THYBAUT

Sur la déformation du paraboloïde et sur quelques problèmes qui s'y rattachent

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 45-98
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__45_0>

SUR LA

DÉFORMATION DU PARABOLOIDE

ET SUR

QUELQUES PROBLÈMES QUI S'Y RATTACHENT,

PAR M. A. THYBAUT,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE DE LILLE.

INTRODUCTION.

En 1891, M. Weingarten a publié un curieux théorème qui permet de ramener la détermination des surfaces applicables sur une surface donnée à la recherche d'une famille de surfaces dont les rayons de courbure vérifient une relation involutive d'une forme particulière [1].

L'éminent géomètre n'a pas indiqué les principes qui l'ont guidé dans ses recherches, mais M. Darboux a trouvé l'origine véritable de la transformation de M. Weingarten dans la théorie du roulement d'une surface sur une surface applicable.

Avant d'employer cette méthode pour trouver toutes les surfaces qui ont un élément linéaire donné, il faut mettre cet élément linéaire sous une forme spéciale; d'ailleurs, cette opération peut être faite immédiatement lorsqu'on connait l'une des surfaces cherchées.

Nous exposons dans ce travail une transformation analogue, mais plus générale, qui peut être appliquée à un élément linéaire quelconque. A chaque forme de l'élément linéaire on peut faire correspondre un problème bien déterminé sur les congruences rectilignes;

---

[1] WEINGARTEN, *Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*; Extrait d'une lettre à M. Darboux (*Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences*, t. CXII, p. 607 et 796; mars 1891).

en particulier, la forme spéciale qu'emploie M. Weingarten conduit immédiatement à la méthode qu'il a découverte.

Nous avons appliqué notre transformation à un exemple. La solution complète du problème que nous nous sommes proposé donnerait toutes les surfaces applicables sur le paraboloïde quelconque, mais nous n'avons réussi qu'en opérant sur deux paraboloïdes particuliers : le paraboloïde de révolution (qui a deux plans directeurs isotropes) et le paraboloïde qui n'a qu'un plan directeur isotrope. Ces deux exemples avaient été déjà traités par d'autres méthodes; on les trouve dans les travaux de M. Weingarten, complétés par M. Darboux.

Nous avons pu rattacher à la déformation de ces deux paraboloïdes la solution de quelques problèmes de Géométrie; mais, pour exposer simplement ces nouveaux résultats, nous avons dû souvent compliquer les calculs auxquels notre méthode nous aurait conduit directement, si nous n'avions eu en vue que la déformation des paraboloïdes.

Ce travail est divisé en trois Parties.

La première Partie contient l'exposition de la méthode et l'énoncé du problème auquel elle conduit lorsqu'on l'applique à l'élément linéaire du paraboloïde. La liaison entre la déformation du paraboloïde et la théorie des surfaces isothermiques est établie par la proposition suivante :

Chaque surface applicable sur le paraboloïde fait connaître un couple de surfaces isothermiques.

La deuxième Partie est consacrée à la déformation du paraboloïde de révolution et à la résolution de quelques problèmes nouveaux. Nous y déterminons, en particulier, *tous les couples de surfaces inverses à représentation sphérique isotherme,* et nous indiquons quelques propriétés géométriques de ces couples de surfaces.

Enfin, dans la troisième Partie, nous appliquons notre méthode à l'élément linéaire du paraboloïde qui a un plan directeur isotrope. On est naturellement conduit à l'étude des équations de Laplace E_p de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k\theta,$$

dans lesquelles la somme des carrés de p solutions particulières est nulle. Nous montrons que, étant donnée *une solution quelconque* de cette équation, on peut, à l'aide de quadratures, trouver *une autre solution distincte, en général, de la première,* et nous indiquons, dans le cas des équations harmoniques E_4, *une interprétation géométrique* de la transformation. Le cas où les deux solutions ne sont pas distinctes nous permet de déduire de l'équation E_p une équation E_{p+1}.

En appliquant ce procédé aux équations harmoniques E_4, nous trouvons *une nouvelle classe de surfaces isothermiques dépendant de deux fonctions arbitraires* et nous distinguons aisément *les surfaces algébriques.*

La recherche des surfaces isothermiques, qui « constitue certainement l'un des problèmes les plus difficiles de la Géométrie », a écrit M. Darboux, n'avait fourni jusqu'à présent qu'une classe dépendant de deux fonctions arbitraires : les surfaces minima et les surfaces qu'on en déduit par l'inversion.

Les principaux résultats nouveaux contenus dans ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans la séance du 14 octobre 1895 et dans celles du 13 avril et du 3 août 1896.

Dans l'exposition, nous avons fait constamment usage des résultats contenus dans l'œuvre si remarquable de M. Darboux : *Leçons sur la Théorie des surfaces;* nous avons employé particulièrement la belle théorie des *douze surfaces.*

PREMIÈRE PARTIE.

1. Supposons qu'un point d'une surface ait pour coordonnées rectangulaires les fonctions ξ, η, ζ de deux paramètres quelconques u et v.

Posons

$$\begin{aligned} d\xi &= x\,dv + x_1\,du,\\ d\eta &= y\,dv + y_1\,du,\\ d\zeta &= z\,dv + z_1\,du; \end{aligned}$$

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\partial x_1}{\partial v},\\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{\partial y_1}{\partial v},\\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z_1}{\partial v}; \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= G,\\ xx_1+yy_1+zz_1 &= F,\\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 &= E; \end{aligned}\right.$$

l'élément linéaire sera

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Pour trouver une surface Σ ayant cet élément linéaire, il faut déterminer six fonctions x, y, z, x_1, y_1, z_1, vérifiant les relations (1) et (2). Ce problème peut être transformé de la façon suivante :

Soient A et A_1 les points dont les coordonnées sont respectivement x, y, z et x_1, y_1, z_1. O étant l'origine, menons par A une droite AB parallèle à OA_1 ; à chaque point de la surface Σ correspond une droite AB, ces droites forment donc une congruence C. La méthode que nous allons exposer a pur but de remplacer la recherche de toutes les surfaces Σ par celle des congruences C correspondantes; nous allons démontrer d'abord quelques propriétés des développables et des points focaux de la congruence C.

2. Les coordonnées d'un point quelconque M de la droite AB sont $x+\lambda x_1$, $y+\lambda y_1$, $z+\lambda z_1$. Le plan AOA_1 étant parallèle au plan tangent à Σ au point correspondant, on voit facilement que, dans ce plan tangent, la direction parallèle à OM est définie par la relation

$$\frac{du}{dv} = \lambda = \frac{AM}{OA_1}.$$

Les développables de la congruence sont données par les égalités

$$(3)\qquad \frac{dx+\lambda\,dx_1}{x_1} = \frac{dy+\lambda\,dy_1}{y_1} = \frac{dz+\lambda\,dz_1}{z_1} = \frac{\lambda^2\,dE+2\lambda\,dF+dG}{2(\lambda E+F)} = \mu;$$

le dernier rapport est une combinaison simple des trois premiers, obtenue en faisant usage des équations (2). Des relations (3) on tire les égalités

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}du + \dfrac{\partial x}{\partial v}dv + \lambda\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u}du + \dfrac{\partial x_1}{\partial v}dv\right) - \mu x_1 = 0,\\ \dfrac{\partial y}{\partial u}du + \dfrac{\partial y}{\partial v}dv + \lambda\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial u}du + \dfrac{\partial y_1}{\partial v}dv\right) - \mu y_1 = 0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}\partial v + \lambda\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial u}du + \dfrac{\partial z_1}{\partial v}\partial v\right) - \mu z_1 = 0. \end{cases}$$

Éliminons λ et μ entre les équations (4) et ordonnons, par rapport à du et à dv; nous obtenons

$$(5)\qquad \left|\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x_1}{\partial u}\,x_1\right| du^2 + \left|\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x_1}{\partial v}\,x_1\right| du\,dv + \left|\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x_1}{\partial u}\,x_1\right| du\,dv + \left|\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x_1}{\partial v}\,x_1\right| dv^2 = 0.$$

Dans cette relation chaque coefficient est un déterminant que nous avons réduit à sa première ligne pour simplifier l'écriture; on forme la seconde et la troisième ligne en remplaçant x par y et z.

En éliminant de même du et dv entre les trois équations (4) et en ordonnant le résultat par rapport à λ, nous obtenons

$$(6)\qquad \left|\frac{\partial x_1}{\partial v}\,\frac{\partial x_1}{\partial u}\,x_1\right|\lambda^2 + \left|\frac{\partial x_1}{\partial v}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,x_1\right|\lambda + \left|\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x_1}{\partial u}\,x_1\right|\lambda + \left|\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,x_1\right| = 0.$$

Dans les relations (5) et (6) le deuxième coefficient est nul d'après les égalités (1) et les deux équations en $\dfrac{du}{dv}$ et en λ sont identiques. En désignant par k et k' les racines de l'équation (6), on déduit aisément de l'identité des deux équations que la développable qui correspond à k est définie par la relation

$$\frac{du}{dv} = k',$$

la développable qui correspond à k' par la relation

$$\frac{du}{dv} = k.$$

Si l'on appelle F et F' les points focaux situés sur AB, on déduit de la définition des valeurs particulières k et k' de λ

$$k = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{OA}_1}, \qquad k' = \frac{\mathrm{AF}'}{\mathrm{OA}_1}.$$

Dans le premier et le dernier des rapports (3), remplaçons $\frac{du}{dv}$ par k' et λ par k; on obtient

$$(7) \qquad kk'\frac{\partial x_1}{\partial u} + k\frac{\partial x_1}{\partial v} + k'\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} = x_1 \mathrm{F}(k, k'),$$

avec

$$\mathrm{F}(k, k') = \frac{k^2k'\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} + k^2\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} + 2kk'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} + 2k\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} + k'\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}}{2(k\mathrm{E} + \mathrm{F})}.$$

On peut écrire deux relations analogues à (7) en remplaçant x_1 et x par y_1 et y, ou par z_1 et z. De même, en substituant respectivement à $\frac{du}{dv}$ et à λ les valeurs k et k' on obtient

$$(8) \qquad kk'\frac{\partial x_1}{\partial u} + k\frac{\partial x}{\partial u} + k'\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v} = x_1 \mathrm{F}(k', k).$$

Les premiers membres des équations (7) et (8) sont identiques d'après les égalités (1); donc

$$\mathrm{F}(k, k') = \mathrm{F}(k', k).$$

En développant cette condition on trouve entre k et k' la relation involutive

$$(9) \quad kk'\left(2\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\right) + (k+k')\left(\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right) + \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} - 2\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} + \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} = 0,$$

et la fonction symétrique $\mathrm{F}(k, k')$ peut prendre les deux formes

$$(10) \qquad \mathrm{F}(k, k') = \frac{kk'\left(2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right) + (k+k')\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}}{2\mathrm{F}}$$
$$= \frac{kk'\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} + (k+k')\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} + 2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}}{2\mathrm{E}}.$$

3. Ces relations préliminaires étant établies, nous pouvons démontrer immédiatement le théorème suivant :

Supposons que deux points A *et* A_1 *aient respectivement pour coordon-*

nées rectangulaires les fonctions x, y, z et x_1, y_1, z_1 *de deux paramètres quelconques u et v. Posons*

$$OA^2 = G, \qquad OA_1^2 = E, \qquad \cos AOA_1 = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Considérons la congruence C *formée par la droite* AB *définie précédemment, soient* F et F' *les points focaux situés sur* AB.

Si les développables de la congruence C *sont définies par les relations*

$$\frac{du}{dv} = k = \frac{AF}{OA_1}, \qquad \frac{du}{dv} = k' = \frac{AF'}{OA_1},$$

k et k' étant liés par l'équation (9)

$$kk'\left(2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial E}{\partial u}\right) + (k+k')\left(E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}\right) + E\frac{\partial G}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial v} + F\frac{\partial G}{\partial u} = 0 :$$

1° *Les trois expressions*

$$\begin{aligned} d\xi &= x\,dv + x_1\,du, \\ d\eta &= y\,dv + y_1\,du, \\ d\zeta &= z\,dv + z_1\,du \end{aligned}$$

sont des différentielles exactes;

2° *La surface lieu du point* $\xi\eta\zeta$ *a pour élément linéaire*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

En effet, les équations (7) et (8) sont vérifiées; mais, les seconds membres étant identiques d'après la relation (9), les premiers membres le sont aussi et

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x_1}{\partial v};$$

$d\xi$ est donc une différentielle exacte, et une démonstration analogue établirait que $d\eta$ et $d\zeta$ ont la même propriété. Il résulte d'ailleurs de l'énoncé que

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

ce qui établit la proposition.

4. Il est facile de vérifier géométriquement que *les developpables de la congruence* C *correspondent à deux réseaux conjugués de la surface* Σ.

