ETIENNE DELASSUS

Sur les transformations et l'intégration des systèmes différentiels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 195-241
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__195_0>

SUR LES TRANSFORMATIONS

ET

L'INTÉGRATION DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE DOUAI.

INTRODUCTION.

On sait l'importance des intégrales intermédiaires dans le problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. C'est la recherche de telles intégrales qui constitue la méthode de Monge et, au fond, celle de Laplace.

Je me propose, dans ce Mémoire, d'étendre la même notion aux systèmes différentiels quelconques. Il est possible d'y arriver d'une façon précise en utilisant les résultats que j'ai donnés, dans un Mémoire antérieur (1), sur la forme canonique générale de tels systèmes et le théorème général d'existence des intégrales.

Le théorème de Cauchy généralisé, en faisant connaître d'une façon précise le nombre et la nature des arbitraires dont dépend l'intégrale générale d'un système, permet en quelque sorte de *mesurer* le degré de difficulté de l'intégration, ce qui conduit à la notion de système *plus simple* qu'un autre.

En partant de ces idées, on est tout naturellement conduit, pour tenter l'intégration d'un système Σ, à chercher des systèmes intermédiaires Σ', c'est-à-dire des systèmes plus simples que Σ, et dont toutes les intégrales soient des intégrales de Σ. Si l'on connaît des systèmes Σ' dont les équations contiennent des arbitraires en nombre suffisant, l'intégration de Σ sera ramenée à Σ'.

(1) ÉTIENNE DELASSUS, *Extension du théorème de Cauchy aux systèmes différentiels les plus généraux* (*Annales de l'École Normale*; 1896).

Pour former un système intermédiaire, il faut ajouter à Σ des équations complémentaires, et on leur imposera la condition de fournir avec Σ un système Σ' compatible et ayant une intégrale générale dépendant d'arbitraires dont on fixera *a priori* le nombre et la nature. Les premiers membres des équations complémentaires seront alors assujettis à vérifier un système différentiel Σ'', que l'on saura certainement former.

Si Σ'' est compatible et a des intégrales dépendant d'arbitraires en nombre suffisant, l'intégration de Σ sera décomposée en deux parties qui seront l'intégration de Σ'', puis celle de Σ'.

Il est naturel de chercher à obtenir un système Σ' qu'on sache certainement intégrer ; dans ce cas, on peut dire que toute la difficulté de l'intégration de Σ se trouve reportée sur Σ'', et nous appellerons Σ'' le *transformé* de Σ.

En faisant varier la forme imposée à Σ', on arrive à déduire d'un même point de vue un grand nombre de résultats dont certains sont nouveaux et dont les autres constituent, à peu de chose près, tout ce que l'on sait actuellement sur les systèmes différentiels d'une forme présentant quelque généralité.

Le cas le plus simple est celui où l'on impose à Σ' la condition d'être de première espèce, c'est-à-dire d'avoir une intégrale générale dépendant d'un nombre limité de constantes arbitraires.

Appliqué aux systèmes de première espèce eux-mêmes, il conduit à leur intégration par des équations différentielles ordinaires.

Appliqué aux systèmes dont l'intégrale générale ne dépend que d'une seule fonction arbitraire, laquelle ne dépend que d'un seul argument, il conduit immédiatement à leur intégration par des équations différentielles ordinaires.

Appliqué à des systèmes quelconques, il conduit à faire correspondre à tout système Σ une infinité multiple de systèmes de plus en plus compliqués, et à un nombre de variables de plus en plus grand, dont l'intégrale générale se déduit de celle de Σ par des calculs algébriques et tels que si l'on sait intégrer l'un quelconque d'entre eux, on en déduit l'intégration de tous les autres par des équations différentielles ordinaires et des calculs algébriques.

Chacun de ces systèmes possède, en outre, la propriété de pouvoir s'intégrer par des équations différentielles ordinaires dès qu'on en connait une intégrale particulière dépendant de certaines constantes et fonctions arbitraires.

Enfin, le même cas, appliqué aux systèmes du premier ordre à une inconnue, conduit tout naturellement à la méthode de Jacobi et Mayer, qui se trouve ainsi établie d'une façon simple, sans faire de distinction entre le cas où l'inconnue figure et celui où elle ne figure pas, et sans être obligé de faire appel aux propriétés particulières des expressions $[F. \Phi]$ de Poisson.

Parmi les systèmes qu'on sait intégrer par des équations différentielles ordinaires, ceux qui ont la forme la moins particulière sont ceux dont l'intégrale générale dépend d'une seule fonction arbitraire d'une variable.

Si l'on cherche des équations complémentaires conduisant à de tels systèmes, et si l'on cherche à se placer dans les conditions les plus favorables pour que l'on puisse ainsi arriver à trouver toutes les intégrales du système proposé Σ, on est fatalement conduit à retrouver la méthode de M. Darboux ([1]), bien précisée dans le cas des systèmes quelconques.

En dernier lieu, une transformation particulière, que j'appelle *transformation par changement d'inconnues*, fournit un résultat intéressant relatif à l'application de la méthode de M. Darboux aux systèmes linéaires. S'il existe une équation linéaire qui, ajoutée à Σ, donne un système Σ' dont l'intégrale générale contient au moins une fonction arbitraire, Σ pourra certainement s'intégrer par la méthode de M. Darboux.

I.

Degré d'indétermination d'un système différentiel. — Systèmes intermédiaires.

1. Soit Σ un système différentiel canonique à m variables x_1, $x_2, \ldots, x_m$ et q inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_q$. Supposons qu'aucune de ces

---

([1]) DARBOUX, *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Annales de l'École Normale*; 1870).

inconnues ne puisse être prise arbitrairement de façon que le système contienne et détermine réellement les q inconnues. Le théorème de Cauchy généralisé nous montre que, pour déterminer complètement une intégrale de Σ, il faudra se donner arbitrairement :

Γ_0 constantes;
Γ_1 fonctions de 1 variable;
Γ_2 fonctions de 2 variables;
. . . . ;
Γ_{m-2} fonctions de $m-2$ variables;
Γ_{m-1} fonctions de $m-1$ variables;

Nous appellerons *degré d'indétermination* du système Σ l'ensemble des nombres $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{m-2}, \Gamma_{m-1}$ pris dans l'ordre

$$\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{m-2}, \Gamma_{m-1}.$$

Désignons-le par $\mathfrak{D}$ et convenons que $\mathfrak{D}$ ne change pas si l'on prolonge la suite qui le définit, en y ajoutant de nouveaux nombres Γ_m, $\Gamma_{m+1}, \ldots$, qui sont tous nuls.

Deux degrés d'indétermination $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ seront dits *égaux* s'ils sont définis par les mêmes nombres, c'est-à-dire si l'on a

$$\Gamma_0 = \Gamma'_0, \quad \Gamma_1 = \Gamma'_1, \quad \Gamma_2 = \Gamma'_2, \quad \ldots.$$

Nous conviendrons de dire que l'on a

$$\mathfrak{D} > \mathfrak{D}',$$

s'il existe un entier μ tel que

$$\Gamma_\mu > \Gamma'_\mu, \quad \Gamma_{\mu+1} = \Gamma'_{\mu+1}, \quad \Gamma_{\mu+2} = \Gamma'_{\mu+2}, \quad \ldots,$$

et l'on voit immédiatement que

$$\mathfrak{D} > \mathfrak{D}' \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}' > \mathfrak{D}''$$

entraînent

$$\mathfrak{D} > \mathfrak{D}''.$$

Laissons de côté les systèmes différentiels et ne considérons que des équations isolées, en restant dans les généralités, c'est-à-dire sans préciser leur forme et leur ordre.

Soient

$$F = 0, \qquad \Phi = 0$$

deux équations différentielles, la première d'ordre p et à m variables indépendantes, et la seconde d'ordre p' à m' variables.

Les connaissances actuelles sur les équations différentielles nous conduisent à dire que l'étude des intégrales de $F = 0$ sera plus difficile que l'étude des intégrales de $\Phi = 0$ si l'on a

$$m > m'$$

ou

$$m = m', \qquad p > p'.$$

Mais, d'après le théorème de Cauchy, les degrés d'indétermination des deux équations sont constitués par

$$\begin{array}{lll} \Gamma_0 = \Gamma_1 = \ldots = \Gamma_{m-2} = 0, & \Gamma_{m-1} = p, & \Gamma_m = \Gamma_{m+1} = \ldots = 0, \\ \Gamma'_0 = \Gamma'_1 = \ldots = \Gamma'_{m-2} = 0, & \Gamma'_{m'-1} = 0, & \Gamma'_{m'} = \Gamma'_{m'+1} = \ldots = 0, \end{array}$$

et, dans les deux hypothèses, on voit que l'on a

$$\omega > \omega'.$$

On est alors tout naturellement amené, en généralisant, à admettre que, au moins en restant dans les généralités, la difficulté de l'étude d'un système différentiel est d'autant plus grande que son degré d'indétermination est plus grand. Cette difficulté peut donc en quelque sorte se *mesurer* par le degré d'indétermination et, pour abréger, nous dirons qu'un système Σ' ayant pour degré d'indétermination ω' est *plus simple* que Σ qui a pour degré d'indétermination ω si l'on a

$$\omega' < \omega.$$

2. La méthode qui se présente le plus naturellement à l'esprit pour la recherche de fonctions ayant un certain degré d'indétermination consiste à dédoubler le problème et à chercher si ces fonctions ne pourraient pas être considérées comme solutions de certaines équations dépendant d'arbitraires et dont la résolution introduirait de nouvelles arbitraires de façon à retrouver toutes celles qui doivent se trouver dans les fonctions inconnues. C'est la méthode des équations intermédiaires.

Le moyen le plus général, pour nous, de définir des fonctions dépendant d'arbitraires, consiste à les assujettir à vérifier des systèmes différentiels. Σ étant le système initial aux inconnues z et Σ' le système intermédiaire, que nous supposons être un système différentiel, toute intégrale de Σ' devra être une intégrale de Σ, de sorte que les intégrales restent les mêmes si à Σ' on ajoute toutes les équations de Σ : ce qui signifie que le système intermédiaire Σ' sera constitué par le système donné Σ, auquel on aurait ajouté les équations complémentaires

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots,$$

qu'on suppose naturellement ne pas être des conséquences algébriques des équations de Σ, prolongé au besoin, sans quoi Σ' serait identique à Σ.

3. Il est facile de constater que tout système Σ' ainsi constitué est *plus simple* que Σ, au sens précédemment attribué à cette expression.

Dans Σ et dans les équations $f = 0$, faisons le changement linéaire le plus général de variables et résolvons Σ comme il l'était primitivement. Il sera résolu par rapport à des ensembles canoniques

$$E_i^j.$$

Portons les valeurs des dérivées ainsi obtenues dans les équations $f = 0$ et leurs dérivées successives, elles permettront de calculer de nouvelles dérivées, de sorte que si l'on appelle

$$E_i'^j$$

l'ensemble canonique de Σ' correspondant à E_i^j, on aura certainement

$$E_i'^j \geqq E_i^j.$$

Supposons d'abord qu'il y ait un nombre r, au moins égal à l'ordre canonique n de Σ, et pour lequel l'un, au moins, des ensembles $E_i'^r$ soit supérieur à l'ensemble correspondant E_i^r. Cela continuera à être vrai pour tous les ordres supérieurs à r et, en particulier, le sera pour un ordre s supérieur à r, à n et à n', ordre canonique de Σ'.

Soient $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{m-1}^i$ les indices des ensembles E_i^s et $\gamma_1'^i, \gamma_2'^i, \ldots, \gamma_{m-1}'^i$ ceux des ensembles $E_i'^s$.

