A. HAILLECOURT

Sur la déviation dans la chute des graves

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 5 (1868), p. 111-127
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1868_1_5__111_0>

SUR LA

DÉVIATION DANS LA CHUTE DES GRAVES,

PAR M. A. HAILLECOURT,

AGRÉGÉ ET INSPECTEUR DE L'UNIVERSITÉ.

En étudiant la question, déjà ancienne, de la chute des graves, j'ai été conduit à faire abstraction de l'aplatissement du sphéroïde, de son mouvement de translation et de la résistance de l'air.

Mais, en compensation, j'ai pu établir quelques théorèmes d'un énoncé parfaitement clair, en laissant des valeurs quelconques à des éléments que l'on suppose ordinairement assez petits pour qu'on puisse en négliger les puissances supérieures.

Ma méthode est, je crois, complètement neuve; ses résultats contredisent, en quelques points, l'opinion généralement admise.

Hypothèses et définitions.

1. 1° Une sphère homogène, ou composée de couches homogènes, tourne uniformément, de l'ouest à l'est, autour d'un de ses diamètres; sa forme se maintient intacte, malgré la force centrifuge que développe la rotation.

2° Un point matériel, qui faisait corps avec la sphère, s'en détache et se meut en vertu de sa vitesse acquise et de l'attraction que la sphère exerce sur lui conformément à la loi de Newton.

On cherche les principales circonstances de son mouvement relatif, en s'occupant surtout de la *déviation* parallèle à l'équateur (à l'est ou à l'ouest), et de la *déviation* dans le sens du méridien (au nord ou au sud).

Tel est le problème que nous nous proposons, en nous astreignant à ne baser nos conclusions que sur des résolutions, ou comparaisons, d'équations rigoureusement démontrées.

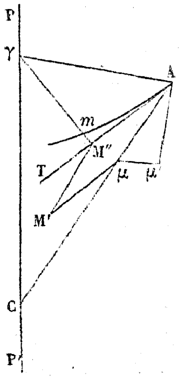
2. 3° *Définition*. — En un point A, pris hors de la sphère, on appelle *verticale* la direction initiale, estimée par rapport à la sphère mobile, de la chute d'un point matériel tombant librement à partir du moment où il s'en est détaché.

D'après un raisonnement bien connu, en appelant *fil à plomb* un fil sans masse, inextensible, mais parfaitement flexible, portant à son extrémité un point matériel, nous pouvons poser :

Principe I. — *La verticale d'un point est donnée par un fil à plomb infiniment petit suspendu à ce point.*

4° A étant (*fig.* 1) la position initiale ou le point de départ du mobile M, M' sa position au bout du temps élémentaire θ dans son mouvement absolu, $A\gamma\,(=r)$ et γ le rayon et le centre du parallèle que décri-

Fig. 1.



rait le mobile s'il restait attaché à la sphère, ω la vitesse angulaire et C le centre de celle-ci; menons $M'\mu$ perpendiculaire au rayon CA, et $M'M''$ perpendiculaire à la tangente AT du parallèle; joignons $\gamma M''$ qui rencontre le parallèle en m; menons $\mu\mu' = mM''$ dans le plan PCA, perpendiculairement à l'axe de rotation PP', et joignons $A\mu'$.

Un raisonnement connu permet de poser

$$A\mu = \frac{1}{2} G\theta^2, \quad A\mu' = \frac{1}{2} g\theta^2, \quad mM'' = \frac{1}{2} r\omega^2\theta^2,$$

en désignant par G l'*attraction réelle* et par g l'*attraction apparente*.

Comme $\omega^2 r$ est la force centrifuge en A, nous avons :

Principe II. — *L'attraction apparente, au moment du départ, est la résultante de l'attraction réelle et de la force centrifuge; elle est comprise dans le méridien.*

3. Le déplacement du mobile, dans son mouvement relatif, est la résultante des deux chemins mM'', $M''M'$, résultante qu'on peut remplacer par $A\mu'$, puisqu'ils sont respectivement égaux et parallèles à $\mu\mu'$ et $A\mu$.

$A\mu'$ est donc la direction initiale du mouvement relatif du mobile, ou (2, 3°) la verticale de A. Donc :

Principe III. — *La verticale est comprise dans le méridien.*

Remarque. — Au fond, ce troisième principe n'est autre chose que la seconde partie du deuxième; mais nous avons cru devoir conserver le mot *attraction apparente,* qui n'est pas inconnu dans le langage mathématique.