Soit F un foyer de l'une des droites AB de la congruence C; le point F peut être considéré comme le point de rencontre de deux droites infiniment voisines AB, A′B′ et nous avons vu, au n° 2, que le déplacement AA′, qui correspond à la développable, est défini par la relation

$$\frac{du}{dv} = k'.$$

Les plans OAF et OA′F sont parallèles à deux plans tangents de la surface Σ en deux points infiniment voisins M et M′ et le déplacement MM′ qui correspond à AA′ est défini par la même équation

$$\frac{du}{dv} = k'.$$

Dans le plan tangent en M à la surface Σ le déplacement parallèle à OF est conjugué de MM′, et, d'après une remarque faite précédemment (n° 2), ce déplacement correspond à la relation

$$\frac{du}{dv} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{OA}_1} = k.$$

Les deux réseaux de Σ qui correspondent aux développables de la congruence C sont donc conjugués; en d'autres termes, les droites OF et OF′ sont parallèles à deux directions conjuguées de Σ au point correspondant.

Il convient de remarquer que, dans l'exposition de la méthode, nous aurions pu remplacer la droite AB par la droite A_1B_1 parallèle à OA. On peut même employer la droite AA_1; dans ce dernier cas, les calculs sont analogues, les résultats sont plus symétriques, mais la relation involutive est plus compliquée.

5. Les paramètres u et v que nous avons employés sont quelconques; pour résoudre un problème déterminé, on pourra les particulariser et simplifier ainsi l'énoncé du théorème général et la méthode qui en est la conséquence.

Voici, par exemple, une détermination spéciale des paramètres u et v qui nous sera utile dans la suite.

On peut, d'une infinité de manières, transformer un élément linéaire quelconque de façon que l'on ait les égalités

$$(11)\qquad \frac{2\dfrac{\partial F}{\partial u}-\dfrac{\partial E}{\partial v}}{\dfrac{\partial E}{\partial u}}=\frac{\dfrac{\partial G}{\partial u}}{\dfrac{\partial E}{\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial G}{\partial v}}{2\dfrac{\partial F}{\partial v}-\dfrac{\partial G}{\partial u}}.$$

D'après la relation (10), la fonction $F(k, k')$ prend alors l'une des deux formes

$$(12)\qquad \begin{cases} kk'\left(2\dfrac{\partial F}{\partial u}-\dfrac{\partial E}{\partial v}\right)+(k+k')\dfrac{\partial G}{\partial u}+\dfrac{\partial G}{\partial v}=0,\\[2ex] kk'\dfrac{\partial E}{\partial u}\qquad+(k+k')\dfrac{\partial E}{\partial v}+2\dfrac{\partial F}{\partial v}-\dfrac{\partial G}{\partial u}=0; \end{cases}$$

donc

$$F(k, k')=0,$$

et l'on déduit des relations (3) qu'une développable est définie par l'équation

$$dx+k\,dx_1=0$$

ou par deux équations analogues.

Sur les deux surfaces A et A_1, lieux des points A et A_1, les courbes qui correspondent aux développables de la congruence C ont en A et A_1 leurs tangentes parallèles; ce sont, d'après une remarque de M. Darboux [1], des courbes conjuguées sur les surfaces A et A_1, et il y a correspondance entre les développables des congruences formées par les droites AB, A_1B_1 et AA_1.

On vérifie aisément la réciproque de cette proposition : si les surfaces A et A_1 se correspondent par plans tangents parallèles, chaque développable est définie par une équation de la forme

$$dx+k\,dx_1=0,$$

les relations (12) et (11) sont donc vérifiées.

On peut, dans ce cas particulier, simplifier l'énoncé du théorème général démontré au n° 3. Si k et k' vérifient la relation (9) qui se réduit à l'une des relations identiques (12), les développables de la

---

[1] Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, Livre IV, Chap. X.

congruence C sont nécessairement définies par les équations

$$\frac{du}{dv} = k', \qquad \frac{du}{dv} = k.$$

L'équation différentielle d'une développable est, en effet,

$$dx + k\,dx_1 = 0$$

ou, d'après les égalités (3),

$$k^2\,dE + 2k\,dF + dG = 0.$$

Développons le premier membre et remplaçons $\frac{du}{dv}$ par k', nous obtenons

$$k^2 k' \frac{\partial E}{\partial u} + k^2 \frac{\partial E}{\partial v} + 2kk' \frac{\partial F}{\partial u} + 2k \frac{\partial F}{\partial v} + k' \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v};$$

or, si l'on ajoute membre à membre les deux équations (12), qui sont identiques par hypothèse, après avoir multiplié par k les deux membres de la seconde, on trouve que l'expression écrite précédemment est nulle; la relation

$$\frac{du}{dv} = k'$$

est donc une conséquence des égalités (11) et (12). On démontrerait de même que l'on peut déduire de ces égalités l'équation différentielle de l'autre développable

$$\frac{du}{dv} = k.$$

En résumé, si nous conservons toutes les notations employées, nous pourrons énoncer le résultat suivant :

Si les quantités k et k' qui fixent la position des points focaux sur chaque droite de la congruence C vérifient l'une des relations supposées identiques

$$kk'\left(2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v}\right) + (k+k')\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v} = 0,$$

$$kk'\frac{\partial E}{\partial u} \quad + (k+k')\frac{\partial E}{\partial v} + 2\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

1° *Les trois expressions*

$$d\xi = x\,dv + x_1\,du,$$
$$d\eta = y\,dv + y_1\,du,$$
$$d\zeta = z\,dv + z_1\,du$$

sont des différentielles exactes;

2° *La surface, lieu du point* $\xi\eta\zeta$, *a pour élément linéaire*

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2.$$

6. On déduit immédiatement du cas précédent le *théorème de M. Weingarten* (1).

Posons

$$\mathrm{E} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1;$$

les deux relations (11) se réduisent à la suivante

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} = 2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v},$$

et nous pouvons écrire

$$(13) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \mathrm{F} = xx_1 + yy_1 + zz_1, \qquad 2\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \mathrm{G} = x^2 + y^2 + z^2,$$

$\varphi(u, v)$ étant une fonction quelconque.

La surface A_1, lieu du point (x_1, y_1, z_1), étant une sphère de rayon 1, chaque droite AB de la congruence C a pour cosinus directeurs x_1, y_1, z_1 et est normale à la surface A puisque le rayon parallèle OA_1 est normal à la sphère A_1. Les rayons de courbure de cette surface A sont alors k et k'. En tenant compte des équations (13), la première des relations involutives (12) est vérifiée identiquement, l'autre prend la forme

$$kk'\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + (k + k')\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0.$$

Elle est, comme dans le cas précédent, nécessaire et suffisante.

---

(1) J. Weingarten, *Sur la Théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*loc. cit.*). *Voir* page 1.

L'élément linéaire est alors

$$ds^2 = du^2 + 2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du\,dv + 2\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv^2 = du^2 + 2\,d\varphi\,dv,$$

et la détermination des surfaces qui ont cet élément linéaire est ramenée à la recherche des surfaces A dont les rayons de courbure vérifient la relation involutive écrite précédemment.

7. Nous allons appliquer maintenant la méthode générale à un exemple.

Supposons que les équations (11) soient vérifiées, et étudions le cas particulier où la relation involutive se réduit à

$$k + k' = 0.$$

Les fonctions E, F, G devant vérifier les quatre équations

$$2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial u} = 0, \qquad 2\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

on voit aisément que l'élément linéaire a la forme

$$(14) \qquad \begin{aligned} ds^2 = (av^2 + 2bv + c)\,du^2 &+ 2(auv + bu + b'v + d)\,du\,dv \\ &+ (au^2 + b'u + c')\,dv^2. \end{aligned}$$

Identifions cet élément linéaire à celui d'un paraboloïde quelconque rapporté à ses génératrices rectilignes. Les coordonnées d'un point du paraboloïde sont

$$\begin{aligned} x &= \alpha\,uv + \beta\,u + \gamma\,v + \delta, \\ y &= \alpha'\,uv + \beta'\,u + \gamma'\,v + \delta', \\ z &= \alpha''\,uv + \beta''\,u + \gamma''\,v + \delta'', \end{aligned}$$

et l'on trouve les six conditions

$$\begin{aligned} &\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = a, &\quad &\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = b, \\ &\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = b, &\quad &\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = d, \\ &\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = c, &\quad &\gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = b'. \end{aligned}$$

Le paraboloïde a donc un élément linéaire de la forme (14). Réciproquement, on peut établir par un calcul facile que cet élément linéaire (14) est toujours celui d'un paraboloïde quelconque.

Dans ce cas, les développables de la congruence C sont définies par les équations

$$\frac{du}{dv} = k, \qquad \frac{du}{dv} = -k.$$

Sur une surface Σ applicable sur le paraboloïde, le réseau conjugué qui correspond aux développables est donc aussi conjugué par rapport aux lignes dont les équations sont

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.},$$

et ces lignes correspondent aux génératrices rectilignes, c'est-à-dire aux asymptotiques du paraboloïde lui-même. Le réseau conjugué sur Σ correspond donc à un réseau conjugué sur le paraboloïde.

En résumé, *les développables de la congruence* C *correspondent, sur une surface* Σ *applicable sur un paraboloïde quelconque, au réseau conjugué commun à la surface* Σ *et au paraboloïde sur lequel elle est applicable.*

8. Réduisons l'élément linéaire (14); une discussion facile nous conduit à distinguer quatre cas :

1° L'un des coefficients E ou G est constant; supposons, par exemple,

$$a = 0, \qquad b = 0,$$

on ramène aisément l'élément linéaire à la forme

$$ds^2 = du^2 + 2v\,du\,dv + 2u\,dv^2 = du^2 + 2d(uv)\,dv.$$

L'élément linéaire a la forme signalée précédemment (n° 6) et notre méthode devient identique à celle de M. Weingarten, dans ce cas particulier traité par lui ([1]). M. Darboux a reconnu que le paraboloïde correspondant avait une génératrice tangente au cercle de l'infini, le point de contact de cette génératrice étant aussi le point où le paraboloïde touche le plan de l'infini. Son équation peut être réduite à la forme

$$x(y + iz) = h(y - iz).$$

Nous écarterons ce cas.

([1]) J. Weingarten, *Eine neue Classe auf einander abwickebarer Flächen* (*Nachrichten de Gœttingue*, p. 28; janvier 1887).

2° Les coefficients E et G sont des carrés de fonctions linéaires de u et de v. On a

$$b^2 - ac = 0, \qquad b'^2 - a'c' = 0.$$

On peut simplier alors l'élément linéaire et l'écrire

$$ds^2 = v^2\,du^2 + 2(uv + p)\,du\,dv + u^2\,dv^2.$$

Le paraboloïde correspondant, qui a deux plans directeurs isotropes, est un paraboloïde de révolution dont l'équation est

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

3° Un seul des coefficients E ou G est un carré parfait. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$b^2 - ac = 0.$$

L'élément linéaire peut être ramené à la forme

$$ds^2 = v^2\,du^2 + 2(uv + h^2)\,du\,dv + (u^2 - h^2)\,dv^2,$$

le paraboloïde a un seul plan directeur isotrope; son équation est

$$(y + iz)\,y = h^2 x.$$

4° Aucun des coefficients E ou G n'est carré parfait. En simplifiant l'élément linéaire, on trouve

$$ds^2 = (v^2 - a^2)\,du^2 + 2(uv + b^2)\,du\,dv + (u^2 - a^2)\,dv^2,$$

et, pour l'équation du paraboloïde qui est quelconque,

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{b^2 + a^2} = 2x.$$

9. L'application de la méthode générale à ce dernier cas conduit immédiatement au problème suivant, dont chaque solution donnera une surface applicable sur le paraboloïde.

Déterminer deux surfaces A *et* A_1 *se correspondant aux points* A *et* A_1 *par plans tangents parallèles avec la relation*

$$OA.OA_1 \cos AOA_1 = \sqrt{\overline{OA}^2 + a^2}\sqrt{\overline{OA}_1^2 + a^2 + b^2},$$

de façon que la surface A *soit la surface moyenne de la congruence* C.

Les développables sont alors définies par les équations

$$\frac{du}{dv} = k, \qquad \frac{du}{dv} = -k.$$

En représentant par α et β les paramètres des développables, on en déduit les relations suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} + k\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \beta} - k\frac{\partial v}{\partial \beta} = 0,$$

qui sont d'ailleurs vérifiées lorsqu'on remplace u et v par x et x_1, y et y_1, z et z_1 (les développables sont, en effet, définies par la relation $dx \pm k\,dx_1 = 0$, ou par deux analogues).

