ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. BOURLET

Sur les opérations en général et les équations différentielles linéaires d'ordre infini

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 133-190

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__133_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR

LES OPÉRATIONS EN GÉNÉRAL

ET LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE INFINI,

PAR M. C. BOURLET.

C'est en recherchant quelles sont les propriétés de l'opération de la dérivation qui suffisent pour la caractériser que j'ai été amené à faire le travail qui va suivre. Un examen rapide de la question m'avait conduit à cette conclusion que les deux règles qui donnent les dérivées d'une somme et d'un produit, jointes à une certaine condition de continuité, que je définis plus loin, suffisent pour caractériser la dérivation. J'ai été alors conduit, naturellement, à chercher à réduire ces deux conditions et à voir si l'une d'elles ne pourrait pas suffire. J'ai donc, d'abord, étudié les opérations continues, transformant une fonction régulière de n variables en une autre fonction des mêmes variables, qui sont telles que la transformée d'une somme soit la somme des transformées. J'ai ainsi trouvé que toutes celles qui sont uniformes rentrent dans le type général suivant. Soient u une fonction régulière des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et v la fonction transformée; on a la formule

$$v = a_{0,0,\ldots,0}\,u + \sum a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}, \tag{1}$$

où les coefficients $a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ de la série qui figure dans le second membre sont des fonctions données des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En généralisant ensuite la question, j'ai vu que la détermination de toutes les opérations telles qu'il existe une relation *donnée* entre les transformées de deux fonctions *arbitraires* u et v et la transformée de $\pi(u, v)$, $\pi(x, y)$ étant une fonction également *donnée*, se ramenait, très simplement, à la question que je venais de résoudre. Les résultats que j'ai obtenus présentent un certain intérêt philosophique, car ils montrent que toutes les opérations uniformes connues se ramènent, au fond, aux deux opérations suivantes répétées, alternativement, un nombre fini ou infini de fois : l'une est l'opération que je nomme *fonctionnelle*, qui consiste à substituer à une fonction quelconque u la fonction $f(u)$, où f est le symbole d'une fonction bien déterminée qui caractérise l'opération; l'autre est l'opération de la *dérivation*. Ainsi est mis en lumière, une fois de plus, le rôle prépondérant dans l'analyse de ces deux opérations. Pour ne citer ici qu'un exemple, je dirai que l'intégration et, plus généralement, la dérivation d'indice fractionnaire ou négatif, telle que l'a conçue Riemann, se ramènent à ces deux opérations fondamentales.

L'importance du rôle des opérations que je nomme *additives*, c'est-à-dire de celles qui sont définies par l'égalité (1), étant mise en évidence, j'ai fait une étude plus approfondie des opérations de cette nature dans le cas *d'une seule* variable. Une opération additive uniforme à une variable est telle que la transformée v d'une fonction u est donnée par une égalité telle que

$$v = a_0 u + a_1 \frac{du}{dx} + a_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \ldots + a_n \frac{d^n u}{dx^n} + \ldots.$$

Ceci peut s'écrire, symboliquement,

$$v = f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u, \tag{2}$$

en posant

$$f(x, z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

Cette fonction $f(x, z)$, qui caractérise l'opération, est ce que j'appelle la *fonction opérative*. Je signalerai, de suite, ce fait curieux, c'est que cette fonction *n'est pas une fonction entière quelconque* de la variable z, mais qu'elle est toujours *de genre* 0 *ou* 1. Les propriétés de ce symbole opératif peuvent être très utiles dans la théorie des équations différentielles linéaires. J'en montre quelques applications et, en particulier, je signale un type d'équations différentielles linéaires intégrables par des procédés élémentaires, que je crois nouveau.

Le problème de l'inversion d'une opération additive uniforme m'a conduit, tout naturellement, à celui de l'intégration des équations différentielles linéaires d'ordre infini. Si, en effet, dans l'égalité (2) précédente, on se donne v et que l'on cherche u, on est amené à rechercher l'intégrale d'une équation différentielle linéaire qui contient des dérivées de tous ordres. Ces équations peuvent se classer en trois catégories, suivant que le nombre des constantes arbitraires que contient l'intégrale générale est *zéro*, un nombre *fini* ou *infini*. Le classement des équations à coefficients constants est très facile, car *le nombre des constantes arbitraires que contient l'intégrale générale est égal au nombre des zéros de la fonction opérative*. Je suis, d'ailleurs, arrivé à étendre ce théorème aux équations *quelconques* dans le cas où le nombre des zéros, en z, de la fonction opérative $f(x, z)$ est *fini*, quel que soit x.

Pour éviter toute confusion, je me suis permis d'employer le mot nouveau *transmutation* pour désigner une opération de la nature de celles que j'ai étudiées. *Opération* était un terme trop vague et qui se prêtait mal à la formation de mots dérivés. La meilleure expression eût été celle de *transformation;* mais, comme elle est déjà employée dans un sens bien précis, j'ai cru devoir ne pas m'en servir.

I.

Je dis qu'on a défini une *transmutation* dès qu'on a donné un moyen de faire correspondre à toute fonction u, d'une variable x, régulière [1] dans un certain domaine, une ou plusieurs fonctions de la même variable. Cette nouvelle fonction est ce que j'appelle la *transmuée* de u et je la désignerai par un symbole tel que ϖu ou quelque symbole analogue.

---

[1] Je prends pour définition de la fonction *régulière* celle de MM. Méray, Weierstrass, Fuchs, etc. : « Une fonction de la variable x est dite *régulière*, dans le domaine de rayon ρ, autour du point $x = x_0$, si elle est développable en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - x_0$, pour toute valeur de x telle que l'on ait

$$|x - x_0| < \rho .»$$

Une transmutation est donc une opération fort générale qui peut se présenter sous des formes très variées. Ainsi, une substitution à une variable (changement de variable), la dérivation, l'intégration définie ou indéfinie sont des transmutations.

Je donnerai le nom de transmutation *fonctionnelle* à toute transmutation définie de la façon suivante : « Soit $f(z, x)$ une fonction *donnée* des deux variables z et x, que j'appellerai la fonction qui sert de *base* à la transmutation; à toute fonction u, de la variable x, correspondra la fonction $f(u, x)$ de la même variable. » Il pourra arriver que la fonction qui sert de base ne dépende que d'une seule variable, soit z, soit x. En particulier, dans ce dernier cas, la transmutation serait l'opération, évidemment peu intéressante, qui consisterait à faire correspondre à *toute* fonction u la *même* fonction $f(x)$. J'écarterai toujours, dans la suite, ces transmutations exceptionnelles.

Une transmutation sera dite *continue* si elle jouit de la propriété suivante : « Lorsqu'une fonction a une limite, la transmuée de cette fonction a une limite qui est la transmuée de la limite. » En d'autres termes, si une fonction $u(x, h)$, dépendant d'un paramètre h, tend vers une certaine limite, lorsque h tend vers une certaine valeur, $\mathfrak{T}u(x, h)$ a aussi une limite, et l'on a

$$\lim[\mathfrak{T}u(x, h)] = \mathfrak{T}[\lim u(x, h)].$$

Remarquons, de suite, que, pour qu'une transmutation fonctionnelle soit continue, il faut et suffit que la fonction $f(z, x)$, qui lui sert de base, soit une fonction continue de z.

Une transmutation sera dite *régulière* lorsque la transmuée de toute fonction régulière sera, *en général*, une fonction régulière. Ainsi, pour qu'une transmutation fonctionnelle soit régulière, il faut et il suffit que la fonction de base $f(z, x)$ soit une fonction régulière des deux variables z et x.

Je ne m'occuperai, dans la suite, que des transmutations continues et régulières.

Enfin, je dirai qu'une transmutation est *uniforme* lorsqu'elle ne fait correspondre à toute fonction régulière u qu'*une seule* fonction transmuée.

Dans le cas contraire, la transmutation sera dite *multiforme*. Ainsi, l'intégration indéfinie est une transmutation multiforme, tandis que l'intégration définie avec une limite inférieure donnée sera une transmutation uniforme.

II.

On connaît, depuis fort longtemps, des exemples de transmutations fonctionnelles définies par une relation entre les transmuées de deux fonctions quelconques et la transmuée de leur somme. Ainsi, trouver la transmutation *fonctionnelle* ϖ, telle que l'on ait

$$\varpi(u+v) = \varpi u + \varpi v, \tag{2}$$

quelles que soient les fonctions u et v, revient à trouver une fonction $f(z, x)$ telle que l'on ait

$$f(u+v, x) = f(u, x) + f(v, x).$$

Or, on sait que la seule fonction continue de la variable z répondant à la question est

$$f(z, x) = az,$$

où a ne dépend pas de z et, par suite, est une fonction donnée de x. La seule transmutation fonctionnelle continue vérifiant la relation (2) est donc celle qui consiste à multiplier la fonction à transmuer par une fonction fixe de la même variable.

De même, la transmutation fonctionnelle qui a pour base a^z, a étant une fonction de x, est la seule transmutation fonctionnelle continue qui vérifie la relation

$$\varpi(u+v) = \varpi u\, \varpi v.$$

D'une manière plus générale, *proposons-nous de trouver une transmutation fonctionnelle continue vérifiant la relation*

$$\varpi(u+v) = \varphi[\varpi u, \varpi v], \tag{3}$$

où u et v sont deux fonctions arbitraires de la même variable et φ une fonction donnée de deux variables.

Il est d'abord aisé de se rendre compte que la fonction φ ne peut pas être quelconque. En effet, en permutant u et v dans la relation (3) et en égalant les deux valeurs de $\varpi(u+v)$, on voit que l'on doit avoir

$$\varphi[\varpi u, \varpi v] = \varphi[\varpi v, \varpi u].$$

Or, si la fonction φ n'est pas symétrique, ceci n'est pas une identité et l'on peut résoudre par rapport à ϖu ou ϖv. En particularisant la fonction v, on en conclurait que ϖu serait, quelle que soit la fonction u, racine d'une certaine équation

$$\psi[\varpi u, x] = 0.$$

La transmutation ϖ serait donc telle qu'elle ferait correspondre à *toute* fonction u la *même* fonction ou un groupe bien déterminé de fonctions *fixes*. De telles transmutations ne présentent évidemment aucun intérêt et nous les écarterons dorénavant. Il faut alors que φ soit une fonction *symétrique*.

Ce n'est pas tout. De la relation (3) on déduit, en désignant par w une nouvelle fonction arbitraire, les deux égalités suivantes

$$\varpi(u + v + w) = \varphi[\varpi u, \varphi(\varpi v, \varpi w)],$$
$$\varpi(u + v + w) = \varphi[\varpi v, \varphi(\varpi u, \varpi w)].$$

De là on conclut qu'on doit avoir, quelles que soient les trois fonctions u, v, w,

$$\varphi[\varpi u, \varphi(\varpi v, \varpi w)] = \varphi[\varpi v, \varphi(\varpi u, \varpi w)].$$

Si la fonction $\varphi[x, \varphi(y, z)]$ des trois variables x, y, z n'est pas symétrique par rapport à ces trois variables, cette égalité n'est pas une identité et, en particularisant les deux fonctions v et w, on en conclurait, comme tout à l'heure, que ϖu est une fonction fixe. Si donc nous écartons toujours ces transmutations banales, il faut que $\varphi[x, \varphi(y, z)]$ soit une fonction symétrique de x, y et z.

Je dirai, pour abréger le langage, qu'une fonction $\varphi(x, y)$ des deux variables x et y est *indéfiniment symétrique*, si les fonctions suivantes $\varphi(x, y)$, $\varphi[x, \varphi(y, z)]$, $\varphi[x, \varphi(y, \varphi(z, t))]$, ... sont toutes des fonctions symétriques par rapport à toutes les variables qu'elles contiennent.

En continuant le raisonnement qui précède, on voit aisément que : *pour que la transmutation ϖ définie par la relation* (3) *ne soit pas la transmutation banale qui fait correspondre à toute fonction une ou plusieurs fonctions déterminées, il faut que la fonction $\varphi(x, y)$ soit indéfiniment symétrique.*

D'après la définition d'une fonction indéfiniment symétrique, il semble qu'une telle fonction doit satisfaire un nombre infini de conditions. Il n'en est heureusement rien, et cela résulte de la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Pour qu'une fonction $\varphi(x, y)$ soit indéfiniment symétrique, il faut et il suffit qu'elle soit symétrique, ainsi que la fonction $\varphi[x, \varphi(y, z)]$.*

Soient, en effet, n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ rangées par ordre d'indices croissants. Remplaçons, dans $\varphi(x_1, x_2)$, x_2 par $\varphi(x_2, x_3)$; dans la nouvelle fonction des trois variables x_1, x_2, x_3 ainsi obtenue, remplaçons x_3 par $\varphi(x_3, x_4)$; et ainsi de suite. Au bout de $n-2$ opérations, nous parviendrons à une fonction $\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et il s'agit de montrer que cette fonction est symétrique par rapport à ses n variables. Or, d'après les hypothèses faites sur la fonction φ, on a

$$\varphi[x_{k-1}, \varphi(x_k, x_{k+1})] \equiv \varphi[x_k, \varphi(x_{k-1}, x_{k+1})]$$

et

$$\varphi(x_{n-1}, x_n) \equiv \varphi(x_n, x_{n-1}).$$

Il en résulte que la fonction $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne change pas quand on permute deux variables *consécutives*. On en conclut, par un raisonnement bien connu, que cette fonction ψ ne change pas quand on permute les n variables d'une façon quelconque.