Corollaire. — Pour construire g en grandeur et direction, après avoir pris AI = G sur AC, on mène IJ = $\omega^2 r$ perpendiculaire à CP, et on joint AJ (*fig.* 2, p. 116).

4. *Remarque.* — Nous convenons, pour la première partie du travail, de considérer exclusivement le cas où le point C_1 est du même côté de γ que le centre C (20).

5. 5° *Définition.* — AC_1 étant la verticale de A, imaginons le cône qu'elle engendrerait en tournant autour de PP'. Nous appellerons *nord* la portion de l'espace intérieure à ce cône, P étant le *pôle boréal.*

Remarque. — Les régions *est* et *ouest* seront toujours celles qu'a, à sa droite et à sa gauche, un observateur entraîné par le mouvement de la sphère, et regardant vers le pôle boréal ou le nord.

Formules de transformation.

6. Conservant les notations précédentes G, g, ω, appelons a le rayon CA du point de départ, φ son angle avec l'équateur, δ et φ_1 les angles de la verticale avec le rayon et l'équateur.

Comme $r = \mathrm{A}\gamma = a\cos\varphi$, la force centrifuge a pour expression $a\,\omega^2\cos\varphi$.

Pour abréger, posons

$$(b)\qquad \frac{a\,\omega^2}{\mathrm{G}} = \mathrm{K}.$$

Le triangle AIH, dans lequel (3, *Corollaire*)

$$\mathrm{AI} = \mathrm{G}, \quad \mathrm{IJ} = a\,\omega^2\cos\varphi = \mathrm{KG}\cos\varphi,$$

donne

$$(c)\qquad \sin\delta = \mathrm{K}\sin\varphi_1\cos\varphi, \quad \varphi_1 = \varphi + \delta,$$

comme relations fondamentales.

Remarque. — Si l'on pose $f = \frac{\omega^2}{\mu}$, μ étant une constante telle que $\mathrm{G} = \frac{\mu}{a^2}$, il vient

$$(b')\qquad \mathrm{K} = fa^3.$$

7. Les équations (c) donnent

$$(d)\qquad \frac{\cos\delta}{1 - \mathrm{K}\cos^2\varphi} = \frac{\sin\delta}{\mathrm{K}\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi_1}{(1-\mathrm{K})\cos\varphi} = \frac{\sin(\varphi+\varphi_1)}{(2-\mathrm{K})\sin\varphi\cos\varphi},$$

$$(d')\qquad \frac{\cos\delta}{1 - \mathrm{K}\sin^2\varphi_1} = \frac{\sin\delta}{\mathrm{K}\sin\varphi_1\cos\varphi_1} = \frac{\sin\varphi}{(1-\mathrm{K})\sin\varphi_1} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} = \frac{\sin(\varphi+\varphi_1)}{(2-\mathrm{K})\sin\varphi_1\cos\varphi_1},$$

$$(d'')\qquad \operatorname{tang}\delta = \frac{\mathrm{K}\sin\varphi\cos\varphi}{1 - \mathrm{K}\cos^2\varphi} = \frac{\mathrm{K}\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{1 - \mathrm{K}\sin^2\varphi_1},$$

d'où

$$(d''')\qquad \operatorname{tang}\varphi = (1-\mathrm{K})\operatorname{tang}\varphi_1 = (1 - fa^3)\operatorname{tang}\varphi_1.$$

Corollaire. — Comme φ_1 doit être aigu, suivant la convention faite (4), (d''') prouve qu'il faut que

$$\mathrm{K} = fa^3 < 1,$$

ce qui revient à dire qu'*il faut que la force centrifuge reste moindre que l'attraction réelle, lors même que l'on transporterait le point de départ sur l'équateur, sans changer sa distance au centre.*

Équation de la trajectoire du mobile, dans son mouvement absolu.