Dans ce cas, x, y, z, u, liées par la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 - a^2,$$

sont quatre solutions d'une équation de Laplace, à invariants égaux

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\, \partial \beta} - \frac{\partial k}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial k}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0; \tag{15}$$

la constante a étant aussi une solution de l'équation (15), il en est de même de $u + a$ et de $u - a$. Il en résulte que les quatre fonctions

$$X = \frac{x}{u-a}, \qquad Y = \frac{y}{u-a}, \qquad Z = \frac{z}{u-a}, \qquad \frac{u+a}{u-a} \tag{16}$$

sont quatre solutions d'une équation de Laplace à invariants égaux de la forme (15) et l'on vérifie immédiatement la condition

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{u+a}{u-a},$$

X, Y, Z et $X^2 + Y^2 + Z^2$ étant des solutions d'une même équation de Laplace à invariants égaux de la forme (15), X, Y, Z sont les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface isothermique rapportée à ses lignes de courbure.

On définirait de même une autre surface isothermique par les formules

$$X_1 = \frac{x_1}{v-a}, \qquad Y_1 = \frac{y_1}{v-a}, \qquad Z_1 = \frac{z_1}{v-a}. \tag{17}$$

Chaque surface applicable sur le paraboloïde fait donc connaître un couple de surfaces isothermiques.

Sur les surfaces A et A_1, les courbes qui forment le réseau conjugué commun se correspondent par tangentes parallèles. A ce réseau conjugué commun correspondent les lignes de courbure des deux surfaces isothermiques, et l'on déduit aisément des relations (16) et (17) que les tangentes en X, Y, Z et X_1, Y_1, Z_1, aux lignes de courbure correspondantes, se rencontrent. En d'autres termes :

Les développables de la congruence formée par les droites qui joignent les points correspondants des deux surfaces isothermiques coupent ces deux surfaces suivant leurs lignes de courbure.

Dans le cas où le paraboloïde a un plan directeur isotrope, l'une des surfaces isothermiques est une sphère et l'autre surface appartient à *une nouvelle famille* que nous déterminerons complètement à la fin de la troisième Partie.

Lorsque le paraboloïde est de révolution, les deux surfaces isothermiques sont confondues avec la sphère de rayon 1 ayant l'origine pour centre. Dans ce cas, *les développables de la congruence formée par les droites qui joignent deux points correspondants de la sphère déterminent sur la sphère deux réseaux orthogonaux et isothermes.*

Nous développerons cette remarque au n° 17, et nous montrerons que l'on peut déterminer toutes les congruences qui possèdent cette propriété.

DEUXIÈME PARTIE.

10. Nous avons ramené précédemment (n° 7) l'élément linéaire du paraboloïde de révolution de paramètre p à la forme

$$ds^2 = v^2\,du^2 + 2(uv + p)\,du\,dv + u^2\,dv^2.$$

On peut écrire, dans ce cas, les égalités

$$OA = \sqrt{G} = u, \qquad OA_1 = \sqrt{E} = v,$$

$$\cos AOA_1 = \cos\theta = \frac{uv + p}{uv}.$$

On déduit de cette dernière relation

$$(1) \qquad 2uv\sin^2\frac{\theta}{2} + p = 0.$$

La congruence C, formée par la droite AB définie précédemment, est une congruence de Ribaucour, c'est-à-dire une congruence dont les développables interceptent sur la développée moyenne un réseau conjugué (n° 7). La congruence C_1, formée par la droite A_1B_1, possède la même propriété. Les surfaces A et A_1 sont les surfaces moyennes des deux congruences.

Pour obtenir une surface applicable sur le paraboloïde de révolution, il faut déterminer deux surfaces A et A_1 telles que la relation (1), qui relie deux points correspondants à l'origine, soit vérifiée.

Nous allons démontrer que C et C_1 sont des congruences de normales.

Si l'on emploie les paramètres α, β des développables, nous avons vu (n° 9) que la fonction $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ vérifiait l'équation de Laplace

$$(2) \qquad 2k\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial k}{\partial\beta}\frac{\partial t}{d\alpha} - \frac{\partial k}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\beta} = 0,$$

dont x, y, z sont trois solutions.

En employant le symbole S de Lamé, étendu aux trois lettres x, y, z, on peut déduire, en différentiant la relation $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \mathrm{S}\, x\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta},$$

x, y, z vérifiant l'équation (2), l'égalité peut être mise sous la forme

$$2k\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial k}{\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial k}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} = \frac{2k}{u}\left(\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} - \frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction u soit une solution de l'équation (2) est donc

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}+\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}+\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

En remplaçant u par $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, et en développant, on trouve

$$\left(x\frac{\partial x}{\partial \alpha}+y\frac{\partial y}{\partial \alpha}+z\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)\left(x\frac{\partial x}{\partial \beta}+y\frac{\partial y}{\partial \beta}+z\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)$$
$$=(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}+\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}+\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right).$$

Considérons le dièdre d'arête OA, dont les faces contiennent les tangentes en A aux courbes conjuguées de paramètres α, β, la relation précédente exprime que ce dièdre est droit, c'est-à-dire que les plans focaux de la congruence C_1, parallèles aux faces du dièdre OA, sont rectangulaires. C_1 est donc une congruence de normales, et la congruence C possède la même propriété.

Ou voit alors aisément que, si l'on porte sur AB, en sens inverse de OA_1, une longueur $AM=u$, la surface M, lieu du point M, est normale à AB.

La surface A est la développée moyenne de la surface M.

En portant, d'une manière analogue, sur A_1B_1, une longueur $A_1M_1=v$, on définit une surface M_1 dont A_1 est la développée moyenne.

On vérifie facilement que les trois points M, O, M_1 sont en ligne droite.

La relation (1) peut être écrite

$$OM.OM_1=-2p.$$

Les deux surfaces M et M_1 sont donc inverses par rapport à l'origine.

On peut déduire aussi de la relation (1) que les surfaces M et A_1 d'une part, M_1 et A d'autre part, sont polaires réciproques par rapport à une sphère ayant pour centre l'origine et pour rayon $\sqrt{-p}$.

11. Associons aux surfaces A et A_1 des surfaces B et B_1 qui leur

correspondent respectivement par orthogonalité des éléments. On peut toujours choisir les surfaces B et B_1 de façon que A, A_1 et B_1 soient trois des onze surfaces que M. Darboux associe à la surface B dans l'étude de la déformation infiniment petite de cette surface [1]. Chacune des droites de la congruence C (ou C_1) est parallèle à la normale à la surface B (ou B_1) au point correspondant.

D'après un théorème de Ribaucour, les tangentes aux asymptotiques de la surface B sont perpendiculaires aux plans focaux de la congruence C; ces tangentes asymptotiques sont donc rectangulaires et la surface B est une surface minima, la surface B_1 a d'ailleurs la même propriété.

Il résulte d'une proposition de la théorie des douze surfaces (citée plus haut) que les surfaces B et B_1 sont focales d'une même congruence rectiligne et que les asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces.

Réciproquement, chaque couple de surfaces minima sur lesquelles les asymptotiques se correspondent, et qui sont focales d'une même congruence rectiligne, fait connaître deux surfaces A et A_1, c'est-à-dire une surface applicable sur le paraboloïde de révolution.

En effet, associons aux surfaces minima B et B_1 les surfaces A et A_1 qui leur correspondent respectivement par orthogonalité des éléments, de façon que A, B, A_1, B_1 soient quatre des douze surfaces. Les surfaces A et A_1 se correspondent par plans tangents parallèles; soient x, y, z et x_1, y_1, z_1, les coordonnées des points A et A_1 correspondants. Posons

$$OA = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = u \qquad \text{et} \qquad OA_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = v.$$

Nous savons (n° 4) que la proposition sera démontrée si nous établissons la relation

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = uv + h$$

(h est une constante arbitraire).

En conservant à la quantité k la signification qu'elle avait dans la première Partie et en représentant par α et β les paramètres du réseau

---

[1] DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, Chap. III.

conjugué commun aux surfaces A et A_1, on voit que x, y, z sont trois solutions de l'équation

$$(2)\qquad 2k\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{\partial k}{\partial\beta}\frac{\partial t}{\partial\alpha}-\frac{\partial k}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\beta}=0,$$

et x_1, y_1, z_1 trois solutions de l'équation

$$(3)\qquad 2k\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial k}{\partial\beta}\frac{\partial t}{\partial\alpha}+\frac{\partial k}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\beta}=0.$$

Les asymptotiques de la surface B étant rectangulaires, les plans focaux de la congruence C sont perpendiculaires d'après le théorème de Ribaucour rappelé précédemment (n° 11), le dièdre OA, dont les faces sont parallèles aux deux plans focaux, est donc droit, et nous pouvons écrire la condition

$$\left(x\frac{\partial x}{\partial\alpha}+y\frac{\partial y}{\partial\alpha}+z\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)\left(x\frac{\partial x}{\partial\beta}+y\frac{\partial y}{\partial\beta}+z\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)$$
$$=(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}+\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)$$

ou, en employant la relation $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}+\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}.$$

Nous avons vu (n° 10) que cette égalité exprime que u est une solution de l'équation (2) et l'on démontre de même que v est une solution de l'équation (3); on peut donc poser

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}+k\frac{\partial v}{\partial\alpha}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial\beta}-k\frac{\partial v}{\partial\beta}=0,$$

et, dans ces relations, nous pouvons remplacer u et v par x et x_1, y et y_1, z et z_1.

On en déduit les égalités

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial x_1}{\partial\alpha}}=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial y_1}{\partial\alpha}}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial z_1}{\partial\alpha}}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}}=\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}}{x\dfrac{\partial x_1}{\partial\alpha}+y\dfrac{\partial y_1}{\partial\alpha}+z\dfrac{\partial z_1}{\partial\alpha}}$$

(le dernier rapport s'obtient en combinant les trois premiers et en faisant usage de la condition $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

Des deux derniers rapports on tire la relation

$$x \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + y \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + z \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} = u \frac{\partial v}{\partial \alpha}$$

et l'on trouverait, par un calcul analogue,

$$x_1 \frac{\partial x}{\partial \alpha} + y_1 \frac{\partial y}{\partial \alpha} + z_1 \frac{\partial z}{\partial \alpha} = v \frac{\partial u}{\partial \alpha}.$$

En ajoutant membre à membre on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(xx_1 + yy_1 + zz_1) = \frac{\partial}{\partial \alpha}(uv).$$

On trouverait de même la relation

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(xx_1 + yy_1 + zz_1) = \frac{\partial}{\partial \beta}(uv),$$

d'où, en ajoutant membre à membre les deux dernières égalités et en intégrant

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = uv + \text{const.};$$

la proposition est établie.

12. Nous sommes ramenés à déterminer les couples de surfaces minima sur lesquelles les asymptotiques se correspondent et qui sont focales d'une congruence rectiligne.

Pour résoudre cette question, nous emploierons les formules données par M. Darboux [1].

Les coordonnées d'un point de la surface minima B, rapportée aux lignes de longueur nulle, seront représentées par les formules

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= i \int \frac{A^2 - 1}{A'} \, da - i \int \frac{B^2 - 1}{B'} \, db, \\ y' &= \int \frac{A^2 + 1}{A'} \, da + \int \frac{B^2 + 1}{B'} \, db, \\ z' &= 2i \int \frac{A}{A'} \, da - 2i \int \frac{B}{B'} \, db, \end{aligned} \right.$$

---

[1] DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, n° 913.

dans lesquelles A est une fonction arbitraire de a et B une fonction arbitraire de b.

Les coordonnées x'_1, y'_1, z'_1, du point correspondant de la surface minima B_1, seront représentées par des formules analogues renfermant les fonctions arbitraires A_1 et B_1.

L'équation différentielle des asymptotiques des surfaces B et B_1 prend alors la forme

$$da^2 - db^2 = 0,$$

donc les asymptotiques se correspondent.

Soient c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale en un point de la surface B, R et R' les rayons de courbure en ce point.

On peut écrire

$$(5)\quad \begin{cases} \theta_1 = c\sqrt[4]{-RR'} = \dfrac{A+B}{\sqrt{A'B'}}, & \theta_2 = c'\sqrt[4]{-RR'} = i\dfrac{B-A}{\sqrt{A'B'}}, \\ \theta_3 = c''\sqrt[4]{-RR'} = \dfrac{1-AB}{\sqrt{A'B'}}, & \theta_4 = \sqrt[4]{-RR'} = \dfrac{1+AB}{\sqrt{A'B'}}. \end{cases}$$

On définit pour la surface B_1 des quantités analogues $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Posons

$$k = \omega^2,$$

les coordonnées du point A seront

$$(6)\qquad x = \sigma_1\omega = \int\left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial a} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\right)db + \left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial b} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial b}\right)da.$$

On obtient y et z en remplaçant dans cette formule l'indice 1 par les indices 2 et 3.