Il y aura certaines valeurs de i pour lesquelles il existera, parmi les nombres $1, 2, \ldots, m-1$, un nombre μ_i tel que

$$\gamma_1'^i = \gamma_1^i, \qquad \gamma_2'^i = \gamma_2^i, \qquad \ldots, \qquad \gamma_{\mu_i-1}'^i = \gamma_{\mu_i-1}^i, \qquad \gamma_{\mu_i}'^i < \gamma_{\mu_i}^i,$$

et pour toutes les autres valeurs de i on aura

$$\gamma_1'^i = \gamma_1^i, \qquad \gamma_2'^i = \gamma_2^i, \qquad \ldots, \qquad \gamma_{m-2}'^i = \gamma_{m-2}^i, \qquad \gamma_{m-1}'^i = \gamma_{m-1}^i.$$

En désignant par μ le plus petit des nombres μ_i on aura donc

$$\Sigma\gamma_1'^i = \Sigma\gamma_1^i, \qquad \Sigma\gamma_2'^i = \Sigma\gamma_2^i, \qquad \ldots, \qquad \Sigma\gamma_{\mu-1}'^i = \Sigma\gamma_{\mu-1}^i, \qquad \Sigma\gamma_\mu'^i < \Sigma\gamma_\mu^i.$$

Les ensembles E_i^s sont dérivés des ensembles E_i^n : les γ^i sont donc les indices des E_i^n, c'est-à-dire les nombres fondamentaux du système. Par suite, on a

$$\sum_{i=1}^{i=q} \gamma_j^i = \Gamma_{m-j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Pour la même raison, on a

$$\sum_{i=1}^{i=q} \gamma_j'^i = \Gamma'_{m-j};$$

finalement, on a donc, en posant $m - \mu = \mu'$,

$$\Gamma'_{m-1} = \Gamma_{m-1}, \qquad \Gamma'_{m-2} = \Gamma_{m-2}, \qquad \ldots, \qquad \Gamma'_{\mu'+1} = \Gamma_{\mu'+1}, \qquad \Gamma'_{\mu'} < \Gamma_{\mu'},$$

c'est-à-dire

$$\omega' < \omega.$$

Σ' est donc plus simple que Σ et, comme $\mu' \neq 0$, la réduction porte sur les fonctions arbitraires.

En second lieu, supposons que le nombre r n'existe pas, c'est-à-dire que l'on ait

$$E_i'^s = E_i^s \qquad (i = 1, 2, \ldots, q; \; s \geqq n):$$

l'ordre canonique n' de Σ' sera au plus égal à n et, en prolongeant Σ' jusqu'à l'ordre n, les équations d'ordre n de ce système seront les mêmes que celles de Σ. D'où résulte que Σ et Σ' dépendent des mêmes fonctions arbitraires. Σ' ne différera de Σ que par l'adjonction d'un certain nombre d'équations d'ordre inférieur à n, ce qui montre que l'on aura

$$\Gamma'_0 < \Gamma_0$$

et, par suite,

$$\omega' < \omega.$$

On arrive ainsi à la même conclusion que dans le cas précédent; mais, ici, la réduction ne porte que sur les constantes arbitraires.

4. Revenons maintenant aux systèmes intermédiaires. Pour que Σ' constitue un tel système, il faut que ses équations dépendent ellesmêmes de certaines arbitraires et, pour cela, il faut que les équations complémentaires

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots,$$

qui servent à le définir, aient des premiers membres dépendant d'arbitraires et tels que le système Σ' soit compatible, quelles que soient ces arbitraires.

On peut exprimer, d'une infinité de façons, que Σ' est compatible. Pour préciser, on pourra se donner arbitrairement un degré d'indétermination ω' satisfaisant à la condition

$$\omega' < \omega$$

et exprimer que Σ' est compatible avec le degré d'indétermination ω'.

Il pourra arriver, comme nous le verrons, qu'on ne puisse pas exprimer que Σ' a exactement ω' pour degré d'indétermination. Pour supprimer cet inconvénient, nous exprimerons que Σ' a un degré d'indétermination au moins égal à ω'.

Ceci posé, la méthode générale qui se présente naturellement à l'esprit pour la recherche des équations complémentaires est la suivante :

On se donnera le nombre p des fonctions f et, pour chaque z, l'ordre maximum des dérivées qui figurent dans les f. Désignons, d'une façon générale, par y les z et leurs dérivées ainsi précisées. Les f seront considérées comme fonctions des x et des y. Nous nous donnerons *a priori* p fonctions f des x et des y, dépendant d'un certain nombre d'arbitraires, et nous chercherons à restreindre ces arbitraires de façon que l'adjonction des équations $f_1 = 0, \ldots, f_p = 0$ au système Σ conduise à un système Σ' ayant un degré d'indétermination au moins égal à ω'.

Dans ce nouveau problème, les inconnues seront les arbitraires qui figuraient dans les f et l'on sera conduit à un système différentiel Σ'' qu'elles devront vérifier et qui les déterminera en fonction d'autres arbitraires.

Le système Σ' dépend alors de ces arbitraires. Si Σ'' a un degré d'indétermination ω'' assez grand pour que toute intégrale de Σ puisse être une intégrale de Σ', pour une détermination convenable des arbitraires provenant de Σ'', Σ' constituera un système intermédiaire.

Si, en outre, on a $\omega'' < \omega$, on pourra dire qu'on a simplifié l'intégration de Σ puisqu'on est ramené à intégrer successivement Σ'' et Σ' qui sont tous deux plus simples que Σ.

En général, on choisira ω' de façon que le système Σ' soit de l'une des formes que l'on sait intégrer, de sorte que, si l'on n'en tient pas compte, on peut dire que toute la difficulté de l'intégration de Σ est reportée sur Σ'', ou, si l'on veut, que l'intégration de Σ est ramenée à celle de Σ''. C'est pourquoi nous appellerons Σ'' *le système transformé* de Σ.

5. On peut obtenir de bien des manières des transformés d'un système Σ, suivant la façon dont on fait dépendre les f de fonctions arbitraires.

A la fin de ce Mémoire nous étudierons, sous le nom de *transformation par changement d'inconnues*, une transformation dans laquelle on fait dépendre explicitement les f de certaines fonctions arbitraires des x.

Pour le moment, supposons, pour rester dans les procédés généraux, qu'on fasse dépendre les f de certaines fonctions et constantes arbitraires en les assujettissant à vérifier, quels que soient les x et les y, un système différentiel σ.

Soit σ' le système auquel on arriverait en écrivant, sans s'occuper des équations σ, que les équations $f = 0$ ajoutées à Σ donnent un système Σ' ayant un degré d'indétermination au moins égal à ω', c'est-à-dire en écrivant que les équations $f = 0$ ont en commun avec Σ des intégrales ayant au moins ω' pour degré d'indétermination. Le système transformé Σ'' s'obtiendra en ajoutant à σ' toutes les équations de σ, de sorte que Σ'' sera, en général, plus simple que σ'.

Mais le but qu'on se propose est d'arriver à un système Σ'' ayant un degré d'indétermination aussi grand que possible, pour pouvoir, si c'est possible, obtenir toutes les intégrales de Σ. On arrivera à ce résultat en réduisant Σ'' à σ', c'est-à-dire en supprimant complètement σ, ce qui revient à considérer les f comme des fonctions complètement indéterminées des x et des y, assujetties seulement à la condition de conduire à un système Σ' ayant un degré d'indétermination au moins égal à ω'.

Enfin, on peut toujours simplifier Σ'' en supposant, ce qui est permis, que les f ne contiennent aucune des dérivées y qui figurent dans les premiers membres des équations de Σ et, en outre, diminuer encore de p le nombre des variables indépendantes en supposant les p équations $f = 0$ résolues par rapport à p des y qui y figurent.

6. Comme nous nous proposons de montrer que les considérations générales que nous venons de développer conduisent à retrouver presque tous les résultats un peu généraux que l'on possède actuellement sur les systèmes différentiels, il est bon de préciser ce que nous admettrons comme démontré.

Dans un Mémoire antérieur (¹), j'ai montré que le théorème de Cauchy généralisé fournissait très simplement la *Méthode de Mayer pour l'intégration des systèmes linéaires du premier ordre à une inconnue;* nous l'admettrons.

Comme nous l'avons déjà fait, nous appellerons *systèmes de première espèce* les systèmes différentiels dont l'intégrale générale ne contient qu'un nombre limité de constantes arbitraires. Dans le Mémoire que nous venons de citer, il a été démontré que *tout système du premier ordre et de première espèce à une seule inconnue s'intègre par une équation différentielle ordinaire*.

Ces deux résultats, obtenus sans faire appel à aucune théorie particulière, sont les deux seuls que nous admettrons (²).

(¹) E. Delassus, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule inconnue* (*Annales de l'École Normale*, 1897).

(²) En réalité, nous n'admettons que la méthode de Mayer, car le second résultat n'en est qu'un cas très particulier, mais qu'il est utile d'énoncer à part.

II.

Étude d'une transformation particulière.

7. *Intégration des systèmes de première espèce.* — Ces systèmes sont évidemment les plus simples parmi les systèmes différentiels. Leur degré d'indétermination est celui d'un système d'équations différentielles ordinaires, de sorte qu'il est probable que leur intégration doit pouvoir se ramener à celle d'un ou plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Cette intégration a été déjà complètement faite par M. Bourlet (1). Nous allons voir que la méthode des systèmes intermédiaires va nous y conduire tout naturellement.

Soit Σ le système proposé, soit n son ordre canonique et $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ les z et leurs dérivées d'ordre inférieur à n qui ne figurent pas dans les ensembles E'_i par rapport auxquels sont résolues les équations de Σ.

On sait, d'après le théorème de Cauchy généralisé, que l'intégrale générale de Σ dépend de μ constantes arbitraires qui sont les valeurs, en $x_1^0, \ldots, x_m^0$, de $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$. Soient $y_1^0, \ldots, y_\mu^0$ ces valeurs initiales.

Nous supposerons, en outre, que ces y, pris dans l'ordre $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$, soient rangés par ordres décroissants.

Cherchons à former un système intermédiaire Σ' ayant en commun avec Σ une intégrale dans laquelle on pourra se donner arbitrairement les valeurs initiales de $y_2, \ldots, y_\mu$, c'est-à-dire une intégrale dépendant de $\mu - 1$ constantes arbitraires.

Pour cela, nous devrons ajouter à Σ une équation complémentaire d'ordre $n - 1$ et de la forme

$$y_1 - \varphi(x_1, \ldots, x_m, y_2, y_3, \ldots y_\mu) = 0.$$

En cherchant à mettre Σ' sous forme canonique, les équations d'intégrabilité se réduiront toutes à l'ordre $n - 1$ au plus, en vertu des équations d'ordre n de Σ. Ces équations devront être des consé-

(1) BOURLET, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues* (*Annales de l'École Normale*, Suppl. 1891).

quences algébriques des équations auxiliaires de Σ et de $y_1 - \varphi = 0$, sans quoi Σ' aurait une intégrale générale qui dépendrait de moins de $\mu - 1$ constantes arbitraires.

Nous devrons donc prendre les équations

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(y_1 - \varphi) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}(y_1 - \varphi) = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial}{\partial x_m}(y_1 - \varphi) = 0,$$

les développer, y remplacer ensuite toutes les dérivées d'ordre n et les dérivées d'ordres inférieurs et autres que $y_2, \ldots, y_\mu$ par leurs expressions en $x_1, \ldots, x_m, y_2, \ldots, y_\mu$ fournies, par Σ et $y_1 - \varphi = 0$, et exprimer que les nouvelles équations ainsi obtenues sont des identités quand on y considère $x_1, \ldots, x_m, y_2, \ldots, y_\mu$ comme des variables indépendantes.

Ces équations constituent *un système linéaire et du premier ordre*, Σ'', que doit vérifier la fonction φ.

D'après la théorie générale de ces systèmes, on commencera par ramener l'intégration de Σ'' à celle d'une seule équation qui sera encore linéaire et qui, par l'application du procédé bien connu, s'intégrera par un système d'équations différentielles ordinaires.