8. Cette courbe est (3) comprise dans le plan CAT. En prenant C pour origine et CA pour axe des X, d'un système orthogonal de coordonnées, elle a pour équation (*)

$$(t) \qquad \mu^2 y^2 + (-b) c^2 x^2 \pm 2 c^2 x \sqrt{\mu^2 - (-b) c^2} = c^4,$$

dans laquelle

$$(-b) = \frac{2\mu}{a} - v_0^2 = 2Ga - a^2\omega^2\cos^2\varphi,$$

$$c = av_0 \sin(a, v_0) = a^2\omega\cos\varphi,$$

puisque

$$v_0 = r\omega = a\omega\cos\varphi, \quad \text{et que} \quad \sin(a, v_0) = \sin 1^d = 1,$$

d'où

$$\mu^2 - (-b) c^2 = a^4(G - a\omega^2\cos^2\varphi)^2.$$

Substituant dans (t), et divisant par a^4,

$$(t') \quad \left\{ \begin{array}{l} G^2 y^2 + (2G - a\omega^2\cos^2\varphi)\, a\omega^2\cos^2\varphi\, x^2 \\ \qquad \pm 2(G - a\omega^2\cos^2\varphi)\, a^2\omega^2\cos^2\varphi\, x = a^4\omega^4\cos^4\varphi. \end{array} \right.$$

Le signe $-$ convient seul, puisque (t') doit être vérifié pour $x = a$ et $y = 0$.

Divisant par G^2, remplaçant $\frac{a\omega^2}{G}$ par K,

$$(t'') \quad y^2 + (2 - K\cos^2\varphi) K\cos^2\varphi\, x^2 - 2a(1 - K\cos^2\varphi) K\cos^2\varphi\, x = a^2K^2\cos^4\varphi.$$

C'est une ellipse, puisque (7, *Corollaire*) $K < 1$. Son grand axe est dirigé suivant CA, puisque C est un foyer; cela résulte d'ailleurs de ce que $(2 - K\cos^2\varphi) K\cos^2\varphi < 1$, d'après un principe bien connu de la théorie des maximum.

(*) DUHAMEL, t. II, p. 50.

9. Mais il est plus convenable de prendre A pour origine, et AC pour demi-axe positif.

Cette transformation donne finalement

$$(\mathrm{T}) \qquad y^2 = 2a\mathrm{K}\cos^2\varphi\, x - (2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi)\mathrm{K}\cos^2\varphi\, x^2.$$

α étant le demi-grand axe OA (*fig.* 3), et ρ le rayon de courbure AH au sommet A,

$$\alpha = \frac{a}{2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi}, \quad \rho = a\mathrm{K}\cos^2\varphi.$$

Section, par le plan de la trajectoire, du cône que décrit la verticale en tournant autour de PP′.

10. $\mathrm{AQC_1}$ est (*fig.* 2) la section de ce cône par le plan méridien perpendiculaire au plan de la trajectoire.

Fig. 2.

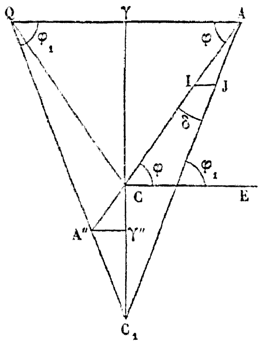
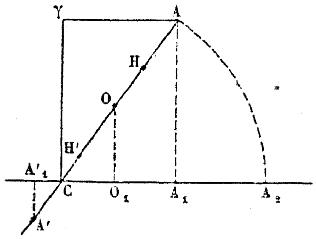


Fig. 3.



Donc, pour les mêmes axes coordonnés, l'équation est (*)

$$(v) \qquad \mathrm{Y}^2 = 2\frac{\mathrm{A}\gamma.\mathrm{A}''\gamma''}{\frac{1}{2}\mathrm{AA}''}x - \frac{\mathrm{A}\gamma.\mathrm{A}''\gamma''}{\left(\frac{1}{2}\mathrm{AA}''\right)^2}x^2.$$

Le triangle AQA″ donne (7, d')

$$\mathrm{AA}'' = \mathrm{AQ}\frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi+\varphi_1)} = 2a\frac{\cos\varphi\sin\varphi_1}{\sin(\varphi+\varphi_1)} = 2a\frac{1}{2-\mathrm{K}}.$$

(*) Lefébure de Fourcy, p. 325.

Donc

$$\frac{1}{2}\mathrm{AA}'' = a\frac{1}{2-\mathrm{K}}, \quad \mathrm{CA}'' = a\frac{\mathrm{K}}{2-\mathrm{K}}.$$

Les triangles $\mathrm{CA}\gamma$, $\mathrm{CA}''\gamma''$ donnent

$$\mathrm{A}''\gamma'' = \mathrm{A}\gamma\frac{\mathrm{CA}''}{\mathrm{CA}} = a\cos\varphi\frac{\mathrm{K}}{2-\mathrm{K}}.$$

Substituant :

$$(\mathrm{V}) \qquad \mathrm{Y}^2 = 2a\mathrm{K}\cos^2\varphi\, x - (2-\mathrm{K})\mathrm{K}\cos^2\varphi\, x^2.$$

Remarque. — Les courbes (T) et (V) sont osculatrices en A.

