

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BILLET

Mémoire sur les dix-neuf premiers arcs-en-ciel de l'eau

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 5 (1868), p. 67-109

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1868_1_5__67_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1868, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE

SUR LES

DIX-NEUF PREMIERS ARCS-EN-CIEL DE L'EAU,

PAR M. BILLET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

§ I. — *But de ce travail. — Méthode suivie.*

Il s'agit dans ce travail d'une étude sur les arcs-en-ciel de l'eau. On y trouvera la mesure des déviations subies dans ces arcs par diverses couleurs et la comparaison des positions obtenues pour ces couleurs avec celles que leur assigne la théorie. On y trouvera encore l'étude des variations angulaires, croissantes avec le numéro de l'arc, qu'amènent, pour une même couleur, les changements de température du liquide, et le moyen de déduire de ces variations angulaires les variations correspondantes d'indice.

Comme MM. Babinet et Miller qui, avant nous, se sont occupés de ce sujet, c'est avec un filet d'eau vertical, fourni par un tube cylindrique, que nous réalisons nos arcs. La grosseur du filet influant sur la visibilité des arcs, nous avons eu soin de préparer plusieurs de ces tubes métalliques rodés, nous proposant d'appliquer les plus larges à la production des arcs, plus faibles, d'ordre élevé. Mais la pratique nous a montré, d'une part, qu'outre l'inconvénient d'une plus grande dépense de liquide, les tubes larges avaient celui de donner des veines moins tranquilles et plus aisément accessibles à des renflements qui brisent l'arc en tronçons discontinus; et, d'autre part, qu'en prenant certains soins, on pouvait tirer de nos deux tubes les plus fins, des arcs dont la

visibilité se soutenait jusqu'au dix-neuvième inclusivement, dans une chambre où cependant on laissait pénétrer assez de jour pour assurer les lectures. Leurs diamètres mesurés, dans deux sens rectangulaires choisis, avec un microscope qui donnait le millième de millimètre, se sont trouvés valoir : pour l'un, $1^{\text{mm}},318$ et $1^{\text{mm}},321$ (moyenne, $1^{\text{mm}},3195$), et pour l'autre, $1^{\text{mm}},991$ et $1^{\text{mm}},970$ (moyenne, $1^{\text{mm}},981$). C'est donc avec l'un ou l'autre de ces tubes et après nous être assuré qu'ils donnaient bien les mêmes résultats, que nos lectures définitives ont été faites.

Quoiqu'une lumière artificielle suffise à la production des premiers arcs, nous avons eu recours exclusivement au soleil qui, outre la vivacité de la lumière, a pour lui l'étrouitesse du diamètre apparent. Nous n'avons pas trouvé d'avantage bien marqué à réduire encore ce diamètre par l'emploi d'une lentille cylindrique de court foyer, et nous avons toujours opéré avec le trait solaire direct, rendu toutefois horizontal par un héliostat.

Les arcs-en-ciel sont réduits, avec cette manière de les produire, à leurs pieds verticaux qui s'obtiennent, non plus comme dans la nature, avec deux gouttes d'eau distinctes et une position unique de l'observateur, mais avec une seule goutte et deux positions distinctes de l'œil. Symétriques l'une de l'autre par rapport au trait solaire, ces deux positions comprennent un arc double de celui qui sépare l'une d'elles de la direction du trait solaire. En les relevant sur un limbe à l'aide d'une alidade, on en déduira ce dernier arc, sans avoir à se préoccuper du zéro. Ce relèvement des deux tronçons d'arc-en-ciel se faisait à distance, avec une des lunettes d'un goniomètre de Babinet (grossissement, 4,3) installée au bout de l'alidade. Cette distance, égale au rayon commun de l'alidade et du limbe, était de $2^{\text{m}},239$. Notre limbe incomplet était représenté *fig. 1 (Pl. I)* par deux secteurs : l'un de 37 degrés, l'autre de 38 degrés, que l'on disposait, l'un à droite et l'autre à gauche du trait solaire, de manière à pouvoir y relever, sur l'un, les diverses couleurs du tronçon d'arc-en-ciel de droite, et, sur l'autre, celles identiques du tronçon de gauche. L'arc intercalé entre les secteurs, qui allait, par exemple, de la division extrême de gauche du secteur de droite à la division extrême de droite du secteur de gauche, arc variable, dont l'étendue dépendait de la position qu'il avait fallu