Nous allons montrer que *le système Σ'' est compatible, admet une intégrale générale dépendant d'une fonction arbitraire de $\mu - 1$ variables et est, tel qu'on le trouve, sous forme canonique.*

Soit

$$\begin{aligned} z_1 &= Z_1(x_1, \ldots, x_m, y_1^0, \ldots, y_\mu^0), \\ z_2 &= Z_2(x_1, \ldots, x_m, y_1^0, \ldots, y_\mu^0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_q &= Z_q(x_1, \ldots, x_m, y_1^0, \ldots, y_\mu^0) \end{aligned}$$

l'intégrale générale de Σ. Par dérivation, on en déduira

$$\begin{aligned} y_1 &= Y_1(x_1, \ldots, x_m, y_1^0, \ldots, y_\mu^0), \\ y_2 &= Y_2(x_1, \ldots, x_m, y_1^0, \ldots, y_\mu^0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_\mu &= Y_\mu(x_1, \ldots, x_m, y_1^0, \ldots, y_\mu^0). \end{aligned}$$

Déterminons y_1^0 par une équation de la forme

$$y_1^0 = \psi(y_2^0, \ldots, y_\mu^0).$$

Posons, pour abréger,

$$Y'_i(x_1, \ldots, x_m, y_2^0, \ldots, y_\mu^0) = Y_i[x_1, \ldots, x_m, \psi(y_2^0, \ldots, y_\mu^0), y_2^0, \ldots, y_\mu^0],$$

et considérons les équations

$$\begin{aligned}
y_1 &= Y'_1(x_1, \ldots, x_m, y_2^0, \ldots, y_\mu^0), \\
y_2 &= Y'_2(x_1, \ldots, x_m, y_2^0, \ldots, y_\mu^0), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_\mu &= Y'_\mu(x_1, \ldots, x_m, y_2^0, \ldots, y_\mu^0),
\end{aligned}$$

qui définissent une intégrale I de Σ dépendant des $\mu - 1$ constantes arbitraires $y_2^0, \ldots, y_\mu^0$, valeurs initiales de $y_2, \ldots, y_\mu$. Pour $x_1^0, \ldots, x_m^0$, les Y'_i se réduisent respectivement aux y_i^0, sauf le premier qui se réduit à $\psi(y_2^0, \ldots, y_\mu^0)$.

Le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(Y'_2, Y'_3, \ldots, Y'_\mu)}{D(y_2^0, y_3^0, \ldots, y_\mu^0)}$$

se réduisant alors à 1 n'est pas identiquement nul, de sorte que, des équations

$$y_2 = Y'_2, \qquad y_3 = Y'_3, \qquad \ldots, \qquad y_\mu = Y'_\mu,$$

on pourra tirer

$$\begin{aligned}
y_2^0 &= Y''_2(x_1, \ldots, x_m, y_2, \ldots, y_\mu), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_\mu^0 &= Y''_\mu(x_1, \ldots, x_m, y_2, \ldots, y_\mu),
\end{aligned}$$

et, en portant dans $y_1 = Y'_1$, on aura une équation

$$y_1 = Y'_1(x_1, \ldots, x_m, Y''_2, \ldots, Y''_\mu)$$

vérifiée par l'intégrale I, quelles que soient les valeurs $y_2^0, \ldots, y_\mu^0$.

C'est une équation de la forme

$$y_1 = \Phi(x_1, \ldots, x_m, y_2, \ldots, y_\mu)$$

et ayant en commun avec Σ une intégrale I pour laquelle on peut se donner arbitrairement les valeurs initiales de $y_2, \ldots, y_\mu$. Φ est donc solution de Σ'', de sorte que Σ'' est compatible.

Nous venons de trouver ainsi une infinité de solutions de Σ'' et chacune d'elles correspond à une fonction arbitraire

$$\psi(y_2^0, \ldots, y_\mu^0).$$

Considérons la fonction

$$\psi(y_2, \ldots, y_\mu)$$

et cherchons ce que devient Φ quand on y fait $x_1 = x_1^0, \ldots, x_m = x_m^0$. Dans ces conditions, nous savons que Φ se réduit à

$$\psi(Y_2'', \ldots, Y_\mu'')$$

et que $Y_2'', \ldots, Y_\mu''$ se réduisent respectivement à $y_2, \ldots, y_\mu$, de sorte que Φ se réduit à $\psi(y_2, \ldots, y_\mu)$.

La fonction $\psi(y_2, \ldots, y_\mu)$ est donc la valeur initiale de Φ en $x_1^0, \ldots, x_m^0$.

Les m équations du système Σ'' sont obtenues directement sous la forme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = U_1, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = U_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_m} = U_m,$$

$U_1, U_2, \ldots, U_m$ étant des fonctions des x, de $y_2, \ldots, y_\mu$, de φ et des autres dérivées de φ.

Ce système est forcément canonique, car, s'il ne l'était pas, il donnerait naissance à de nouvelles équations et n'admettrait pas d'intégrales pour lesquelles on pourrait se donner arbitrairement la valeur initiale pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_m = x_m^0$, ce qui est contraire au résultat qui précède.

Les propriétés annoncées du système Σ'' sont donc démontrées et nous constatons que Σ'' a un degré d'indétermination plus élevé qu'il n'est nécessaire pour obtenir toutes les intégrales de Σ.

Pour intégrer Σ'', nous devons, comme nous l'avons déjà dit, ramener cette intégration à celle d'une seule équation au moyen du changement de variables de Mayer; cette équation, à son tour, s'intègre par un système d'équations différentielles ordinaires que nous appellerons σ'' et qui est formé de μ équations.

Soit V une intégrale de ce système σ'', il en sera de même de $V - a$, a étant une constante arbitraire, de sorte que, si nous supposons que

V contient effectivement φ et si nous revenons aux variables primitives, nous aurons une équation

$$V(x_1, \ldots, x_m, \varphi, y_2, \ldots, y_\mu) = a$$

définissant une fonction φ dépendant d'une constante arbitraire et solution de Σ''.

Je dis qu'au moyen de l'équation complémentaire

$$y_1 = \varphi(x_1, \ldots, x_m, a, y_2, \ldots, y_\mu)$$

ainsi obtenue, nous pourrons, grâce à la présence de a, obtenir toutes les solutions de Σ.

En effet, cherchons l'intégrale de Σ qui, pour $x_1^0, \ldots, x_m^0$, a pour constantes initiales $y_1^0, \ldots, y_\mu^0$. Il faut chercher l'intégrale de Σ' qui correspond aux constantes initiales, $y_2^0, \ldots, y_\mu^0$, et déterminer a de façon que cette intégrale soit précisément celle que l'on cherche. Il en sera certainement ainsi, si, pour cette intégrale, la valeur de y_1 en $x_1^0, \ldots, x_m^0$ est précisément y_1^0, c'est-à-dire si l'on a

$$y_1^0 = \varphi(x_1^0, \ldots, x_m^0, a, y_2^0, \ldots, y_\mu^0),$$

ou plus simplement

$$a = V(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_\mu^0).$$

On est donc ramené à intégrer Σ' dont les équations contiennent une constante arbitraire; à Σ', on peut appliquer la même méthode et continuer ainsi en faisant chaque fois disparaître l'un des y que l'on peut prendre arbitrairement, et l'on ne sera arrêté qu'au moment où l'on sera ramené à un système ne contenant plus qu'un seul y arbitraire, qui sera la valeur initiale de z_1 par exemple.

Le système sera alors de la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = U_1^1, \qquad z_2 = U_2, \qquad \ldots, \qquad z_q = U_q,\\
&\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = U_1^2,\\
&\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{\partial z_1}{\partial x_m} = U_1^m,
\end{aligned}$$

tous les U étant des fonctions déterminées de $x_1, x_2, \ldots, x_m, z_1$ et de de $\mu - 1$ constantes arbitraires.

Il ne reste plus qu'à déterminer z_1 : pour cela on remplace $z_2, \ldots, z_q$ par $U_2, \ldots, U_q$ dans $U_1^1, \ldots, U_1^m$ et l'on a un système du premier ordre et de première espèce en z_1, dont l'intégration se ramènera à celle d'une équation différentielle ordinaire et introduira une nouvelle constante arbitraire.

En employant un langage, consacré par l'usage dans la théorie des systèmes du premier ordre à une inconnue, on peut dire :

L'intégration d'un système de première espèce, dont l'intégrale générale dépend de μ constantes arbitraires, se fait par des équations différentielles ordinaires et exige les opérations d'ordres successifs

$$\mu, \quad \mu - 1, \quad \ldots, \quad 2, \quad 1.$$

Conformément aux idées émises au début de ce Mémoire, nous constatons que le degré de difficulté des opérations à effectuer pour arriver à l'intégration ne dépend que de μ. Autrement dit :

Deux systèmes de première espèce, ayant le même degré d'indétermination, s'intègrent par des opérations du même ordre.

La méthode d'intégration ainsi obtenue est distincte de celle indiquée par M. Bourlet. Ces deux méthodes ne conduisent pas aux mêmes calculs, mais les opérations successives qu'elles exigent sont du même ordre.

Prenons comme exemple un cas très simple déjà traité par M. Bourlet et qui permettra de faire la comparaison

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial y},$$

a étant une constante.

Ce système se met immédiatement sous forme canonique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial z};$$

il y a deux constantes arbitraires q^0 et z^0.

Ajoutons une équation complémentaire

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(x, y, z).$$

On aura le système Σ''

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Il n'est même pas nécessaire, pour en avoir une solution dépendant d'une constante arbitraire, d'appliquer la méthode générale; on voit immédiatement que, en supposant φ indépendant de x et y, les deux équations se réduisent à une seule

$$\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial z} = \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

qui s'intègre immédiatement et donne

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{a} f(z) + C}.$$

On est ramené à intégrer le système Σ' du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\sqrt{\frac{2}{a} f(z) + C},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \quad \sqrt{\frac{1}{a} f(z) + C},$$

dont l'intégrale générale est évidemment

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{2}{a} f(z) + C}} = ax + y + C'.$$

Remarquons, en terminant ce paragraphe, que l'application de la méthode n'exige pas que Σ ait été mis sous forme canonique, mais seulement qu'on ait déterminé toutes les équations jusqu'à l'ordre n où l'on a toutes les dérivées de toutes les inconnues.

8. *Transformation particulière dans le cas général.* — Puisque les systèmes de première espèce s'intègrent par des équations différentielles ordinaires, il est tout naturel maintenant de chercher les systèmes intermédiaires de première espèce. On les obtiendra en écrivant que les équations complémentaires ont, en commun avec le système proposé, une intégrale dépendant d'un nombre limité de constantes arbitraires.

Nous allons particulariser encore un peu plus en procédant de la façon suivante :

Soit Σ un système canonique que nous supposerons n'être pas de première espèce. Soit n son ordre canonique et γ_i^j ses nombres fondamentaux.

Supposons qu'on le prolonge jusqu'à un ordre n' supérieur à n et que, dans $\Sigma^{n'}$, on désigne par $\tau_1, \tau_2, \ldots$ les dérivées par rapport auxquelles sont résolues les équations; par $\eta_1, \eta_2, \ldots$ les dérivées d'ordre inférieur à n', autres que les précédentes, et dont les valeurs initiales sont fournies par les fonctions initiales; par $\xi_1, \xi_2, \ldots$ les dérivées d'ordre inférieur à n', ne figurant pas dans les premiers membres, et dont les valeurs initiales ne sont pas données par les fonctions initiales, et enfin par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ les dérivées d'ordre n' qui ne figurent pas dans les premiers membres. Soit N' le nombre des ζ.

Au système Σ nous ajouterons p équations complémentaires ($p \leqq N'$) d'ordre n', auxquelles on pourra toujours supposer la forme suivante

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots),\\
\zeta_2 &= \varphi_2(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\zeta_p &= \varphi_p(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots),
\end{aligned}$$

et nous imposerons aux fonctions φ la condition que ces équations complémentaires ne donnent dans Σ' aucune équation d'ordre égal ou inférieur à n' distincte de celles de Σ et des équations complémentaires.

Soit Σ'' le système différentiel ainsi obtenu pour déterminer $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$.

D'après le théorème de Cauchy généralisé, il faut, pour déterminer une intégrale de Σ, se donner certaines fonctions et constantes initiales.

Par hypothèse, les constantes sont les valeurs initiales ξ_1^0, ξ_2^0, ... des ξ en $x_1^0, \ldots, x_m^0$.