Les coordonnées du point A_1 sont

$$(7)\qquad x_1 = \frac{\theta_1}{\omega}, \qquad x_2 = \frac{\theta_2}{\omega}, \qquad x_3 = \frac{\theta_3}{\omega}.$$

Pour simplifier les calculs qui suivront, exprimons d'abord que la relation (1) est vérifiée. Cette condition peut être écrite

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - p = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}$$

ou, en employant les relations (6) et (7),

$$\theta_1\sigma_1 + \theta_2\sigma_2 + \theta_3\sigma_3 - p = \sqrt{(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)} = \theta_4\sigma_4.$$

En remplaçant les quantités θ et σ par leur valeur tirée des équations (5), et en développant les calculs, on trouve facilement les conditions

$$\frac{A - A_1}{\sqrt{A'A'_1}} = \frac{p}{2} \frac{\sqrt{B'B'_1}}{B - B_1} = \text{const.} \tag{8}$$

13. Sur les surfaces minima B et B_1 les asymptotiques se correspondent, il reste à exprimer que ces deux surfaces sont les focales d'une congruence rectiligne, c'est-à-dire que la droite qui joint les points correspondants des deux surfaces est tangente à ces deux surfaces. Nous aurons les conditions

$$\frac{x' - x'_1}{\theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3} = \frac{y' - y'_1}{\theta_1\sigma_3 - \theta_3\sigma_1} = \frac{z' - z'_1}{\theta_2\sigma_1 - \theta_1\sigma_2}.$$

On établit par un calcul facile que ces trois rapports sont égaux à 1, on a donc

$$x' - x'_1 = \theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3$$

et deux relations analogues. Développons le deuxième membre

$$\theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3 = \frac{i(B_1 - A_1)(1 - AB) - i(B - A)(1 - A_1B_1)}{\sqrt{A'B'}\sqrt{A'_1B'_1}}.$$

En employant la relation (8), on peut transformer le dénominateur et écrire

$$\theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3 = \frac{i(A - A_1)(1 - BB_1) - i(B - B_1)(1 - AA_1)}{\frac{2}{p}(A - A_1)(B - B_1)}$$

ou

$$x' - x'_1 = \theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3 = \frac{pi}{2}\left(\frac{AA_1 - 1}{A - A_1} - \frac{BB_1 - 1}{B - B_1}\right).$$

On trouverait de même

$$y' - y'_1 = \theta_1\sigma_3 - \theta_3\sigma_1 = \frac{p}{2}\left(\frac{AA_1 + 1}{A - A_1} + \frac{BB_1 + 1}{B - B_1}\right),$$

$$z' - z'_1 = \theta_2\sigma_1 - \theta_1\sigma_2 = \frac{pi}{2}\left(\frac{A + A_1}{A - A_1} - \frac{B + B_1}{B - B_1}\right);$$

en faisant usage des formules (4), on trouve pour $x'-x'_1$ la valeur suivante

$$x'-x'_1 = i\int\left(\frac{A^2-1}{A'}-\frac{A_1^2-1}{A'_1}\right)da - i\int\left(\frac{B^2-1}{B'}-\frac{B_1^2-1}{B'_1}\right)db$$
$$= \frac{pi}{2}\left(\frac{AA_1-1}{A-A_1}-\frac{BB_1-1}{B-B_1}\right),$$

d'où la condition

$$i\int\left(\frac{A^2-1}{A'}-\frac{A_1^2-1}{A'_1}\right)da = \frac{pi}{2}\,\frac{AA_1-1}{A-A_1}.$$

Prenons la dérivée des deux membres et simplifions, nous obtenons

$$\frac{(A-A_1)^2}{A'A'_1} = \frac{p}{2}. \tag{9}$$

On trouve, après un calcul analogue,

$$\frac{(B-B_1)^2}{B'B'_1} = \frac{p}{2}. \tag{10}$$

En employant les expressions de $y'-y'_1$ et de $z'-z'_1$, on obtient les mêmes conditions (9) et (10) dont la relation (8) est une conséquence.

Réciproquement, si les relations (9) et (10) sont vérifiées

$$\frac{\partial}{\partial a}(x'-x'_1) = \frac{\partial}{\partial a}(\theta_3\sigma_2-\theta_2\sigma_3),$$
$$\frac{\partial}{\partial b}(x'-x'_1) = \frac{\partial}{\partial b}(\theta_3\sigma_2-\theta_2\sigma_3).$$

En ajoutant membre à membre et en intégrant, on obtient

$$x'-x'_1 = \theta_3\sigma_2-\theta_2\sigma_3 + \text{const.}$$

Cette constante peut être annulée par une translation convenable des surfaces minima. En résumé :

Si les relations (9) *et* (10) *sont vérifiées, on peut, par une translation, rendre les surfaces minima définies par les formules* (4) *focales d'une congruence rectiligne, les asymptotiques se correspondant sur les deux surfaces.*

14. Il est facile maintenant de déterminer les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution.

Les surfaces A et A_1 sont définies par les équations (6) et (7) ne renfermant qu'une fonction inconnue ω que l'on peut définir par la relation

$$\sigma_1\omega = \int\left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial a} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\right)db + \left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial b} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial b}\right)da,$$

d'où l'on déduit la fonction ω déterminée par la formule suivante

$$\text{(11)} \qquad L\omega = \int\frac{\dfrac{\partial(\theta_1+\sigma_1)}{\partial(a+b)}}{\theta_1-\sigma_1}d(a+b) + \frac{\dfrac{\partial(\theta_1-\sigma_1)}{\partial(a-b)}}{\theta_1+\sigma_1}d(a-b),$$

et l'indice 1 peut être remplacé par l'un des indices 2, 3, 4.

On détermine très facilement x, y, z, x_1, y_1, z_1, u et v par les formules

$$\begin{array}{llll} x = \sigma_1\omega, & y = \sigma_2\omega, & z = \sigma_3\omega, & u = \sigma_4\omega, \\ x_1 = \dfrac{\theta_1}{\omega}, & x_2 = \dfrac{\theta_2}{\omega}, & x_3 = \dfrac{\theta_3}{\omega}, & v = \dfrac{\theta_4}{\omega}. \end{array}$$

Les coordonnées d'un point d'une surface Σ applicable sur le paraboloïde de révolution sont définies par l'égalité

$$\xi = \int x\,dv + x_1\,du$$

et par deux égalités analogues définissant η et ζ.

15. On peut obtenir plus simplement ces coordonnées en faisant la remarque suivante qui peut être appliquée aussi dans le cas du paraboloïde quelconque :

Le segment de longueur l dont les projections sont $x'-x'_1$, $y'-y'_1$, $z'-z'_1$ est tangent aux deux surfaces minima, il est donc perpendiculaire aux normales menées en ses extrémités à chacune des deux surfaces. Mais le plan AOA_1 est parallèle à ces normales, le segment l lui est donc perpendiculaire, c'est-à-dire qu'il est parallèle à la normale au point correspondant $\xi\eta\zeta$ de la surface Σ.

Cherchons la longueur du segment

$$\begin{aligned} l^2 &= (x'-x'_1)^2 + (y'-y'_1)^2 + (z'-z'_1)^2 \\ &= (\theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3)^2 + (\theta_1\sigma_3 - \theta_3\sigma_1)^2 + (\theta_2\sigma_1 - \theta_1\sigma_2)^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$l^2 = \theta_4^2\sigma_4^2 - (\theta_1\sigma_1 + \theta_2\sigma_2 + \theta_3\sigma_3)^2$$

ou

$$l^2 = \frac{\theta_4^2}{\omega^2}\sigma_4^2\omega^2 - \left(\frac{\theta_1}{\omega}\sigma_1\omega + \frac{\theta_2}{\omega}\sigma_2\omega + \frac{\theta_3}{\omega}\sigma_3\omega\right)^2 = u^2v^2 - (uv+p)^2 = -2puv - p^2.$$

Si l'on appelle Γ le produit des rayons de courbure du paraboloïde de révolution et si l'on calcule Γ en fonction de u et de v, on trouve que l'égalité précédente peut être écrite

$$l = \sqrt{(x'-x'_1)^2 + (y'-y'_1)^2 + (z'-z'_1)} = \sqrt{pi}\sqrt[4]{-\Gamma},$$

donc le segment l est parallèle à la normale en un point de Σ, et sa longueur est proportionnelle à $\sqrt[4]{-\Gamma}$. Soient $\gamma, \gamma', \gamma''$ les cosinus directeurs de cette normale. Posons

$$F_1 = \gamma\sqrt[4]{-\Gamma} = \frac{x'-x'_1}{\sqrt{pi}} = \frac{\sqrt{pi}}{2}\,\frac{AA_1-1}{A-A_1} + \frac{\sqrt{pi}}{2}\,\frac{-BB_1+1}{B-B_1} = f(a) + f_1(b),$$

$$F_2 = \gamma'\sqrt[4]{-\Gamma} = \frac{y'-y'_1}{\sqrt{pi}} = \frac{\sqrt{-pi}}{2}\,\frac{AA_1+1}{A-A_1} + \frac{\sqrt{-pi}}{2}\,\frac{BB_1+1}{B-B_1} = \varphi(a) + \varphi_1(b),$$

$$F_3 = \gamma''\sqrt[4]{-\Gamma} = \frac{z'-z'_1}{\sqrt{pi}} = \frac{\sqrt{pi}}{2}\,\frac{A+A_1}{A-A_1} + \frac{\sqrt{pi}}{2}\,\frac{-B-B_1}{B-B_1} = \psi(a) + \psi_1(b).$$

On vérifie aisément les relations

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} & f^2 + \varphi^2 + \psi^2 = \frac{pi}{4}, \\ & f_1^2 + \varphi_1^2 + \psi_1^2 = \frac{pi}{4}. \end{aligned}\right.$$

F_1, F_2 et F_3 étant trois solutions de l'équation de Laplace à invariants égaux $\dfrac{\partial^2 F}{\partial a\, \partial b} = 0$, les coordonnées d'un point de la surface Σ, rapportée aux lignes asymptotiques, s'obtiendront en appliquant les formules de M. Lelieuvre ([1]),

$$\xi = \int\left(F_2\frac{\partial F_3}{\partial a} - F_3\frac{\partial F_2}{\partial a}\right)da - \left(F_2\frac{\partial F_3}{\partial b} - F_3\frac{\partial F_2}{\partial b}\right)db$$

([1]) LELIEUVRE, *Sur les lignes asymptotiques et leur représentation sphérique* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, p. 126; 1888).

et deux égalités analogues. On obtient, après simplification, les formules suivantes qui ont été données par M. Darboux [1]

$$\begin{aligned}
\xi &= \varphi\psi_1 - \psi\varphi_1 + \int(\varphi_1\, d\psi_1 - \psi_1\, d\varphi_1) - \int(\varphi\, d\psi - \psi\, d\varphi),\\
\eta &= \psi f_1 - f\psi_1 + \int(\psi_1\, df_1 - f_1\, d\psi_1) - \int(\psi\, df - f\, d\psi),\\
\zeta &= f\varphi_1 - \varphi f_1 + \int(f_1\, d\varphi_1 - \varphi_1\, df_1) - \int(f\, d\varphi - \varphi\, df).
\end{aligned}$$

Les six fonctions qui figurent dans ces formules doivent vérifier les relations (12).

Les équations (9) et (10), que nous avons employées dans le calcul, établissent entre les fonctions arbitraires des relations qui peuvent être supprimées, car on peut toujours remplacer a par une fonction quelconque de a, et b par une fonction quelconque de b.

Si les paramètres a et b sont déterminés de façon que ces relations (9) et (10) soient vérifiées, les développables de la congruence C sont définies par l'équation différentielle

$$da^2 - db^2 = 0.$$

Nous avons vu précédemment (n° 9) que ces développables correspondaient sur la surface Σ, applicable sur le paraboloïde de révolution, au réseau conjugué commun à la surface Σ et au paraboloïde sur lequel elle est applicable.

16. Nous allons étudier maintenant quelques-unes des surfaces que nous avons associées à la surface minima B dans le problème qui vient d'être résolu.

La considération des deux surfaces minima B et B_1 nous fournit d'abord le résultat suivant :

On sait déterminer toutes les congruences dont les surfaces focales sont des surfaces minima sur lesquelles les asymptotiques se correspondent.

La correspondance établie entre les deux surfaces minima, faisant correspondre les asymptotiques, fait correspondre aussi les lignes conjuguées, et en particulier les lignes de longueur nulle.

---

(1) Darboux, *Théorie des surfaces*, Livre VII, n° 769.

Les angles sont donc conservés sur les deux focales de la congruence.

La propriété des deux surfaces minima se conservant dans une transformation par polaires réciproques on peut aussi énoncer un nouveau résultat :

On sait déterminer toutes les congruences dont les surfaces focales sont des transformées par polaires réciproques de deux surfaces minima, les asymptotiques se correspondant sur les deux surfaces focales.

17. Soient D et D_1 les points de rencontre des droites OA et OA_1 avec la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine.

Les coordonnées du point D sont

$$\frac{A+B}{1+AB}, \quad i\frac{B-A}{1+AB}, \quad \frac{1-AB}{1+AB}.$$

Les coordonnées de D_1 ont des expressions analogues.