Déviation dans le sens du méridien.

11. Rapprochons les équations (T) et (V) :

$$(\mathrm{T}) \qquad y^2 = 2a\mathrm{K}\cos^2\varphi\, x - (2-\mathrm{K}\cos^2\varphi)\mathrm{K}\cos^2\varphi\, x^2,$$
$$(\mathrm{V}) \qquad \mathrm{Y}^2 = 2a\mathrm{K}\cos^2\varphi\, x - (2-\mathrm{K})\mathrm{K}\cos^2\varphi\, x^2.$$

Tant que φ n'est pas nul, pour le même x, Y surpasse y. La courbe (T) est donc enveloppée par la courbe (V) (*), et par conséquent par le cône que décrit la verticale. Ainsi, nous rappelant nos définitions (5), et supposant le point de départ hors de l'équateur, du côté du pôle boréal, nous avons :

Théorème I. — *Dans sa chute libre, un point matériel passe dès le départ, et se maintient constamment au nord, par rapport à la verticale du point de départ.*

Corollaire. — C'est le plan vertical perpendiculaire au méridien qui

---

(*) C'est ce qu'on voit d'ailleurs facilement, en remarquant que (9) $\alpha = \frac{a}{2-\mathrm{K}\cos^2\varphi}$ et (10) $\frac{1}{2}\mathrm{AA}'' = \frac{a}{2-\mathrm{K}}$ donnent

$$\alpha < \frac{1}{2}\mathrm{AA}'', \quad \text{d'où} \quad 2\alpha(=\mathrm{AA}') < \mathrm{AA}'',$$

et que de deux ellipses osculatrices en un sommet, celle pour laquelle l'axe passant par ce sommet est le plus grand enveloppe l'autre.

détermine les régions nord et sud, telles qu'on les conçoit ordinairement. Ce plan étant tangent au cône, nous voyons que : *à fortiori le mobile se maintient au nord (c'est-à-dire du même côté que le pôle boréal) du plan vertical est-ouest.*

Déviation parallèle à l'équateur.

12. *Lemme I.* — Si un point est situé sur le grand axe d'une ellipse, sa distance au sommet le plus éloigné est le *maximum absolu* de ses distances aux divers points de la courbe.

Sa distance au sommet le plus rapproché est *maximum relatif* quand il est compris entre les centres H et H′ de courbure correspondants aux sommets A et A′.

Lemme II. — Un point étant situé sur le petit axe d'une ellipse, sa distance au sommet le plus éloigné est un *maximum absolu*, s'il n'est pas compris entre les centres de courbure correspondants aux sommets; mais s'il est compris entre ces centres, cette distance est un *minimum relatif.*

13. Projetons (*fig.* 3, p. 116) sur l'équateur la trajectoire (T), de manière à avoir la trajectoire (T_1) de la projection M_1 du mobile; et pour cela remplaçons $x\cos\varphi$ par x_1, il vient

$$(T_1) \qquad y_1^2 = 2a\mathrm{K}\cos\varphi\, x_1 - \mathrm{K}(2-\mathrm{K}\cos^2\varphi)\,x_1^2 \quad (^*),$$

ou

$$(T_1) \qquad y_1^2 = 2a_1\mathrm{K}x_1 - \mathrm{K}(2-\mathrm{K}\cos^2\varphi)\,x_1^2,$$

en posant

$$\mathrm{CA}_1 = \mathrm{CA}\cos\varphi = a\cos\varphi = a_1;$$

d'où (9)

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{2-\mathrm{K}\cos^2\varphi}, \quad \rho_1 = a_1\mathrm{K}.$$

13 *bis*. Soit l'homothétique de cette courbe par rapport au centre C,

(*) On n'a pas, pour la projection, marqué les centres de courbure H_1 et H'_1 qui ne sont pas les projections de H et de H′, et qui ne sont pas nécessairement situés (14, 3°) le premier sur O_1A_1, le deuxième sur $O_1A'_1$.

en prenant $\frac{1}{\cos\varphi}$ pour rapport d'homothétie. Son équation est

$$(T_2) \qquad y_2^2 = 2a\mathrm{K}x_2 - \mathrm{K}(2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi)x_2^2.$$

Elle a pour sommet de droite, qui sert en même temps d'origine, le point A_2, tel que $CA_2 = a$.