Les fonctions initiales sont de la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial^{\gamma_1^i+\gamma_2^i+\ldots\gamma_{j-1}^i+\alpha_i^i} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}\,\partial x_2^{\gamma_2^i}\ldots\partial x_{j-1}^{\gamma_{j-1}^i}\,\partial x_j^{\alpha_j^i}}\right)_{x_1=x_1^0,\ \ldots,\ x_j=x_j^0} \qquad (0 \leqq \alpha_j < \gamma_j);$$

désignons-les par

$$\Theta_{\alpha_j^i}(x_{j+1}, \ldots, x_m).$$

Posons

$$\beta_j^i = \gamma_1^i + \gamma_2^i + \ldots + \gamma_{j-1}^i + \alpha_j^i,$$

Θ donnera les valeurs initiales de dérivées qui seront toutes d'ordre β_j^i, au moins, de sorte que si l'on développe $\Theta_{\alpha_j^i}$ en série ordonnée par rapport aux puissances de $x_{j+1} - x_{j+1}^0, \ldots, x_m - x_m^0$, et si l'on sépare les termes qui sont au plus de degré $n' - \beta_j^i$, on aura

$$\Theta_{\alpha_j^i} = P_{\alpha_j^i} + \theta_{\alpha_j^i}$$

et les coefficients du polynome $P_{\alpha_j^i}$ seront les valeurs initiales de certains η et de certains ζ. Quant à ceux de $\theta_{\alpha_j^i}$, ils ne seront jamais que des valeurs initiales de dérivées d'ordre supérieur à n'.

En prenant tous les coefficients des polynomes $P_{\alpha_j^i}$, nous obtiendrons les valeurs initiales de tous les η et de tous les ζ.

Supposons alors qu'on se donne arbitrairement un système de valeurs initiales

$$\xi_1^0, \xi_2^0, \quad \ldots, \quad \eta_1^0, \eta_2^0, \quad \ldots, \quad \zeta_1^0, \zeta_2^0, \quad \ldots$$

pour les ξ, les η et les ζ.

Les polynomes $P_{\alpha_j^i}$ seront déterminés par cela même; donnons-nous arbitrairement des fonctions $\theta_{\alpha_j^i}$ assujetties à la condition d'être développables au point $x_{j+1}^0, \ldots, x_m^0$ et de s'y annuler, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n' - \beta_j^i$. Ces fonctions $\theta_{\alpha_j^i}$ pourront, si l'on veut, dépendre des constantes arbitraires $\xi_1^0, \ldots, \eta_1^0, \ldots, \zeta_1^0, \ldots$.

Nous avons ainsi formé un système de constantes initiales $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots$ et un système de fonctions initiales

$$\Theta_{\alpha_j^i}(x_{j+1}, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots).$$

Le théorème de Cauchy, généralisé, montre qu'à ce système de constantes et fonctions initiales correspond une intégrale de Σ. Cette intégrale dépendra des constantes arbitraires $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0$. Elle sera constituée par un système de formules

$$\begin{aligned}
z_1 &= Z_1(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
z_2 &= Z_2(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z_q &= Z_q(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),
\end{aligned}$$

d'où, par dérivation, on tirera

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= H_1(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
\xi_2 &= H_2(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\eta_1 &= K_1(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
\eta_2 &= K_2(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\zeta_1 &= L_1(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
\zeta_2 &= L_2(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et, d'après la façon même de former les fonctions initiales $\Theta_{\alpha'_i}$, on sait d'avance qu'en faisant $x_1 = x_1^0, \ldots, x_m = x_m^0$, $H_1, H_2, \ldots$ se réduiront respectivement à $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots$, $K_1, K_2, \ldots$ se réduiront respectivement à $\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots$, et enfin $L_1, L_2, \ldots$ se réduiront respectivement à ζ_1^0, $\zeta_2^0, \ldots$.

Considérons une intégrale plus particulière I, obtenue en assujettissant les constantes arbitraires à vérifier les p relations

$$\begin{aligned}
\zeta_1^0 &= \Psi_1(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots),\\
\zeta_2^0 &= \Psi_2(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\zeta_p^0 &= \Psi_p(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots).
\end{aligned}$$

Pour cette intégrale, les fonctions $H_1, H_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, L_1, L_2, \ldots$ deviendront des fonctions $H'_1, H'_2, \ldots, K'_1, K'_2, \ldots, L'_1, L'_2, \ldots$ de x_1, $x_2, \ldots, x_m$, $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots$, et pour $x_1 = x_1^0, \ldots$, $x_m = x_m^0$, les fonctions $H'_1, H'_2, \ldots$ se réduiront respectivement à ξ_1^0, $\xi_2^0, \ldots$, les fonctions $K'_1, K'_2, \ldots$ se réduiront respectivement à η_1^0,

$\eta_2^0, \ldots,$ les fonctions $L'_{p+1}, L'_{p+2}, \ldots$ se réduiront respectivement à $\zeta^0_{p+1}, \zeta^0_{p+2}, \ldots,$ et enfin les fonctions $L'_1, L'_2, \ldots, L'_p$ se réduiront respectivement à $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_p$.

Il en résulte que les équations

$$\xi_1 = H'_1, \quad \xi_2 = H'_2, \quad \ldots, \quad \eta_1 = K'_1, \quad \eta_2 = K'_2, \quad \ldots,$$
$$\zeta_{p+1} = L'_{p+1}, \quad \zeta_{p+2} = L'_{p+2}, \quad \ldots$$

pourront être résolues par rapport à $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta^0_{p+1}, \zeta^0_{p+2}, \ldots$ et donneront les expressions

$$\xi_1^0 = H''_1, \quad \xi_2^0 = H''_2, \quad \ldots, \quad \eta_1^0 = K''_1, \quad \eta_2^0 = K''_2, \quad \ldots,$$
$$\zeta^0_{p+1} = L''_{p+1}, \quad \zeta^0_{p+2} = L''_{p+2}, \quad \ldots,$$

les H'', les K'' et les L'' étant des fonctions de $x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots$ qui, en $x_1^0, \ldots, x_m^0$, se réduisent respectivement à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots$.

Portons ces valeurs de $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta^0_{p+1}, \zeta^0_{p+1}, \ldots$ dans les équations

$$\zeta_1 = L'_1, \quad \zeta_2 = L'_2, \quad \ldots, \quad \zeta_p = L'_p,$$

nous obtiendrons des équations

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \Phi_1(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots),\\
\zeta_2 &= \Phi_2(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\zeta_p &= \Phi_p(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots),
\end{aligned}$$

qui sont bien de la forme imposée aux équations complémentaires et qui seront vérifiées par l'intégrale I. Prenons-les comme équations complémentaires, elles ne pourront jamais donner, dans Σ', une équation d'ordre égal ou inférieur à n' et distincte de celles de Σ, car une telle équation se ramènerait à la forme

$$F(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots) = 0,$$

de sorte que l'on aurait, quels que soient $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta^0_{p+1}, \zeta^0_{p+2}, \ldots,$

$$F(x_1, \ldots, x_m, H'_1, H'_2, \ldots, K'_1, K'_2, \ldots, L'_{p+1}, L'_{p+2}, \ldots) = 0.$$

Il y aurait donc entre $H'_1, H'_2, \ldots, K'_1, K'_2, \ldots, L'_{p+1}, L'_{p+2}, \ldots$, considérées comme fonctions des variables indépendantes $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots$, une relation indépendante de ces variables; autrement dit, on aurait identiquement

$$\frac{D(H'_1, H'_2, \ldots, K'_1, K'_2, \ldots, L'_{p+1}, L'_{p+2}, \ldots)}{D(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots)} = 0,$$

ce qui est faux puisque, pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_m = x_m^0$, ce déterminant fonctionnel se réduit à l'unité.

On en tire immédiatement cette conclusion que les fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ constituent une intégrale du système Σ'', de sorte que *ce système Σ'' est compatible*.

9. Étudions de plus près la dépendance de Σ et Σ''.

Convenons de désigner, d'une façon générale, par I, toute intégrale de Σ dépendant de ν constantes arbitraires

$$\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \quad \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \quad \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \quad \ldots$$

qui seront supposées être les valeurs en $x_1^0, \ldots, x_m^0$ de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots$.

Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ une intégrale de Σ''. Le système Σ' qu'elle détermine admet au moins une intégrale I et, pour cette intégrale, on aura

$$\begin{aligned}
\zeta_1^0 &= \varphi_1(x_1^0, \ldots, x_m^0, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots),\\
\zeta_2^0 &= \varphi_2(x_1^0, \ldots, x_m^0, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\zeta_p^0 &= \varphi_p(x_1^0, \ldots, x_m^0, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\zeta_1^0 = \Psi_1 \qquad \zeta_2^0 = \Psi_2, \qquad \ldots, \qquad \zeta_p^0 = \Psi_p,$$

les Ψ étant des fonctions de $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots$.

En outre, par différentiation, on trouvera, pour cette intégrale I, les fonctions $\Theta_{\alpha_j^i}$ qui dépendront, en général, des x et de $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots$.

Au moyen des fonctions Ψ et de ces fonctions $\Theta_{\alpha_j^i}$, nous pouvons former des fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ solutions de Σ'' et donnant un système Σ' qui admettra l'intégrale I, je dis que l'on a identiquement

$$\varphi_1 = \Phi_1, \qquad \varphi_2 = \Phi_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_p = \Phi_p.$$

En effet, l'intégrale I vérifie les équations

$$\begin{aligned}
&\zeta_1 - \varphi_1 = 0, \qquad \zeta_2 - \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \zeta_p - \varphi_p = 0,\\
&\zeta_1 - \Phi_1 = 0, \qquad \zeta_2 - \Phi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \zeta_p - \Phi_p = 0,
\end{aligned}$$

et, par conséquent, les équations

$$\varphi_1 - \Phi_1 = 0, \qquad \varphi_2 - \Phi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_p - \Phi_p = 0,$$

qui sont toutes de la forme

$$F(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots) = 0$$

et nous avons vu plus haut qu'une intégrale I ne peut vérifier une telle équation.

Les équations

$$\varphi_1 - \Phi_1 = 0, \qquad \varphi_2 - \Phi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_p - \Phi_p = 0$$

sont donc des identités.

Nous arrivons ainsi au résultat suivant :

Les formules donnant l'expression générale des systèmes de fonctions Φ constituent l'intégrale générale de Σ'';

et, par suite,

Si l'on sait intégrer Σ, l'intégration de Σ'' s'en déduit par des calculs algébriques.

On pourrait chercher à étudier *a priori* le degré d'indétermination de Σ'' en étudiant la généralité des fonctions Φ, mais cette étude semble très difficile et n'offre qu'un intérêt relatif. Il est néanmoins intéressant d'avoir une idée de la grandeur de ce degré d'indétermination pour le comparer à celui de Σ.

Supposons, ce qui est le cas général, que Σ' soit de première espèce et admette une seule intégrale I. A chaque intégrale I de Σ correspondra une, et une seule, intégrale de Σ''; deux intégrales I ne pourront jamais donner la même intégrale de Σ''. Or, pour déterminer une intégrale I, il faut se donner arbitrairement les fonctions Ψ de ν variables et les fonctions Θ_{α_j} de $m-j+\nu$ variables, ces fonctions étant assujetties toutefois à quelques petites restrictions. Il figurera donc, dans l'intégrale I, toutes les fonctions arbitraires qui figurent dans l'intégrale générale de Σ; mais, dans chacune de ces fonctions, on aura augmenté de ν le nombre des variables indépendantes et, en plus, il y aura encore les p fonctions arbitraires de ν variables.

Ces remarques suffisent pour faire prévoir que le degré d'indétermination de Σ'' sera, en général, beaucoup plus élevé que celui de Σ et, en outre, le nombre des variables indépendantes y sera plus considérable.

En faisant varier n' et p, on aura une infinité de systèmes Σ''. A chacun d'eux on peut appliquer le même procédé qu'à Σ, ce qui donnera une infinité de systèmes qu'on peut représenter par $(\Sigma'')^2$ et ainsi de suite. Donc :

A tout système Σ correspond une infinité de systèmes

$$\Sigma'', \quad (\Sigma'')^2, \quad (\Sigma'')^3, \quad \ldots,$$

à un nombre de variables de plus en plus grand, d'un degré d'indétermination de plus en plus fort et dont l'intégration se déduit de celle de Σ par des calculs algébriques.