Nous avons vu (n° 8) que les développables de chacune des congruences C et C_1 correspondent, sur la sphère de rayon 1, à un réseau orthogonal et isotherme. Ces réseaux sont les représentations sphériques des lignes de courbure des surfaces inverses M et M_1; donc les tangentes correspondantes, en deux points D et D_1, se rencontrent. Cette propriété est exprimée par les conditions trouvées précédemment

$$\frac{(A-A_1)^2}{A'A'_1} = \frac{(B-B_1)^2}{B'B'_1} = \frac{p}{2},$$

et ces relations sont nécessaires et suffisantes.

Les développables de la congruence formée par la droite DD_1 déterminent, sur la sphère de rayon 1, deux réseaux orthogonaux et isothermes. Les conditions trouvées étant nécessaires et suffisantes, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

On sait déterminer toutes les congruences dont les développables découpent sur une sphère deux réseaux orthogonaux et isothermes.

Faisons une substitution linéaire quelconque, elle transforme la sphère en une quadrique quelconque, les réseaux orthogonaux et isothermes en réseaux conjugués à invariants égaux. Donc :

On sait déterminer toutes les congruences dont les développables découpent sur une quadrique deux réseaux conjugués à invariants égaux.

18. Les deux surfaces M et M_1 sont inverses par rapport à l'origine (n° 10) et la puissance d'inversion est $-2p$. Elles sont respectivement polaires réciproques des surfaces A et A_1, donc elles font partie des onze surfaces associées à la surface minima B.

Le réseau conjugué commun à ces deux surfaces M et M_1 est le réseau des lignes de courbure. Il résulte de la théorie des douze surfaces que ce réseau correspond aux lignes asymptotiques de la surface minima B, c'est-à-dire aux lignes de courbure de la surface minima adjointe B'. La correspondance par plans tangents parallèles, établie entre M et B' fait correspondre les lignes de courbure; donc ces deux surfaces ont la même représentation sphérique, c'est-à-dire que M a une représentation sphérique isotherme. La surface M_1 possède la même propriété.

Les surfaces M et M_1 forment donc un couple de surfaces inverses à représentation sphérique isotherme. Nous allons démontrer que tous ces couples de surfaces sont obtenus par notre méthode.

19. M. Darboux a établi [1] que la recherche des surfaces à représentation sphérique isotherme peut être ramenée à l'étude de la déformation infiniment petite d'une surface minima quelconque. Le problème dépend donc de la résolution d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

c, c', c'' étant les cosinus directeurs de la normale en un point d'une telle surface, le plan dont l'équation est

$$cx + c'y + c''z + p = 0$$

étant tangent à la surface, c, c', c'' sont trois solutions d'une équation

---

[1] DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, n° 913.

de Laplace à invariants égaux, et l'on sait que p est aussi une solution de cette équation ; on en conclut que :

Les lignes de courbure des surfaces à représentation sphérique isotherme forment un réseau conjugué à invariants tangentiels égaux.

Nous donnerons à ces surfaces le nom de *surfaces* S.

Les surfaces inverses des surfaces isothermiques (dont les lignes de courbure forment un réseau à invariants ponctuels égaux) sont encore isothermiques, mais les surfaces inverses des surfaces S ne possèdent pas, en général, la propriété des surfaces S.

La méthode exposée précédemment permet de déterminer toutes les surfaces S dont les surfaces inverses sont aussi des surfaces S. Le problème dépend dans ce cas d'une équation aux dérivées partielles du second ordre et peut être entièrement résolu.

Soient, en effet, M et M_1 deux surfaces S inverses par rapport à l'origine O, soit $-2p$ la puissance d'inversion. Prenons sur les surfaces deux points correspondants M et M_1 et considérons les surfaces A et A_1, respectivement polaires réciproques de M_1 et M par rapport à une sphère de centre O et de rayon $\sqrt{-p}$. On vérifie géométriquement les résultats suivants : le point A, qui correspond à M_1, se trouve sur la normale en M à la surface M et $OA = AM$; de même, le point A_1 est sur la normale en M_1 à la surface M_1 et $OA_1 = A_1M_1$.

Les trois points M, O, M_1 étant en ligne droite, les surfaces A et A_1, polaires réciproques de M et M_1, se correspondent par plans tangents parallèles. Les lignes de courbure des surfaces M et M_1 étant des réseaux à invariants tangentiels égaux, les réseaux conjugués correspondants sur les surfaces A et A_1 sont à invariants ponctuels égaux. Les surfaces A et A_1 sont donc respectivement les développées moyennes des surfaces M et M_1.

La figure formée par les quatre surfaces A, A_1, M, M_1 est identique à celle que nous avons déjà considérée (nº 10) et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

On sait déterminer tous les couples de surfaces inverses dont la représentation sphérique est isotherme.

20. Nous allons donner quelques propriétés géométriques de ces

couples de surfaces inverses. On déduit d'une remarque de M. Darboux [1] le résultat suivant :

Chacune des deux surfaces inverses a même représentation sphérique qu'une surface minima. Les deux surfaces minima ainsi définies sont les adjointes de B *et* B_1.

Les surfaces M et M_1 font partie des douze surfaces, donc :

Aux asymptotiques de l'une des deux surfaces correspondent sur l'autre un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux.

On peut établir facilement la réciproque de cette proposition :

Si deux surfaces inverses sont telles qu'aux asymptotiques de l'une corresponde un réseau conjugué de l'autre, les deux réseaux conjugués ainsi définis sont à invariants ponctuels égaux et les deux surfaces ont une représentation sphérique isotherme.

En effet, sur la surface M, par exemple, le réseau conjugué qui correspond aux asymptotiques de M_1 est conjugué par rapport aux asymptotiques de la surface M; en d'autres termes, les asymptotiques des deux surfaces inverses se correspondent harmoniquement.

Prenons les surfaces A et A_1 polaires réciproques de M et M_1, les asymptotiques de A et A_1 correspondent respectivement aux asymptotiques de M_1 et de M, donc elles se divisent harmoniquement. De plus, les surfaces A et A_1 se correspondent par plans tangents parallèles, donc le réseau conjugué commun à ces surfaces est à invariants ponctuels égaux [2].

Sur les surfaces M et M_1, qui sont inverses, le réseau conjugué commun formé par les lignes de courbure est donc à invariants tangentiels égaux, M et M_1 sont des surfaces S et la proposition est démontrée.

21. L'égalité $OA = AM$, établie précédemment (n° 19), exprime que la demi-somme des rayons de courbure de la surface M au point M est

(1) DARBOUX, *Théorie des surfaces,* Livre VIII, n° 914.
(2) DARBOUX, *Théorie des surfaces,* Livre VIII, n° 894.

égale à la distance de l'origine au point A correspondant de la développée moyenne.

L'égalité $OA_1 = A_1M_1$ exprime la même propriété pour la surface inverse M_1.

Nous allons démontrer que cette propriété définit les couples de surfaces inverses à représentation sphérique isotherme.

Si une surface est telle que la demi-somme de ses rayons de courbure en un point M *soit égale à la distance d'un point fixe* O *au point* A *correspondant de la développée moyenne, toute surface inverse par rapport au point* O *possède la même propriété; la première surface et toutes ses inverses ont une représentation sphérique isotherme.*

Soient X, Y, Z les coordonnées du point M; c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale MA. Posons

$$2q = X^2 + Y^2 + Z^2, \qquad p = cX + c'Y + c''Z,$$

et désignons par ρ, ρ' les rayons de courbure de la surface M au point M.

On vérifie géométriquement la relation

$$MA = \frac{OM^2}{2p}$$

ou

$$\frac{\rho + \rho'}{2} = -\frac{q}{p}. \tag{13}$$

Établissons d'abord les formules qui permettent de trouver les rayons de courbure d'une surface lorsqu'on connaît les rayons de courbure de la surface inverse.

Soit a la puissance d'inversion. Représentons sur la surface M_1 par les lettres p_1, q_1, ρ_1, ρ'_1 des expressions analogues à p, q, ρ, ρ'.

On peut écrire immédiatement les quatre relations

$$p_1 = \frac{ap}{q}, \qquad q_1 = \frac{a^2}{q} \qquad \text{et} \qquad p = \frac{ap_1}{q_1}, \qquad q = \frac{a^2}{q_1} \tag{14}$$

(la première résulte de la conservation des angles dans l'inversion).

Les lignes de courbure de la surface M sont définies par les formules d'Olinde Rodrigues

$$dx + \rho\, dc = 0, \qquad dy + \rho\, dc' = 0, \qquad dz + \rho\, dc'' = 0;$$

d'où l'on déduit

$$dq + \rho\, dp = 0;$$

ou, en développant,

$$\frac{\partial q}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial q}{\partial p_1} dp_1 + \rho\left(\frac{\partial p}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial p}{\partial p_1} dp_1\right) = 0.$$

En remplaçant $\frac{dq_1}{dp_1}$ par $-\rho_1$ et les dérivées partielles par leur valeur tirée des formules (14), on trouve

$$\rho = -\frac{a\rho_1}{p_1\rho_1 + q_1}, \qquad \rho' = -\frac{a\rho'_1}{p_1\rho'_1 + q_1}. \tag{15}$$

Ces formules permettent de démontrer immédiatement le théorème énoncé. En faisant usage des relations (14) et (15), on peut mettre l'équation (13) sous la forme

$$\rho_1 + \rho'_1 = -\frac{q_1}{p_1}.$$

La surface inverse a donc la même propriété.

22. On peut appliquer le théorème de M. Weingarten [1] aux surfaces définies par l'équation (13). Cette équation peut être écrite

$$\frac{\rho + \rho'}{p^2} + \frac{2pq}{p^3} = 0,$$

Si l'on pose $\varphi(pq) = \frac{q}{p}$, elle prend la forme

$$\rho\rho' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} - (\rho + \rho') \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0,$$

qui permet de déterminer une famille de surfaces dont l'élément linéaire est

$$ds^2 = \left(d\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2 + 2p\, d\frac{\partial \varphi}{\partial p}\, d\frac{\partial \varphi}{\partial q} + 2q\left(d\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2.$$

---

[1] La forme sous laquelle nous employons ici le théorème de M. Weingarten se déduit aisément, par une transformation de Legendre, de celle que nous avons donnée au n° 5. (*Voir*, par exemple, Darboux, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, n° 1070.)

Employons les paramètres

$$m = \frac{\partial\varphi}{\partial p} = -\frac{q}{p^2}, \qquad n = \frac{\partial\varphi}{\partial q} = \frac{1}{p},$$

l'élément linéaire des surfaces applicables devient

$$dm^2 + 2d\left(\frac{m}{n}\right)dn.$$

Il convient à un paraboloïde de révolution de paramètre 1.

Si l'on associe à la surface M la surface inverse M_1 (la puissance d'inversion étant $-2p$) et si l'on considère les surfaces A et A_1, polaires réciproques de M et M_1 par rapport à la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{-p}$, on obtiendra, en appliquant notre méthode aux surfaces A et A_1, les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution de paramètre p.

TROISIÈME PARTIE.

23. Le paraboloïde défini par l'équation

$$(y + iz)y = h^2 x$$

a un plan directeur isotrope. Nous avons vu précédemment (n° 7) que l'élément linéaire de ce paraboloïde peut être ramené à la forme

$$ds^2 = v^2 du^2 + 2(uv + h^2)\,du\,dv + (u^2 - h^2)\,dv^2,$$

et l'on peut écrire dans ce cas les égalités

$$\text{(1)} \qquad \begin{gathered} OA = \sqrt{G} = \sqrt{u^2 - h^2}, \qquad OA_1 = \sqrt{E} = v, \\ \cos AOA_1 = \cos\theta = \frac{uv + h^2}{v\sqrt{u^2 - h^2}}. \end{gathered}$$

Les deux congruences C et C_1, formées par les droites AB et A_1B_1 déjà définies, sont des congruences de Ribaucour dont les surfaces moyennes sont les surfaces A et A_1 (n° 6).

Nous allons démontrer que C est une congruence de normales. Nous résumerons rapidement cette démonstration analogue à celle qui a été donnée au n° 10.

Nous avons vu (n° 8) que x_1, y_1, z_1 et $\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ étaient quatre solutions d'une équation de Laplace à invariants égaux. Il résulte d'une proposition démontrée (n° 10) que x_1, y_1, z_1, ρ vérifient nécessairement la relation

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \beta} + \frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\frac{\partial y_1}{\partial \beta} + \frac{\partial z_1}{\partial \alpha}\frac{\partial z_1}{\partial \beta} = \frac{\partial \rho}{\partial \alpha}\frac{\partial \rho}{\partial \beta}$$

(α et β sont les paramètres des développables des congruences C et C_1).

