f(x, y, z, U_0)],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\Delta \tau_i + a\frac{\partial \tau_i}{\partial x} + b\frac{\partial \tau_i}{\partial y} + c\frac{\partial \tau_i}{\partial z} = \xi[f(x, y, z, U_{i-1}) - f(x, y, z, U_{i-2})],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

et les fonctions τ_i s'annulent aussi toutes sur S.

On a (n° 27)

$$|U_0| < g\alpha.$$

Considérons maintenant en un point (x_0, y_0, z_0) de T la différence

$$f(x_0, y_0, z_0, U^0_{i-1}) - f(x_0, y_0, z_0, U^0_{i-2}),$$

en posant

$$U^0_i = U_i(x_0, y_0, z_0).$$

Cette différence, en vertu de la formule des accroissements finis, peut s'écrire

$$\tau^0_{i-1} \frac{\partial f}{\partial U}(x_0, y_0, z_0, u^0_{i-1}),$$

u^0_{i-1} étant une quantité comprise entre U^0_{i-1} et U^0_{i-2}. Soit alors h une limite supérieure de $|\tau^0_{i-1}|$ valable quel que soit le point (x_0, y_0, z_0). On trouve

$$|f(x, y, z, U_{i-1}) - f(x, y, z, U_{i-2})| < h\beta.$$

Appliquons ce résultat aux fonctions τ_i successives, en remarquant que l'on a

$$f(x, y, z, U_0) = f(x, y, z, U_0) - f(x, y, z, 0).$$

On trouve

$$|U_0| < g\alpha, \quad |\tau_1| < \xi g^2 \alpha\beta, \quad |\tau_2| < \xi^2 g^3 \alpha\beta^2, \quad \ldots, \quad |\tau_i| < \xi^i g^{i+1} \alpha\beta^i, \quad \ldots,$$

toujours en vertu du lemme du n° 27.

La série

$$U_0 + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_i + \ldots$$

est donc absolument et uniformément convergente dans T, pourvu que l'on ait

$$\xi g \beta < 1,$$

c'est-à-dire

$$\xi < \frac{1}{g\beta}.$$

Supposons que cela ait lieu. La somme de la série est alors une fonction de (x, y, z) continue dans T : cette fonction s'annule sur S. Appelons-la U. On a

$$U = U_0 + (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + \ldots + (U_i - U_{i-1}) + \ldots.$$

En définitive, U_i tend uniformément vers U.

Posons

$$U_i = e^{-\frac{\mu}{2}} W_i.$$

Il vient

$$\Delta W_i = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}\right] W_i$$
$$+ e^{\frac{\mu}{2}}\left[\xi f\left(x, y, z, e^{-\frac{\mu}{2}} W_i\right) + \varphi\right],$$

et la fonction W_i s'annule encore sur la surface S. D'où

$$W_i = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \left\{ H' W'_i + e^{\frac{\mu'}{2}}\left[\xi f\left(x', y', z', e^{-\frac{\mu'}{2}} W'_i\right)\right] + \varphi' e^{\frac{\mu'}{2}} \right\} G \, d\tau.$$

Dans cette formule, G représente la fonction de Green de pôle (x, y, z); l'accent désigne le remplacement de (x, y, z) par (x', y', z') dans les fonctions qu'il affecte; enfin on a posé

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4},$$
$$d\tau = dx'\, dy'\, dz'.$$

Il est clair que W_i tend uniformément, quand i augmente indéfiniment, vers la fonction W définie par la relation

$$U = e^{-\frac{\mu}{2}} W.$$

D'autre part, à cause de la continuité de f, $f(x, y, z, U_i)$ tend uniformément vers $f(x, y, z, U)$. Donc on peut écrire à la limite

$$W = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \left\{ H' W' + e^{\frac{\mu'}{2}}\left[\xi f\left(x', y', z', e^{-\frac{\mu'}{2}} W'\right) + \varphi'\right] \right\} G \, d\tau,$$

et une discussion déjà faite à propos de l'équation linéaire (n° 17) fait conclure de là

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U) + \varphi,$$

les propriétés de continuité fondamentales étant assurées.