De tout ce qui précède, on infère que la recherche de toutes les transmutations (fonctionnelles ou non) qui vérifient une relation de la forme (3) doit être précédée de celle de toutes les fonctions de deux variables indéfiniment symétriques. Cette question a été traitée par Abel (1) et la conclusion de son Mémoire, qui est contenue dans l'énoncé du théorème qui suit, nous fournira, en même temps, la solution du problème que je me suis posé au début de ce paragraphe. Voici cet énoncé :

THÉORÈME II. — *Lorsqu'une fonction $\varphi(x, y)$ est indéfiniment symé-*

(1) *Voir* ABEL, *Œuvres*, t. I, Mémoire VI, ou encore *Journal de Crelle*, t. 1; 1826.

trique, on peut trouver une fonction ψ, *d'une seule variable, telle que la relation*
$$\psi[\varphi(x, y)] = \psi(x) + \psi(y)$$
soit identiquement vérifiée.

Cette proposition donne lieu aux deux remarques suivantes :

1° On peut toujours supposer que la fonction ψ dépende d'une constante arbitraire; car, si a désigne une constante abstraite, et si l'on pose
$$\psi_1(t) = a\psi(t),$$
on aura évidemment aussi
$$\psi_1[\varphi(x, y)] = \psi_1(x) + \psi_1(y).$$

2° Il résulte aussi de la proposition d'Abel que l'on peut trouver une fonction $\chi(t)$ d'une seule variable telle que l'on ait l'identité
$$\chi[\varphi(x, y)] \equiv \chi(x)\,\chi(y);$$
car il suffit, pour cela, de poser
$$\chi(t) = e^{\psi(t)}.$$

Théorème III. — $\varphi(x, y)$ *étant une fonction indéfiniment symétrique, il existe toujours une infinité de transmutations fonctionnelles vérifiant la relation*
$$\mathfrak{T}(u + v) = \varphi[\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v],$$
quelles que soient les deux fonctions u *et* v *de la même variable* x.

D'après le théorème d'Abel, il existe une fonction $\psi(z)$ dépendant d'une constante arbitraire a, telle que l'on ait l'identité
$$\psi[\varphi(x, y)] \equiv \psi(x) + \psi(y).$$

Soit alors $\phi(z)$ la fonction inverse de la fonction $\psi(z)$ et u et v des fonctions arbitraires de x. Posons
$$\begin{cases} \phi(u) = u', \\ \phi(v) = v'. \end{cases}$$
On a
$$\psi[\varphi(u', v')] \equiv \psi(u') + \psi(v'),$$

et l'on en conclut, puisque

$$u = \psi(u'),$$
$$v = \psi(v'),$$

$$\psi\left[\varphi[\psi_1(u), \psi_1(v)]\right] \equiv u + v;$$

d'où enfin

$$\psi_1(u + v) \equiv \varphi[\psi_1(u), \psi_1(v)].$$

Cette identité prouve que la transmutation fonctionnelle qui a pour base la fonction $\psi_1(z)$ vérifie la relation

$$\mathfrak{T}(u + v) = \varphi[\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v].$$

D'ailleurs, comme la fonction $\psi_1(z)$ dépend d'une constante arbitraire a, on peut prendre, pour a, une fonction de x, et il en résulte qu'il y a une infinité de transmutations fonctionnelles qui répondent à la question.

La détermination des transmutations fonctionnelles vérifiant la relation (3) revient donc à celle de la fonction $\psi(z)$, et Abel a indiqué, dans son Mémoire, la marche à suivre pour trouver cette fonction.

III.

Je dirai qu'une transmutation est *additive* lorsqu'elle vérifie la relation

$$\mathfrak{T}(u + v) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}v,$$

quelles que soient les deux fonctions u et v de la même variable x.

Les transmutations additives jouent un rôle prépondérant dans l'étude des transmutations qui vérifient une relation donnée. Cela résulte de la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *$\pi(x, y)$ étant une fonction indéfiniment symétrique, la recherche de toutes les transmutations $\mathfrak{T}$ qui vérifient, quelles que soient les deux fonctions u et v, la relation*

$$(1) \qquad \mathfrak{T}[\pi(u, v)] = \varphi(\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v),$$

où $\varphi(x, y)$ est une fonction donnée, se ramène à la recherche des transmutations additives.

On peut d'abord remarquer que, $\pi(x,y)$ étant une fonction indéfiniment symétrique, et si l'on écarte les mêmes transmutations banales que tout à l'heure, $\varphi(x,y)$ doit être également une fonction indéfiniment symétrique. Il existe donc, d'après le théorème III, deux transmutations fonctionnelles $A(u)$ et $B(u)$ telles que l'on ait

$$A(u+v)=\pi[A(u),A(v)] \tag{2}$$

et

$$B(u+v)=\varphi[B(u),B(v)]. \tag{3}$$

Ceci posé, soient u et v deux fonctions quelconques; posons

$$u'=V(u),\qquad v'=V(v),$$

$V(z)$ désignant la fonction inverse de $A(z)$, on aura

$$u=A(u'),\qquad v=A(v'),$$

et, par suite, la relation (1) devient

$$\mathfrak{T}\left[\pi\left(A(u'),B(v')\right)\right]=\varphi[\mathfrak{T}A(u'),\mathfrak{T}A(v')],$$

ou, à cause de l'égalité (2),

$$\mathfrak{T}A(u'+v')=\varphi[\mathfrak{T}A(u'),\mathfrak{T}A(v')]. \tag{4}$$

Désignons, pour abréger, par $\mathcal{S}u$ la transmutation définie par l'égalité

$$\mathcal{S}u=\mathfrak{T}A(u),$$

on aura

$$\mathfrak{T}u=\mathcal{S}V(u)=\mathcal{S}u',$$

et la relation (4) prendra la forme

$$\mathcal{S}(u'+v')=\varphi[\mathcal{S}u',\mathcal{S}v']. \tag{5}$$

Désignons enfin par $\mathcal{R}u$ la transmutation définie par l'égalité

$$\mathcal{R}u=\mathfrak{B}(\mathcal{S}u),$$

$\mathfrak{B}(z)$ étant la fonction inverse de $B(z)$, on aura

$$\mathcal{S}u=B(\mathcal{R}u), \tag{6}$$

et la relation (5) devient enfin

$$(7) \qquad \mathrm{B}\big(\mathcal{R}(u'+v')\big) = \varphi\big[\mathrm{B}(\mathcal{R}\,u'), \mathrm{B}(\mathcal{R}\,v')\big].$$

Or, à cause de l'égalité (3), cette dernière égalité s'écrit

$$(8) \qquad \mathrm{B}\big(\mathcal{R}(u'+v')\big) = \mathrm{B}\big(\mathcal{R}(u') + \mathcal{R}(v')\big),$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{R}(u'+v') = \mathcal{R}\,u' + \mathcal{R}\,v'.$$

La transmutation $\mathcal{R}u$ est donc une transmutation additive. Or, comme

$$\mathfrak{T}u = \mathcal{S}\mathrm{V}(u) = \mathcal{S}\,u',$$

et que

$$\mathcal{S}\,u' = \mathrm{B}(\mathcal{R}\,u'),$$

on en conclut que

$$(9) \qquad \mathfrak{T}u = \mathrm{B}\big(\mathcal{R}\mathrm{V}(u)\big).$$

En résumé, *pour trouver toutes les transmutations* $\mathfrak{T}$ *vérifiant la relation* (1), *il suffira, après avoir déterminé deux fonctions* $\mathrm{A}(z)$ *et* $\mathrm{B}(z)$ *vérifiant les relations* (2) *et* (3), *de trouver toutes les transmutations* additives $\mathcal{R}u$. *Les transmutations cherchées seront alors données par l'égalité* (9).

Il est bon de remarquer ici qu'il n'est pas besoin de connaître *toutes* les fonctions vérifiant les relations (2) et (3), mais qu'il suffit de connaître *une* fonction $\mathrm{A}(z)$ et *une* fonction $\mathrm{B}(z)$.

Ainsi, par exemple, prenons la relation

$$(10) \qquad \mathfrak{T}(u+v) = \mathfrak{T}u\,\mathfrak{T}v;$$

ici

$$\mathrm{A}(z) = z,$$
$$\mathrm{B}(z) = e^z;$$

donc, toutes les transmutations vérifiant la relation (10) sont données par l'égalité

$$\mathfrak{T}u = e^{\mathcal{R}u},$$

$\mathcal{R}u$ étant une transmutation additive.

Considérons encore la relation

$$\mathfrak{T}(uv) = \mathfrak{T}u\,\mathfrak{T}v. \tag{11}$$

Dans ce cas,

$$\mathrm{A}(z) = e^z, \qquad \mathrm{V}(z) = \mathfrak{L}z,$$
$$\mathrm{B}(z) = e^z;$$

par suite, les transmutations vérifiant l'égalité (11) sont données par

$$\mathfrak{T}u = e^{\mathfrak{R}[\mathfrak{L}u]},$$

$\mathfrak{R}u$ étant toujours additive.

Il est bien clair que le théorème précédent ne comprend pas tous les cas de transmutations dont la recherche se ramène à celle des transmutations additives; mais il comprend la généralité des cas où il existe une relation entre $\mathfrak{T}u$, $\mathfrak{T}v$ et la transmuée d'une certaine fonction composée de u et v. C'est ce but restreint que je me suis proposé d'atteindre.

Par exemple, les transmutations définies par la relation suivante, qui ne rentre pas dans le type précédent,

$$\mathfrak{T}(uv) = u\mathfrak{T}v + v\mathfrak{T}u \tag{12}$$

se ramènent cependant aux transmutations additives. Cette relation s'écrit, en effet,

$$\frac{\mathfrak{T}(uv)}{uv} = \frac{\mathfrak{T}u}{u} + \frac{\mathfrak{T}v}{v}.$$

Si l'on désigne alors par $\mathfrak{S}u$ la transmutation

$$\mathfrak{S}u = \frac{\mathfrak{T}u}{u},$$

on est ramené à trouver les transmutations $\mathfrak{S}u$ vérifiant la relation

$$\mathfrak{S}(uv) = \mathfrak{S}u + \mathfrak{S}v,$$

ce qui rentre dans le cas précédent. On a

$$\mathfrak{S}u = \mathfrak{R}(\mathfrak{L}u),$$

et, par suite, toutes les transmutations définies par la relation (12) sont données par l'égalité

$$\mathfrak{C}u = u\,\mathfrak{R}(\mathfrak{L}u),$$

où $\mathfrak{R}$ est le symbole d'une transmutation additive et $\mathfrak{L}$ celui du logarithme népérien.

IV.

Il nous reste donc, en dernière analyse, à trouver la forme générale d'une transmutation additive. Je me bornerai, ce qui est assez naturel, à rechercher celles qui sont uniformes, continues et régulières.

Étant données deux transmutations $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}_1$, j'appelle *produit* de ces deux transmutations la transmutation $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ qui consiste à prendre d'abord la transmuée $\mathfrak{C}_1 u$, puis la transmuée $\mathfrak{C}[\mathfrak{C}_1 u]$ du résultat. On peut évidemment définir ainsi le produit de plusieurs transmutations et, lorsque toutes les transmutations sont identiques, on aura ainsi défini ce qu'on pourra appeler une *puissance* d'une transmutation. Ainsi

$$\mathfrak{C}^3 u = \mathfrak{C}[\mathfrak{C}(\mathfrak{C}u)].$$

Il faut remarquer, de suite, qu'il n'est pas du tout certain que les *facteurs* d'un produit symbolique de transmutations soient commutatifs. Nous verrons, en effet, plus loin, que, pour les transmutations additives, on a, en général,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_1 u) \neq \mathfrak{C}_1(\mathfrak{C}u).$$

Théorème V. — *Le produit de plusieurs transmutations additives est une transmutation additive.*

Car, si $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}_1$ sont des transmutations additives, on a

$$\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1(u+v) = \mathfrak{C}[\mathfrak{C}_1 u + \mathfrak{C}_1 v] = \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 u + \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 v.$$

Le produit de deux transmutations additives donnant une transmutation additive, le théorème est général.