Pour l'application de cette propriété, on peut faire une remarque générale :

Pour former les expressions générales des fonctions Φ, nous devons prendre toutes les intégrales I, c'est-à-dire prendre de toutes les façons possibles une intégrale I contenant ν constantes arbitraires, qui sont supposées être les valeurs initiales de

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \quad \eta_1, \eta_2, \ldots, \quad \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots.$$

Considérons, d'une façon plus générale, une intégrale J contenant ν constantes arbitraires d'une façon quelconque.

Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu.$$

Les expressions de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots$ seront des fonctions de $x_1, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ qui, en général, ne seront liées par aucune relation indépendante des a; de sorte que les a pourront être déterminées en fonction des valeurs initiales $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots$. Supposons les a exprimées au moyen de ces valeurs, il faudrait ensuite éliminer ces constantes initiales entre les équations donnant $\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots$, et celles qui donnent $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$, ce qui revient plus simplement à éliminer les constantes a entre ces équations.

Comme exemple, prenons le système Σ formé par l'équation unique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

et ajoutons-lui deux équations complémentaires du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mathrm{U}(xyzp),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathrm{V}(xyzp),$$

le système Σ'' sera ici

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} = -\frac{1}{q}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - \frac{\mathrm{V}}{q}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q},$$
$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = -\frac{1}{p}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \frac{\mathrm{U}}{p}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p}.$$

C'est un système de M^me Kowalevski dont l'intégrale générale dépend de deux fonctions arbitraires de quatre variables, fonctions qui sont les valeurs initiales de U et V pour $z = 0$.

Il est facile d'avoir l'intégrale générale de Σ''.

Une intégrale I sera ici

$$z = \mathrm{X}(x, a, b, c) + \mathrm{Y}(y, a, b, c)$$

qui donnera

$$p = \mathrm{X}'(x, a, b, c),$$
$$q = \mathrm{Y}'(y, a, b, c).$$

Si l'on élimine a, b, c entre ces trois équations et

$$\mathrm{U} = \mathrm{X}''(x, a, b, c),$$

on aura l'expression de U.

En éliminant a, b, c entre les trois mêmes équations et

$$V = Y''(y, a, b, c),$$

on aurait l'expression générale de V.

Changeons de notation et considérons le système

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_1}{\partial x_1} &= -\frac{1}{x_5}\frac{\partial z_1}{\partial x_3} - \frac{z_2}{x_5}\frac{\partial z_1}{\partial x_5},\\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} &= -\frac{1}{x_4}\frac{\partial z_2}{\partial x_2} - \frac{z_1}{x_4}\frac{\partial z_2}{\partial x_4},\end{aligned}$$

que nous continuerons à appeler Σ''. Son intégrale générale sera définie par le système d'équations

$$\begin{gathered} x_1 = F(x_2, a, b, c) + \Phi(x_3, a, b, c),\\ x_4 = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \qquad x_5 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3},\\ z_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, \qquad z_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}.\end{gathered}$$

Considérons Σ'' et ajoutons-lui les équations complémentaires

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_1}{\partial x_2} &= U_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, z_1, z_2), & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} &= V_2,\\ \frac{\partial z_1}{\partial x_3} &= U_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, z_1, z_2), & \frac{\partial z_2}{\partial x_3} &= V_3,\\ \frac{\partial z_2}{\partial x_4} &= U_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, z_1, z_2), & \frac{\partial z_2}{\partial x_4} &= V_4,\\ \frac{\partial z_2}{\partial x_5} &= U_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, z_1, z_2), & \frac{\partial z_2}{\partial x_5} &= V_5.\end{aligned}$$

Nous arriverons à un système Σ''^2 à huit inconnues et sept variables. Ce système est très compliqué, il est inutile de le former ici. Néanmoins nous pouvons facilement former son intégrale générale. Relativement à Σ''^2, les intégrales I de Σ'' ne doivent contenir que deux constantes arbitraires, car les ξ, les η et les ζ se réduisent à z_1 et z_2.

L'intégrale générale de Σ''^2 sera donc constituée par les équations simultanées

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} & x_1 = \mathrm{F}(x_2, a, b, c, d, e) + \Phi(x_3, a, b, c, d, e),\\ & x_4 = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2}, \qquad x_5 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3},\end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad z_1 = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_2^2}, \qquad z_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2},$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{U}_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial a}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial c}\right)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_2^2}, & \mathrm{V}_2 &= \left(\frac{\partial a}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial c}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2},\\
\mathrm{U}_3 &= \left(\frac{\partial a}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial c}\right)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_2^2}, & \mathrm{V}_3 &= \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial a}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial c}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2},\\
\mathrm{U}_4 &= \left(\frac{\partial a}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial c}\right)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_2^2}, & \mathrm{V}_4 &= \left(\frac{\partial a}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial c}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2},\\
\mathrm{U}_5 &= \left(\frac{\partial a}{\partial x_5}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x_5}\frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x_5}\frac{\partial}{\partial c}\right)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_2^2}, & \mathrm{V}_5 &= \left(\frac{\partial a}{\partial x_5}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x_5}\frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x_5}\frac{\partial}{\partial c}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2};
\end{aligned}\right.$$

ce qui signifie que des équations (1) on doit tirer a, b, c, en considérant d et e comme des constantes : on trouve ainsi pour a, b, c des fonctions de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, d, e, puis porter ces valeurs dans les équations (2) et (3); des équations (2) ainsi transformées, tirer d et e et porter dans les équations (3). On peut ramener ce système à un système ordinaire où il suffit d'éliminer des inconnues sans les distinguer. Pour cela, on prendra comme inconnues auxiliaires les dérivées a_2, a_3, a_4, a_5, b_2, b_3, b_4, b_5, c_2, c_3, c_4, c_5, de a, b, c par rapport à x_2, x_3, x_4, x_5, nouvelles inconnues qui seront déterminées par les équations qu'on obtiendra en dérivant les équations (1) par rapport à x_2, x_3, x_4, x_5, en y considérant d et e comme des constantes; les expressions de U_2, U_3, U_3, U_4, U_5, V_2, V_3, V_4, V_5 contiendront

$$\begin{gathered} x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\quad z_1,\ z_2,\quad a,\ b,\ c,\ d,\ e,\\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\quad b_2,\ b_3,\ b_4\ b_5,\quad c_2,\ c_3,\ c_4\ c_5,\end{gathered}$$

et il faudra y remplacer les dix-sept quantités

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\quad a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\quad b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\quad c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5$$

par leurs valeurs tirées des cinq équations (1) et (2) et des douze équations obtenues en dérivant les trois équations (1) par rapport à x_2, x_3, x_4, x_5.

L'intégrale générale de Σ''^2 est alors sous la même forme que celle de Σ''. On pourrait refaire sur elle le même raisonnement et former de la même façon l'intégrale générale d'un système Σ''^3 et ainsi de suite.

On peut, dans certains cas, présenter ces résultats d'une autre façon. Considérons une équation de second ordre à deux variables

$$s = f(xyzpq),$$

ajoutons-lui deux équations complémentaires du second ordre

$$r = \mathrm{U}(xyzpq),$$
$$t = \mathrm{V}(xyzpq),$$

le système Σ'' sera ici

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + q\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} + f\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial p} + \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \mathrm{U}\frac{\partial f}{\partial p} + f\frac{\partial f}{\partial q},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial p} + \mathrm{V}\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} + \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p} + f\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q};$$

de la première on tire

$$\mathrm{V} = \frac{1}{\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \mathrm{U}\frac{\partial f}{\partial p} + f\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - q\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} - f\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial p}\right);$$

en portant dans la seconde on obtiendra une équation E du second ordre à l'inconnue U et aux cinq variables x, y, z, p, q, équation qui sera linéaire par rapport aux dérivées du second ordre.

Si l'on sait intégrer l'équation $s = f$, on saura en déduire l'intégration de E. Ainsi, à toute équation du second ordre et à deux variables que l'on sait intégrer, correspond une équation du second ordre et à cinq variables qui s'intègre en même temps.

Par exemple, en partant de l'équation simple $s = 0$, nous arrivons à l'équation

$$\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_2 \partial x_5} + x_4\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_1 \partial x_5} + \mathrm{U}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_4 \partial x_5}\right)$$
$$= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_3}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_2 \partial x_3} + x_5\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_1 \partial x_2} + x_4\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_1 \partial x_3} + \mathrm{U}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_2 \partial x_4} + \mathrm{U}x_5\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_1 \partial x_4}\right).$$

Et nous savons que son intégrale générale s'obtient en éliminant a, b, c

entre

$$x_1 = \mathrm{F}(x_2, a, b, c) + \Phi(x_3, a, b, c),$$
$$x_4 = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2}, \qquad x_5 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3},$$
$$\mathrm{U} = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_2^2}.$$

10. Nous avons vu comment, de l'intégration de Σ, on déduisait celle de Σ''. Proposons-nous maintenant la question inverse. Supposons qu'on sache intégrer Σ'' et cherchons comment celle de Σ en résultera.

Il nous faut naturellement supposer que le système intermédiaire Σ' soit de ceux qu'on sait intégrer. Nous ne savons intégrer, comme système d'ordre quelconque, que les systèmes de première espèce.

Nous supposerons donc que Σ' est de première espèce. En général, il en sera ainsi si Σ n'est pas un système choisi d'une façon particulière.

Par exemple Σ' sera toujours de première espèce quand on prendra $p = \mathrm{N}'$.

Soit I_1 une intégrale de Σ déterminée par des constantes et fonctions initiales comme l'indique le théorème de Cauchy généralisé. Pour I_1, les fonctions $\theta_{\alpha_i^j}$ seront des fonctions que nous appellerons $\theta^1_{\alpha_i^j}$ et les constantes désignées par $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots$, auront les valeurs $\xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \eta_1^1, \eta_2^1, \ldots, \zeta_1^1, \zeta_2^1, \ldots$.

Chaque intégrale J de Σ'' détermine un système Σ' et, par conséquent, une intégrale I et réciproquement; étant donnée *a priori* une intégrale I, il y a toujours une intégrale J qui la fournit.

Le problème revient donc à déterminer une intégrale J telle que l'intégrale I qui lui correspond contienne l'intégrale I_1.

Ce problème peut se résoudre d'une infinité de manières. Une intégrale I est déterminée complètement quand on se donne les fonctions $\theta_{\alpha_i^j}$ et les fonctions $\Psi_1, \ldots, \Psi_p$. Pour que cette intégrale contienne I, il faut et il suffit que, pour une détermination convenable des constantes arbitraires qui y figurent, ses fonctions et constantes initiales se réduisent à celles de I_1.

Supposons que les constantes arbitraires figurant dans I soient celles qui ont été désignées par

$$\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \quad \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \quad \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots.$$

Il faudra qu'en donnant à ces arbitraires les valeurs

$$\xi_1^1,\ \xi_2^1,\ \ldots,\ \eta_1^1,\ \eta_2^1,\ \ldots,\ \zeta_{p+1}^1,\ \zeta_{p+2}^1,\ \ldots$$

les fonctions $\theta_{\alpha_j^i}$ se réduisent aux fonctions $\theta_{\alpha_j^i}^1$ et que les fonctions $\Psi_1, \ldots, \Psi_p$ prennent respectivement les valeurs $\zeta_1^1, \ldots, \zeta_p^1$.

Il y a une infinité de façons de prendre les fonctions $\theta_{\alpha_j^i}$ et les fonctions Ψ satisfaisant à ces conditions. Chacune d'elles fournira une intégrale I contenant I_1, et chacune des intégrales I fournira une intégrale J. Donc :

Étant donnée une intégrale I_1 *du système* Σ, *il y a une infinité d'intégrales* J *du système* Σ'' *qui permettent de la calculer.*

Parmi toutes ces intégrales J, il est naturel de prendre celle qui est déterminée de la façon la plus simple; on l'obtiendra évidemment en prenant pour fonctions $\theta_{\alpha_j^i}$ les fonctions $\theta_{\alpha_j^i}^1$ elles-mêmes, et comme fonctions Ψ les constantes $\zeta_1^1, \zeta_2^1, \ldots, \zeta_p^1$.