donner aux secteurs pour qu'ils fussent rencontrés par les deux arcs-en-ciel symétriques à relever, se mesurait avec un grand compas dont l'ouverture était reportée sur l'un des secteurs tant qu'elle ne surpassait pas 38 degrés. Quand elle les surpassait, on commençait par décomposer cet arc, en y employant l'alidade et des plaques de marbre immuables convenablement espacées, en parties moindres que 38 degrés qu'on évaluait séparément, de manière à pouvoir ajouter leur somme aux deux arcs lus sur les secteurs. Pour assurer aux secteurs une grande fixité, soit pendant les lectures, soit pendant ces déterminations de l'arc intercalé, on avait soin de les relier ensemble par une tringle et des vis. Nous obtenions ainsi, de ces secteurs, les mêmes résultats que si nous avions construit le limbe entier dont ils étaient deux fragments. Le degré, sur ces secteurs, long de plus de 39 millimètres, se trouvait divisé en 12 parties, dont un vernier, confié à l'alidade, donnait le dixième; les angles pouvaient donc se mesurer à une demi-minute près, ce qui est bien suffisant pour ce genre de recherches.

Ces déterminations ne sauraient, en effet, prétendre à une extrême précision, parce que les arcs-en-ciel, même ceux si dilatés d'un ordre élevé, ne sont que des spectres imparfaits qui se refusent à montrer les raies. Il en résulte que nos observations, conformes à celles dont on s'est si longtemps contenté en optique, après Newton et d'après lui, consistaient à amener en coïncidence avec la croisée des fils de la lunette, le commencement, la fin et la partie la plus vive des diverses couleurs. Or, le peu de discordance des lectures obtenues, soit successivement par un même observateur, soit par divers observateurs, montre que ces déterminations comportent, surtout dans leurs moyennes, une certaine exactitude. Cette complexité des couleurs des arcs étant chose essentielle, arrêtons-nous-y pour l'établir et par le raisonnement et par l'expérience.

§ II. — *Étude théorique et expérimentale sur la constitution colorifique des arcs-en-ciel. — Région des arcs surnuméraires. — Comment on les manifeste par l'emploi du réseau et du prisme.*

Les couleurs d'un arc-en-ciel sont composées, et le sont d'autant plus qu'on s'éloigne davantage du rouge. On en voit la raison.

Pour tous les arcs, la déviation ou mieux la rotation des rayons dits *efficaces* est un minimum; elle grandit : 1° pour les rayons extérieurs aux efficaces, jusqu'à un premier maximum qui, fourni par le rayon dont l'incidence sur la goutte atteint 90 degrés, vaut (L étant l'angle limite et p le numéro de l'arc)

$$2(90 - L) + p(180 - 2L) = (p + 1)(180 - 2L);$$

2° pour les rayons intérieurs, jusqu'à un second maximum, de beaucoup supérieur au premier, et qui, fourni par le rayon central, à incidence nulle, vaut $p.180$. Comme, d'ailleurs, la déviation minimum des rayons efficaces grandit avec l'indice du rayon simple, il en résulte que seul le rayon rouge extrême échappera à toute superposition; que tout rayon efficace plus dévié, celui du jaune par exemple, sera superposé à certains rayons non efficaces des couleurs moins réfrangibles, de sorte que, pour le violet extrême, il y aura mélange avec toutes les autres couleurs.

L'espace angulaire ouvert aux rayons non efficaces, espace marqué par l'excès de $p.180$ sur $\Delta = 2(i - r) + p(180 - 2r)$, c'est-à-dire par $2(p + 1)r - 2i$, croît avec le numéro de l'arc et vaut $41^{\circ}54'$ dans le 1^{er}, $128^{\circ}47'$ dans le 2^e, $221^{\circ}17'$ dans le 3^e, ..., $893^{\circ}20'$ dans le 10^e, $989^{\circ}20'$ dans le 11^e, etc. S'il est évident que, dans ces espaces croissants, les rayons non efficaces sont loin d'être uniformément distribués, cependant on doit admettre qu'ils sont moins serrés quand l'angle est plus grand, et l'on s'expliquerait ainsi comment, dans les arcs d'ordre un peu élevé, les arcs-en-ciel élémentaires des couleurs les plus réfrangibles auraient une supériorité plus marquée sur ces rayons étrangers qui leur sont mêlés, et pourquoi on y discerne du bleu et du violet, ce qui n'arrive pas dans nos premiers arcs.