Corollaire. — *Toutes les puissances d'une transmutation additive sont des transmutations additives.*

De la proposition précédente il résulte encore que *les transmutations additives forment un groupe.*

Théorème VI. — *La somme de deux transmutations additives est une transmutation additive.*

Ceci est évident, car si l'on a

$$\mathfrak{T}(u+v) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}v$$

et

$$\mathfrak{T}_1(u+v) = \mathfrak{T}_1 u + \mathfrak{T}_1 v,$$

et, si l'on pose

$$Su = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}_1 u,$$

on a, en ajoutant les relations précédentes,

$$S(u+v) = Su + Sv.$$

Théorème VII. — *Dans toute transmutation additive, la transmuée de zéro est égale à zéro.*

Car si, dans la relation

$$\mathfrak{T}(u+v) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}v,$$

on fait $v = 0$, on en tire

$$\mathfrak{T}u = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}0,$$

d'où

$$\mathfrak{T}0 = 0.$$

Théorème VIII. — $\mathfrak{T}u$ *étant une transmutation additive, uniforme, continue et régulière et* C *une constante arbitraire, on a*

$$\mathfrak{T}(Cu) = C\,\mathfrak{T}u.$$

La proposition est évidente lorsque C est un nombre entier positif, car l'égalité

$$\mathfrak{T}(u+u+u+\ldots+u) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}u + \ldots + \mathfrak{T}u$$

donne

$$\mathfrak{T}(mu) = m\,\mathfrak{T}u.$$

En remplaçant, dans cette égalité, u par $\frac{u}{m}$, on en conclut

$$\mathfrak{T}\frac{u}{m} = \frac{1}{m}\mathfrak{T}u$$

et, par suite,

$$\mathfrak{T}\frac{p}{m}u = \frac{1}{m}\mathfrak{T}pu = \frac{p}{m}\mathfrak{T}u.$$

Ceci prouve le théorème, lorsque C est positif et rationnel. La transmutation $\mathfrak{T}$ étant, par hypothèse, continue, la proposition s'étend, immédiatement, au cas de C positif et irrationnel. Car, soit α_m un nombre rationnel ayant pour limite le nombre irrationnel C, quand m croît indéfiniment; on a, α_m étant rationnel,

$$\mathfrak{T}(\alpha_m u) = \alpha_m \mathfrak{T}u$$

et, à la limite,

$$\lim \mathfrak{T}(\alpha_m u) = \mathfrak{T}[\lim(\alpha_m u)] = \lim[\alpha_m \mathfrak{T}u],$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{T}(\mathrm{C}u) = \mathrm{C}\,\mathfrak{T}u.$$

Enfin, de l'égalité

$$\mathfrak{T}(\mathrm{C}u) + \mathfrak{T}(-\mathrm{C}u) = \mathfrak{T}(\mathrm{C}u - \mathrm{C}u) = \mathfrak{T}0 = 0,$$

on conclut

$$\mathfrak{T}(-\mathrm{C}u) = -\mathfrak{T}(\mathrm{C}u) = -\mathrm{C}\,\mathfrak{T}u,$$

ce qui établit le théorème lorsque C est réel et négatif.

La proposition est donc vraie lorsque C est un nombre *réel* quelconque; il reste à la prouver lorsque C est imaginaire. Or, on a

$$\mathfrak{T}(a+bi)u = a\mathfrak{T}u + b\mathfrak{T}iu,$$

puisque a et b sont réels; il reste donc à prouver que

$$\mathfrak{T}iu = i\mathfrak{T}u.$$

Posons, à cet effet,

$$\mathrm{S}u = \mathfrak{T}u - \frac{1}{i}\mathfrak{T}iu;$$

nous définissons ainsi une transmutation qui est évidemment additive, uniforme, continue et régulière comme $\mathfrak{T}u$. Je dis que cette transmutation est identiquement nulle, c'est-à-dire que l'on a, quelle que soit la fonction u,

$$\mathrm{S}u = 0.$$

S'il n'en était pas ainsi, on aurait

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(a+ib)u &= \mathfrak{T}au - \frac{1}{i}\mathfrak{T}aiu + \mathfrak{T}ibu - \frac{1}{i}\mathfrak{T}(-bu) \\
&= a\left[\mathfrak{T}u - \frac{1}{i}\mathfrak{T}iu\right] - ib\left[\mathfrak{T}u - \frac{1}{i}\mathfrak{T}iu\right] \\
&= (a-ib)\mathrm{S}u.
\end{aligned}$$

Cette transmutation $\mathrm{S}u$ jouirait donc de la propriété que

$$\mathrm{S}(\mathrm{C}u) = \mathrm{C}'\mathrm{S}u,$$

C' étant le nombre imaginaire conjugué de C. Une telle transmutation additive, uniforme, continue et régulière ne saurait exister sans être identiquement nulle. On aurait, en effet,

$$\mathrm{S}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right] = \frac{1}{h'}[\mathrm{S}u(x+h) - \mathrm{S}u(x)],$$

h' étant le nombre imaginaire conjugué de h, et l'on en tirerait

$$\frac{\mathrm{S}u(x+h)-\mathrm{S}u(x)}{h} = \frac{h'}{h}\,\mathrm{S}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right].$$

Or, h' et h étant imaginaires conjugués, si l'on désigne par α l'argument de h, on a

$$\frac{h'}{h} = e^{-2i\alpha},$$

et, par suite,

$$\frac{\mathrm{S}u(x+h)-\mathrm{S}u(x)}{h} = e^{-2i\alpha}\,\mathrm{S}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right].$$

Lorsque h tend vers zéro d'une façon *arbitraire*, la transmutation étant continue et $u'(x)$ désignant la dérivée de la fonction régulière $u(x)$, $\mathrm{S}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]$ a une limite qui est $\mathrm{S}u'(x)$. Le facteur $e^{-2i\alpha}$ peut avoir telle limite qu'on voudra, de même forme, ou même ne pas avoir de limite, suivant la manière dont h tend vers zéro; il en résulte que le quotient $\frac{\mathrm{S}u(x+h)-\mathrm{S}u(x)}{h}$ n'aurait pas de limite, que la fonction transmuée $\mathrm{S}u(x)$ ne serait régulière pour aucune valeur de x et, enfin, que la transmutation $\mathrm{S}u$ ne serait pas régulière.

De tout ceci, il résulte que l'on a

$$Su = \mathfrak{T}u - \frac{1}{i}\mathfrak{T}iu = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{T}iu = i\mathfrak{T}u,$$

quelle que soit la fonction u.

On a donc bien

$$\mathfrak{T}(a+bi)u = a\mathfrak{T}u + b\mathfrak{T}iu = (a+bi)\mathfrak{T}u.$$

V.

Les propriétés que nous venons d'établir, pour les transmutations additives, nous conduiront maintenant rapidement au but.

Théorème IX. — *La seule transmutation additive, uniforme, continue et régulière telle que la transmuée de toute puissance entière et positive de la variable x, y compris $x^0 = 1$, soit égale à zéro, est la transmutation qui est identiquement nulle.*

La transmuée de tout polynome entier sera, en effet, égale à zéro, car

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}[A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m]\\ = A_0\mathfrak{T}x^m + A_1\mathfrak{T}x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}\mathfrak{T}x + A_m\mathfrak{T}1,\end{aligned}$$

et, puisque

$$\mathfrak{T}x^m = \mathfrak{T}x^{m-1} = \ldots = \mathfrak{T}x = \mathfrak{T}1 = 0,$$

il en résulte que

$$\mathfrak{T}[A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m] = 0.$$

Soit alors u une fonction régulière au voisinage de $x = x_0$,

$$u = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_m(x-x_0)^m + \ldots,$$

et posons

$$\varphi_m(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_m(x-x_0)^m;$$

$\varphi_m(x)$ étant un polynome entier en x, on aura, quel que soit m,

$$\mathfrak{T}\varphi_m(x) = 0.$$

Faisons croître m indéfiniment et l'on aura, puisque la transmutation est continue,

$$\mathfrak{T} u = \mathfrak{T}[\lim \varphi_m(x)] = \lim \{ \mathfrak{T} \varphi_m(x) \} = \lim(0) = 0.$$

La transmuée de *toute* fonction régulière u est donc égale à *zéro*.

Théorème X. — *Toute transmutation additive, uniforme, continue et régulière est donnée par la formule*

$$\mathfrak{T} u = \alpha_0 u + \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' + \ldots + \alpha_m u^{(m)} + \ldots,$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ *désignent des fonctions régulières et* $u', u'', \ldots, u^{(m)}, \ldots$ *les dérivées successives de la fonction régulière* u.

Soit, en effet, $\mathfrak{T} u$ une transmutation additive, uniforme, continue et régulière. Déterminons une fonction α_0 de x, telle que la différence

$$\mathfrak{T} u - \alpha_0 u$$

s'annule pour $u = 1$. On devra avoir

$$\alpha_0 = \mathfrak{T} 1.$$

Déterminons ensuite une fonction α_1 telle que la différence

$$\mathfrak{T} u - \alpha_0 u - \alpha_1 u'$$

s'annule pour $u = x$, on aura

$$\alpha_1 = \mathfrak{T} x - \alpha_0 x = \mathfrak{T} x - x \mathfrak{T} 1;$$

et l'on peut remarquer, de suite, que cette différence s'annule encore pour $u = 1$.

De même, choisissons une fonction α_2 de façon que la différence

$$\mathfrak{T} u - \alpha_0 u - \alpha_1 u' - \alpha_2 u''$$

s'annule pour $u = x^2$, on aura

$$\alpha_2 = \frac{1}{1.2} \{ \mathfrak{T} x^2 - \alpha_0 x^2 - 2 \alpha_1 x \}$$

ou

$$\alpha_2 = \frac{1}{1.2} \{ \mathfrak{T} x^2 - 2x \mathfrak{T} x + x^2 \mathfrak{T} 1 \};$$

et cette nouvelle différence s'annulera pour

$$u = 1, \qquad u = x, \qquad u = x^2.$$

En continuant de la sorte, on déterminera une suite infinie de fonction $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$, et l'on aura, en général,

$$(1) \qquad \alpha_m = \frac{1}{m!}\left\{ \mathfrak{T}x^m - C_m^1 x \,\mathfrak{T}x^{m-1} + C_m^2 x^2 \,\mathfrak{T}x^{m-2} \ldots \pm x^m \mathfrak{T}1 \right\},$$

$C_m^1, C_m^2, \ldots$ étant les coefficients binomiaux.

Considérons alors la série

$$s\,u = \alpha_0\,u + \alpha_1\,u' + \alpha_2\,u'' + \ldots + \alpha_m\,u^{(m)} + \ldots;$$

pour toute fonction régulière u qui rend cette série convergente, cette égalité définit une transmutation additive, uniforme, continue et régulière. D'après la manière même dont nous avons déterminé les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, la transmutation

$$\mathfrak{T}\,u - s\,u$$

est une transmutation additive, uniforme, régulière et continue, telle que les transmuées de $1, x, x^2, \ldots$ de toutes les puissances entières et positives de x soient égales à zéro. On a donc, identiquement,

$$\mathfrak{T}\,u - s\,u = 0$$

ou

$$\mathfrak{T}\,u = s\,u.$$

Donc, *pour toute fonction régulière u, qui admet une transmuée $\mathfrak{T}\,u$ et qui rend la série $s\,u$ convergente*, on a

$$\mathfrak{T}\,u = \alpha_0\,u + \alpha_1\,u' + \alpha_2\,u'' + \ldots + \alpha_m\,u^{(m)} + \ldots.$$

Remarquons, de suite, que la série $s\,u$ sera évidemment convergente lorsque u est un polynome entier et que la proposition précédente s'applique à tout polynome entier.

Supposons, maintenant, qu'il existe une fonction u, régulière dans le voisinage de $x = x_0$ et qui admette une transmuée $\mathfrak{T}u$ sans que $s\,u$ soit convergente. Soit

$$u = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_m(x - x_0)^m + \ldots$$

le développement de u, et posons

$$\varphi_m(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_m(x - x_0)^m.$$

$\varphi_m(x)$ étant un polynome entier, on aura

$$\mathfrak{C}\varphi_m(x) = S\varphi_m(x).$$

Faisons croître m indéfiniment, la transmutation $\mathfrak{C}$ étant, par hypothèse, continue, $\mathfrak{C}\varphi_m(x)$ aura pour limite $\mathfrak{C}u$, et il en résulte que $S\varphi_m(x)$ aura aussi une limite qui sera la même. On peut donc écrire, dans ce cas,

$$\mathfrak{C}u = \lim[S\varphi_m(x)].$$

Donc, en résumé, on peut dire que *dans tous les cas on a*

$$\mathfrak{C}u = \alpha_0 u + \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' + \ldots + \alpha_m u^{(m)} + \ldots,$$

avec cette précaution de convenir que, dans le cas où la série du second membre n'est pas convergente, mais où $S\varphi_m(x)$ a cependant une limite, $\mathfrak{C}u$ désigne cette limite.

Désignons par $\omega_0(x)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, ... les transmuées de 1, x, x^2, ...; il résulte du théorème précédent que la connaissance de ces fonctions suffit à caractériser la transmutation additive. Posons

$$\mathfrak{C}u = a_0 u + \frac{a_1}{1} u' + \frac{a_2}{2!} u'' + \ldots + \frac{a_m}{m!} u^{(m)} + \ldots.$$

De l'égalité (1) du théorème précédent il résulte que l'on a

$$a_0 = \omega_0, \qquad a_1 = \omega_1 - x\omega_0, \qquad a_2 = \omega_2 - 2x\omega_1 + x^2\omega_0;$$

d'une manière générale, on aura

$$a_m = \omega_m - C_m^1 x\omega_{m-1} + C_m^2 x^2 \omega_{m-2} + \ldots \mp C_m^{m-1} x^{m-1}\omega_1 \pm x^m \omega_0,$$

ce qui peut s'écrire, d'une manière symbolique,

$$a_m = (\omega - x)^{(m)},$$

à condition de remplacer, dans le développement de la puissance symbolique, les exposants des puissances de ω (même dans la puissance o) par des indices.

On peut donc écrire, symboliquement,

$$(2)\quad \mathfrak{T}u = \omega_0 u + (\omega - x)^{(1)}\frac{u'}{1} + (\omega - x)^{(2)}\frac{u''}{2!} + \ldots + (\omega - x)^{(m)}\frac{u^{(m)}}{m!} + \ldots.$$

Application I. — Toute *substitution* est une transmutation additive. Appliquons à cette transmutation le théorème précédent.