Soit encore l'homothétique pour le rapport $\frac{1}{a\cos\varphi}$; son équation est

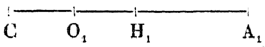
$$(T_3) \qquad y_3^2 = 2\mathrm{K}x_3 - \mathrm{K}(2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi)x_3^2.$$

Le point A_3, tel que $CA_3 = 1$, en est le sommet de droite et l'origine des coordonnées.

14. Puisque (**7**, *Remarque*) $\mathrm{K} < 1$, on voit que ρ_1 et α_1 sont moindres que a_1. Quant à leur rapport, il peut être inférieur, égal ou supérieur à l'unité :

1° Soit $\mathrm{K}(2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi) < 1$; $A_1A'_1$ est le grand axe et $\rho_1 < \alpha_1$, ce qui donne $\rho_1 < \alpha_1 < a_1$, ou cette succession de points (*fig.* 4)

Fig. 4.

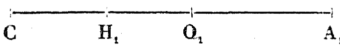


O_1 étant le centre de la courbe et H_1 le centre de courbure pour le sommet A_1; CA_1 est donc (**12**, *Lemme I*) maximum absolu.

2° Soit $\mathrm{K}(2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi) = 1$. La courbe est une circonférence dont le centre est sur CA_1; donc CA_1 est encore maximum absolu.

3° Soit enfin $\mathrm{K}(2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi) > 1$; c'est alors le petit axe qui est dirigé suivant CA_1, et $\rho_1 > \alpha_1$, ce qui donne $\alpha_1 < \rho_1 < a_1$, ou cette nouvelle succession des quatre points (*fig.* 5)

Fig. 5.



CA_1 est encore (*Lemme II*) maximum absolu.

15. Au moment du départ, la vitesse angulaire du mobile M se projette en vraie grandeur, puisque la tangente AT est parallèle à l'équateur; la vitesse de M_1 est donc aussi ω. La loi des aires s'appliquant au mouvement de M_1 sur (T_1) comme à celui de M sur (T), à une plus grande distance à C correspond une vitesse angulaire moindre; ω est donc le minimum absolu des vitesses; M_1 tourne donc plus rapidement que le méridien, et nous avons :

THÉORÈME II. — *Dans sa chute libre, le mobile passe dès le départ, et se maintient constamment, à l'est du méridien dont il s'est détaché.*

16. Supposons a constant, mais φ variable; $K = fa^3$ est aussi constant.

Dans l'équation (T_2), si φ augmente, y_2 diminue pour le même x_2. Soit $\varphi'' > \varphi'$; (T''_2) est enveloppée par (T'_2), qui n'a avec elle que le sommet A_2 en commun. Elle est donc, comme on le verrait facilement, parcourue avec une plus grande vitesse angulaire.

Corollaire. — De deux mobiles partis simultanément de deux points équidistants du centre, c'est celui dont le point de départ est le plus voisin du pôle qui dévie le plus rapidement à l'est.

16 *bis*. Soit, au contraire, φ constant, mais a variable. $K = fa^3$ augmente avec a. Si donc $a'' > a'$, *aux environs du sommet* A_3 (13 *bis*) commun aux deux courbes, (T''_3) est extérieure à (T'_3). D'où, par suite de la comparaison des vitesses angulaires :

Corollaire. — De deux mobiles partis simultanément de deux points d'un même rayon, celui dont le point de départ est le plus éloigné du centre est celui qui, AU COMMENCEMENT DU MOUVEMENT, *dévie le moins rapidement à l'est.*

Remarque. — Il pourra ou non, suivant les cas, rejoindre l'autre.

Du fil à plomb.

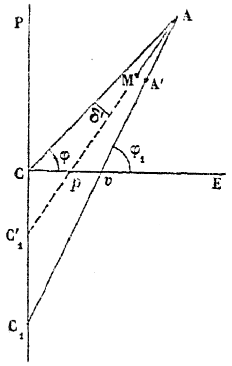
17. Soit AM un fil à plomb suspendu en A. Son prolongement Mp est la verticale de M.