Dans l'espace ouvert aux rayons non efficaces, on sait qu'il faut distinguer, comme ayant une importance capitale, à cause des phénomènes d'interférence qui peuvent s'y produire, la région propre aux rayons ultra-efficaces, région où ceux-ci sont superposés aux premiers des rayons anté-efficaces. Cette région qui avoisine les rayons efficaces et qui a pour expression $(p + 1)(180 - 2L) - \Delta$ est peu étendue, et l'est d'autant moins qu'il s'agit d'arcs d'un numéro plus élevé. Elle vaut $27^{\circ}43'$ pour le 1^{er} arc, $17^{\circ}30'$ pour le 2^e, $12^{\circ}55'$ pour le 3^e, etc., et ne s'élève qu'à $4^{\circ}37'$ dans le 10^e. Miller, dans ses études sur les arcs sur-numéraires des deux premiers arcs-en-ciel, a vu ces bandes d'interférence atteindre, dans le 1^{er} arc, le milieu de l'espace où elles sont possibles, et, dans le second, en remplir la presque totalité.

Pour vérifier ce qui vient d'être dit sur la constitution colorifique des arcs-en-ciel, nous installons, au bout de la grande alidade (*fig. 2*), outre la lunette du goniomètre de Babinet, le limbe de cet appareil, et nous disposons sur sa plate-forme, normalement aux rayons arrivants et au centre d'un carton percé, un réseau au $\frac{1}{50}$ de millimètre, par lequel les rayons générateurs des diverses parties de l'arc-en-ciel doivent passer tour à tour avant d'atteindre l'objectif. La lunette est-elle dirigée vers la veine liquide, on voit la couleur de l'arc-en-ciel, comme si le réseau n'était pas interposé; mais quand on la fait tourner autour de la plate-forme, on ne tarde pas à obtenir un spectre plus ou moins incomplet et capable de nous dire, par sa constitution, de quelles couleurs élémentaires se compose la petite portion d'arc-en-ciel à laquelle le réseau livre passage. Le réseau est-il sur le rouge extrême, le spectre n'a que du rouge; mais au fur et à mesure que le mouvement de l'alidade amène sur le réseau les couleurs qui suivent le rouge, on voit s'adjoindre successivement au rouge, l'orangé, le jaune, le vert, etc., jusqu'à ce qu'enfin le spectre devienne complet.

Ce n'est pas tout : pendant que le spectre se développe ainsi par le mouvement de l'alidade, on ne tarde pas à voir s'y former à l'extrémité rouge, plus tôt si le tube d'écoulement est gros et plus tard s'il est fin, une bande obscure qui chemine à travers les couleurs. L'alidade continuant de se déplacer, on voit éclore, toujours dans le rouge extrême, pour se mouvoir encore vers le violet, de nouvelles bandes; de sorte que bientôt le spectre se trouve coupé par trois ou quatre bandes

obscurcs. Ces bandes qui s'obtiennent avec netteté dans les sept premiers arcs et s'y obtiennent avec des tubes de diamètres différents, sont autant d'arcs surnuméraires propres à la couleur simple où elles sont installées. Tandis que ceux de la nature sont des arcs composés dus au concours de divers rayons simples, ceux-ci, grâce à l'action séparatrice exercée par le réseau, sont de véritables arcs surnuméraires élémentaires; tandis que dans la nature on ne les voit qu'au delà de l'arc-en-ciel proprement dit, ceux que cet arc pourrait recéler restent forcément inaperçus, ici, où la grosseur du filet liquide les rend possibles au sein même de l'arc-en-ciel, on les voit aussi bien dans l'arc qu'en dehors.