Soit $\omega(x)$ la fonction qu'on substitue à x dans la fonction $u(x)$. On aura ici

$$\mathfrak{T}1 = 1, \qquad \mathfrak{T}x = \omega(x), \qquad \mathfrak{T}x^2 = [\omega(x)]^2, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{T}x^m = [\omega(x)]^m.$$

Dans la formule (2), les puissances symboliques se transforment en véritables puissances et l'on a, par suite,

$$(3)\quad u(\omega(x)) = \mathfrak{T}u = u + (\omega(x) - x)\frac{u'}{1} + (\omega(x) - x)^2\frac{u''}{2!} + \ldots + (\omega(x) - x)^m\frac{u^{(m)}}{m!} + \ldots$$

Cette formule se déduirait d'ailleurs, très simplement, de la formule de Taylor.

Application II. — D'après Riemann [1], la généralisation de la notion de dérivée, étendue à des dérivées d'indices fractionnaires et négatifs (un peu particularisée de façon à la rendre uniforme), conduit à poser

$$x^\alpha D_x^\alpha u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^m,$$

le développement de u étant

$$u = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots.$$

La dérivée $D_x^\alpha u$ (α entier, fractionnaire, positif ou négatif) est une transmuée additive à laquelle nous pouvons appliquer le théorème X. Ici, on a

$$\omega_m(x) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^{m-\alpha},$$

---

[1] Voir *Œuvres complètes, édit.* WEBER et DEDEKIND, p. 331-344; ou J. HADAMARD, Thèse de Doctorat, p. 55 et 56.

Γ étant, comme d'ordinaire, le symbole de la fonction eulérienne de deuxième espèce. Le coefficient de $\frac{u^{(m)}}{m!}$ dans le développement sera donc

$$x^{m-\alpha}\left[\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} - C_m^1 \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-\alpha)} + C_m^2 \frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma(m-1-\alpha)} - \ldots + (-1)^m \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}\right],$$

ce qui, en tenant compte de l'égalité

$$\Gamma(m+1-\alpha) = (m-\alpha)(m-\alpha-1)(m-\alpha-2)\ldots(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha),$$

s'écrit

$$(-1)^m \frac{(m-1-\alpha)(m-2-\alpha)\ldots(1-\alpha)(-\alpha)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^{m-\alpha}.$$

On arrive donc à la formule suivante, applicable pour toutes les valeurs de α,

$$(4) \qquad D_x^\alpha u = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha-m+1)(\alpha-m+2)\ldots(\alpha-1)\alpha}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^{m-\alpha} \frac{u^{(m)}}{m!}.$$

Lorsque α n'est pas un entier positif, aucun des dénominateurs n'est infiniment grand, et l'on peut écrire ceci sous la forme plus simple

$$(5) \qquad D_x^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha}{\alpha-m} \cdot \frac{x^{m-\alpha}}{m!} u^{(m)},$$

à condition de poser

$$0! = 1 \qquad \text{et} \qquad u^{(0)} = u.$$

Ainsi, pour $\alpha = -1$, on a

$$D_x^{-1} u = \int_0^x u\,dx = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} u^{(m)}.$$

Plus généralement, p intégrations successives, avec o pour limite inférieure, donnent

$$D_x^{-p} u = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m+p} \frac{x^{m+p}}{m!} u^{(m)}.$$

Application III. — M. J. Hadamard, dans sa Thèse (p. 58), examine les transmutations définies par l'égalité

$$\mathfrak{T}u(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, u(tx)\, dt,$$

où $\varphi(t)$ est une fonction régulière donnée et où l'intégration est effectuée le long de l'axe réel des x.

Cette transmutation est additive, et l'on a ici

$$\omega_0 = \int_0^1 \varphi(t)\, dt, \qquad \omega_1 = x\int_0^1 t\varphi(t)\, dt, \qquad \ldots, \qquad \omega_m = x^m \int_0^1 t^m \varphi(t)\, dt.$$

Le coefficient de $\dfrac{u^{(m)}}{m!}$ dans le développement de la transmutation est donc ici

$$x^m \left[\int_0^1 t^m \varphi(t)\, dt - C_m^1 \int_0^1 t^{m-1}\varphi(t)\, dt + \ldots + (-1)^m \int_0^1 \varphi(t)\, dt\right]$$
$$= x^m \int_0^1 (t-1)^m \varphi(t)\, dt.$$

On a donc

$$\mathfrak{T}u = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \frac{u^{(m)}}{m!} \int_0^1 (t-1)^m \varphi(t)\, dt.$$

Le développement de $D_x^\alpha u$ n'est qu'un cas particulier de celui-ci, car on a, lorsque α n'est pas un entier positif,

$$x^\alpha D_x^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{-\alpha-1} u(tx)\, dt.$$

Il suffit donc de prendre

$$\varphi(t) = (1-t)^{-\alpha-1},$$

et l'on retrouve le développement (5) précédent.

VI.

L'expression générale d'une transmutation additive peut être mise sous une autre forme, qui est souvent utile.

Soit

$$\varpi u = a_0 u + \frac{a_1}{1} u' + \frac{a_2}{2!} u'' + \ldots + \frac{a_m}{m!} u^{(m)} + \ldots,$$

où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ sont des fonctions régulières données de la variable x. D'après une proposition de Cauchy bien connue, on a

$$u(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{u(z)}{z-x} dz,$$

$$u'(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{u(z)}{(z-x)^2} dz,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u^{(m)}(x) = \frac{m!}{2i\pi} \int_C \frac{u(z)}{(z-x)^{m+1}} dz;$$

toutes ces intégrales étant prises le long d'un contour fermé C, à l'intérieur duquel la fonction $u(z)$ est régulière et entourant le point $z = x$.

Posons

$$S_m u = a_0 u + \frac{a_1}{1} u' + \ldots + \frac{a_m}{m!} u^{(m)},$$

on aura

$$S_m u = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{u(z)}{z-x} \psi_m\left(x, \frac{1}{z-x}\right) dz,$$

en posant

$$\psi_m\left(x, \frac{1}{z-x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z-x} + \ldots + \frac{a_m}{(z-x)^m}.$$

Faisons croître m indéfiniment; on aura évidemment, pour toute fonction $u(x)$ rendant la série ϖu convergente,

$$\varpi u(x) = \frac{1}{2i\pi} \lim \left\{ \int_C \frac{u(z)}{z-x} \psi_m\left(x, \frac{1}{z-x}\right) dz \right\}. \tag{1}$$

Il y a évidemment un cas très intéressant : c'est celui où, quand m croît indéfiniment,

$$\psi_m\left(x, \frac{1}{z-x}\right)$$

engendre une série convergente. Soit, dans ce cas,

$$\psi(x, z) = a_0 + \frac{a_1}{z-x} + \frac{a_2}{(z-x)^2} + \ldots$$

cette série, on aura

$$(2) \qquad \mathfrak{T}u = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{u(z)}{z-x}\psi(x, z)\,dz.$$

Il ne faudrait pas croire que toutes les transmutations additives, uniformes, continues seront définies par une relation de la forme (2). Il peut exister des transmutations telles que la série $\psi(x, z)$ ne soit pas convergente et cependant pour lesquelles, *en choisissant convenablement la fonction u*, il existe une limite pour le second membre de l'égalité (1). Ainsi, dès que $u(z)$ est un polynome entier, il y a toujours une limite, car les intégrales

$$\int_C \frac{u(z).a_k}{(z-x)^{k+1}}\,dz$$

sont toutes nulles dès que k est supérieur au degré du polynome $u(z)$.

Par exemple, la transmutation

$$\mathfrak{T}u = \frac{u'}{1} + \frac{u''}{2} + \frac{u'''}{3} + \ldots + \frac{u^{(m)}}{m} + \ldots$$

est de ce genre, car la série

$$\psi(x, z) = \frac{1}{z-x} + \frac{1!}{(z-x)^2} + \frac{2!}{(z-x)^3} + \ldots + \frac{(m-1)!}{(z-x)^m} + \ldots$$

n'est jamais convergente, quel que soit z. Cependant cette transmutation fournit une transmuée pour un grand nombre de fonctions, quoique pas pour *toutes* les fonctions régulières.

Si, dans la formule (2), on prend pour $\psi(x, z)$ une fonction régulière de z dans tout l'intérieur de C, on a

$$\mathfrak{T}u = \psi(x, x).u(x),$$

et l'on obtient l'unique transmutation additive *fonctionnelle*, qui consiste à multiplier la fonction u par une fonction fixe.

Prenons encore, comme exemple,

$$\psi(x, z) = \frac{z-x}{z-\omega(x)},$$

le contour C étant choisi de façon à envelopper le point $\omega(x)$, on aura

$$\mathfrak{T}\, u = \int_C \frac{u(z)}{z-\omega(x)}\, dz = u[\omega(x)],$$

et l'on retrouve la *substitution* de $\omega(x)$ à x.

L'intérêt spécial que présentent les transmutations de la forme (2) est qu'elles fournissent une transmuée pour *toute* fonction u régulière dans un certain domaine. Ceci résulte du théorème important que voici :

Théorème XI. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la transmutation*

$$\mathfrak{T}\, u = a_0 u + \frac{a_1}{1} u' + \frac{a_2}{2!} u'' + \ldots + \frac{a_m}{m!} u^{(m)} + \ldots$$

fournisse une transmuée pour toute fonction u régulière dans un domaine de rayon ρ autour du point x, est que la série

$$\psi(x, z) = a_0 + \frac{a_1}{z-x} + \frac{a_2}{(z-x)^2} + \ldots + \frac{a_m}{(z-x)^m} + \ldots$$

soit convergente pour toute valeur de z telle que

$$|z-x| = \rho.$$

1° La condition est nécessaire. Supposons, en effet, que la transmutation $\mathfrak{T}$ fournisse une transmuée pour toute fonction régulière à l'intérieur du domaine de rayon ρ autour de x, elle devra, en particulier, en fournir une pour la fonction $\frac{1}{z-x}$, où z désigne un paramètre, lorsque $|z-x| = \rho$. Or, pour cette fonction, on a

$$u = \frac{1}{z-x}, \qquad u' = \frac{1}{(z-x)^2}, \qquad \ldots, \qquad u^{(m)} = \frac{m!}{(z-x)^{m+1}};$$

la série

$$\mathfrak{T}\left(\frac{1}{z-x}\right) = \frac{a_0}{z-x} + \frac{a_1}{(z-x)^2} + \ldots + \frac{a_m}{(z-x)^{m+1}} + \ldots$$

et, par suite,

$$\psi(x, z) = (z-x)\, \mathfrak{T}\left(\frac{1}{z-x}\right)$$

devra être convergente pour toute valeur de z telle que

$$|z - x| = \rho.$$

2° La condition est suffisante. Car si elle est remplie, la série $\psi(x, z)$ sera convergente sur le cercle C décrit de x comme centre avec ρ pour rayon; si la fonction $u(z)$ est régulière dans ce cercle, on pourra, pans la formule (2), prendre le cercle C comme contour d'intégration et *toute* fonction $u(z)$, régulière dans C, aura une transmuée donnée par l'égalité

$$\mathfrak{T} u = \frac{1}{2 i\pi} \int_C \frac{u(z)}{z - x} \psi(x, z)\, dz.$$

Je dirai, dorénavant, qu'une transmutation est *complète dans un domaine de rayon* ρ *autour du point* x, si elle définit une transmuée pour *toute* fonction u régulière dans ce domaine. Le théorème précédent donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi.

Dans le cas spécial des transmutations à *coefficients constants*, c'est-à-dire dans lesquelles les coefficients a_0, a_1, a_2, ... sont des constantes, il est bon de remarquer que, si la transmutation est complète dans un certain domaine de rayon ρ, elle est complète dans *tout autre* domaine de même rayon. On peut, alors, énoncer le théorème XI de la façon suivante :

Pour qu'une transmutation additive, à coefficients constants,

$$\mathfrak{T} u = a_0 u + \frac{a_1}{1} u' + \ldots + \frac{a_m}{m!} u^{(m)} + \ldots$$

soit complète dans tout domaine de rayon ρ, *il faut et il suffit que la série*

$$\varphi(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_m r^m + \ldots$$

soit convergente pour toute valeur de r *dont le module est égal à* $\frac{1}{\rho}$.

Dans la suite, nous ne nous occuperons plus que des transmutations *complètes*, les seules vraiment intéressantes.

Exemple. — Appliquons ce qui précède à la transmutation

$$\int_0^x u\,dx = \frac{x}{1}u - \frac{x^2}{2!}u' + \frac{x^3}{3!}u' - \ldots;$$

on a

$$\psi(x, z) = (z-x)\left[\frac{x}{z-x} - \frac{x^2}{2(z-x)^2} + \frac{x^3}{3(z-x)^3} - \ldots\right].$$

La série entre crochets est convergente si

$$|z-x| > |x|;$$

donc, si l'on prend pour le contour C un cercle de centre x tel que l'origine O soit à l'intérieur, on a

$$\psi(x, z) = (z-x)\,\mathfrak{L}\left[\frac{z}{z-x}\right]$$

et, par suite,

$$\int_0^x u\,dx = \frac{1}{2i\pi}\int_C u(z).\,\mathfrak{L}\left[\frac{z}{z-x}\right]dz.$$

VII.

J'introduirai, maintenant, une notation nouvelle pour désigner une transmutation additive, notation qui nous rendra de grands services.