Soit J′ l'expression générale des intégrales J ainsi obtenues, c'est-à-dire en laissant arbitraires les fonctions $\theta_{\alpha_j^i}^1$ et les constantes $\zeta_1^1, \zeta_2^1, \ldots, \zeta_p^1$.

Si l'on ne tient pas compte des constantes arbitraires qui entrent dans J′, on peut dire que le degré d'indétermination de J′ est moindre que ϖ'' puisque J′ ne contient que des fonctions arbitraires de $m-1$ variables au plus, tandis que l'intégrale générale de Σ'' contient des fonctions arbitraires de $m+\nu-1$ variables. J′ est donc une intégrale très particulière de Σ''. Donc :

Pour intégrer Σ, *il n'est pas nécessaire de savoir trouver toutes les intégrales de* Σ'', *il suffit d'en connaître l'intégrale particulière* J′.

Ce résultat conduit à une conséquence intéressante relativement à Σ''.

Supposons qu'on connaisse l'intégrale particulière J′, on sait alors, par des équations différentielles ordinaires, intégrer complètement Σ et il en résulte, sans aucune nouvelle intégration, la connaissance de toutes les intégrales de Σ''. Ces systèmes possèdent donc la propriété suivante :

Dès que l'on connaît l'intégrale particulière J′ *d'un système* Σ'', *on* *peut, par des équations différentielles ordinaires, en déduire l'intégrale générale de ce système.*

L'intégrale J', que nous avons choisie, est commode parce qu'on voit immédiatement son degré d'indétermination, mais elle n'est pas la seule à posséder la propriété précédente. On obtiendra une infinité d'intégrales J' en procédant comme il suit :

Choisissons arbitrairement des fonctions

$$\varepsilon_{\alpha_j^i}(x_{j+1}, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots, \xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \eta_1^1, \eta_2^1, \ldots, \zeta_{p+1}^1, \zeta_{p+2}^1, \ldots)$$

assujetties à s'annuler identiquement si l'on y fait

$$\xi_1^0 = \xi_1^1, \quad \xi_2^0 = \xi_2^1, \quad \ldots, \quad \eta_1^0 = \eta_1^1, \quad \eta_2^0 = \eta_2^1, \quad \ldots,$$
$$\zeta_{p+1}^0 = \zeta_{p+1}^1, \quad \zeta_{p+2}^0 = \zeta_{p+2}^1, \quad \ldots$$

et des fonctions

$$\chi(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots, \xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \eta_1^1, \eta_2^1, \ldots, \zeta_{p+1}^1, \zeta_{p+2}^1, \ldots)$$

en nombre p et également assujetties à s'annuler identiquement dans les mêmes conditions que les précédentes.

Les fonctions

$$\theta_{\alpha_j^i} = \theta_{\alpha_j^i}^1 + \varepsilon_{\alpha_j^i},$$
$$\psi_1 = \zeta_1 + \chi_1, \quad \psi_2 = \zeta_2 + \chi_2, \quad \ldots, \quad \psi_p = \zeta_p + \chi_p$$

définiront une intégrale I, laquelle contiendra I_1 et conduira à une intégrale J' contenant les fonctions arbitraires $\theta_{\alpha_j^i}^1$ et les constantes arbitraires $\xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \eta_1^1, \eta_2^1, \ldots, \zeta_1^1, \zeta_2^1, \ldots$.

On pourrait définir d'une façon encore plus générale les intégrales J', mais ce qui précède suffit pour nous montrer que ces intégrales J' ne sont pas des intégrales d'une forme particulière, mais seulement des intégrales contenant des arbitraires en nombre suffisant pour qu'on puisse considérer certaines quantités (fonctions ou constantes), formées au moyen de J', comme complètement arbitraires.

En laissant peut-être échapper des solutions particulières de Σ'', on pourra exprimer le fait précédent en disant que J' est une intégrale particulière de Σ'', assujettie à avoir un certain degré d'indétermination.

La propriété fondamentale des intégrales J′, des systèmes Σ'', met en évidence cette propriété :

Un système Σ'' s'intègre par des équations différentielles ordinaires dès qu'on en connaît une intégrale particulière ayant un certain degré d'indétermination.

Étant donnée une équation différentielle ordinaire, linéaire et d'ordre p, on sait former immédiatement son intégrale générale quand on en connaît $p+1$ intégrales.

De même, étant donné un système jacobien, son intégrale générale se forme immédiatement au moyen d'un nombre limité d'intégrales.

Enfin, on obtient, sans intégration, l'intégrale générale d'un système canonique du premier ordre à une inconnue quand on en connaît une intégrale complète, c'est-à-dire dépendant d'un nombre déterminé de constantes arbitraires.

En dernier lieu, il y a les équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, mais linéaires et homogènes par rapport à l'inconnue et toutes ses dérivées, et pour lesquelles la connaissance de certaines intégrales particulières permet de former l'intégrale générale au moyen de quadratures partielles.

Dans les trois premiers cas, on passe des intégrales particulières à l'intégrale générale, sans aucune intégration, et dans le quatrième, on y passe au moyen d'une quadrature partielle. La propriété que nous venons de donner pour Σ'' montre que ces systèmes doivent être mis à la suite de ceux que nous venons de citer, puisque le passage de l'intégrale particulière J′ à l'intégrale générale exige l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

Cette propriété des systèmes Σ'' est intéressante parce que, en général, la connaissance d'intégrales particulières n'est d'aucune utilité pour la recherche de l'intégrale générale.

Supposons maintenant qu'on passe aux systèmes $(\Sigma'')^2$ déduits des systèmes Σ'' comme ceux-ci ont été déduits de Σ. Si on leur appliquait directement la propriété que nous venons de démontrer, on serait conduit à dire que leur intégration s'achève quand on en connaît une intégrale particulière qui, abstraction faite des constantes arbitraires, a un degré d'indétermination égal à celui de Σ''. On peut aller beaucoup plus loin en remarquant que Σ''^2 s'intègre immédiatement quand on sait intégrer Σ, ce qui nécessite, non pas la connaissance de toutes les intégrales de Σ'', mais seulement la connaissance d'une intégrale J' de ce système.

A chaque intégrale J de Σ'' faisons correspondre une intégrale bien déterminée de $(\Sigma'')^2$; à l'intégrale J', dépendant de certaines fonctions arbitraires, correspondra une intégrale de $(\Sigma'')^2$, soit $(J')^2$, dépendant des mêmes fonctions arbitraires et, par conséquent, ayant, en faisant abstraction des constantes arbitraires, même degré d'indétermination que Σ.

Réciproquement, la connaissance de $(J')^2$ permettra, par des équations différentielles ordinaires, de retrouver J', d'où, par de nouvelles équations différentielles ordinaires, on déduira l'intégrale générale de Σ, laquelle fournira, sans aucune nouvelle intégration, l'intégrale générale de Σ'', puis celle de $(\Sigma'')^2$.

Nous arrivons ainsi au résultat suivant :

Tout système $(\Sigma'')^q$ s'intègre par des équations différentielles ordinaires dès qu'on en connaît une intégrale particulière $(J')^q$.

Pour tous les systèmes $(\Sigma'')^q$ provenant d'un même système Σ, l'intégrale particulière $(J')^q$ a toujours, abstraction faite des constantes arbitraires, le même degré d'indétermination qui est celui de Σ.

Ce fait, que le degré d'indétermination de l'intégrale particulière qui permet l'intégration soit le même pour tous les systèmes $(\Sigma'')^q$ provenant de Σ, est remarquable, car les systèmes $(\Sigma'')^q$ successifs sont de plus en plus compliqués, ayant un nombre de variables de plus en plus considérable et un degré d'indétermination de plus en plus élevé.

En se plaçant à un autre point de vue, on peut présenter les résultats relatifs aux systèmes successifs $(\Sigma'')^q$ sous la forme suivante :

A tout système Σ correspond une infinité de systèmes Σ'', une infinité de systèmes $(\Sigma'')^2$, ... dont on déduit les intégrales générales de celle de Σ sans aucune intégration. Lorsqu'on sait intégrer l'un quelconque $(\Sigma'')^q$ de ces systèmes, tous les autres se rangent en deux catégories infinies; dans la première, tous les systèmes auront une intégrale générale se déduisant de celle de $(\Sigma'')^q$, sans aucune intégration. Pour avoir les intégrales générales de tous les systèmes de la seconde, il faudra, au moyen d'équations différentielles ordinaires, revenir de l'intégrale générale de $(\Sigma'')^q$ à celle de Σ, et l'on en déduira, sans intégration, les intégrales générales cherchées.

A ce point de vue, ces résultats présentent certaines analogies avec les suites d'équations linéaires auxquelles on arrive par l'application de la méthode de Laplace.

11. *Intégration des systèmes différentiels dont l'intégrale générale ne dépend que d'une seule fonction arbitraire d'un seul argument.* — Pour que Σ soit dans ces conditions, il faut que l'on ait

$$\Gamma_1 = 1, \qquad \Gamma_2 = \Gamma_3 = \ldots = 0,$$

autrement dit, tous les γ_j^i $(i < m - 1)$ doivent être nuls et tous les γ_{m-1}^i doivent être nuls, sauf un qui doit être égal à 1.

Soit

$$\gamma_{m-1}^1 = 1.$$

Tous les ensembles $E_j''(j > 1)$ seront complets et, à l'ensemble E_1'', il ne manquera qu'un terme pour être complet.

Prenons une équation complémentaire d'ordre n et appliquons la transformation.

Σ'' sera un système linéaire à une inconnue, on doit l'intégrer par des équations différentielles ordinaires et l'on est ramené à l'intégration de Σ', qui est de première espèce et qui, par conséquent, s'intègre encore par des équations différentielles ordinaires.

En vertu des remarques du n° 10, il n'est pas nécessaire d'intégrer complètement Σ'', il suffit d'en connaître une intégrale dépendant d'une fonction arbitraire d'un seul argument. On ramènera l'intégration de Σ'' à celle d'une seule équation linéaire dont l'intégration se fera par un système d'équations différentielles ordinaires, et il suffira de chercher deux intégrales indépendantes de ce système.

Nous obtenons ainsi :

Tout système différentiel, dont l'intégrale générale dépend d'une seule fonction arbitraire d'un seul argument, s'intègre par des équations différentielles ordinaires.

Résultat qui avait déjà été obtenu, par M. Beudon [1], par une généralisation de la méthode des caractéristiques.

12. *Méthode de Jacobi et Mayer, pour l'intégration des systèmes non linéaires du premier ordre et à une inconnue.*

Soit Σ_μ un tel système, formé de μ équations,

$$\Sigma_\mu \begin{cases} p_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_\mu = f_\mu(x_1, \ldots, x_m, z, p_{+\mu 1}, \ldots, p_m). \end{cases}$$

Ajoutons une équation complémentaire

$$p_{\mu+1} = f_{\mu+1}(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+2}, \ldots, p_m).$$

Nous savons que les conditions d'intégrabilité d'un système du premier ordre sont elles-mêmes du premier ordre. Si donc $\Sigma_{\mu+1}$, formé par l'ensemble de Σ_μ et de $p_{\mu+1} = f_{\mu+1}$ n'était pas canonique, il en résulterait de nouvelles équations du premier ordre, de sorte que Σ''_μ s'obtiendra en écrivant que $\Sigma_{\mu+1}$ est canonique.

Supposons qu'on passe aux équations du second ordre de $\Sigma_{\mu+1}$, les conditions d'intégrabilité de Σ_μ étant vérifiées, les équations du second ordre obtenues par dérivation des équations de Σ_μ se réduiront au nombre qui est nécessaire pour déterminer toutes les dérivées

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu;\ k = 1, 2, \ldots, m).$$

Les dérivées de l'équation $p_{\mu+1} = f_{\mu+1}$, par rapport à $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$, permettront de calculer les dérivées de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mu+1} \partial x_\rho} \qquad (\rho = \mu + 1, \ldots, m);$$

de sorte qu'on obtiendra ainsi une fois et une seule toutes les dérivées de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu + 1;\ k = 1, 2, \ldots, m).$$

---

[1] Beudon, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1896).