Notre but, en recourant au réseau, était de trouver dans la constitution des arcs-en-ciel, à défaut des raies qu'on n'y discerne pas, quelque repère qui permît d'introduire dans le relèvement des couleurs une précision plus grande qu'on ne l'obtient par l'appréciation de la teinte. Ces bandes, qu'on voit poindre à un moment précis, nous semblent répondre au but proposé; mais n'ayant songé à l'emploi de cet auxiliaire que tardivement, et lors de la rédaction de notre travail, nous n'avons pu en reprendre les mesures qui se trouvent dès lors reposer toutes sur l'appréciation de la couleur; n'oublions pas d'ailleurs que ces nouveaux moyens ne profiteront (s'il doit y avoir profit) qu'aux arcs seuls capables d'offrir ces bandes, et que pour les autres, beaucoup plus faibles, on devra s'en tenir à la pure appréciation des teintes.

Au lieu du réseau, nous nous sommes encore mieux trouvé d'un petit prisme installé également sur la plate-forme du limbe, en avant de la lunette, et amené à procéder par déviation minimum sur la portion d'arc-en-ciel qui l'atteint. Les spectres ainsi obtenus sont beaucoup plus vifs que ceux que donnait notre réseau, et nous avons pu déjà suivre l'apparition des bandes jusqu'au 11^e arc-en-ciel. Si le prisme est assez ouvert, on peut même voir à la fois raies du spectre et bandes surnuméraires, ce qui semble promettre au relèvement de ces dernières la précision des meilleures expériences d'optique.

Quoiqu'il ne faille pas voir dans cette étude accessoire, où nous n'avons pas pu discerner plus de cinq ou six de ces bandes dans les deux premiers arcs-en-ciel, au lieu des quinze et vingt qu'on peut y voir autrement, une étude capable, à l'égard de ces premiers arcs, de rivaliser

avec celle si remarquable que la science doit à Miller; quoique pour les voir dans toute leur beauté et jusqu'aux derniers, ce ne soit pas à 2^m, 239 du filet liquide, mais beaucoup plus près de lui qu'il faille se placer, cependant nous croyons pouvoir remarquer que ce mode nouveau d'observation a pour lui les avantages suivants : 1^o d'étudier des arcs surnuméraires simples; 2^o de relever leurs angles de position dans des conditions de précision supérieure, et enfin 3^o de montrer ces arcs jusque dans le 11^e arc-en-ciel, tandis que, de près, à la manière de Miller, on a déjà beaucoup de peine à les voir dans le 3^e.

Quand on voit la lumière blanche donner si peu de franges dans les expériences ordinaires de Young, dans celle des anneaux de Newton, etc., on a droit d'être surpris de voir cette même lumière en donner un si grand nombre dans le phénomène des premiers arcs-en-ciel. Ce développement inusité du nombre des franges de la lumière blanche se retrouve dans d'autres circonstances; par exemple, quand dans cette même expérience de Young on interpose, sur le trajet des deux faisceaux, des épaisseurs équivalentes un peu grandes de deux corps doués de dispersions différentes : verre et gypse, par exemple; et là nous avons trouvé cette particularité piquante que l'emploi du verre rouge en réduisait considérablement le nombre. Nous comptons exposer un jour ces expériences, si faciles quand on y emploie le compensateur interférentiel que nous avons décrit dans les *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. LXIV, p. 385; mais nous croyons devoir remarquer que là, comme dans les arcs-en-ciel, les franges diversicolores, au lieu d'avoir leur centrale superposée, partent d'origines distinctes, de sorte qu'on serait tenté de croire que le petit nombre des franges de la lumière blanche tient aussi bien à ce point de départ commun qu'à la complexité de la lumière.

Après cette longue digression sur la constitution des arcs, à laquelle nous avons dû nous livrer pour établir les ressources expérimentales qu'on peut tirer de l'emploi d'un réseau ou d'un prisme, revenons au détail de nos expériences.

§ III. — *Précautions à prendre pour voir et reconnaître les divers arcs-en-ciel. — Visibilité supérieure de ceux qui s'approchent le plus de la direction normale au trait solaire.*