Nous pouvons alors utiliser la méthode que nous avons employée au commencement de la deuxième Partie. La relation précédente peut être écrite

$$\begin{aligned}\left(x_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + y_1\frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + z_1\frac{\partial z_1}{\partial \alpha}\right)&\left(x_1\frac{\partial x_1}{\partial \beta} + y_1\frac{\partial y_1}{\partial \beta} + z_1\frac{\partial z_1}{\partial \beta}\right)\\ &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \beta} + \frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\frac{\partial y_1}{\partial \beta} + \frac{\partial z_1}{\partial \alpha}\frac{\partial z_1}{\partial \beta}\right).\end{aligned}$$

Sous cette forme, l'égalité exprime que le dièdre OA_1 est droit, c'est-à-dire que les plans focaux de la congruence C sont rectangulaires; C est donc une congruence de normales.

On vérifie facilement que si l'on porte sur AB, en sens inverse de OA_1, une longueur $AM = u$, la surface lieu du point M est normale à AB.

La surface A est la développée moyenne de la surface M.

La relation (1), mise sous la forme

$$\rho(u - \sqrt{u^2 - h^2}\cos\theta) = -h^2,$$

exprime que les deux surfaces M et A_1 sont polaires réciproques par rapport à une sphère ayant pour centre l'origine et pour rayon hi.

24. Associons aux deux surfaces A et A_1, qui se correspondent par plans tangents parallèles, les surfaces B et B_1 qui leur correspondent respectivement par orthogonalité des éléments, de façon que A, A_1 et B_1 forment trois des onze surfaces que l'on peut associer à B par la

méthode de M. Darboux. La surface M, polaire réciproque de A_1, fait aussi partie des douze surfaces. Nous pouvons appliquer ici une remarque faite précédemment (n° 11).

Chacune des droites de la congruence C est parallèle à la normale au point correspondant de la surface B. D'après un théorème de Ribaucour, les tangentes asymptotiques de la surface B sont perpendiculaires aux plans focaux de la congruence C; ces tangentes asymptotiques sont donc rectangulaires et la surface B est une surface minima.

Réciproquement, pour trouver une surface applicable sur le paraboloïde qui a un plan directeur isotrope, il suffit de déterminer une surface A correspondant à une surface minima B par orthogonalité des éléments, de façon que la surface M, normale aux droites de la congruence C, soit polaire réciproque de la surface A_1 définie précédemment.

Les surfaces A et A_1 se correspondent, en effet, par plans tangents parallèles; les congruences C et C_1 sont des congruences de Ribaucour. Par hypothèse, les surfaces M et A_1 sont polaires réciproques par rapport à une sphère ayant pour centre l'origine. Soit hi son rayon. Posons

$$OA = \sqrt{u^2 - h^2}, \qquad OA_1 = v.$$

La condition

$$v(u - \sqrt{u^2 - h^2}\cos\theta) = -h^2$$

exprime que M et A_1 sont polaires réciproques. Cette condition peut être écrite

$$\cos\theta = \frac{uv + h^2}{v\sqrt{u^2 - h^2}}.$$

Il résulte donc de la démonstration faite précédemment (n° 5) que les surfaces A et A_1 feront connaître une surface applicable sur le paraboloïde qui a pour élément linéaire

$$ds^2 = v^2 du^2 + 2(uv + h^2)du\,dv + (u^2 - h^2)dv^2.$$

25. Nous sommes conduits au problème suivant :

Une surface minima B étant prise pour surface fondamentale, former un groupe de douze surfaces telles que les surfaces M et A_1 soient polaires réciproques.

Rappelons les formules de M. Darboux, déjà employées dans la deuxième Partie.

Les expressions $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, qui correspondent à la surface minima B, ont déjà été définies (n° 12) :

$$(2) \qquad \theta_1 = \frac{A+B}{\sqrt{A'B'}}, \quad \theta_2 = i\frac{B-A}{\sqrt{A'B'}}, \quad \theta_3 = \frac{1-AB}{\sqrt{A'B'}}, \quad \theta_4 = \frac{1+AB}{\sqrt{A'B'}}.$$

Ces quatre fonctions sont des solutions d'une équation harmonique

$$(3) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial a^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial b^2} = \theta\left[\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{A'}}\right)''}{\frac{1}{\sqrt{A'}}} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{B'}}\right)''}{\frac{1}{\sqrt{B'}}}\right]$$

$\omega = \sqrt{k}$ étant une solution de cette équation, les coordonnées du point A_1 sont

$$x_1 = \frac{\theta_1}{\omega}, \qquad y_1 = \frac{\theta_2}{\omega}, \qquad z_1 = \frac{\theta_3}{\omega},$$

et l'on a

$$v = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \frac{\theta_4}{\omega}.$$

Les coordonnées du point A sont données par la formule

$$(4) \qquad x = \int\left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial a} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\right)db + \left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial b} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial b}\right)da.$$

On obtient y, z et $-u$ en remplaçant dans la formule (4) l'indice 1 par les indices 2, 3, 4.

Les coordonnées d'un point de la surface M sont

$$X = x + \frac{\theta_1}{\theta_4}u, \qquad Y = y + \frac{\theta_2}{\theta_4}u, \qquad Z = z + \frac{\theta_3}{\theta_4}u.$$

Le plan polaire du point $(x_1 y_1 z_1)$, par rapport à la sphère de rayon hi, doit être tangent à la surface M; ce plan a pour équation

$$\theta_1 X + \theta_2 Y + \theta_3 Z + h^2\omega = 0.$$

La surface M et la polaire réciproque de A_1 se correspondent par plans tangents parallèles; si le point M est dans le plan polaire du point A_1 la surface M coïncidera avec la surface polaire réciproque de

A_1. Remplaçons dans l'équation précédente les coordonnées courantes par les coordonnées du point M, nous obtenons la condition

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \theta_4 u + h^2\omega = 0 \tag{5}$$

qui est nécessaire et suffisante.

26. Il suffit donc de déterminer une solution ω de l'équation harmonique (3) qui vérifie l'équation (5). Cette équation (5) renferme les fonctions x, y, z, u, dans lesquelles la fonction ω figure sous des signes de quadratures; nous allons faire disparaître ces quadratures en employant des équations déduites de (5) par des différentiations successives.

On vérifie aisément les identités suivantes

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta_3}{\partial a}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta_4}{\partial a}\right)^2=\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta_3}{\partial b}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta_4}{\partial b}\right)^2 = 0,\\ &\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\frac{\partial\theta_1}{\partial b}+\frac{\partial\theta_2}{\partial a}\frac{\partial\theta_2}{\partial b}+\frac{\partial\theta_3}{\partial a}\frac{\partial\theta_3}{\partial b}-\frac{\partial\theta_4}{\partial a}\frac{\partial\theta_4}{\partial b}=0.\end{aligned}\right.$$

En faisant usage de ces relations, on trouve les équations

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\theta_1}{\partial a}x+\frac{\partial\theta_2}{\partial a}y+\frac{\partial\theta_3}{\partial a}z+\frac{\partial\theta_4}{\partial a}u+h^2\frac{\partial\omega}{\partial a}=0,\\ &\frac{\partial\theta_1}{\partial b}x+\frac{\partial\theta_2}{\partial b}y+\frac{\partial\theta_3}{\partial b}z+\frac{\partial\theta_4}{\partial b}u+h^2\frac{\partial\omega}{\partial b}=0,\\ &\frac{\partial^2\theta_1}{\partial a\partial b}x+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial a\partial b}y+\frac{\partial^2\theta_3}{\partial a\partial b}z+\frac{\partial^2\theta_4}{\partial a\partial b}u+h^2\frac{\partial^2\omega}{\partial a\partial b}=0,\\ &\frac{\partial^2\theta_1}{\partial a^2}x+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial a^2}y+\frac{\partial^2\theta_3}{\partial a^2}z+\frac{\partial^2\theta_4}{\partial a^2}u+h^2\frac{\partial^2\omega}{\partial a^2}-2\omega=0.\end{aligned}\right.$$

En éliminant x, y, z, u entre les équations (5) et (7), on obtient la condition

$$(8)\quad \begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \omega \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial a} & \frac{\partial\theta_2}{\partial a} & \frac{\partial\theta_3}{\partial a} & \frac{\partial\theta_4}{\partial a} & \frac{\partial\omega}{\partial a} \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial b} & \frac{\partial\theta_2}{\partial b} & \frac{\partial\theta_3}{\partial b} & \frac{\partial\theta_4}{\partial b} & \frac{\partial\omega}{\partial b} \\ \frac{\partial^2\theta_1}{\partial a\partial b} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial a\partial b} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial a\partial b} & \frac{\partial^2\theta_4}{\partial a\partial b} & \frac{\partial^2\omega}{\partial a\partial b} \\ \frac{\partial^2\theta_1}{\partial a^2} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial a^2} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial a^2} & \frac{\partial^2\theta_4}{\partial a^2} & \frac{\partial^2\omega}{\partial a^2}-\frac{2}{h^2}\omega \end{vmatrix} = 0.$$

La fonction ω cherchée est donc une solution commune aux équations linéaires (3) et (8).

27. On peut trouver directement de cette manière la fonction ω en employant des méthodes régulières, mais les calculs sont très compliqués. On les simplifie beaucoup en prenant comme variables a_1 et b_1, les fonctions A et B qui définissent la surface minima, c'est-à-dire en représentant la surface minima par les formules de M. Weierstrass.

La surface M est alors l'enveloppe du plan dont l'équation est

$$(9) \qquad (a_1 + b_1)x + i(b_1 - a_1)y + (a_1 b_1 - 1)z + t = 0.$$

Nous déterminerons la surface en employant ces coordonnées a_1, b_1, t qui sont les coordonnées α, β, ξ employées par M. Darboux [1]. (Pour trouver ces expressions elles-mêmes, nous avons changé la direction de Oz.)

Soient X, Y, Z les coordonnées du point M et C, C′, C″ les cosinus directeurs de la normale en M à la surface M. Posons

$$2q = X^2 + Y^2 + Z^2, \qquad p = CX + C'Y + C''Z.$$

On a

$$C = \frac{a_1 + b_1}{1 + a_1 b_1}, \qquad C' = \frac{i(b_1 - a_1)}{1 + a_1 b_1}, \qquad C'' = \frac{a_1 b_1 - 1}{a_1 b_1 + 1}, \qquad t = -p(1 + a_1 b_1).$$

A étant le point de la développée moyenne qui correspond au point M, on vérifie géométriquement dans le triangle OAM la relation

$$2q + h^2 = -\frac{2h^2 u}{v};$$

d'où l'on déduit, en remplaçant v par $-\dfrac{h^2}{p}$ et u par la demi-somme des rayons de courbure, ρ et ρ', de la surface M au point M :

$$(10) \qquad \frac{\rho + \rho'}{2} = \frac{-q - \dfrac{h^2}{2}}{p} = \frac{q + h_1}{p} \qquad \text{avec} \qquad h_1 = -\frac{h^2}{2}.$$

(1) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre II, n° 165.

Les coordonnées du point M, où le plan défini par l'équation (9) touche son enveloppe, sont (¹)

$$(11)\quad \begin{cases} X = Cp + \dfrac{(1+a_1 b_1)^2}{2}\left(\dfrac{\partial p}{\partial a_1}\dfrac{\partial C}{\partial b_1} + \dfrac{\partial p}{\partial b_1}\dfrac{\partial C}{\partial a_1}\right), \\ Y = C'p + \dfrac{(1+a_1 b_1)^2}{2}\left(\dfrac{\partial p}{\partial a_1}\dfrac{\partial C'}{\partial b_1} + \dfrac{\partial p}{\partial b_1}\dfrac{\partial C'}{\partial a_1}\right), \\ Z = C''p + \dfrac{(1+a_1 b_1)^2}{2}\left(\dfrac{\partial p}{\partial a_1}\dfrac{\partial C''}{\partial b_1} + \dfrac{\partial p}{\partial b_1}\dfrac{\partial C''}{\partial a_1}\right). \end{cases}$$

On déduit de ces formules

$$q = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{2} = \frac{p^2}{2} + \frac{(1+a_1 b_1)^2}{2}\frac{\partial p}{\partial a_1}\frac{\partial p}{\partial b_1},$$

$$\rho + \rho' = -2p - (1+a_1 b_1)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial a_1 \partial b_1}.$$

Remplaçons, dans l'équation (10), q et $\rho + \rho'$ par ces valeurs, nous obtenons, en simplifiant,

$$(1+a_1 b_1)^2\left(p\frac{\partial^2 p}{\partial a_1 \partial b_1} - \frac{\partial p}{\partial a_1}\frac{\partial p}{\partial b_1}\right) p^2 + 2h_1 = 0.$$

Intégrons cette équation, posons

$$p = e^{-r};$$

l'équation précédente devient

$$\frac{\partial^2 r}{\partial a_1 \partial b_1} = \frac{2h_1 e^{2r} + 1}{(1+a_1 b_1)^2}.$$

Prenons pour nouvelle inconnue la fonction s, définie par la relation

$$r = L(1+a_1 b_1) + s,$$

l'équation prend la forme

$$\frac{\partial^2 s}{\partial a_1 \partial b_1} = 2h_1 e^{2s};$$

(¹) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, nº 1074.

c'est l'équation de Liouville. Si l'on désigne par A_1 une fonction arbitraire de a_1 et par B_1 une fonction arbitraire de b_1, l'intégrale de l'équation précédente est définie par la relation

$$e^{2s} = -\frac{1}{2h_1}\frac{A'_1 B'_1}{(1+A_1B_1)^2}.$$

On en déduit, pour la fonction p, l'expression

$$(12) \qquad p = \sqrt{-2h_1}\,\frac{1+A_1B_1}{\sqrt{A'_1B'_1}\,(1+a_1b_1)} = h\,\frac{1+A_1B_1}{\sqrt{A'_1B'_1}\,(1+a_1b_1)}.$$

Les formules (11) permettent de déterminer les coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface M.