Pour que $\Sigma_{\mu+1}$ soit canonique, il suffit donc que les équations obtenues en dérivant $p_{\mu+1}-f_{\mu+1}=0$, par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, ne permettent pas de calculer d'autres dérivées; autrement dit, que les équations d'intégrabilité obtenues en combinant l'équation complémentaire, successivement avec toutes les équations de Σ_μ, soient les conséquences algébriques de $\Sigma_{\mu+1}$.

Le calcul fait pour trouver les équations d'intégrabilité d'un système complètement résolu montre, sans qu'il soit nécessaire de le modifier profondément, que les équations d'intégrabilité seront

$$[p_1-f_1, p_{\mu+1}-f_{\mu+1}]=0, \qquad \ldots, \qquad [p_\mu-f_\mu, p_{\mu+1}-f_{\mu+1}]=0.$$

On devra développer ces équations, puis y remplacer $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, $p_{\mu+1}$ respectivement par

$$\begin{gathered} f_1(x_1, \ldots, x_m, z, f_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu(x_1, \ldots, x_m, z, f_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_m), \\ f_{\mu+1}(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+2}, \ldots, p_m), \end{gathered}$$

et l'on aura ainsi Σ''.

Σ'' est donc bien linéaire et du premier ordre, et l'on voit qu'il est composé de μ équations résolues par rapport à

$$\frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_\mu}.$$

Pour montrer que Σ'' *tel qu'il est obtenu est canonique*, il suffit de montrer que Σ'' possède une intégrale se réduisant, pour $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0, \ldots, x_\mu=x_\mu^0$, à une fonction donnée à l'avance

$$U(x_{\mu+1}, \ldots, x_m, z, p_{\mu+2}, \ldots, p_m).$$

Or, une intégrale de Σ'' s'obtient en partant d'une intégrale I de Σ, provenant d'une fonction arbitraire

$$\Theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m, \alpha, \beta_2, \ldots, \beta_m)$$

et éliminant $\alpha, \beta_2, \ldots, \beta_m$ entre les valeurs de z, $\frac{\partial z}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_m}$.

Pour avoir cette relation, dans laquelle on aurait fait $x_1=x_1^0, \ldots,$

$x_\mu = x_\mu^0$, on peut donner à $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ ces valeurs avant de faire l'élimination ; ce qui conduit à éliminer α, $\beta_2, \ldots, \beta_m$ entre

$$z = \theta, \qquad p_{\mu+1} = \frac{\partial\theta}{\partial x_{\mu+1}}, \qquad \ldots, \qquad p_m = \frac{\partial\theta}{\partial x_m}.$$

Pour que cette élimination conduise à

$$p_{\mu+1} = \mathrm{U},$$

il faut que l'on ait, quels que soient $x_{\mu+1}, \ldots, x_m, \alpha, \beta_2, \ldots, \beta_m$,

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_{\mu+1}} = \mathrm{U}\left(x_{\mu+1}, \ldots, x_m, \theta, \frac{\partial\theta}{\partial x_{\mu+2}}, \ldots, \frac{\partial\theta}{\partial x_m}\right),$$

équation qui donne des fonctions θ dépendant d'autant de constantes arbitraires que l'on veut, de sorte que la propriété annoncée est démontrée.

Comme on le sait, cette propriété de Σ'' fournit immédiatement la méthode de Jacobi et Mayer, qui se trouve ainsi démontrée par des considérations générales sans faire appel aux propriétés particulières des expressions $[\mathrm{F}, \Phi]$ et sans faire de distinction entre le cas où z figure et le cas où z ne figure pas dans le système proposé.

La seule simplification qui se produise quand on passe du cas général au cas où z ne figure pas, est que les systèmes d'équations différentielles ordinaires dont il faudra toujours chercher une intégrale auront chaque fois une équation de moins.

III.

Transformation générale. Méthode de M. Darboux.

13. Dans la transformation générale, on doit former Σ'' en écrivant que les équations complémentaires fournissent avec Σ un système Σ' ayant un degré d'indétermination ϖ' donné à l'avance.

Pour que l'on obtienne ainsi une véritable transformation, il faut que Σ' soit un des systèmes généraux que l'on sait intégrer de façon que le problème de l'intégration de Σ puisse être considéré comme uniquement ramené à celui de l'intégration de Σ''.

Les systèmes considérés par M. Beudon, et dont l'intégrale générale ne contient que des constantes arbitraires et une fonction arbitraire d'un seul argument, sont, actuellement, les systèmes les plus généraux que l'on sait intégrer par des équations différentielles ordinaires; il est donc naturel de chercher à obtenir, pour Σ', un système de cette nature.

En général, la méthode ne réussit pas, parce que Σ'' n'a pas un degré d'indétermination suffisant pour qu'on puisse obtenir toutes les intégrales de Σ, de sorte que nous devons chercher à nous arranger de façon que Σ'' ait un degré d'indétermination aussi grand que possible.

Supposons qu'en prenant p équations complémentaires

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_p = 0,$$

on arrive à Σ'' ayant un degré d'indétermination suffisant pour pouvoir obtenir toutes les intégrales de Σ. C'est dire que, I désignant une intégrale quelconque de Σ, on peut déterminer les arbitraires qui figurent dans les f de façon que Σ et les équations $f = 0$ aient en commun une intégrale dépendant d'une fonction arbitraire et d'un certain nombre déterminé de constantes arbitraires et se réduisant à I pour une détermination convenable de ces arbitraires. En particulier, cette intégrale dépendant d'une fonction arbitraire et de constantes arbitraires est commune à Σ et à $f_1 = 0$ et la fonction f_1 dépendant des arbitraires fournies par l'intégration de Σ'' est l'intégrale générale d'un système différentiel σ'' qu'on sait former par l'élimination de $f_2, \ldots, f_p$ dans Σ''.

On peut donc dire qu'en ajoutant la seule équation complémentaire $f_1 = 0$ et en assujettissant f_1 à vérifier le système σ'' on peut retrouver toutes les intégrales de Σ.

Considérons alors le système Σ''_1 auquel on serait conduit en appliquant la méthode avec la seule équation complémentaire $f_1 = 0$. Pour exprimer que $f_1 = 0, \ldots, f_p = 0$ ont en commun avec Σ une intégrale dépendant d'une fonction arbitraire et de constantes arbitraires, il nous faut d'abord exprimer la propriété pour $f_1 = 0$, ce qui donne Σ''_1 et conduit à un système Σ'_1, puis exprimer que $f_2 = 0, \ldots, f_p = 0$ ont en commun avec Σ'_1 une intégrale dépendant encore d'une fonction arbitraire et de constantes arbitraires, ce qui nous donne un nouveau système σ''_1 contenant $f_1, f_2, \ldots, f_p$. Dans σ''_1 éliminons $f_2, \ldots, f_p$; nous obtiendrons σ''' et le système σ'' sera formé par Σ''_1 auquel on aurait ajouté les équations σ'''.

Il en résulte immédiatement que toute intégrale de σ'' est une intégrale de Σ''_1. Si donc nous savons intégrer Σ''_1, nous aurons certainement toutes les intégrales de σ'' et, par suite, nous en déduirons toutes les intégrales de Σ. Nous sommes ainsi conduit à cette conclusion :

Si la méthode réussit en ajoutant p équations complémentaires $f_1 = 0, \ldots, f_p = 0$, *elle aurait certainement réussi en ajoutant l'unique équation complémentaire* $f_1 = 0$.

La réciproque n'est pas vraie.

Il en résulte que, pour tenter l'intégration d'un système Σ au moyen de systèmes intermédiaires, il faudra ajouter *une* équation complémentaire $f = 0$ et former Σ'' en écrivant que le système Σ' auquel on arrive a une intégrale générale dépendant d'une seule fonction arbitraire d'une seule variable et de certaines constantes arbitraires de nature déterminée.

Nous retombons ainsi sur la méthode de M. Darboux ([1]) présentée dans le cas le plus général et notre exposition montre qu'on y est conduit forcément.

Ainsi *la méthode de M. Darboux apparaît comme étant la méthode la plus naturelle pour tenter l'intégration des systèmes de forme quelconque.*

14. Ici cette méthode se trouve considérablement précisée à cause des connaissances que nous possédons actuellement sur les systèmes différentiels généraux, connaissances qui se réduisaient à bien peu de choses au moment où M. Darboux publiait son remarquable Mémoire.

Faisons d'abord une remarque générale. Nous ajoutons une équation complémentaire $f = 0$, d'ordre ν, et nous écrivons que Σ' a une intégrale générale dépendant d'une fonction arbitraire d'une seule

([1]) DARBOUX, *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Annales de l'École Normale*, 1870).

variable et aussi de certaines constantes arbitraires qui devront être les valeurs initiales de certaines dérivées bien déterminées. Considérons l'équation $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, c'est une équation d'ordre $\nu + 1$ qui contient les arbitraires figurant dans f et dont le premier membre vérifie un système Σ''_i qu'il est facile de former au moyen de Σ''. Toute intégrale I de Σ est contenue dans une intégrale J commune à Σ et $f = 0$ et obtenue en fixant convenablement les arbitraires qui figurent dans f. Cette intégrale J est commune à Σ et $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, de sorte que, quelles que soient les arbitraires qui figurent dans f, Σ et $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ont en commun une intégrale J qui, pour une détermination convenable des arbitraires, contiendra n'importe quelle intégrale de Σ.

Nous pouvons donc dire que s'il existe des équations $f = 0$ d'ordre ν ayant en commun avec Σ une intégrale J pouvant fournir toutes les intégrales de Σ, il existe forcément des équations d'ordre $\nu + 1$ ayant la même propriété, et la réciproque n'est pas vraie.

De sorte que :

Si la méthode de M. Darboux, telle que nous l'avons exposée, réussit en prenant une équation complémentaire d'ordre ν, elle aurait certainement réussi en prenant une équation complémentaire d'ordre $\nu + 1$.

Et comme conséquence immédiate :

La méthode de M. Darboux a d'autant plus de chances de réussir, que l'équation complémentaire est d'un ordre plus élevé.

Si nous renonçons au bénéfice de la proposition précédente, nous pouvons facilement retrouver la forme même sous laquelle M. Darboux a présenté sa méthode ou du moins la forme sous laquelle il l'a appliquée aux équations du second ordre.

Assujettissons l'équation complémentaire, non plus à avoir en commun avec Σ une intégrale ayant un degré d'indétermination fixé à l'avance, mais simplement à avoir en commun avec Σ une intégrale dépendant au moins d'une fonction arbitraire d'une variable et essayons successivement des équations complémentaires d'ordre $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Je dis qu'on pourra, sans restreindre la généralité, assujettir l'équation complémentaire, supposée d'ordre ν, à ne fournir, dans Σ', aucune équation nouvelle d'ordre inférieur à ν.

Pour le voir, supposons qu'en opérant ainsi la méthode n'ait pas réussi pour des équations complémentaires d'ordres $0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$ et supposons que la méthode réussisse au moyen d'une équation complémentaire d'ordre $f_\nu = 0$, d'ordre ν telle que Σ' possède des équations d'ordre inférieur à ν et autres que celles de Σ.

Soit $f_{\nu-i} = 0$ l'une d'elles. $f_{\nu-i}$ dépend des arbitraires dont dépend f_ν et est solution d'un certain système différentiel qu'il sera facile de former au moyen de Σ''_ν. Quels que soient les arbitraires figurant dans f_ν, le système Σ' a une intégrale J dépendant au moins d'une fonction arbitraire d'une variable, et cette intégrale J peut contenir n'importe quelle intégrale de Σ. Mais J étant solution de Σ' est solution de $f_{\nu-i} = 0$; donc, $f_{\nu-i} = 0$ a en commun avec Σ une intégrale J pouvant contenir toute intégrale de Σ. La méthode aurait donc réussi avec une équation complémentaire d'ordre $\nu - i$. D'après les hypothèses faites, cela n'est possible que si cette équation fournit avec Σ des équations nouvelles d'ordre inférieur à $\nu - i$, et l'on pourrait recommencer sur $f_{\nu-i}$ le raisonnement fait sur f_ν. En continuant de la sorte, on arriverait forcément à en conclure que la méthode aurait réussi en ajoutant une équation complémentaire d'ordre 0, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si donc, appliquée comme nous venons de l'exposer en dernier lieu, la méthode ne réussit pas pour des équations complémentaires d'ordres $0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$, elle ne peut réussir que pour des équations complémentaires d'ordre ν ne fournissant pas d'équations nouvelles d'ordre inférieur à ν, de sorte que nous ne diminuons pas la généralité de la méthode en imposant à f_ν la condition de ne pas fournir de telles équations.