La visibilité des arcs-en-ciel est aisément compromise par une lumière éblouissante due soit à la réflexion extérieure, soit, si l'eau est impure, à une énergique dissémination opérée dans toute l'épaisseur du filet. On éliminait ce dernier obstacle en n'opérant qu'avec de l'eau très-pure, soumise au besoin à une récente filtration; on éliminait l'autre en faisant agir sur le tube d'écoulement quelqu'un qui le poussait du doigt, dans un sens ou dans l'autre, et l'inclinait ainsi de très-faibles quantités sur la verticale, jusqu'à ce que l'observateur se déclarât débarrassé de la lumière étrangère. La veine apparaissait alors parfaitement obscure dans la lunette mise au point, et, en mouvant l'alidade, on ne tardait pas à en voir sortir, tantôt à droite, tantôt à gauche, les couleurs génératrices de l'arc étudié; mais cette légère obliquité de la veine qui montrait nettement un arc-en-ciel ne convenait plus toujours au même arc pris de l'autre côté. Il fallait donc souvent, avant de faire les secondes lectures symétriques des premières, soumettre le tube à de légers changements de direction qui, étant indiqués par les premiers, réussissaient plus vite qu'eux.

La concentricité du filet liquide au limbe était assurée comme il suit (*fig. 2*) : le centre du limbe était représenté par l'axe d'un cylindre métallique un peu gros et assez élevé pour recevoir l'une après l'autre et les douilles centrales des deux secteurs et celle de l'alidade. La base libre de ce cylindre était percée d'une petite ouverture centrale au-dessus de laquelle on disposait le tube d'écoulement, dérangeant le vase porteur de ce tube jusqu'à ce que la veine, repérée sur deux fils à plomb, fût, d'une part, verticale, et, de l'autre, enfilât la petite ouverture. Eh bien, les altérations introduites après coup dans cette verticalité pour éliminer, comme on vient de le dire, la lumière étrangère, n'altéraient, grâce à la grandeur du rayon des secteurs et de l'alidade, la concentricité de la veine que d'une manière insignifiante.

L'arc-en-ciel, quoique rudimentaire, devient aisément discontinu; les

secousses de l'eau qui tombe, une charge trop grande, sont autant de causes qui donnent à la veine des nodosités, des irrégularités et en amènent la décomposition en parties qui n'offrent plus une seule couleur dans une même direction. Ce qui nous a le mieux réussi, pour éviter ces dislocations des arcs-en-ciel, a été de placer dans le tube long et large, qui recevait par en haut l'eau d'un vase de Mariotte et se terminait à sa partie inférieure par le tube d'écoulement, une série d'obstacles qui amortissaient la vitesse. Pour les observations à l'eau froide, ces obstacles étaient tout trouvés : c'étaient les morceaux de glace très-pure, qui, destinés à refroidir l'eau, remplissaient le large tube; pour les observations à l'eau chaude, c'étaient des cailloux, des boules de verre, qui imposaient aux mouvements de l'eau des sinuosités capables d'en amortir la vitesse.

Il est un cas où l'éblouissement, dû à la dissémination, persévère même avec de l'eau très-pure : c'est quand l'eau est chaude et la température de l'air basse. Le filet d'eau s'entoure alors d'une vapeur singulièrement gênante, surtout pour les arcs qui, comme le 12^e, se voient sur le soleil lui-même. Nous avons dû, pour atténuer cet inconvénient, renoncer à faire l'hiver les observations à l'eau chaude et les renvoyer à l'été. Avec cette précaution, la température de l'eau a pu être portée à 50 degrés. Chaude ou froide, on en prenait la température en recevant le jet sur le réservoir d'un petit thermomètre qui en était tout enveloppé.

Par toutes ces précautions, on obtient des arcs assez nets pour pouvoir y suivre le développement des couleurs depuis le rouge jusqu'au vert inclusivement; mais il est quatre arcs privilégiés pour lesquels la lumière étrangère joue un rôle moins fâcheux, où les couleurs atteignent une beauté exceptionnelle, et chez lesquels on voit très-bien, à la suite du vert, les teintes bleues et violettes : ce sont les 9^e et 15^e, 13^e et 11^e arcs, qui ont cela de commun que leurs directions sont celles qui approchent le plus de la perpendicularité sur le trait solaire.