Toute transmutation additive, à une variable, est de la forme

$$\mathfrak{T}u = a_0 u + \frac{a_1}{1}\frac{du}{dx} + \frac{a_2}{2!}\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + \frac{a_n}{n!}\frac{d^nu}{dx^n} + \ldots.$$

Ceci peut s'écrire, symboliquement,

$$\mathfrak{T}u = \left(a_0 + \frac{a_1}{1}\frac{d}{dx} + \frac{a_2}{2!}\frac{d^2}{dx^2} + \ldots + \frac{a_n}{n!}\frac{d^n}{dx^n} + \ldots\right)u,$$

ou, en posant

$$f(x, z) = a_0 + \frac{a_1}{1}z + \frac{a_2}{2!}z^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}z^n + \ldots,$$

$$\mathfrak{T}u = f\left(x, \frac{d}{dx}\right)u.$$

La fonction $f(x, z)$ de la variable z, régulière au voisinage de $z = 0$, est ce que j'appellerai la *fonction opérative* de la transmutation. Dès qu'on connaît cette fonction, la transmutation est parfaitement définie.

Ainsi, par exemple, la fonction opérative du changement de x en $\omega(x)$ est

$$f(x, z) = e^{[\omega(x) - x]z};$$

elle est de la forme e^{gz}, g étant une fonction de x.

D'ailleurs, réciproquement, lorsque la fonction opérative est e^{gz}, la transmutation n'est autre chose que la substitution de $x + g$ à x.

Avant d'établir les propriétés de ce symbole opératif, nous démontrerons le théorème capital suivant, qui restreint la forme de cette fonction :

Théorème XII. — *La fonction opérative d'une transmutation additive, uniforme, continue et régulière, qui est* complète *dans un certain domaine autour du point x, est, pour cette valeur de x, une fonction transcendante entière, de la variable z, de genre* 1 *ou* 0.

Soit, en effet,

$$f(x, z) = a_0 + \frac{a_1}{1} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \ldots + \frac{a_m}{m!} z^m + \ldots$$

la fonction opérative d'une telle transmutation.

D'après le théorème XI, la série

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m + \ldots$$

sera convergente pour

$$|z| = \frac{1}{\rho},$$

ρ étant le rayon du domaine de régularité autour du point x.

Il en résulte d'abord que la série $f(x, z)$ est convergente pour *toute valeur de z* et, par suite, que $f(x, z)$ est une fonction transcendante entière.

En second lieu, on en conclut que, si l'on désigne par ε un nombre positif, d'ailleurs aussi petit qu'on voudra, on a, pour m suffisamment grand,

$$\frac{|a_m|}{(\rho+\varepsilon)^m} < 1,$$

par suite,

$$\frac{|a_m|}{m!} < \frac{(\rho+\varepsilon)^m}{m!}.$$

Soit, d'autre part, η un nombre positif quelconque, on aura, pour m suffisamment grand,

$$(\rho+\varepsilon)^m < (m!)^\eta,$$

et, enfin,

$$\frac{|a_m|}{m!} < \frac{1}{(m!)^{1-\eta}}.$$

Cela étant, rappelons le beau théorème que voici, démontré par M. Hadamard [1] :

« *Si, dans une série entière en z, le coefficient de z^m finit par rester moindre que*

$$\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}},$$

la fonction est de genre moindre que λ, lorsque λ n'est pas entier.

Or, ici, le coefficient est plus petit en valeur absolue que

$$\frac{1}{(m!)^{1-\eta}};$$

on a donc

$$\lambda = \frac{1}{1-\eta},$$

et, comme η est un nombre positif arbitraire, aussi petit qu'on voudra, la fonction $f(x, z)$ est nécessairement de genre 1 ou 0.

---

(1) J. Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières*, etc. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. IX, p. 172; 1893).

Le symbole opératif $f(x, z)$ jouit de propriétés semblables à celles des symboles opératifs analogues dont on se sert depuis longtemps pour désigner le premier membre d'une équation différentielle linéaire.

Je me contente de les énumérer.

1° u et v étant deux fonctions quelconques, on a

$$(1) \qquad f\left(x, \frac{d}{dx}\right)(u+v) = f\left(x, \frac{d}{dx}\right)u + f\left(x, \frac{d}{dx}\right)v.$$

C'est la traduction du fait que la transmutation est additive.

2°

$$(2) \qquad f\left(x, \frac{d}{dx}\right)Cu = C.f\left(x, \frac{d}{dx}\right)u,$$

C étant une constante arbitraire.

3° Désignons par $f'(x, z)$, $f''(x, z)$, ... les dérivées partielles de $f(x, z)$ *par rapport à* z.

De la formule de Leibnitz, bien connue, qui donne la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'un produit, on déduit alors celle-ci

$$(3) \qquad f\left(x, \frac{d}{dx}\right)uv = v.f\left(x, \frac{d}{dx}\right)u + \frac{v'}{1}f'\left(x, \frac{d}{dx}\right)u + \frac{v''}{1.2}f''\left(x, \frac{d}{dx}\right)u + \dots$$
$$+ \frac{v^{(n)}}{n!}f^{(n)}\left(x, \frac{d}{dx}\right)u + \dots,$$

qui s'applique aussi dans le cas où $f(x, z)$ est un polynome en z et est, comme on sait, d'une grande utilité dans l'étude des équations différentielles linéaires.

4° De la formule (3) on déduit aisément la formule qui fournit la fonction opérative du *produit* de deux transmutations.

Soient, en effet,

$$\mathfrak{T}u = f\left(x, \frac{d}{dx}\right)u,$$

$$\mathfrak{T}_1 u = \varphi\left(x, \frac{d}{dx}\right)u = \alpha_0 u + \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' + \dots + \alpha_n u^{(n)} + \dots$$

deux transmutations, on a

$$\begin{aligned}
\tau[\tau_1 u] &= f\left(x, \frac{d}{dx}\right)[\alpha_0 u + \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' + \ldots + \alpha_n u^{(n)} + \ldots] \\
&= \alpha_0 f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u + \frac{d\alpha_0}{dx} f'\left(x, \frac{d}{dx}\right) u + \frac{1}{2!}\frac{d^2\alpha_0}{dx^2} f''\left(x, \frac{d}{dx}\right) u + \ldots \\
&\quad + \alpha_1 f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u' + \frac{d\alpha_1}{dx} f'\left(x, \frac{d}{dx}\right) u' + \frac{1}{2!}\frac{d^2\alpha_1}{dx^2} f''\left(x, \frac{d}{dx}\right) u' + \ldots \\
&\quad + \alpha_2 f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u'' + \frac{d\alpha_2}{dx} f'\left(x, \frac{d}{dx}\right) u'' + \frac{1}{2!}\frac{d^2\alpha_2}{dx^2} f''\left(x, \frac{d}{dx}\right) u'' + \ldots \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Soit $\psi(x, z)$ la fonction opérative de la transmutation $\tau[\tau_1 u]$, on aura donc

$$\begin{aligned}
\psi(x, z) &= \alpha_0 f(x, z) + \frac{d\alpha_0}{dx}\frac{\partial}{\partial z} f(x, z) + \frac{1}{2!}\frac{d^2\alpha_0}{dx^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, z) + \ldots \\
&\quad + \alpha_1\ z f(x, z) + \frac{d\alpha_1}{dx} z \frac{\partial}{\partial z} f(x, z) + \frac{1}{2!}\frac{d^2\alpha_1}{dx^2} z \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, z) + \ldots \\
&\quad + \alpha_2 z^2 f(x, z) + \frac{d\alpha_2}{dx} z^2 \frac{\partial}{\partial z} f(x, z) + \frac{1}{2!}\frac{d^2\alpha_2}{dx^2} z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, z) + \ldots \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

ce qui donne enfin

$$\psi(x, z) = \varphi(x, z).f(x, z) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}\frac{\partial^n f}{\partial z^n} + \ldots.$$

Désignons $\psi(x, z)$ par

$$[f.\varphi](x, z),$$

on aura, finalement, la formule suivante pour le produit symbolique des deux transmutations f et φ, en commençant par φ,

$$(4)\quad [f.\varphi](x, z) = \varphi.f + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}\frac{\partial^n f}{\partial z^n} + \ldots.$$

On aurait, de même,

$$(5)\quad [\varphi.f](x, z) = \varphi.f + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n\varphi}{\partial z^n}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \ldots.$$

Ces formules (4) et (5) pourraient elles-mêmes s'écrire symboliquement

$$(4) \qquad [f.\varphi](x,z) = f\left(x, z+\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi = \varphi\left(x+\frac{\partial}{\partial z}, z\right)f$$

et

$$(5) \qquad [\varphi.f](x,z) = f\left(x+\frac{\partial}{\partial z}, z\right)\varphi = \varphi\left(x, z+\frac{\partial}{\partial x}\right)f.$$

On obtient donc $[f.\varphi](x,z)$ en prenant la transmuée de φ, considérée comme fonction de x, dans la transmutation dont la fonction opérative est $f(x, z+t)$; ou en prenant la transmuée de f, considérée comme fonction de z, dans la transmutation dont la fonction opérative est $\varphi(x+t, z)$, t étant le symbole opératoire $\frac{\partial}{\partial x}$ ou $\frac{\partial}{\partial z}$.

Les formules précédentes peuvent évidemment s'appliquer aux cas où les fonctions f et φ sont des polynomes entiers en z, c'est-à-dire aux premiers membres d'équations différentielles linéaires.

Les relations (4) et (5) nous montrent, de suite, qu'en général

$$[f.\varphi](x,z) \neq [\varphi.f](x,z)$$

et, par suite, que, dans le cas général, *l'opération de la multiplication de deux transmutations additives n'est pas commutative.*

Dans le cas particulier des transmutations additives *à coefficients constants,* les relations (4) et (5) deviennent

$$[f.\varphi](z) = [\varphi.f](z) = f(z)\varphi(z).$$

Donc :

Le produit de deux transmutations additives, uniformes, à coefficients constants, est une transmutation additive, uniforme, à coefficients constants, dont la fonction opérative est le produit des fonctions opératives des deux transmutations.

Le produit de deux transmutations additives, uniformes, à coefficients constants, est commutatif.

VIII.

Pour montrer, de suite, l'utilité de la notation précédente, j'en ferai quelques applications aux équations différentielles linéaires.

Application I. — M. Floquet (1) a nommé facteur *primaire* symbolique une opération de la forme $\frac{d}{dx} - a$, c'est-à-dire une opération dont la fonction opérative est un binome du premier degré $z - a$.

Appliquons les formules (4) et (5) à la formation du produit symbolique de deux facteurs primaires. On aura

$$[(z-a).(z-b)] = (z-a)(z-b) - \frac{db}{dx}$$

et

$$[(z-b).(z-a)] = (z-a)(z-b) - \frac{da}{dx}.$$

Pour que le produit symbolique des deux facteurs primaires soit commutatif, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$\frac{da}{dx} = \frac{db}{dx},$$

c'est-à dire *que la différence $a - b$ soit constante*.

On retrouve la condition donnée par M. Floquet (2).

Application II. — Cherchons la condition pour qu'une équation différentielle linéaire, homogène, donnée

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = a_0 u + a_1 \frac{du}{dx} + \ldots + a_m \frac{d^m u}{dx^m} = 0,$$

de degré m, admette une intégrale donnée v.

Posons

$$\omega = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx};$$

(1) *Voir* G. Floquet, *Théorie des équations différentielles linéaires* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. III; 1879. — Supplément, p. 79).

(2) *Loc. cit.*, Supplément, p. 104.

il faut, alors, et il suffit qu'on puisse trouver une fonction $\varphi(x, z)$, transcendante entière de genre 1 ou 0, en z, telle que l'on ait

$$f(x, z) = [\varphi.(z - \omega)],$$

c'est-à-dire

$$(1)\quad f(x, z) = (z - \omega)\varphi(x, z) - \frac{d\omega}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \ldots - \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}\omega}{dx^{m-1}}\frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial z^{m-1}} - \ldots.$$

Si l'on cherche à déterminer un polynome de degré $m - 1$

$$\varphi(x, z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_{m-1} z^{m-1},$$

on aura, en identifiant les deux membres de l'égalité (1), $m + 1$ équations du premier degré pour déterminer les m coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$. En égalant à zéro le déterminant du système, on trouve que ω satisfait à l'équation différentielle d'ordre $m - 1$ suivante :

$$\begin{vmatrix}
\omega & \frac{d\omega}{dx} & \frac{1}{2!}\frac{d^2\omega}{dx^2} & \frac{1}{3!}\frac{d^3\omega}{dx^3} & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}\omega}{dx^{m-1}} & a_0 \\
-1 & \omega & \frac{d\omega}{dx} & \frac{1}{2!}\frac{d^2\omega}{dx^2} & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \frac{1}{(m-3)!}\frac{d^{m-2}\omega}{dx^{m-2}} & a_1 \\
0 & -2 & \omega & \frac{d\omega}{dx} & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \frac{1}{(m-2)!}\frac{d^{m-3}\omega}{dx^{m-3}} & 2!a_2 \\
0 & 0 & -3 & \omega & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \frac{1}{(m-4)!}\frac{d^{m-4}\omega}{dx^{m-4}} & 3!a_3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -(m-1) & \omega & (m-1)!a_{m-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -m & m!a_m
\end{vmatrix}$$

qui est une équation différentielle d'ordre $m - 1$, mais non linéaire. On retrouve ainsi le résultat bien connu qu'on peut ramener l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre m à celle d'une équation d'ordre $m - 1$ non linéaire.