La détermination des surfaces A et A_1 se fait aussi très facilement de la façon suivante :

Le plan tangent à la surface M au point M a pour équation

$$(a_1+b_1)x + i(b_1-a_1)y + (a_1b_1-1)z - hf(a_1, b_1) = 0,$$

en posant

$$f(a_1, b_1) = \frac{1+A_1B_1}{\sqrt{A'_1B'_1}}.$$

Le point A_1 est le pôle de ce plan par rapport à la sphère de rayon hi; les coordonnées de ce point sont donc

$$x_1 = h\frac{a_1+b_1}{f(a_1, b_1)}, \qquad y_1 = h\frac{i(b_1-a_1)}{f(a_1, b_1)}, \qquad z_1 = h\frac{1-a_1b_1}{f(a_1, b_1)},$$

et l'on a

$$\rho = -\frac{h^2}{p} = h\frac{1+a_1b_1}{f(a_1, b_1)}.$$

La surface A est la développée moyenne de la surface M et l'on peut écrire

$$x = X + Cu = \frac{(1+a_1b_1)^2}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial a_1}\frac{\partial C}{\partial b_1} + \frac{\partial p}{\partial b_1}\frac{\partial C}{\partial a_1} - C\frac{\partial^2 p}{\partial a_1\,\partial b_1}\right),$$

deux formules analogues donnent y et z. En remplaçant p et C, C', C'' par leur valeur, on trouve

$$x = \frac{h}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial b_1} - (a_1 + b_1)\frac{\partial^2 f}{\partial a_1\,\partial b_1}\right],$$

$$y = \frac{ih}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial a_1} - \frac{\partial f}{\partial b_1} - (b_1 - a_1)\frac{\partial^2 f}{\partial a_1\,\partial b_1}\right],$$

$$z = \frac{h}{2}\left[a_1\frac{\partial f}{\partial a_1} + b_1\frac{\partial f}{\partial b_1} - (a_1 b_1 - 1)\frac{\partial^2 f}{\partial a_1\,\partial b_1} - f\right],$$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + h^2} = \frac{h}{2}\left[(a_1 b_1 + 1)\frac{\partial^2 f}{\partial a_1\,\partial b_1} - a_1\frac{\partial f}{\partial a_1} - b_1\frac{\partial f}{\partial b_1} + f\right].$$

Si l'on écrit

$$d\xi = x\,dv + x_1\,du,$$

et les deux relations analogues donnant $d\eta$ et $d\zeta$, la surface lieu du point $\xi\eta\zeta$ a pour élément linéaire

$$ds^2 = v^2\,du^2 + 2(uv + h^2)\,du\,dv + (u^2 - h^2)\,dv^2.$$

28. On peut appliquer le théorème de M. Weingarten aux surfaces M définies par l'équation

$$\frac{\rho + \rho'}{2} = \frac{-q + h_1}{p},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\rho + \rho'}{p^2} + \frac{2p(q - h_1)}{p^3} = 0.$$

Si l'on pose

$$\varphi(pq) = \frac{q - h_1}{p},$$

elle prend la forme

$$\rho\rho'\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} - (\rho + \rho')\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = 0.$$

Prenons comme paramètres

$$m = \frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{-(q - h_1)}{p^2}, \qquad n = \frac{\partial\varphi}{\partial q} = \frac{1}{p}.$$

On sait que la détermination des surfaces M fait connaître en même temps toutes les surfaces dont l'élément linéaire est

$$ds^2 = dm^2 + 2d(pm + qn - \varphi)\,dn$$
$$= dm^2 + 2d\left(\frac{m + h_1 n^2}{n}\right) dn.$$

Cet élément linéaire convient au paraboloïde

$$y^2 + z^2 = 2x + h_1(y - iz)^2$$

qui a un plan directeur isotrope. En donnant à h_1 la valeur o, on obtient le paraboloïde de révolution de paramètre 1.

29. Nous allons établir maintenant quelques propriétés géométriques des surfaces M.

Les développables de la congruence de normales C correspondent aux lignes de courbure de la surface M et au réseau conjugué commun aux surfaces A et A_1; ce réseau est à invariants ponctuels égaux, donc le réseau conjugué correspondant sur la surface polaire réciproque M est à invariants tangentiels égaux, c'est-à-dire que la surface M a une représentation sphérique isotherme.

Toutes les surfaces définies par l'équation

$$\frac{\rho + \rho'}{2} = \frac{-q + h_1}{p}$$

ont une représentation sphérique isotherme.

La surface M et sa développée moyenne A font partie des douze surfaces; on en déduit facilement les propriétés suivantes :

Aux asymptotiques de la surface M *correspondent, sur sa développée moyenne, un réseau conjugué à invariants tangentiels égaux.*

Aux asymptotiques de la développée moyenne correspondent, sur la surface M, *un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux.*

Nous montrerons plus loin (n° 36) que l'on obtient *toutes les surfaces* M *algébriques* en prenant pour les fonctions arbitraires A_1 et B_1, qui figurent dans l'expression des coordonnées X, Y, Z d'un point, des fonctions algébriques quelconques.

Les propositions que nous venons d'énoncer caractérisent les surfaces M dans la classe des surfaces à représentation sphérique isotherme. Ces propriétés, particulières aux surfaces M, correspondent à une propriété analytique de l'équation harmonique.

30. M. Darboux a montré ([1]) que toute surface S à représentation sphérique isotherme était l'enveloppe d'un plan défini par l'équation

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \omega = 0,$$

dans laquelle ω est la solution générale d'une équation harmonique quelconque [θ_1, θ_2, θ_3 sont définis par les équations (2)].

Cette surface S fait partie d'un groupe de douze surfaces dont la surface fondamentale est une surface minima. Considérons, dans ce groupe, la surface A qui correspond à la surface minima par orthogonalité des éléments; c'est la surface moyenne d'une congruence de Ribaucour formée de droites normales à une surface S'.

La représentation sphérique des lignes de courbure de S' est isotherme. Ces lignes de courbure correspondent, en effet, aux développables de la congruence, c'est-à-dire aux asymptotiques de la surface minima fondamentale ou aux lignes de courbure de la surface minima adjointe. Cette surface adjointe et la surface S' se correspondent par plans tangents parallèles, et le réseau conjugué commun est formé par les lignes de courbure : les deux surfaces ont donc nécessairement la même représentation sphérique.

En résumé, la surface S' a une représentation sphérique isotherme, elle a la même représentation sphérique que la surface S.

Les coordonnées d'un point de la surface S' sont

$$(13) \qquad X = x + \frac{\theta_1}{\theta_4} u, \qquad Y = y + \frac{\theta_1}{\theta_4} u, \qquad Z = z + \frac{\theta_1}{\theta_4} u;$$

x, y, z sont les coordonnées d'un point de la développée moyenne de S', elles sont définies ainsi que u par les formules (4).

Les formules (13) *peuvent représenter toutes les surfaces à représentation sphérique isotherme.*

([1]) Darboux, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, n° 914.

La connaissance d'une solution ω de l'équation harmonique qui correspond à une surface minima, permet de déterminer deux surfaces S *et* S' *ayant même représentation sphérique que la surface minima adjointe.*

Une construction géométrique simple fait connaître S lorsqu'on donne S'.

Considérons dans les douze surfaces la surface A_1 polaire réciproque de S ; les coordonnées du point A_1 sont $\frac{\theta_1}{\omega}, \frac{\theta_2}{\omega}, \frac{\theta_3}{\omega}$, donc

$$OA_1 = \frac{\theta_4}{\omega}.$$

La parallèle à OA_1 menée par A forme une congruence de Ribaucour; soit F un point de contact de cette droite avec la surface focale, on a

$$\frac{AF}{OA_1} = \omega^2.$$

Remplaçons dans cette équation OA_1 par $\frac{\theta_4}{\omega}$, nous obtenons

$$\omega = \frac{AF}{\theta_4}.$$

En négligeant un facteur constant et en désignant par S le point de la surface S qui correspond à A_1, on peut écrire

$$OS = \frac{1}{OA_1} = \frac{\omega}{\theta_4} = \frac{AF}{\theta_4^2}.$$

Soient ρ et ρ' les rayons de courbure de la surface S', R et $-$ R les rayons de courbure de la surface minima fondamentale (ce sont aussi les rayons de courbure de la surface minima adjointe)

$$\theta_4^2 = R, \qquad AF = \frac{\rho - \rho'}{2}.$$

Remplaçons dans la dernière égalité, nous trouvons, après avoir supprimé un facteur constant,

$$OS = \frac{\rho - \rho'}{R},$$

et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Soit S' *une surface ayant même représentation sphérique qu'une surface* *minima. Désignons par ρ et ρ' ses rayons de courbure en un point, par* R *et* — R *les rayons de courbure de la surface minima au point correspondant. Le plan parallèle aux plans tangents correspondants, et situé à une distance d'un point fixe proportionnelle à $\frac{\rho-\rho'}{R}$, enveloppe une surface* S *qui a même représentation sphérique que* S'.

Les surfaces S et S' sont en général distinctes; elles sont confondues dans le groupe des douze surfaces qui fait connaître une surface applicable sur le paraboloïde qui a un plan directeur isotrope.

On a, dans ce cas (n° 27),

$$\frac{\rho+\rho'}{2}=\frac{h_1-q}{p}, \qquad p=h_1\frac{\rho-\rho'}{R}.$$

Ces deux relations permettent de calculer en fonction de p, q, R les rayons de courbure ρ et ρ' de la surface M.

31. La surface S' est l'enveloppe d'un plan dont l'équation est

$$\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z+\omega'=0.$$

On vérifie géométriquement la relation suivante

$$\omega'=\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z+\theta_4 u. \tag{14}$$

Étant donnée une solution ω d'une équation harmonique, la formule (14) *permet de trouver une autre solution ω'.*

Inversement, on peut trouver l'expression de ω en fonction de ω'. En faisant usage des équations (6), on déduit facilement de la relation (14) les suivantes

$$\begin{array}{llllll}
\theta_1 x & +\theta_2 y & +\theta_3 z & +\theta_4 u & -\omega' & =0,\\
\dfrac{\partial\theta_1}{\partial a}x & +\dfrac{\partial\theta_2}{\partial a}y & +\dfrac{\partial\theta_3}{\partial a}z & +\dfrac{\partial\theta_4}{\partial a}u & -\dfrac{\partial\omega'}{\partial a} & =0,\\
\dfrac{\partial\theta_1}{\partial b}x & +\dfrac{\partial\theta_2}{\partial b}y & +\dfrac{\partial\theta_3}{\partial b}z & +\dfrac{\partial\theta_4}{\partial b}u & -\dfrac{\partial\omega'}{\partial b} & =0,\\
\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial a\,\partial b}x & +\dfrac{\partial^2\theta_2}{\partial a\,\partial b}y & +\dfrac{\partial^2\theta_3}{\partial a\,\partial b}z & +\dfrac{\partial^2\theta_4}{\partial a\,\partial b}u & -\dfrac{\partial^2\omega'}{\partial a\,\partial b} & =0,\\
\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial a^2}x & +\dfrac{\partial^2\theta_2}{\partial a^2}y & +\dfrac{\partial^2\theta_3}{\partial a^2}z & +\dfrac{\partial^2\theta_4}{\partial a^2}u & -\dfrac{\partial^2\omega'}{\partial a^2} & -2\omega=0.
\end{array}$$

En éliminant x, y, z, u entre ces cinq équations linéaires, on trouve une égalité de la forme

$$\omega = M\omega' + N\frac{\partial\omega'}{\partial a} + P\frac{\partial\omega'}{\partial b} + Q\frac{\partial^2\omega'}{\partial a\,\partial b} + R\frac{\partial^2\omega'}{\partial a^2}.$$

32. On peut généraliser le théorème précédent, démontré pour l'équation harmonique, et l'étendre à une classe beaucoup plus étendue d'équations de Laplace.