On avait trois moyens pour reconnaître les arcs, à savoir : le sens dans lequel couraient les couleurs prises du rouge au violet; le côté de la goutte par lequel elles sortaient, côté qu'il fallait prendre contraire au côté apparent, vu le renversement de la lunette, et enfin l'étendue angulaire du développement des couleurs qui grandissait avec le nu-

méro de l'arc. L'observation de ces trois particularités, jointes à la connaissance de la position absolue et de l'étendue angulaire assignées par le calcul à chaque arc-en-ciel, nous a permis de reconnaître sûrement chacun des seize premiers. Jusqu'à ce numéro, quand deux arcs se voient simultanément et s'entremêlent comme les 10^e et 14^e, 2^e et 5^e, 9^e et 15^e, 11^e et 13^e, 3^e et 4^e, 8^e et 16^e, et enfin 12^e et 12^e, il arrive, et la rose des seize premiers arcs-en-ciel de l'eau jointe à ce travail en fait foi, il arrive, dis-je, que, pour ces arcs à l'égard desquels on pourrait craindre quelque confusion, et la sortie de la goutte et le développement des couleurs ont lieu de côtés opposés.

Au delà de l'arc 16^e, nous n'avons plus pu reconnaître que trois arcs, à savoir : l'arc 17^e dont le maximum tombe, à la température ordinaire, dans une éclaircie qui reste inoccupée entre les 7^e et 4^e arcs [voir la rose des arcs-en-ciel (*fig. 3*)]. Quant aux 18^e et 19^e, ils se seraient révélés surtout par les difficultés que nous avons rencontrées dans l'observation des 6^e et 14^e arcs auxquels ils viennent se mêler, avec cette aggravation, pour l'arc 19^e, que le 6^e et lui sortent du même côté de la goutte et ont leurs couleurs développées dans le même sens.

§ IV. — *Méthode de calcul suivie pour déduire des variations qu'amène, dans la position des arcs, le changement de température de l'eau, les variations correspondantes d'indice.*

On sait les difficultés que l'on rencontre quand on veut déterminer à l'aide de prismes les indices que revêt un même corps aux diverses températures. En effet, à moins de se borner aux températures atmosphériques, ou bien de se constituer, comme vient de le faire M. Le Roux dans ses belles recherches sur les indices des vapeurs, une vaste enceinte à température sensiblement constante, les faces du prisme se voilent, les images perdent leur netteté, et la grande précision dont on aurait besoin, pour atteindre des variations toujours faibles, se trouve compromise. L'emploi des arcs-en-ciel n'a aucun de ces inconvénients. Le filet liquide, libre de toute enveloppe et observé à la sortie même du vase d'écoulement, avant d'avoir subi une appréciable variation de tem-

pérature, livre ses divers arcs dans les directions exactes qui conviennent à la température actuelle. Or, ces directions peuvent différer beaucoup si l'arc est d'un numéro élevé et la rotation considérable; mais comment tirer des variations qu'éprouvent les directions des couleurs, par l'échauffement du liquide, les variations correspondantes de l'indice n ?

Au fond, chaque arc-en-ciel fournit une relation entre Δ et n , capable également de donner, soit Δ quand n est connu, soit n quand c'est Δ que l'on possède; mais les formules ordinaires, au lieu d'être explicites entre Δ et n , restent implicites, deux autres quantités, i et r , s'y trouvant associées aux deux essentielles Δ et n , ce qui laisse la question subordonnée à trois équations dont l'emploi, assez commode quand on connaît n , l'est beaucoup moins quand, se donnant Δ , il faut en déduire n .

Il est vrai que M. Babinet s'est proposé d'obtenir et a obtenu, en effet, pour les deux premiers arcs, les équations explicites entre Δ et n . Il est vrai que nous-même, à l'occasion de ce travail, appliquant la méthode de ce savant physicien à l'élimination de i et de r dans les deux arcs suivants, nous avons obtenu deux nouvelles de ces équations, ne nous arrêtant à ce numéro qu'à cause de la longueur des calculs. Grâce à ces équations, qu'on trouvera plus loin (p. 84), on pourrait passer, de Δ mesuré à n , par un calcul direct, consistant dans la résolution d'une équation numérique, qui est du troisième degré pour le 1^{er} arc, du quatrième pour le 2^e, du cinquième et du sixième pour les 3^e et 4^e arcs, et probablement du degré $p + 2$ pour le $p^{\text{ième}}$ arc-en-ciel; mais, privés de ces formules à partir du 5^e arc, on n'aurait plus alors à sa disposition, pour en déduire la valeur de n , que les équations

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{(p + 1)^2 - 1}},$$

$$\sin r = \frac{1}{n} \sin i,$$

$$\Delta = 2i - 2(p + 1)r + p \cdot 180,$$

qui ne donneraient cette inconnue que par des calculs longs et pénibles.