Mais le procédé qui résulte de ce qui précède paraît plus général, car, lorsqu'on reste dans les équations différentielles d'ordre fini, il faut trouver toujours pour φ un *polynome*, tandis que nous voyons, par ce qui précède, qu'il suffirait de connaître une intégrale *quel-*

conque $\varphi(x, z)$, de l'équation (1), de genre 1 ou 0, en z, pour pouvoir affirmer que l'équation

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = 0$$

admet pour intégrale

$$u = e^{\int \omega\, dx}.$$

Application III. — *Étant donnée une équation différentielle d'ordre m, linéaire et homogène,*

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) y = 0,$$

dans laquelle le polynome opératif $f(x, z)$ est un polynome entier en $z - kx$, à coefficients constants,

$$f(x, z) = A_0(z - kx)^m + A_1(z - kx)^{m-1} + \ldots + A_{m-1}(z - kx) + A_m,$$

k étant une constante, si l'on pose

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & A_0 \\ k\alpha & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & A_1 \\ k(m-1) & k\alpha & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & A_2 \\ 0 & k(m-2) & k\alpha & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & A_3 \\ & & \ddots & & & & & & \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2k & k\alpha & -1 & A_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & k & k\alpha & A_m \end{vmatrix},$$

et si α est une racine d'ordre de multiplicité p de l'équation

$$\Delta(\alpha) = 0,$$

l'équation différentielle admet les p intégrales

$$e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad (x+\alpha)e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad (x+\alpha)^2 e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad \ldots, \quad (x+\alpha)^{p-1} e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}.$$

Cherchons, en effet, à déterminer une constante α et un polynome entier $Q(z - kx)$, en $z - kx$, tels que l'on ait

$$\big[Q(z - kx).(z - k(x+\alpha))\big] = f(x, z).$$

On devra avoir

$$Q(z-kx)\big(z-k(x+\alpha)\big)-kQ'(z-kx)=f(x,z).$$

Posons

$$z-kx=t,$$

et l'on est amené à déterminer le polynome $Q(t)$ tel que

$$(2)\qquad (t-k\alpha)\,Q(t)-kQ'(t)=A_0t^m+A_1t^{m-1}+\ldots+A_{m-1}t+A_m.$$

$Q(t)$ sera évidemment de degré $m-1$; soit

$$Q(t)=B_0t^{m-1}+B_1t^{m-2}+\ldots+B_{m-2}t+B_{m-1}.$$

Identifions les deux membres de l'égalité (2), nous obtiendrons $m+1$ équations du premier degré à m inconnues $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$ et, pour qu'on puisse les satisfaire, il faut et il suffit que le déterminant du système soit nul. Ce déterminant est $\Delta(\alpha)$. On en conclut que, si α est racine de l'équation $\Delta(\alpha)=0$,

$$y=e^{\int k(x+\alpha)\,dx}=e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}$$

est une intégrale de l'équation proposée.

Soient alors $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les m racines de l'équation $\Delta(\alpha)=0$ (que nous supposerons d'abord distinctes), le polynome $f(x,z)$ admet les m facteurs primaires symboliques

$$z-k(x+\alpha_1),\quad z-k(x+\alpha_2),\quad \ldots,\quad z-k(x+\alpha_m).$$

Or, ces facteurs sont, d'après la première application, *commutatifs;* il en résulte que $f(x,z)$ est, à un facteur constant près, égal à leur produit *symbolique*. On a donc

$$f(x,z)=A_0\Big[\big(z-k(x+\alpha_1)\big).\big(z-k(x+\alpha_2)\big)\ldots\big(z-k(x+\alpha_m)\big)\Big].$$

Cette équation rentre donc dans le type général des équations de M. Floquet, décomposables en facteurs primaires symboliques commutatifs [1]; on en conclut que, si l'on remplace, dans le premier

[1] FLOQUET, *loc. cit.*, p. 107.

membre, y par $e^{\frac{kx^2}{2}}u$, la nouvelle équation en u sera à coefficients constants. On en déduit aisément que l'on a, *quel que soit* α,

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} = e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} \Delta(\alpha);$$

par suite, en dérivant par rapport à α,

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) k(x+\alpha) e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} = e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} \Delta'(\alpha) + k(x+\alpha) e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} \Delta(\alpha);$$

de même,

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} = e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} \Delta''(\alpha) + 2k(x+\alpha) e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} \Delta'(\alpha) + e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} [k + k^2(x+\alpha)^2] \Delta(\alpha),$$

et ainsi de suite.

De ces identités il résulte que, si α annule

$$\Delta(\alpha), \quad \Delta'(\alpha), \quad \ldots, \quad \Delta^{p-1}(\alpha),$$

les expressions

$$e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha} e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{p-1}}{\partial\alpha^{p-1}} e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}$$

seront p intégrales de l'équation proposée. Ceci revient à dire que

$$e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad (x+\alpha) e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad \ldots, \quad (x+\alpha)^{p-1} e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}$$

sont p intégrales.

L'équation $\Delta(\alpha) = 0$ étant *toujours* de degré m, le théorème précédent fournit l'intégrale générale de l'équation proposée.

Nous avons donc là un nouveau type simple d'équations linéaires dont on peut reconnaître, *à première vue*, que leur intégration se ramène à celle d'une équation à coefficients constants (1), car la forme

(1) On ne peut évidemment pas dire d'une façon absolue que le type précédent est *nouveau*, puisqu'il rentre dans un type signalé par M. Floquet, mais ce qui rend ces équations particulièrement intéressantes, c'est qu'il est très facile de reconnaître *à la simple inspection* qu'elles sont intégrables; ce qui n'est pas possible dans le cas général des équations de M. Floquet.

générale d'une telle équation est, en changeant k en $-k$,

$$\frac{P^{(m)}(kx)}{m!}\frac{d^m y}{dx^m}+\frac{P^{(m-1)}(kx)}{(m-1)!}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}+\ldots+\frac{P'(kx)}{1}\frac{dy}{dx}+P(kx)=0,$$

P étant un polynome entier de degré m.

IX.

Nous avons vu (théorème V) que les transmutations additives forment un *groupe*, en n'attachant au mot groupe que le sens le plus général, à savoir que deux opérations consécutives donnent naissance à une opération de même nature. On est, alors, naturellement amené à se demander si l'on pourrait appliquer à ces opérations les théories de M. Lie sur les groupes de transformations. Or, pour que ceci soit possible, il faut que chaque transmutation *admette* une transmutation inverse *appartenant* au groupe et cela nous conduit à traiter le problème de l'inversion d'une transmutation additive.

Étant donnée une transmutation quelconque $\mathfrak{T}$, si, *quelle que soit la fonction régulière* v, il existe au moins une fonction régulière u satisfaisant l'égalité

$$\mathfrak{T}u=v,$$

nous définissons ainsi une transmutation complète que nous nommerons la *transmutation inverse* et que nous désignerons par le symbole $\mathfrak{Q}$ ($\mathfrak{T}$ retourné) de telle sorte que l'égalité précédente entraîne

$$u=\mathfrak{Q}v$$

et, par suite, que l'on a, quelle que soit la fonction u,

$$\mathfrak{T}\mathfrak{Q}u=u,$$
$$\mathfrak{Q}\mathfrak{T}u=u,$$

à condition de choisir convenablement les déterminations des transmuées lorsque les opérations $\mathfrak{T}$ ou $\mathfrak{Q}$ ne sont pas uniformes.

THÉORÈME XIII. — *La transmutation inverse d'une transmutation additive est également additive.*

Car, $\mathfrak{T}$ étant une transmutation additive, on a

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{Q}u + \mathfrak{Q}v) = \mathfrak{T}\mathfrak{Q}u + \mathfrak{T}\mathfrak{Q}v = u + v,$$

ce qui entraîne

$$\mathfrak{Q}u + \mathfrak{Q}v = \mathfrak{Q}(u + v),$$

avec un choix convenable des déterminations des transmuées.

Ce théorème sur l'inversion des transmutations additives nous permet de traiter, accessoirement, une question intéressante : la recherche des transmutations générales que nous avons examinées qui, comme les transmutations additives, forment *un groupe*. Voici la proposition qu'on peut, en effet, démontrer à cet égard :

Théorème XIV. — *La condition nécessaire et suffisante pour que toutes les transmutations définies par la relation*

$$(1) \qquad \mathfrak{T}[\pi(u, v)] = \varphi(\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v),$$

où φ désigne une fonction indéfiniment symétrique, forment un groupe est que les deux fonctions φ et π soient identiques.

Nous avons vu (théorème IV) que, si l'on désigne par $A(z)$ et $B(z)$ deux fonctions telles que l'on ait

$$(2) \qquad A(x + y) = \pi[A(x), A(y)]$$

et

$$(3) \qquad B(x + y) = \varphi[B(x), B(y)],$$

toute transmutation vérifiant la relation (1) est donnée par la formule

$$\mathfrak{T}u = B[\mathfrak{R}\,V(u)],$$

où $V(z)$ désigne la fonction inverse de $A(z)$ et $\mathfrak{R}$ le symbole d'une transmutation *additive* arbitraire.

Ceci posé, soient

$$\mathfrak{T}u = B[\mathfrak{R}\,V(u)]$$

et

$$\mathfrak{T}_1 u = B[\mathfrak{R}_1 V(u)]$$

deux transmutations quelconques de cette nature, on aura

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{T}_1 u) = \mathrm{B}\left[\mathcal{R}\mathrm{V}\left(\mathrm{B}[\mathcal{R}_1 \mathrm{V}(u)]\right)\right];$$

pour que les transmutations forment un groupe, il faut que l'on ait

$$\mathfrak{T}[\mathfrak{T}_1 u] = \mathrm{B}[\mathcal{R}_2 \mathrm{V}(u)],$$

$\mathcal{R}_2$ étant une certaine transmutation additive. Ceci entraîne

$$\mathcal{R}\mathrm{V}\left(\mathrm{B}[\mathcal{R}_1 \mathrm{V}(u)]\right) = \mathcal{R}_2 \mathrm{V}(u),$$

ou, en posant

$$\mathrm{V}(u) = v$$

et en remarquant que, d'après le théorème précédent,

$$\mathcal{V}(\mathcal{R}_2 v) = \mathcal{R}_3 v$$

est aussi une transmutation additive,

$$\mathrm{V}(\mathrm{B}[\mathcal{R}_1 v]) = \mathcal{R}_3 v.$$

Posons, pour abréger,

$$\mathrm{V}(\mathrm{B}[z]) = \mathrm{F}(z);$$

on devra avoir

$$\mathrm{F}(\mathcal{R}_1 v) = \mathcal{R}_3 v.$$

La fonction F doit donc être telle qu'elle transforme toute transmutation additive $\mathcal{R}_1 v$ en une autre transmutation additive. Ceci ne peut arriver que si $\mathrm{F}(z)$ est la fonction qui sert de base à la seule transmutation fonctionnelle additive, c'est-à-dire si l'on a

$$\mathrm{F}(z) = az,$$

a étant une constante arbitraire.

On doit donc avoir

$$\mathrm{V}(\mathrm{B}[z]) = az.$$

Or, d'après la remarque que nous avons faite à la suite du théorème d'Abel (théorème II), on peut toujours multiplier la fonction $\mathrm{V}(z)$ par une constante $\frac{1}{a}$ sans que la relation (2) cesse d'être vérifiée. En remplaçant alors $\mathrm{V}(z)$ par $\frac{1}{a}\mathrm{V}(z)$, on en conclut qu'on doit avoir, finalement,

$$V(B(z)) \equiv z$$

ou

$$B(z) \equiv A(z).$$

Les deux fonctions $A(z)$ et $B(z)$ devant être égales, et ces fonctions *caractérisant*, d'après le théorème d'Abel, les fonctions $\varphi(x,y)$ et $\pi(x,y)$, elles ne peuvent être égales que si l'on a

$$\varphi(x,y) \equiv \pi(x,y).$$

La condition est donc nécessaire. Elle est, d'ailleurs, suffisante, car, si elle est remplie, on a

$$\mathfrak{T}[\mathfrak{T}_1 u] = B[\mathcal{R}\mathcal{R}_1 V(u)] = B[\mathcal{R}_2 V(u)],$$

puisque les transmutations additives forment un groupe (théorème V).

On peut d'ailleurs vérifier, directement, que si l'on a

$$\mathfrak{T}[\varphi(u,v)] = \varphi[\mathfrak{T} u, \mathfrak{T} v]$$

et

$$\mathfrak{T}_1[\varphi(u,v)] = \varphi(\mathfrak{T}_1 u, \mathfrak{T}_1 v],$$

on a aussi

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1[\varphi(u,v)] = \varphi[\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1 u, \mathfrak{T}\mathfrak{T}_1 v].$$

Ainsi, par exemple, les transmutations définies par la relation

$$\mathfrak{T} uv = \mathfrak{T} u \mathfrak{T} v,$$

qui sont données par l'égalité

$$\mathfrak{T} u = e^{\mathcal{R}\mathcal{L}u},$$

forment un groupe.

X.

Revenons, maintenant, aux transmutations additives.

Il est d'abord aisé de se rendre compte que l'inversion d'une transmutation additive n'est pas toujours possible; ou, pour être plus précis, que la transmutation inverse n'est pas toujours *complète*.

Considérons, par exemple, la transmutation

$$\mathfrak{T} u = u - \frac{x}{1} u' + \frac{x^2}{2!} u'' + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} u^{(n)} + \ldots;$$

on a, évidemment,

$$\mathfrak{G}u = u(0);$$

cette transmutation fait donc correspondre à *toute* fonction u une constante. L'inversion est donc généralement impossible; il n'y a que les constantes qui admettent des inverses. Si a désigne une constante arbitraire, l'égalité

$$\mathfrak{G}u = a$$

est vérifiée par

$$u = a + xf(x),$$

$f(x)$ désignant une fonction *arbitraire*, régulière au voisinage de $x = 0$.