Le problème que nous nous sommes posé est donc finalement résolu pour les valeurs de ξ dont le module est moindre que $\frac{1}{g\beta}$. En d'autres termes, la fonction U de ξ est définie dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{g\beta}\right)$. Nous allons maintenant nous occuper de prolonger cette fonction au delà de cet intervalle.

30. Un nouveau lemme va nous être nécessaire. Je commence par l'établir.

Reprenons la fonction G définie par

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta G + a\dfrac{\partial G}{\partial x} + b\dfrac{\partial G}{\partial y} + c\dfrac{\partial G}{\partial z} = -1 & \text{dans T,} \\ G_S = 0 & \text{sur S,} \end{array}\right.$$

et soit toujours g une limite supérieure de cette fonction, qui, nous le savons, reste positive.

Considérons une fonction U vérifiant dans T la relation

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U) + \varphi$$

et s'annulant sur S. On suppose

$$\xi \geqq 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial U} \geqq 0, \qquad |\varphi| < \alpha.$$

Posons

$$\tau = \alpha G - U, \qquad \theta = \alpha G + U.$$

On peut toujours écrire, en vertu de la formule des accroissements finis,

$$f(x, y, z, U) = U\frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U'),$$

U' étant, pour chaque valeur de (x, y, z), compris entre o et U. D'où

$$\Delta\tau + a\frac{\partial\tau}{\partial x} + b\frac{\partial\tau}{\partial y} + c\frac{\partial\tau}{\partial z} = \xi\tau\frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U') - \xi\alpha G\frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U') - (\alpha + \varphi),$$

$$\Delta\theta + a\frac{\partial\theta}{\partial x} + b\frac{\partial\theta}{\partial y} + c\frac{\partial\theta}{\partial z} = \xi\theta\frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U') - \xi\alpha G\frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U') - (\alpha - \varphi),$$

en tout point de T, les fonctions τ et θ s'annulant sur S.

On a

$$\xi \geqq 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial U} \geqq 0, \qquad \alpha G\frac{\partial f}{\partial U} \geqq 0, \qquad \alpha + \varphi > 0, \qquad \alpha - \varphi > 0.$$

Donc

$$\tau \geqq 0, \quad \theta \geqq 0,$$

d'après le raisonnement du n° 11. On déduit de là

$$|U| < \alpha g.$$

C'est cette inégalité qui rendra possible le prolongement dont nous voulons nous occuper.

31. Soit ξ un nombre positif inférieur à $\frac{1}{g\beta}$, β étant toujours une limite supérieure de $\frac{\partial f}{\partial U}$. Appelons η un paramètre variable. Faisons les approximations suivantes :

$$\Delta U_0 + a\frac{\partial U_0}{\partial x} + b\frac{\partial U_0}{\partial y} + c\frac{\partial U_0}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U_0) + \varphi,$$

$$\Delta U_1 + a\frac{\partial U_1}{\partial x} + b\frac{\partial U_1}{\partial y} + c\frac{\partial U_1}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U_1) + \eta f(x, y, z, U_0) + \varphi,$$

$$\Delta U_2 + a\frac{\partial U_2}{\partial x} + b\frac{\partial U_2}{\partial y} + c\frac{\partial U_2}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U_2) + \eta f(x, y, z, U_1) + \varphi,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Puisque l'on a

$$0 < \xi < \frac{1}{g\beta},$$

on sait calculer de proche en proche les U_i (n° 29) de façon que ces fonctions s'annulent sur S.

Posons

$$\tau_i = U_i - U_{i-1},$$

d'où

$$\Delta U_0 + a\frac{\partial U_0}{\partial x} + b\frac{\partial U_0}{\partial y} + c\frac{\partial U_0}{\partial z} = \xi\, f(x, y, z, U_0) + \varphi,$$

$$\Delta\tau_1 + a\frac{\partial \tau_1}{\partial x} + b\frac{\partial \tau_1}{\partial y} + c\frac{\partial \tau_1}{\partial z} = \xi[f(x, y, z, U_1) - f(x, y, z, U_0)] + \eta\, f(x, y, z, U_0),$$

$$\Delta\tau_2 + a\frac{\partial \tau_2}{\partial x} + b\frac{\partial \tau_2}{\partial y} + c\frac{\partial \tau_2}{\partial z} = \xi[f(x, y, z, U_2) - f(x, y, z, U_1)] + \eta[f(x, y, z, U_1) - f(x, y, z, U_0)],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et les fonctions τ_i s'annulent encore toutes sur S.