ρ étant le rayon vecteur CM, il vient (7, d''')

$$\operatorname{tang} MCE \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} u = \operatorname{tang} MpE(1 - f\rho^3).$$

Soient CE l'axe (*fig.* 6), et C le point fixe, d'un système de coordon-

Fig. 6.



nées polaires. L'équation du lieu des points M, ou des pieds des fils à plomb suspendus en A, sera

$$\text{(F)} \qquad \operatorname{tang} u = \frac{a \sin\varphi - \rho \sin u}{a \cos\varphi - \rho \cos u}(1 - f\rho^3),$$

d'où

$$\text{(F')} \qquad \rho \frac{du}{d\rho} = f \cos^2 u \rho^3 \frac{4\rho \sin u - 3a \sin\varphi}{a \cos\varphi - f \cos^3 u \rho^4}.$$

$\rho = 0$ donne $u = \varphi$. Donc la courbe passe en C, et y a CA pour tangente. Quant à la tangente en A, elle se confond avec la verticale Av (**2**, 3°), comme d'ailleurs on le reconnaîtrait au moyen de l'équation (F').

18. Soient A' un point, situé entre A et v, de la verticale Av, a' sa distance CA' au centre et φ' l'angle A'CE. Pour qu'il fût sur la courbe (F), il faudrait (d''') qu'on eût simultanément

$$\operatorname{tang}\varphi = (1 - fa^3)\operatorname{tang}\varphi_1, \quad \operatorname{tang}\varphi' = (1 - fa'^3)\operatorname{tang}\varphi_1,$$

ce qui est impossible, puisque $\varphi' < \varphi$ donne $a' < a$, vu que $\varphi < 90°$ (4).

Corollaire. — Tout fil à plomb se place entre la verticale et le rayon. Il résulte de ce corollaire que p est placé entre C et v.

On verrait de même qu'une droite, issue de A et comprise dans l'angle CAv, ne peut rencontrer le lieu qu'en un seul point autre que A.

Le changement de signe que subit, quand on passe de A en p, la fonction

$$\tang u - \tang \mathrm{M} p \mathrm{E}(1 - f\rho^3)$$

prouve d'ailleurs que cette même droite a au moins un point commun avec cette courbe. Ce lieu a donc une partie continue, comprise dans le triangle CAv, et qui n'est coupée de nouveau qu'en un seul point par toute droite issue de A. Donc :

Corollaire. — L'angle du fil à plomb avec la verticale augmente avec sa longueur.

Soit δ' l'angle du fil à plomb avec le rayon CA ; on a $\delta' < \delta$.

Posons

$$(c') \qquad \sin\delta' = \mathrm{K}'\sin\varphi_1'\cos\varphi, \quad \varphi + \delta' = \varphi_1',$$

sans d'ailleurs attacher à K′ aucune *idée dynamique*.

Comme nous avons (6)

$$(c) \qquad \sin\delta = \mathrm{K}\sin\varphi_1\cos\varphi, \quad \varphi + \delta = \varphi_1,$$

il vient

$$\frac{\mathrm{K}}{\sin\delta\sin\varphi_1'} = \frac{\mathrm{K}'}{\sin\delta'\sin\varphi_1} = \frac{\mathrm{K}-\mathrm{K}'}{\sin\varphi\sin(\delta-\delta')},$$

d'où

$$\mathrm{K}' < \mathrm{K} < 1.$$

19. Le fil à plomb, en tournant, engendre un cône de sommet C_1', dont les éléments sont les mêmes que ceux du cône déjà considéré, pourvu qu'on remplace K par K′.

La section, par le plan de la trajectoire, a donc (10) pour équation

$$(\mathrm{P}) \qquad \mathrm{Y}'^2 = 2a\mathrm{K}'\cos^2\varphi\, x - \mathrm{K}'\cos^2\varphi(2-\mathrm{K}')x^2.$$

Reprenons (9)

$$(\mathrm{T}) \qquad y^2 = 2a\mathrm{K}\cos^2\varphi\, x - \mathrm{K}\cos^2\varphi(2-\mathrm{K}\cos^2\varphi)x^2.$$

Au sommet commun A, les rayons de courbure ρ' et ρ sont

$$\rho' = a\mathrm{K}'\cos^2\varphi \quad \text{et} \quad \rho = a\mathrm{K}\cos^2\varphi;$$

donc $\rho' < \rho$, et, *aux environs de ce sommet* (*), (T) est extérieure à (P).

Si donc nous appelions (5) *nord* et *sud, par rapport au fil à plomb,* les portions de l'espace respectivement intérieure et extérieure au cône qu'il décrit, nous aurions :

Théorème III. — *Dans sa chute libre, le mobile* commence *par passer au sud de tout fil à plomb suspendu au point de départ.*

---

20. Contrairement à la supposition faite (4 et 7) jusqu'ici, admettons maintenant, pour la seconde partie de notre travail, que

$$K = fa^3 > 1,$$

puisque (7) $\tang\varphi = (1 - K)\tang\varphi_1$, φ_1 est obtus, et C_1 passe du même côté de C que γ. Le cône décrit par la verticale s'ouvrant maintenant vers le pôle austral P′, les mots *nord* et *sud* ne peuvent plus s'appliquer convenablement.