Nous avons vu (V, *appl. II*) que, u désignant une fonction régulière au voisinage de $x = 0$, on a

$$\int_0^x u\,dx = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} u^{(m)}.$$

Cette transmutation fait correspondre à *toute* fonction u une fonction v, *qui s'annule pour* $x = 0$; l'inversion n'est donc pas toujours possible, car elle ne peut s'appliquer qu'aux fonctions qui s'annulent pour $x = 0$.

On peut faire, à propos de ce dernier exemple, une remarque intéressante.

La fonction opérative de

$$\int_0^x u\,dx$$

est

$$f(x, z) = \frac{1 - e^{-xz}}{z};$$

or, il est facile de trouver une fonction $\varphi(x, z)$ telle que l'on ait

$$[\varphi . f](x, z) = 1.$$

On devra avoir, en effet, d'après ce que nous avons vu,

$$1 = \varphi \frac{1 - e^{-xz}}{z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} e^{-xz} - \frac{1}{2} z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} e^{-xz} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} z^{n-1} \frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n} e^{-xz} + \ldots,$$

ce qui s'écrit

$$\varphi(x, z) - e^{-xz}\varphi(x, 0) = z.$$

On peut prendre pour $\varphi(x, 0)$ une fonction arbitraire de x, $\psi(x)$, et l'on en tire

$$\varphi(x, z) = z + e^{-xz}\psi(x),$$

$$\varphi(x, z) = \psi(x) + [1 - x\psi(x)]z + x^2\psi(x)\frac{z^2}{2!} - x^3\psi(x)\frac{z^3}{3!} + \ldots.$$

La transmutation

$$\mathfrak{T}u = \psi(x)u + [1 - x\psi]u' + x^2\psi\frac{u''}{2!} - x^3\psi\frac{u'''}{3!} + \ldots$$

est donc telle que

$$\mathfrak{T}\left[\int_0^x u\,dx\right] = u.$$

On peut donc dire que

$$\int_0^x u\,dx$$

est *une* fonction v telle que

$$\mathfrak{T}v = u,$$

c'est-à-dire l'*une* des inverses de u dans la transmutation $\mathfrak{T}$; mais on ne peut pas en conclure que

$$\int_0^x u\,dx$$

est la transmutation inverse de $\mathfrak{T}u$, car on n'a pas

$$[f.\varphi](x, z) = 1,$$

et l'on ne peut pas déterminer ψ de façon qu'il en soit ainsi.

Il y a donc grand intérêt à reconnaître si l'inversion d'une transmutation additive est généralement possible, et l'on peut, à cet égard, énoncer la proposition suivante :

Théorème XV. — *Pour que l'inversion d'une transmutation additive soit, en général, possible, il faut et il suffit que toutes les puissances entières, positives ou nulle de la variable x admettent des fonctions inverses.*

Ceci est presque évident, car, si pour toute valeur de l'exposant k il existe quelque fonction $\mu_k(x)$ telle que

$$\mathfrak{T}\mu_k(x) = x^k,$$

l'égalité

$$\mathfrak{T}v = u,$$

où

$$u = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots,$$

sera vérifiée en prenant

$$v = a_0\mu_0 + a_1\mu_1 + \ldots + a_m\mu_m + \ldots,$$

pourvu que la série v soit convergente.

Corollaire. — *Toute transmutation additive, uniforme, à coefficients constants, admet, en général, une transmutation inverse.*

Car, si l'on a

$$\mathfrak{T}u = \alpha_0 u + \alpha_1 u' + \ldots + \alpha_n u^{(n)} + \ldots,$$

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ étant des constantes, on pourra toujours satisfaire l'égalité

$$\mathfrak{T}u = x^k$$

en prenant pour u un polynome entier, de degré k si $\alpha_0 \neq 0$, de degré $k+p$ si $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$ et $\alpha_p \neq 0$.

Il est bon de remarquer que la proposition précédente s'applique pourvu qu'à chaque puissance x^k il corresponde *au moins une* fonction inverse $\mu_k(x)$; mais il pourrait fort bien arriver qu'il existe plusieurs fonctions inverses pour une même puissance. Ce serait le cas où la transmutation inverse ne serait pas uniforme.

Malheureusement, ce théorème n'est pas d'un emploi commode dans la majorité des cas. A part le cas des coefficients constants, il fournit surtout des renseignements *négatifs* en ce sens qu'il permettra d'apercevoir que l'inversion n'est pas possible, mais qu'il ne permet que rarement de montrer qu'elle est complète. Ainsi, par exemple, si dans une transmutation tous les coefficients s'annulent pour $x = a$, on peut affirmer que la transmutation n'est pas complète, car la transmuée de toute fonction régulière s'annulera pour $x = a$, et l'équation

$$\mathfrak{T} u = 1$$

n'aura pas de solution régulière dans le domaine du point $x = a$.

Il y a cependant, outre les équations à coefficients constants, des cas généraux où l'inversion est possible : ce sont ces cas que nous allons signaler.

XI.

Soit une transmutation additive, uniforme, dont la fonction opérative est $f(x, z)$: faire l'inversion de cette transmutation, c'est, au fond, *intégrer* l'équation différentielle

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = v,$$

qui est ce qu'on peut appeler une équation différentielle *d'ordre infini*, lorsque $f(x, z)$ est une fonction transcendante en z. Ces équations jouissent manifestement des mêmes propriétés que les équations d'ordre fini; en particulier, *si l'on connaît une intégrale particulière u_1 d'une telle équation, on obtiendra toutes les autres en ajoutant à u_1 l'intégrale générale de l'équation sans second membre*

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = 0. \tag{1}$$

Nous ne nous occuperons, dans la suite, que des transmutations à inversion complète. On voit alors qu'il est facile, *a priori*, de les ranger en trois catégories :

1° Celles pour lesquelles l'équation sans second membre (1) n'admet que l'*unique* solution $u = 0$; ce sont celles dont *la transmutation inverse est également uniforme*. Dans ce type rentrent les changements de variables. Si $f(x, z)$ est la fonction opérative de la transmutation, il existe une fonction entière $\varphi(x, z)$ de genre 1 ou 0 telle que l'on ait, à la fois,

$$[f.\varphi] = 1 \quad \text{et} \quad [\varphi.f] = 1,$$

c'est-à-dire

$$f.\varphi + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \ldots = 1$$

et

$$f.\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \ldots = 1.$$

La recherche de toutes les transmutations additives uniformes de cette catégorie serait du plus haut intérêt, car ces transmutations formeraient un groupe auquel les théories des groupes de transformations de M. Lie s'appliqueraient. Jusqu'ici je n'ai pas pu en trouver d'autres que des substitutions, et j'ai tout lieu de penser qu'il n'y en a, effectivement, pas d'autres.

2° Les transmutations telles que l'équation

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = 0$$

ait un nombre *limité* de solutions linéairement distinctes. L'intégrale générale de l'équation

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = v$$

serait donc de la forme

$$u = w + C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_p u_p,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_p$ étant p constantes arbitraires, et l'on pourrait former une équation différentielle d'ordre fini, p, admettant les *mêmes* intégrales. La transmutation inverse n'est donc pas uniforme.

3° Les transmutations telles que l'équation sans second membre ait une *infinité de solutions* linéairement distinctes.

L'intégrale générale de l'équation

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = v$$

contiendrait un nombre infini de constantes arbitraires; donc, en général, elle dépendrait de fonctions arbitraires.

Il ne sera pas inutile, pour ne pas rester dans le domaine de l'hypothèse, de donner un exemple de ce genre. Considérons l'équation

$$0 = \frac{a}{1} u' + \frac{a^2}{2!} u'' + \frac{a^3}{3!} u''' + \ldots + \frac{a^m}{m!} u^{(m)} + \ldots.$$

Elle a une infinité d'intégrales de la forme e^{rx}, car il suffit de prendre pour r une racine de l'équation

$$e^{ar} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{2ki\pi}{a},$$

k étant un entier arbitraire.

Son intégrale générale est, d'ailleurs, facile à trouver : C'est *une fonction arbitraire, périodique, régulière, de période* a. On a, en effet,

$$\frac{a}{1} u' + \frac{a^2}{2!} u'' + \frac{a^3}{3!} u''' + \ldots = u(x+a) - u(x).$$

Pour que u soit une intégrale, il faut donc et il suffit que ce soit une fonction périodique de période a. Ainsi, l'intégrale générale de l'équation

$$x = \frac{a}{1} u' + \frac{a^2}{2!} u'' + \frac{a^3}{3!} u''' + \ldots$$

est

$$u = \frac{x(x-a)}{2a} + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction périodique arbitraire de période a.

L'équation

$$0 = \frac{x(x-1)}{1} u' + \frac{x^2(x-1)^2}{2!} u'' + \ldots + \frac{x^n(x-1)^n}{n!} u^{(n)} + \ldots$$

a pour intégrale générale une fonction arbitraire $f(x)$ telle que l'on ait

$$f(x^2) = f(x) \quad (^1).$$

---

(1) *Voir* APPELL, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 21 avril 1879.

Plus généralement, l'équation

$$0 = u(1-\psi) + \frac{\omega - x}{1} u' + \frac{(\omega - x)^2}{2!} u'' + \ldots + \frac{(\omega - x)^n}{n!} u^{(n)} + \ldots$$

a pour intégrale générale une fonction arbitraire $f(x)$ telle que l'on ait

$$f(\omega(x)) = \psi(x) f(x) \quad (^1).$$

La première question qui se pose maintenant est donc celle-ci : « Étant donnée une transmutation additive, uniforme, complète, *admettant une inverse également complète,* à quelle catégorie appartient-elle? »

Ceci revient au fond à savoir le nombre des constantes arbitraires que contient la transmutation inverse. Ce nombre *paraît* être lié intimement au nombre des zéros, en z, de la fonction opérative $f(x, z)$. On peut, en effet, démontrer, pour le cas des transmutations à coefficients constants, la proposition suivante :

THÉORÈME XVI. — *Le nombre des constantes arbitraires que contient la transmutation inverse d'une transmutation additive, uniforme, à coefficients constants, est égal au nombre des zéros de sa fonction opérative.*

Ce théorème résultera tout naturellement des deux suivants qui, d'ailleurs, prouveront que la proposition précédente est vraie dans le cas le plus général, pourvu que le nombre des zéros, en z, de la fonction opérative soit *fini,* quel que soit x.

THÉORÈME XVII. — *Lorsque la fonction opérative d'une transmutation additive, uniforme, complète, n'a aucun zéro à distance finie* (*en* z) *la transmutation est, à un multiplicateur près, une substitution.*

La transmutation inverse est uniforme.

Soit, en effet, $f(x, z)$ la fonction opérative. Nous savons (théorème XII) qu'elle est de genre 1 ou 0. Si, donc, elle n'admet aucun zéro à distance finie, en z, *quel que soit* x, elle est nécessairement de la forme ae^{gz}, a et g étant des fonctions de x. La transmutation consi-

---

(1) *Voir* APPELL, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 7 novembre 1881.

dérée est donc telle que

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u(x) = a\, u(x+g).$$

L'équation différentielle d'ordre infini

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = v(x)$$

admet donc *une* intégrale, et une seule, qui est

$$u = \frac{1}{a} v\big(h(x)\big),$$

$h(x)$ étant la fonction inverse de $x + g(x)$

$$h(x) + g\big(h(x)\big) = x.$$

Ceci suppose évidemment que $x + g$ n'est pas constant, c'est-à-dire que $g(x)$ n'est pas de la forme $c - x$, c étant une constante.

Théorème XVIII. — *Lorsque la fonction opérative $f(x, z)$ d'une transmutation additive, uniforme, complète a, quel que soit x, un nombre* fini *de zéros en z, la transmutation n'est autre chose qu'une transmutation finie suivie d'une substitution.*

La transmutation inverse contient un nombre fini de constantes arbitraires égal au nombre des zéros de la fonction opérative.

Faisons, d'abord, la remarque suivante :

Soit $\varphi(x, z)$ une fonction opérative. On a, en appliquant la formule (4) (§ VII),

$$(1) \qquad [e^{gz} . \varphi] = e^{gz} \varphi(x+g, z).$$

Ceci posé, considérons une transmutation additive, uniforme, complète, telle que la fonction opérative n'admette, pour toute valeur de x, qu'un nombre fini m de zéros à distance finie. Cette fonction, étant de genre 1 ou 0, sera nécessairement de la forme

$$f(x, z) = e^{gz} \mathrm{P}(x, z),$$

$\mathrm{P}(x, z)$ étant un polynome entier en z de degré m.

Choisissons alors la fonction φ de façon que

$$\varphi(x+g, z) = \mathrm{P}(x, z);$$

on aura

$$\varphi(x, z) = \mathrm{P}\big(h(x), z\big),$$

$h(x)$ étant la fonction inverse de $x + g(x)$.

Il résulte, immédiatement, de la formule (1) que la transmutation $f(x, z)$ n'est que le produit symbolique des transmutations

$$\mathrm{P}\big(h(x), z\big) \qquad \text{et} \qquad e^{gz}.$$

On obtient donc la transmuée

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u$$

en faisant, d'abord, sur u la transmutation

$$\mathrm{P}\left(h(x), \frac{d}{dx}\right) u,$$

puis en substituant, dans le résultat, $x + g$ à x.