D'après le lemme du n° 30, on a

$$|U_0| < g\alpha.$$

Cela posé, on peut écrire

$$f(x, y, z, U_1) - f(x, y, z, U_0) = \tau_1 \frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U'_1),$$

U'_1 étant compris entre U_1 et U_0, et

$$f(x, y, z, U_0) = U_0 \frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U'_0),$$

U'_0 étant compris entre o et U_0. Le lemme du numéro précédent donne alors

$$|\tau_1| < \eta\alpha g^2\beta.$$

On trouve de même, par un calcul semblable,

$$|\tau_2| < \eta^2\alpha g^3\beta^2,$$

et ainsi de suite. En général

$$|\tau_i| < \eta^i\alpha g^{i+1}\beta^i.$$

Donc la série

$$U_0 + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_i + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$U_0 + (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + \ldots + (U_i - U_{i-1}) + \ldots$$

est absolument et uniformément convergente pour

$$\eta < \frac{1}{g\beta},$$

le champ de convergence étant T.

On conclut aisément de ce qui précède, comme au n° 29, que U_i tend uniformément, lorsque i croît au delà de toute limite, vers une fonction U jouissant dans T des propriétés de continuité fondamentales, s'annulant sur S et vérifiant l'équation

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = (\xi + \eta) f(x, y, z, U) + \varphi.$$

Cela suppose seulement, en ce qui concerne les paramètres ξ et η, que l'on a

$$o < \xi < \frac{1}{g\beta}, \qquad o < \eta < \frac{1}{g\beta},$$

c'est-à-dire

$$o < \xi + \eta < \frac{2}{g\beta}.$$

Finalement notre problème est résolu maintenant sous la seule condition que le paramètre introduit comme multiplicateur de f soit réel, positif et inférieur à $\frac{2}{g\beta}$.

En procédant toujours de la même façon, on arriverait de proche en proche à résoudre le problème de Dirichlet généralisé pour les valeurs du paramètre inférieures à $\frac{n}{g\beta}$, n étant un entier positif arbitraire.

En définitive, le principe de Dirichlet généralisé est vrai, en ce qui concerne l'équation étudiée, quelle que soit la valeur positive du paramètre : on peut donc notamment donner à ce paramètre la valeur 1.

On voit que la méthode suivie consiste à regarder l'intégrale cherchée U comme une fonction du paramètre ξ et à définir cette fonction de ξ, de proche en proche, dans un intervalle de plus en plus grand, par un véritable procédé de prolongement analytique.

Il va de soi que cette méthode réussit quel que soit le nombre des variables indépendantes.

Il ne nous reste plus qu'à généraliser le type d'équations auquel s'applique la méthode précédente. C'est ce que je vais faire maintenant, en m'attachant à retrouver ceux que considère M. Picard dans le Mémoire cité.

32. Commençons par examiner le cas où l'on ne fait plus aucune hypothèse sur le signe de la dérivée $\frac{\partial f}{\partial U}$ et bornons-nous, pour simplifier l'écriture, à l'équation

$$\Delta U = f(x, y, z, U) + \varphi,$$

l'inégalité

$$\left|\frac{\partial f}{\partial U}\right| < \beta$$

restant toujours vérifiée.