Si nous supposions $K\cos^2\varphi > 1$, comme (9) $\rho = aK\cos^2\varphi$ serait plus grand que a, le point C serait entre le sommet A et le centre correspondant H de courbure, et le mobile ne pourrait rencontrer aucune des sphères de centre C et de rayon inférieur à CA, quelle que fût la courbe (T), ellipse, parabole, hyperbole, puisqu'alors CA serait un minimum absolu, comme on le verrait facilement par des considérations analogues à celles qui ont conduit aux lemmes I et II (12).

Nous admettrons donc que $K\cos^2\varphi < 1$. Et alors, H étant compris entre C et A, parmi les sphères de rayon moindre que CA, il y en aura une infinité que le mobile pourra rencontrer, puisque la trajectoire est une ellipse et que nous rentrons dans l'un des cas d'application du lemme I (12). Or, c'est le seul cas qu'il soit réellement bon d'étudier.

(*) On ne peut rien dire, en général, sur le rapport des deux demi-grands axes $\frac{a}{2 - K'}$, $\frac{a}{2 - K\cos^2\varphi}$, puisque, suivant les cas, $R' \gtreqless K\cos^2\varphi$; de sorte que, suivant les cas, (T) coupera (P) ou lui sera complétement extérieure.

21. Un examen attentif(*) prouve que les relations trouvées (6, 7, 10) subsistent encore pour le cas de $K > 1$, ainsi que l'équation (10) de la section faite, par le plan de la trajectoire, dans le cône que décrit la verticale, savoir :

$$(V) \qquad Y^2 = 2aK\cos^2\varphi\, x - K\cos^2\varphi(2 - K)x^2.$$

Corollaire. — Dans sa chute libre, le mobile se maintient constamment à l'intérieur du cône que décrit la verticale.

22. La projection sur l'équateur de la trajectoire (T) a toujours pour équation

$$(T_1) \qquad y_1^2 = 2a_1 K x_1 - K(2 - K\cos^2\varphi)x_1^2,$$

$$\rho_1 = a_1 K.$$

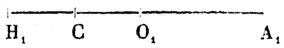
Puisque K et $2 - K\cos^2\varphi$ sont l'un et l'autre plus grands que 1, c'est le petit axe qui est dirigé suivant A_1C.

Mais ici $\rho_1 > a_1$. Donc (13 et 14) on a

$$\rho_1 > a_1 > \alpha_1;$$

d'où (*fig.* 7) la succession nouvelle des quatre points

Fig. 7.



Donc (*Lemme II*, 2^e *partie*) CA_1 est minimum relatif et ω maximum relatif.

Corollaire. — Le mobile, dans sa chute libre, reste, AU COMMENCEMENT DU MOUVEMENT, *à l'ouest du méridien.*

23. ω' étant la vitesse angulaire moyenne de M_1 dans le parcours de sa trajectoire, ou même de sa demi-trajectoire de A_1 en A'_1, on a

$$\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2 - K\cos^2\varphi}{K^{\frac{1}{3}}}.$$

(*) On est prié de construire la figure pour ce cas, et de refaire, sur cette nouvelle figure, les calculs développés au n° 10.

Comme K n'est assujetti qu'à la condition de rester compris entre 1 et $\frac{1}{\cos^2\varphi}$, $\frac{\omega'}{\omega}$ peut, suivant les cas, être inférieur, égal ou supérieur à l'unité.

Corollaire. — Suivant les cas, le mobile restera constamment à l'ouest, ou bien rejoindra le méridien pour passer à l'est.

24. *Résumé.* — La loi de *déviation à l'est* n'est donc pas une *loi de mécanique rationnelle* pour les mobiles tombant sur la sphère dont ils se sont détachés.

Tel est, au contraire, le caractère absolu de la loi de *déviation à l'intérieur du cône que décrit la verticale.*

25. Quoique l'aplatissement et le défaut d'homogénéité rendent notre théorie inapplicable à la terre, il semble cependant que c'est vers le nord, et non vers le sud, par rapport à la verticale, que c'est vers le sud par rapport à un fil à plomb, qu'a lieu la déviation dans le sens du méridien.