Dans les deux membres de l'équation

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = \varphi(x) \tag{2}$$

faisons la substitution inverse de $x + g$; remplaçons x par $h(x)$ et elle devient

$$\mathrm{P}\left[h(x), \frac{d}{dx}\right] u = \varphi\big(h(x)\big), \tag{3}$$

ce qui est une équation différentielle linéaire *d'ordre m*. Les équations (2) et (3) ont *les mêmes* intégrales. La transmutation inverse de la transmutation

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right)$$

contient donc m constantes arbitraires.

Les deux théorèmes qui précèdent établissent donc l'exactitude du théorème XVI, dans le cas le plus général, lorsque la fonction opérative a *zéro* ou un nombre *fini* de zéros, en z. Il resterait à le prouver pour le cas où le nombre des zéros est infini, en montrant que, dans ce cas (en supposant, bien entendu, la transmutation inverse complète), le nombre des constantes arbitraires est aussi infini. La chose paraît vraisemblable et il serait très intéressant de la prouver, car elle montrerait que les *transformations* (ou *substitutions*) sont les seules transmutations additives, uniformes, complètes, telles que la transmutation inverse soit de même nature.

Je n'ai, malheureusement, pas encore pu prouver cette proposition dans toute sa généralité. Elle est évidente dans le cas des coefficients constants. Car, si $f(z)$ est la fonction opérative d'une transmutation additive à coefficients constants, l'équation

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)u = 0$$

admet toutes les intégrales de la forme e^{rx}, où r désigne une racine de l'équation

$$f(r) = 0;$$

donc, si $f(z)$ a une infinité de zéros, l'équation aura une infinité d'intégrales linéairement distinctes ([1]).

XII.

Tout ce que nous venons de dire pour des fonctions d'une seule variable x peut s'étendre, immédiatement, à des fonctions de *plusieurs* variables.

Je dirai qu'on a défini une *transmutation à n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lorsqu'on a donné un moyen quelconque de faire correspondre à toute fonction régulière $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une ou plusieurs autres fonctions des mêmes variables.

Je nommerai, de même, transmutation *fonctionnelle*, à n variables, celle qui est définie de la façon suivante : « Soit $f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

([1]) Pour être tout à fait complet, il faudrait évidemment montrer encore que les deux ensembles formés, d'une part, par les zéros de $f(z)$ et, d'autre part, par les constantes arbitraires ont même *puissance*, suivant la définition de G. Cantor.

une fonction *donnée* des $n+1$ variables $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ que j'appelle fonction qui sert de *base* à la transmutation ; à toute fonction u des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je fais correspondre la fonction $f(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des mêmes variables. »

Les définitions du paragraphe I d'une transmutation *continue, régulière, uniforme* s'étendent aussi sans modifications.

Les théorèmes généraux des paragraphes II et III s'appliquent évidemment à ce cas plus général, car les démonstrations ne supposent pas du tout que la fonction u soit à une seule variable. On peut donc dire encore que la recherche de toutes les transmutations, à plusieurs variables, qui satisfont une relation telle que

$$\mathfrak{T}[\pi(u, v)] = \varphi(\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v),$$

où π est une fonction indéfiniment symétrique, se ramène à celle des transmutations *additives*, c'est-à-dire à la recherche de celles qui vérifient la relation

$$\mathfrak{T}(u+v) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}v.$$

Enfin, les propriétés générales des transmutations additives qui font l'objet du paragraphe IV subsistent évidemment sans restrictions.

Ceci posé, il est facile de démontrer les deux théorèmes suivants, qui ne sont que les généralisations des théorèmes IX et X :

Théorème IX *bis*. — *La seule transmutation additive, à n variables, uniforme, continue et régulière, telle que la transmuée de toute expression de la forme*

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

soit égale à zéro, quels que soient les exposants entiers (positifs ou nuls) $k_1, k_2, \ldots, k_n$, *est la transmutation qui est identiquement nulle.*

Théorème X *bis*. — *Toute transmutation additive, à n variables, uniforme, continue et régulière est donnée par la formule*

$$\mathfrak{T}u = \alpha_{0,0,\ldots,0}\, u + \sum \alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

où $\alpha_{0,0,\ldots,0}$, $\alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ *désignent des fonctions régulières des n variables*

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, *et où la somme* Σ *est étendue à toutes les valeurs entières* (*positives ou nulles*) *possibles des indices* $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Je reprends rapidement la démonstration de ce dernier théorème.

$\mathfrak{T}u$ étant une transmutation donnée, nous déterminerons d'abord la fonction $\alpha_{0,0,\ldots,0}$ de façon que la différence

$$\mathfrak{T}u - \alpha_{0,0,\ldots,0}u$$

s'annule pour $u = 1$. Puis nous déterminerons la fonction $\alpha_{0,0,\ldots,1,\ldots,0}$ de façon que la différence

$$\mathfrak{T}u - \alpha_{0,0,\ldots,0}u - \alpha_{0,0,\ldots,1,\ldots,0}\frac{\partial u}{\partial x_q}$$

s'annule pour $x = x_q$ et cela, successivement, pour toutes les valeurs de q depuis 1 jusqu'à n. Dans ces conditions, la différence

$$S_1 u = \mathfrak{T}u - \alpha_{0,0,\ldots,0}u - \alpha_{1,0,\ldots,0}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha_{0,1,\ldots,0}\frac{\partial u}{\partial x_2} - \ldots - \alpha_{0,0,\ldots,1}\frac{\partial u}{\partial x_n}$$

s'annulera pour $u = 1$, $u = x_1$, $u = x_2$, $\ldots$, $u = x_n$.

Ceci posé, nous déterminerons successivement des fonctions $\alpha_{2,0,\ldots,0}$, $\alpha_{1,1,\ldots,0}$, plus généralement $\alpha_{0,0,\ldots,1,\ldots,1,\ldots,0}$, de façon que les différences

$$S_1 u - \alpha_{2,0,\ldots,0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},$$

$$S_1 u - \alpha_{1,1,\ldots,0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2},$$

plus généralement

$$S_1 u - \alpha_{0,0,\ldots,1,\ldots,1,\ldots,0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}$$

s'annulent, respectivement, pour $u = x_1^2$, $u = x_1 x_2$, plus généralement $u = x_i x_k$. La nouvelle différence

$$S_2 u = S_1 u - \alpha_{2,0,\ldots,0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \alpha_{1,1,\ldots,0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} - \ldots - \alpha_{0,0,\ldots,2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

s'annule pour $u = 1$, $u = x_i$, $u = x_i x_k$, quels que soient les indices i et k. Et ainsi de suite de proche en proche; on arrive à déterminer une suite, infinie dans n sens, de coefficients $\alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ tels que, si la série

$$\mathcal{S}u = \alpha_{0,0,\ldots,0}u + \sum \alpha_{k_1,k_2\ldots,k_n}\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}u}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}$$

est convergente, la différence

$$\mathfrak{T}u - \mathcal{S}u$$

soit identiquement nulle. Lorsque la série $\mathcal{S}u$ ne sera pas convergente, il faudra faire une restriction analogue à celle du théorème X.

Du théorème précédent il résulte que la transmutation additive est parfaitement définie dès qu'on connaît les transmuées de toutes les expressions de la forme $x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \ldots, x_n^{k_n}$ pour toutes les valeurs possibles des exposants $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Posons

$$\mathfrak{T}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n} = \omega_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

on aura, alors, en se servant d'une écriture symbolique,

$$\begin{aligned}(1)\quad \mathfrak{T}u = \omega_{0,0,\ldots,0}u &+ \left[(\omega_1 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\omega_2 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (\omega_n - x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]u \\ &+ \frac{1}{2!}\left[(\omega_1 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\omega_2 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (\omega_n - x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(2)}u \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{p!}\left[(\omega_1 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\omega_2 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (\omega_n - x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(p)}u \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

en convenant que, dans le développement de la puissance symbolique on remplacera le produit symbolique

$$\omega_1^{k_1}\omega_2^{k_2}\ldots\omega_n^{k_n} \quad \text{par} \quad \omega_{k_1,k_2,\ldots,k_n}.$$

Par exemple, dans le cas particulier d'une substitution (changement de variables), qui consiste à remplacer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les fonctions $\omega_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\omega_2(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $\omega_n(x_1, \ldots, x_n)$, on a une transmutation additive à n variables. Cette transmutation est donnée par la formule (1); mais, ici, on ne remplacera pas, dans les développements des puissances symboliques, $\omega_1^{k_1}\omega_2^{k_2}\ldots\omega_n^{k_n}$ par $\omega_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$, car la transmuée de $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ est précisément de cette forme. On fera, de plus,

$$\omega_{0,0,\ldots,0} = 1.$$

On peut ici encore employer une écriture symbolique et introduire une fonction opérative. Puisque toute transmutation additive, uniforme, peut se mettre sous la forme

$$\mathfrak{T}u = a_{0,0,\ldots,0}\, u + \sum \frac{a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}}{(k_1)!\,(k_2)!\ldots(k_n)!}\, \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}},$$

on pourra, en posant

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_n) = a_{0,0,\ldots,0} + \sum \frac{a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}}{(k_1)!\,(k_2)!\ldots(k_n)!}\, z_1^{k_1} z_2^{k_2}\ldots z_n^{k_n},$$

écrire symboliquement

$$\mathfrak{T}u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u.$$

La fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ z_1, z_2, \ldots, z_n)$ des $2n$ variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_n$, régulière au voisinage de

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0,$$

sera nommée la *fonction opérative*.

La fonction opérative d'une transformation de Lie, c'est-à-dire d'un changement de variables, consistant à substituer $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ étant des fonctions des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$) sera

$$f(x_i; z_k) = e^{(\omega_1 - x_1)z_1 + (\omega_2 - x_2)z_2 + \ldots + (\omega_n - x_n)z_n}.$$

Elle est donc de la forme $e^{g_1 z_1 + g_2 z_2 + \ldots + g_n z_n}$ et, réciproquement, si la fonction opérative est de cette forme, la transmutation est un changement de variables.

Le théorème XI a alors, évidemment, son analogue qui est facile à démontrer en se servant de l'inégalité bien connue

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right| < \frac{\mathrm{M}(k_1!)\,(k_2!)\ldots(k_n!)}{\rho_1^{k_1}\rho_2^{k_2}\ldots\rho_n^{k_n}},$$

M étant le module maximum de la fonction et $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les rayons de régularité.

Le problème de l'inversion, qui fait l'objet des derniers paragraphes, serait beaucoup plus compliqué, car on aurait ici à intégrer des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre infini. D'ailleurs, les considérations qui nous ont guidé ne seraient plus strictement applicables, car il faudrait avoir pour cela une définition du *genre* d'une fonction de n variables.

NOTE.

On pourrait se demander pourquoi, dans l'énoncé du théorème IV, j'ai astreint la fonction $\pi(x, y)$ à la condition restrictive d'être *indéfiniment symétrique*. La raison en est simple. Si la fonction $\pi(x, y)$ n'était pas symétrique, on déduirait, de suite, de la relation

$$\mathfrak{T}[\pi(u, v)] = \varphi(\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v) \tag{1}$$

en permutant u et v, la nouvelle relation

$$\mathfrak{T}[\pi(v, u)] = \varphi(\mathfrak{T}v, \mathfrak{T}u),$$

qui serait certainement distincte de la précédente. De même, si $\pi(x, y)$ était seulement symétrique, sans être indéfiniment symétrique, on déduirait de la relation (1) la nouvelle relation

$$\mathfrak{T}\Big[\pi\big(u, \pi(v, C)\big)\Big] = \varphi\big(\mathfrak{T}u, \varphi(\mathfrak{T}v, \mathfrak{T}C)\big),$$

où C désigne une constante, qui serait aussi distincte de (1).

Si donc (et c'est ce que j'ai voulu faire) on s'astreint à ne chercher que les transmutations qui vérifient une relation de la forme (1), *de laquelle on ne puisse pas déduire une autre relation entre deux fonctions arbitraires u et v, distincte d'elle et de même forme,* il faut nécessairement que $\pi(x, y)$ soit indéfiniment symétrique.

Il n'est peut-être pas non plus sans intérêt de remarquer que ce théorème IV est susceptible d'une application plus étendue qu'il ne le paraît au premier abord. Il permet, en effet, *de déterminer la forme générale de toutes les transmutations telles qu'il y ait, quelles que soient les fonctions u et v, une relation donnée entre les trois transmuées*

$$\mathfrak{T}[\psi_1(u, v)], \quad \mathfrak{T}[\psi_2(u, v)], \quad \mathfrak{T}[\psi_3(u, v)],$$

$\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$, $\psi_3(x, y)$ *étant trois fonctions données indépendantes.*

Posons, en effet,

$$u' = \psi_2(u, v), \qquad v' = \psi_3(u, v),$$

et tirons de là u et v en fonction de u' et v'. Portons ces valeurs de u et v dans $\psi_1(u, v)$ qui se transformera en une certaine fonction $\pi(u', v')$ de u' et v'. La relation donnée deviendra alors une relation entre

$$\mathfrak{T}[\pi(u', v')], \quad \mathfrak{T}u', \quad \mathfrak{T}v',$$

c'est-à-dire une relation de la forme (1); u et v étant arbitraires, u' et v' le seront également, et nous sommes ramenés au cas du théorème IV [1].

---

[1] Les principaux résultats de ce Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans la séance du 15 février 1897.