Posons

$$U = \lambda W,$$

W étant la nouvelle fonction inconnue et λ étant une fonction de (x, y, z) que nous allons déterminer. Il vient

$$\lambda \Delta W + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \Delta\lambda\, W - f(x, y, z, \lambda W) = \varphi.$$

Nous serons ramenés au cas ci-dessus étudié si nous parvenons à déterminer λ de façon que cette fonction soit continue dans T ainsi que toutes ses dérivées et que l'on ait en outre

$$\lambda > 0, \qquad \Delta\lambda - \lambda \frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, \lambda W) < 0.$$

Or cela aura lieu si, λ étant toujours une fonction continue munie de dérivées de tous les ordres, on a dans T

$$\lambda > 0, \qquad \Delta\lambda + \beta\lambda = 0.$$

Nous retombons ainsi sur la discussion faite au Chapitre I pour l'équation linéaire : *Le calcul de λ est possible si le domaine* T *est assez petit.* Nous savons d'ailleurs le sens précis de cette expression.

Voici deux exemples :

$$\Delta U = \cos U,$$
$$\Delta U = J_0(U).$$

On peut prendre alors $\beta = 1$.

33. Examinons enfin le cas général où l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial U} \geqq 0,$$

mais où cette dérivée, finie tant que $|U|$ l'est aussi, ne comporte cependant aucune limite supérieure valable pour toutes les valeurs de U.

Nos hypothèses sont

$$\frac{\partial f}{\partial U} \geqq 0, \qquad |\varphi| < \alpha, \qquad \xi > 0,$$

et nous employons la méthode du n° 29.

Supposons que l'inégalité

$$|U| < 2g\alpha$$

entraîne les inégalités

$$|f(x,y,z,U)| < L, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial U}(x,y,z,U)\right| < \beta,$$

L et β étant deux nombres positifs assignables.

On peut toujours faire, comme au n° 29, la première série d'approximations caractérisée par l'emploi de ξ comme paramètre variable. Prenons ξ tel que

$$\xi L < \alpha.$$

On a alors

$$\begin{aligned} &|U_0| < g\alpha, \\ &|U_1| < \xi L g + g\alpha < 2g\alpha, \\ &|U_2| < \xi L g + g\alpha < 2g\alpha, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d'où

$$|U_i| < 2g\alpha,$$

quel que soit l'indice i.

N'ayant à considérer que des fonctions intermédiaires U_i dont le module n'excède pas $2g\alpha$, on n'a à considérer aussi que des cas où $\left|\frac{\partial f}{\partial U}\right|$ ne dépasse pas β, et l'on peut par suite refaire tous les raisonnements du n° 29 sur les fonctions τ_i.

Finalement, on sait résoudre le problème de Dirichlet généralisé, pourvu que l'on ait à la fois

$$\xi > 0, \qquad \xi L < \alpha, \qquad \xi\beta g < 1.$$

Cela a toujours lieu pour des valeurs de ξ positives et suffisamment petites.

En vertu des lemmes du n° 30, la méthode de prolongement du n° 31 réussit encore. Il faut procéder comme nous venons de le faire pour les petites valeurs de ξ. Les raisonnements sont les mêmes et l'on arrive ainsi à la même conclusion pour toute valeur positive de ξ. *Le principe de Dirichlet généralisé est alors établi dans toute sa généralité, pourvu que f croisse avec* U.

Un premier exemple du cas que nous venons de traiter est donné par l'équation

$$\Delta U = A e^{U} \qquad [A(x, y, z) > 0],$$

à laquelle on peut donner le nom d'*équation de Liouville* et qui intervient dans d'importants problèmes de Géométrie et d'Analyse.

L'équation

$$\Delta U = A e^{U} - B e^{-U},$$

si l'on a

$$A > 0, \qquad B > 0,$$

fournit un autre exemple.

J'arrêterai ici l'étude des équations non linéaires. *Les théorèmes d'existence sont établis en ce qui concerne les équations de l'équilibre thermique* (1).

---

(1) Depuis la rédaction de ces pages, M. Picard a montré (*Comptes rendus*, 28 juin 1897) que sa méthode d'*extension progressive* permettait l'intégration des équations non linéaires sous la seule condition que f croisse avec U, ce que ne faisaient pas voir ses recherches antérieures (*Journal de Mathématiques*, 1890). On a donc deux méthodes distinctes pour la résolution des mêmes problèmes.