En opérant ainsi, le système Σ' auquel on arrivera aura une intégrale générale qui contiendra, non seulement une fonction arbitraire d'une variable, mais aussi des constantes arbitraires, de sorte que la méthode de M. Darboux suppose essentiellement qu'on sache intégrer de tels systèmes. Or, nous avons vu (n° 11) que ces systèmes s'intégraient par des équations différentielles ordinaires, de sorte que :

Si la méthode de M. Darboux réussit avec une équation complémen-

taire $f_\nu = 0$, *dès que l'on a intégré le système* Σ'' *correspondant, on achève l'intégration de* Σ *au moyen d'équations différentielles ordinaires.*

On peut remarquer que le nombre des constantes arbitraires qui figurent dans l'intégrale générale du système intermédiaire Σ' est d'autant plus grand que ν est lui-même plus grand. La théorie générale des systèmes différentiels canoniques va facilement nous donner la raison de ce fait et nous en montrer la nécessité.

Pour plus de netteté, supposons que Σ soit à une seule inconnue z et proposons-nous de chercher une équation complémentaire $f_\nu = 0$, ayant en commun avec Σ une intégrale J_p dépendant de p constantes arbitraires et d'une fonction arbitraire d'une seule variable. Le système Σ' aura pour intégrale générale une intégrale J_p. La fonction arbitraire figurant dans cette intégrale générale sera la valeur à laquelle se réduira z pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_{m-1} = x_{m-1}^0$, et cette fonction initiale fera connaître les valeurs initiales (en $x_1^0, \ldots, x_m^0$) de

$$z, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_m^2}, \ldots.$$

Il faut donc que les équations du système Σ' fassent connaître les valeurs initiales de toutes les autres dérivées à l'exception de p d'entre elles. Soit n' l'ordre canonique de Σ'; les ensembles canoniques, par rapport auxquels est résolu Σ' et qui sont d'ordre inférieur à n', ne contiennent pas de dérivée prise uniquement par rapport à x_m et, au moins, une autre dérivée, sans quoi l'ordre canonique de Σ' serait moindre que n'. A chacun des ensembles d'ordres $1, 2, \ldots, n'-1$ correspond donc, au moins, une dérivée dont la valeur initiale peut être prise arbitrairement. Il y en a ainsi, au moins $n'-1$; comme, par hypothèse, il y en a rigoureusement p, on a

$$p \geqq n' - 1,$$

c'est-à-dire

$$n' \leqq p + 1.$$

Il en résulte que les équations d'ordre $p+1$ de Σ' sont résolues certainement par rapport à toutes les dérivées d'ordre $p+1$, sauf

$$\frac{\partial^{p+1} z}{\partial x_m^{p+1}}.$$

Le raisonnement précédent nous montre qu'il y a une limite que ne peut pas dépasser n' quand on donne p, mais cette limite est beaucoup trop grande. Pour raisonner d'une façon plus générale, nous pourrons dire :

A tout nombre p correspond un nombre p' tel que toutes les équations d'ordre p' de Σ' soient résolues par rapport à toutes les dérivées d'ordre p' de z à l'exception de $\frac{\partial^{p'} z}{\partial x_m^{p'}}$.

Considérons alors les équations d'ordre p' de Σ. Par hypothèse, l'intégrale générale de Σ dépend de plusieurs fonctions arbitraires ou d'une fonction arbitraire de plusieurs variables, ce qui exige qu'à l'ensemble canonique $E_{p'}$ il manque plus d'une dérivée pour être complet; à l'ensemble analogue de Σ' il n'en manque qu'une, de sorte qu'en passant de Σ à Σ' on a ajouté au moins une équation nouvelle d'ordre p'. Soit $f_{p'} = 0$; l'intégrale J_p, qui était commune à Σ et $f_\nu = 0$, vérifie Σ', donc vérifie $f_{p'} = 0$.

Nous venons de montrer l'existence de cette équation nouvelle $f_{p'} = 0$; mais il peut arriver qu'il en existe une d'ordre inférieur à p', soit $f_{\nu'} = 0$. Nous pouvons donc dire :

Au système Σ appliquons la méthode de M. Darboux en exprimant que l'équation complémentaire a, en commun avec Σ, une intégrale J_p contenant exactement p constantes arbitraires; au nombre p correspond un nombre p' tel que, si la méthode réussit avec une équation complémentaire $f_\nu = 0$ $(\nu > p')$, il existe certainement une équation $f_{\nu'} = 0$ $(\nu' \leqq p')$ pour laquelle elle aurait réussi.

Ceci nous montre que, dans la recherche des systèmes intermédiaires Σ' dont l'intégrale générale ne contient, en outre de la fonction arbitraire, que p constantes arbitraires, on pourra se borner aux équations complémentaires d'ordre inférieur ou égal à p'. Si la méthode ne réussit pas dans ces conditions, elle ne pourra certainement pas réussir en prenant une équation complémentaire d'ordre supérieur à p' à moins qu'on n'augmente en même temps le nombre p de façon à augmenter p'.

IV.

Transformation par changement d'inconnues.

15. Les principes généraux exposés dans la première Partie de ce Mémoire peuvent s'appliquer d'une autre façon à la transformation des systèmes différentiels.

Dans les Chapitres II et III, nous avons pris des équations complémentaires $f_1 = 0, \ldots, f_p = 0$, dont les premiers membres étaient considérés comme des fonctions indéterminées des quantités qui y figuraient et en exprimant que Σ' possédait un degré d'indétermination donné à l'avance, nous avons été amené à déterminer les inconnues $f_1, \ldots, f_p$ par un système différentiel Σ''.

En suivant les mêmes idées, on peut encore employer le procédé suivant qui est un peu moins général. Au lieu de supposer $f_1, \ldots, f_p$ complètement indéterminées, donnons-nous des fonctions parfaitement déterminées des z et de leurs dérivées et dépendant de certaines fonctions ou constantes arbitraires, et cherchons le système différentiel σ'' que doivent vérifier ces arbitraires pour que Σ' ait le degré d'indétermination voulu. Il est clair que, si σ'' a un degré d'indétermination suffisant et si l'on sait l'intégrer, les fonctions f se trouveront déterminées et l'on sera ramené à l'intégration de Σ'. C'est la même méthode que dans les Chapitres précédents, mais appliquée autrement.

Pour ne considérer que le cas vraiment intéressant, supposons qu'on désigne par $z'_1, z'_2, \ldots, z'_q$ des fonctions de $x_1, \ldots, x_m$ complètement indéterminées et que les f soient des fonctions, données *a priori*, des z, des z' et de certaines de leurs dérivées.

Pour plus de simplicité, bornons-nous au cas où les f ne contiennent pas les dérivés des z' et où l'on a $q' = q$; c'est-à-dire, partons d'équations complémentaires de la forme

$$\varphi_1 = z'_1,$$
$$\varphi_2 = z'_2,$$

les φ étant des fonctions données à l'avance des z et de certaines de leurs dérivées.

Commençons par écrire que Σ' est simplement compatible, c'est-à-dire admet au moins une intégrale; en général, nous arriverons à un système Σ' d'ordre o; soit σ'' le système correspondant aux inconnues z'. Il est évident qu'à toute intégrale I de Σ correspond un ensemble I' de valeurs des z'. Pour les valeurs I', le système Σ' admet au moins l'intégrale I, donc I' est une intégrale de σ''. Le système σ'' est donc certainement compatible, et ses intégrales permettent de trouver toutes celles de Σ.

Supposons que Σ' soit d'ordre o, c'est-à-dire se réduise à

$$\begin{aligned} z_1 &= \psi_1, \\ z_2 &= \psi_2, \\ &\ldots\ldots, \\ z_q &= \psi_q, \end{aligned}$$

les ψ étant des fonctions des z' et de leurs dérivées. On peut dire alors que la transformation est réversible et il en résulte que les expressions des z', qui contiennent au plus les arbitraires figurant dans celles des z, contiennent exactement ces arbitraires sans aucune réduction, sans quoi les expressions des z au moyen des z' montreraient que les z dépendraient d'un nombre moindre d'arbitraires, ce qui voudrait dire que les arbitraires figurant dans les z ne seraient pas toutes essentielles.

Ce résultat fait prévoir que Σ et σ'' auront exactement le même degré d'indétermination. Il serait intéressant d'avoir une démonstration rigoureuse de ce fait, car on en déduirait des propriétés importantes relatives à des transformations de systèmes, et comprenant, comme cas très particulier, des résultats remarquables, obtenus par M. Darboux ([1]) à propos de la méthode de Laplace.

16. Pour terminer, nous allons montrer que le genre de transformations dont nous nous occupons conduit à un résultat remarquable

(1) DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II, Chap. VIII.

relatif à l'application de la méthode de M. Darboux aux systèmes linéaires.

Supposons que Σ soit linéaire par rapport aux inconnues et à toutes leurs dérivées partielles et que l'on connaisse *une équation linéaire* $f = 0$ ayant en commun avec Σ une intégrale dépendant au moins d'une fonction arbitraire, c'est-à-dire qui, ajoutée à Σ, donne un système σ' dont l'intégrale générale contienne au moins une fonction arbitraire.

De l'existence de l'équation $f = 0$ résulte que la méthode de M. Darboux, appliquée au système Σ, réussira certainement.

En effet, au lieu de l'équation complémentaire $f = 0$, prenons

$$f = z',$$

z' étant une fonction indéterminée de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et cherchons à former le système Σ' correspondant.

A cause de la forme linéaire des équations Σ et de la fonction f, les équations de Σ' ne seront que celles de σ' dont on aurait modifié le terme indépendant des z par l'adjonction d'une fonction linéaire de z' et de ses dérivées, et les équations d'intégrabilité, qui étaient identiquement vérifiées dans σ', deviendront uniquement des relations entre ces termes indépendants des z, c'est-à-dire des équations qui constitueront le système σ''.

Ainsi, en écrivant uniquement que Σ et $f = z'$ fournissent un système compatible, nous arrivons forcément à un système Σ' formé par les équations du système σ' dans lesquelles on aurait seulement modifié les termes indépendants des z.

Σ' a donc nécessairement le même degré d'indétermination que σ' puisque ces deux systèmes sont résolus par rapport aux mêmes ensembles canoniques.

Toute solution z' du système σ'' fournira donc une équation $f = z'$ qui aura en commun avec Σ une intégrale ayant le même degré de généralité que celle qui était commune à Σ et $f = 0$. Autrement dit :

Quelle que soit l'intégrale z' du système σ'', $f - z'$ est une solution du système Σ'' de la méthode de M. Darboux.

Il ne reste plus à montrer que l'on peut obtenir ainsi des intégrales de Σ'' permettant de calculer toute intégrale de Σ. La chose est bien évidente. I étant une intégrale quelconque de Σ, calculons la valeur correspondante de z'; ce sera symboliquement

$$f(\mathrm{I}),$$

soit I'. En donnant à z' la valeur I', Σ et $f = z'$ auront l'intégrale I commune, c'est-à-dire formeront un système compatible : donc I' sera solution de σ''. Ainsi, quelle que soit l'intégrale I de Σ, il existe certainement une intégrale I' de σ'' telle que Σ' admette l'intégrale I; $f - z'$ est alors une intégrale de Σ'' qui permet de calculer I.

Cette remarque montre que les systèmes linéaires sont ceux pour lesquels la méthode de M. Darboux a le plus de chances de fournir l'intégration.