Comparaison à une autre théorie.

26. Pour étudier la déviation dans la chute des graves, on peut, à l'examen du mouvement absolu, substituer celui du mouvement relatif.

En prenant pour axes des Z, des X et des Y positifs, la verticale du point de départ comptée de haut en bas, la méridienne dirigée du nord au sud, et la *perpendiculaire* dirigée de l'est à l'ouest,

On trouve (*) pour équations différentielles du mouvement relatif

$$(\mathrm{E})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt}+2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt},\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g-2\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt}. \end{aligned}\right.$$

(*) DELAUNAY, *Cours de Mécanique rationnelle*, 1re édition, p. 254.

Deux intégrations successives, en tenant compte des valeurs initiales, donnent

$$(\mathrm{E}') \quad \begin{cases} x = g \sin\lambda \cos\lambda \dfrac{(\omega t)^2 - \sin^2(\omega t)}{2\omega^2}, \\ y = g \cos\lambda \dfrac{2\omega t - \sin 2\omega t}{4\omega^2}, \\ z = \dfrac{1}{2} g t^2 \left(\sin^2\lambda + \dfrac{\sin^2\omega t}{\omega^2 t^2}\cos^2\lambda\right). \end{cases}$$

On en déduit :

1° Une déviation au sud, du quatrième ordre de grandeur par rapport à t, du deuxième par rapport à ω;

2° Une déviation à l'est, du troisième ordre par rapport à t, du premier par rapport à ω.

L'ordre par rapport à ω s'obtient, dans les deux cas, en supprimant haut et bas un facteur commun ω^2.

Remarque. — Les équations (E) s'obtiennent en regardant comme invariables l'attraction et la force centrifuge, d'où résulte l'invariabilité, en grandeur et direction, de la pesanteur ou attraction apparente g. Or, M. Quet (*) montre que ces hypothèses reviennent à négliger certains termes en ω^2. Ces équations n'établissent donc pas suffisamment la déviation au sud; il nous semble même que, vu la suppression du facteur ω^2, cette insuffisance s'étend à la déviation à l'est.

Remarque. — L'angle λ n'est autre chose que notre angle φ.

---

27. *Observation générale.* — Comme nous avons eu plusieurs fois à supposer l'angle φ différent de zéro, il peut être bon d'examiner à part ce qui a lieu pour un mobile parti d'un point de l'équateur :

1° Sa trajectoire étant comprise dans l'équateur, il ne dévie ni au nord ni au sud ;

2° Cette trajectoire a pour équation

$$y^2 = 2a\mathrm{K}x - (2 - \mathrm{K})\mathrm{K}x^2.$$

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* année 1853, p. 225.

Nous devons (**21**) rejeter le cas de $K > 1$.

Soit $K = 1$. La courbe n'est autre chose qu'une circonférence que le mobile parcourt avec une vitesse uniforme ; il ne dévie donc ni à l'est ni à l'ouest. Il est vrai aussi qu'il reste à une distance invariable de C, qu'il ne *tombe* pas, et que nous devons par conséquent exclure encore ce cas.

Soit enfin $K < 1$. La courbe est une ellipse dont AA′ est le grand axe. On a encore (**14**, 1°) $\rho < \alpha < a$, et (*fig.* 8) la succession des quatre points

Fig. 8.

CA est donc encore maximum absolu, ω minimum absolu.

Le mobile passe dès le départ, et se maintient constamment, à l'est.

Remarquons d'ailleurs que cette déviation se trouve parfaitement démontrée, pour ce cas, par le raisonnement bien simple que M. Delaunay emploie dans son excellente *Cosmographie.*

28. *Remarque générale.* — La déviation dont nous parlons est toujours une déviation *angulaire* et non pas *linéaire.*

Celle à l'est ou à l'ouest s'estime autour de la ligne des pôles, et non, comme dans la pratique, autour d'une verticale donnée par un fil à plomb.

La conception des cônes explique suffisamment ce qu'on doit entendre par déviation au nord ou au sud ; nous croyons n'avoir rien à ajouter.

Quant au rayon de la sphère attirante, nous le laissons indéterminé, parce qu'il ne s'agit pas de fixer la position du *point de chute.* Il sera même convenable, dans la lecture de la plus grande partie de notre travail, de concevoir la sphère concentrée en C. On évitera ainsi l'inconvénient qui consisterait à laisser son attention s'égarer sur des idées accessoires, au lieu de la fixer exclusivement sur les points essentiels.