Nous ferons d'abord le changement de variables défini par les formules

$$\alpha = a + b, \qquad \beta = a - b.$$

x, y, z et u prennent la forme

$$\int \left(\theta_i\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega\frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_i\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega\frac{\partial\theta_i}{\partial\beta}\right)d\beta.$$

L'équation harmonique devient

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = [F(\alpha+\beta) - \Phi(\alpha-\beta)]\,\theta.$$

Nous énoncerons le théorème suivant, dont la vérification est immédiate :

Supposons que l'on connaisse p solutions de l'équation E_p

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k\theta$$

vérifiant la relation

$$\Sigma_p\theta_i^2 = 0,$$

et soit ω *une* $(p+1)^{ième}$ *solution quelconque, si l'on pose*

$$A_i = \int \left(\theta_i\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega\frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_i\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega\frac{\partial\theta_i}{\partial\beta}\right)d\beta$$

la fonction

$$\omega' = \Sigma_p A_i\theta_i$$

est une nouvelle solution de l'équation.

Lorsque $p = 3$ *l'équation* E_3 *est immédiatement intégrable.*

On déduit cette propriété de la remarque suivante, dont la démonstration est facile :

Si trois solutions d'une équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k\theta$$

sont liées par une relation homogène quelconque, l'équation est immédiatement intégrable.

Lorsque $p = 4$, l'équation est harmonique.

De la condition

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2 = 0$$

on déduit, en effet, que $\frac{\theta_1}{\theta_4}, \frac{\theta_2}{\theta_4}, \frac{\theta_3}{\theta_4}$ peuvent représenter les coordonnées rectangulaires d'un point d'une sphère; $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ étant quatre solutions de l'équation de Laplace donnée, $\frac{\theta_1}{\theta_4}, \frac{\theta_2}{\theta_4}, \frac{\theta_3}{\theta_4}$, 1 sont trois solutions d'une équation à invariants égaux de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = m\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + n\frac{\partial\theta}{\partial\beta}.$$

Sur la sphère, le réseau qui correspond aux paramètres α, β est donc orthogonal et isotherme, et par suite, l'équation de Laplace que vérifient $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ est harmonique.

Lorsque $p = 5$, les θ sont les coordonnées pentasphériques d'un point d'une surface isothermique rapportée à ses lignes de courbure [1]. Nous appliquerons plus loin cette propriété.

33. L'équation de Laplace, que nous avons considérée, admettant toujours la solution 0, une équation E_p renferme toutes les équations E_{p-1}.

Nous allons indiquer une méthode qui permet de déduire, dans certains cas particuliers, une équation E_{p+1} d'une équation E_p.

---

[1] Darboux, *Théorie des surfaces*, Livre IV, n° 437.

Remarquons d'abord que la solution ω', que nous calculons au moyen d'une solution ω, est, en général, distincte de ω.

Nous dirons que ω est une *solution spéciale* de l'équation E_p lorsque, m étant constant,

$$\omega' = m\,\omega.$$

Si l'on pose, en général,

$$\sigma_i \omega = A_i,$$

les fonctions σ sont des solutions de l'équation de Laplace que l'on obtient en appliquant à l'équation E_p la transformation de M. Moutard relative à la solution ω.

De la relation

$$m\,\omega = \omega' = \Sigma_p A_i \theta_i$$

on déduit facilement, en représentant par h^2 une constante quelconque,

$$\Sigma_p A_i^2 + h^2 = 0,$$

ou, en remplaçant A_i par la valeur $\sigma_i \omega$,

$$\Sigma \sigma_i^2 + \frac{h^2}{\omega^2} = 0. \tag{15}$$

L'équation que l'on déduit de E_p, par le méthode de M. Moutard, admet comme solutions $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p, \frac{h}{\omega}$ dont la somme des carrés est nulle ; d'où l'on conclut :

Si l'on applique à une équation E_p la transformation de M. Moutard relative à une solution spéciale ω, on obtient une équation E_{p+1}.

Lorsque $h = 0$ l'équation transformée est aussi de la forme E_p.

34. Appliquons le théorème précédent aux équations harmoniques E_4.

En faisant usage des relations que nous avons employées au commencement de la troisième Partie, on voit que ω sera une solution spéciale si

$$m\,\omega = \theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \theta_4 u.$$

Nous avons trouvé précédemment (n° 25) qu'une telle solution ω

faisait connaître une surface applicable sur le paraboloïde qui a un plan directeur isotrope. La relation (15) devient alors

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 - h^2.$$

Une équation harmonique a donc toujours des solutions spéciales.

La recherche des solutions spéciales de toutes les équations harmoniques est un problème équivalent à la déformation du paraboloïde qui a un plan directeur isotrope.

En particulier, lorsque le paraboloïde est de révolution, la relation précédente se réduit à

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

La solution ω correspondante a été déjà calculée [n° 14, formule (11)]. On peut vérifier que cette solution est harmonique et énoncer le résultat suivant :

Pour obtenir une équation harmonique en appliquant à une équation harmonique la transformation de M. Moutard, il faut que cette transformation soit relative à une solution harmonique de la première équation.

M. Darboux a d'ailleurs démontré que cette condition nécessaire est suffisante [1].

35. La méthode que nous venons d'exposer permet donc de déduire de chaque solution d'une équation harmonique E_4 une équation E_5.

Les cinq quantités x, y, z, u, h, liées par la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 - h^2,$$

peuvent être considérées comme les coordonnées pentasphériques d'une surface isothermique rapportée à ses lignes de courbure. Les coordonnées ponctuelles sont

$$X = \frac{x}{u \pm h}, \qquad Y = \frac{y}{u \pm h}, \qquad Z = \frac{z}{u \pm h}.$$

---

(1) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre IV, n° 407.

Le double signe donne deux surfaces inverses par rapport à l'origine des coordonnées.

Un calcul facile montre que l'élément linéaire de ces surfaces est

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{\omega^2}{(u \pm h)^2}(d\alpha^2 - d\beta^2).$$

Les paramètres des lignes de longueur nulle sont

$$a = \alpha + \beta, \qquad b = \alpha - \beta.$$

Ces lignes correspondent donc aux lignes de longueur nulle de la surface M définie précédemment.

En faisant usage des paramètres a_1 et b_1, nous avons calculé (n° 27) les expressions des fonctions x, y, z et u.

Si l'on pose, comme au n° 27,

$$(16) \qquad f(a_1, b_1) = \frac{1 + A_1 B_1}{\sqrt{A'_1 B'_1}},$$

on trouve immédiatement les formules suivantes qui donnent les coordonnées X, Y, Z d'un point de l'une des surfaces isothermiques rapportée aux lignes de longueur nulle

$$(17) \qquad \begin{cases} \Delta . X = (a_1 + b_1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial b_1} - \dfrac{\partial f}{\partial a_1} - \dfrac{\partial f}{\partial b_1}, \\ \Delta . Y = i(b_1 - a_1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial b_1} - i\left(\dfrac{\partial f}{\partial a_1} - \dfrac{\partial f}{\partial b_1}\right), \\ \Delta . Z = (a_1 b_1 - 1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial b_1} - a_1\dfrac{\partial f}{\partial a_1} - b_1\dfrac{\partial f}{\partial b_1} + f \end{cases}$$

avec

$$\Delta = (a_1 b_1 + 1)\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial b_1} - a_1\frac{\partial f}{\partial a_1} - b_1\frac{\partial f}{\partial b_1} + f \pm 2.$$

Le double signe conduit à deux surfaces inverses par rapport à l'origine.

La fonction $f(a_1, b_1)$ vérifie la relation

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial b_1} - \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial f}{\partial b_1} = 1.$$

On peut donc exprimer X, Y, Z en fonction de f, $\frac{\partial f}{\partial a_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial b_1}$, c'est-à-dire que, dans l'expression des coordonnées X, Y, Z, figurent seulement les fonctions arbitraires A_1, B_1 et leurs deux premières dérivées.

36. Dans cette classe de surfaces isothermiques *qui paraissent nouvelles,* on peut déterminer toutes les surfaces algébriques.

On obtient toutes les surfaces algébriques en remplaçant dans les formules (17) *les fonctions arbitraires* A_1 *et* B_1 *par des fonctions algébriques quelconques.*

Cette condition est évidemment suffisante.

Pour montrer qu'elle est nécessaire, nous indiquerons d'abord les deux relations

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1-a_1^2)\frac{\partial x}{\partial a_1}+i(1+a_1^2)\frac{\partial y}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial z}{\partial a_1}=0,\\ &(1-b_1^2)\frac{\partial x}{\partial b_1}-i(1+b_1^2)\frac{\partial y}{\partial b_1}+2b_1\frac{\partial z}{\partial b_1}=0,\end{aligned}\right.$$

que l'on vérifie facilement. Elles expriment que la surface A correspond à la surface minima B par orthogonalité des éléments.

On déduit de l'équation (5)

$$(19)\quad (a_1+b_1)x+i(b_1-a_1)y+(a_1b_1-1)z+(a_1b_1+1)u=hf(a_1,b_1).$$

Sur la surface isothermique, les déplacements effectués suivant une ligne de longueur nulle sont définis par les relations

$$dZ=p\,dX+q\,dY,\qquad dX^2+dY^2+dZ^2=0$$

(p et q désignent les dérivées partielles de Z par rapport à X et à Y).

Si la surface est algébrique, p et q sont des fonctions algébriques de X et Y.

Ces équations définissent, pour les différentielles dx, dy, dz, deux systèmes de valeurs δX, δY, δZ et $\delta' X$, $\delta' Y$, $\delta' Z$.

On déduit des équations précédentes que le déplacement est nécessairement représenté par les formules

$$(20) \qquad \delta X = \delta X, \qquad \delta Y = f_1(X, Y)\,\delta X, \qquad \delta Z = f_2(X, Y)\,\delta X,$$

$f_1(X, Y)$ et $f_2(X, Y)$ étant des fonctions algébriques.

Différentions les deux membres de l'équation

$$x = X(u - h),$$

nous obtenons

$$\delta x = (u - h)\,\delta X + X\,\delta u.$$

L'égalité

$$(21) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{u + h}{u - h}$$

montre que u est une fonction algébrique de X et de Y.

En employant les relations (20) et (21), on pourra représenter le déplacement correspondant effectué sur la surface A par les formules

$$\delta x = F_1(X, Y)\,dX, \qquad \delta y = F_2(X, Y)\,dX, \qquad \delta z = F_3(X, Y)\,dX,$$

$F_1(X, Y)$, $F_2(X, Y)$ et $F_3(X, Y)$ étant des fonctions algébriques.

Si le déplacement correspond à une variation du paramètre a_1, δx, δy, δz sont respectivement proportionnelles à $\frac{\partial x}{\partial a_1}$, $\frac{\partial y}{\partial a_1}$, $\frac{\partial z}{\partial a_1}$, et la première relation (18) devient

$$(1 - a_1^2)\,F_1(X, Y) + i(1 + a_1^2)\,F_2(X, Y) + 2a_1\,F_3(X, Y) = 0.$$

a_1 est donc une fonction algébrique de X et Y; on démontrerait d'une manière analogue que b_1 a la même propriété.

x, y, z et u étant des fonctions algébriques de X et Y, on déduit de l'équation (19) que

$$f(a_1, b_1) = h\,\frac{1 + A_1 B_1}{\sqrt{A'_1 B'_1}}$$

est une fonction algébrique de X et Y, et, par suite, de a_1 et b_1. Nous allons démontrer que, si la fonction $f(a_1, b_1)$ est algébrique, les fonctions A_1 et B_1 sont nécessairement algébriques.

Donnons, en effet, à b_1 deux valeurs distinctes, nous obtiendrons deux fonctions algébriques de a_1

$$\frac{1+A_1 m}{\sqrt{A'_1}\, n}, \quad \frac{1+A_1 p}{\sqrt{A'_1}\, q}$$

(m, n, p, q désignent des constantes).

Le quotient de ces deux fonctions est

$$\frac{1+A_1 m}{1+A_1 p}\sqrt{\frac{q}{n}};$$

ce quotient étant algébrique, A_1 l'est aussi et B_1 a la même propriété.

La surface M est l'enveloppe du plan défini par l'équation

$$(a_1+b_1)x + i(b_1-a_1)y + (a_1 b_1 - 1)z - h\, f(a_1 b_1) = 0.$$

Cette surface est donc algébrique lorsque $f(a_1, b_1)$ est une fonction algébrique. Les surfaces M et A sont algébriques en même temps que la surface isothermique correspondante.

La proposition énoncée au n° 29 est démontrée.

Dans un Mémoire qui sera publié plus tard nous ferons l'étude géométrique des surfaces isothermiques précédemment définies.