Nous n'avons pas songé un seul instant à suivre une telle marche, qui

n'eût été d'ailleurs applicable qu'aux quatre premiers arcs. On conçoit qu'une recherche des variations que subissent des indices connus puisse se faire par des moyens plus simples que celle qui déterminerait les valeurs absolues de ces indices. La marche détournée à laquelle nous avons eu recours repose sur le calcul préalable d'un certain nombre de valeurs de Δ correspondantes à certaines valeurs de n voisines l'une de l'autre; de tels calculs numériques nous étaient d'ailleurs indispensables à d'autres titres.

La comparaison des positions expérimentales et théoriques qu'ont les diverses couleurs dans les divers arcs-en-ciel, comparaison qui était un premier but de ce travail, suppose qu'on a calculé, par les formules implicites ordinaires entre i , r , Δ et n , les valeurs de Δ propres aux diverses couleurs. Nous avons donc commencé par établir pour chacun des seize premiers arcs, sept de ces calculs, à savoir : 1° pour les cinq raies B, D, E, F, H dont les indices, à 16 degrés centigrades, ont été déterminés par Fraunhofer; 2° pour le rayon le plus intense que nous avons placé, avec Fraunhofer et Miller, entre les raies D et E à une distance de D égale aux $\frac{7}{24}$ de l'intervalle qui les sépare, ce qui lui assigne pour indice 1,33424, et enfin pour le milieu du vert dont nous avons déterminé l'indice comme il suit.

Fraunhofer ayant donné les λ des rayons extrêmes qui séparent le vert du jaune et du bleu, leur moyenne 0^{mm},000512 peut être considérée comme le λ du milieu de cette couleur. Or, on a les indices de l'eau pour les deux raies E et F situées dans les régions qu'occupe le vert, et l'on en déduit la variation d'indice qui, dans ces parages, accompagne une certaine variation de λ . On peut donc en tirer, par la relation admissible de proportionnalité, ce qu'il faut ajouter à n_F pour avoir le n du milieu du vert. Je trouve ainsi 1,336501. J'ai pris dans mes calculs, par inadvertance, 1,336594 qui en diffère peu.

Muni de ces calculs, on reconnaît sans peine, comme on pourrait, du reste, l'établir encore par un calcul général, que, dans les limites de la variation, égale à $n_H - n_B$ que n s'y trouve recevoir, il y a sensiblement proportionnalité entre les variations corrélatives de n et de Δ ; car en calculant, pour chacun des six intervalles que laissent les sept rayons le quotient de la différence des déviations par la différence des indices, ce quotient qui, en rigueur, diminue du rouge au violet,

n'éprouve que d'insignifiantes diminutions et peut être considéré comme constant. Dans ces quotients qui vont nous servir, l'indice étant exprimé en millionièmes, on aura la variation angulaire qui, dans ces limites, répond à un millionième de variation dans l'indice. Ces quotients, sensiblement constants pour un même arc, mais croissants avec le numéro de l'arc, seront exprimés en seconde et s'élèvent du 1^{er} arc au 16^e de 0",51 à 5",9.

Cela posé, quand, l'eau s'échauffant, son indice s'affaiblira pour chaque couleur, la réfraction d'une couleur donnée deviendra ce que vaut à une température plus basse la réfraction d'une autre couleur plus voisine du rouge, et, si ce déplacement d'indice n'excède pas celui qui a lieu, à une même température, depuis le rouge jusqu'au violet, il suffira, profitant de la proportionnalité précédente, de diviser la variation trouvée pour Δ par celle propre à un millionième de l'indice, pour obtenir en millionièmes d'unité la variation d'indice due à la variation de température, et, par suite, en divisant par cette dernière variation, la variation moyenne d'indice due à un seul degré.

§ V. — *Explication des seize tableaux qui contiennent, pour les seize premiers arcs-en-ciel de l'eau, les résultats de la théorie et de l'expérience. — Exemples des calculs à faire sur les données de l'observation.*

Avant de passer aux seize tableaux qui résument et nos expériences et leur comparaison avec la théorie et les valeurs qu'elles assignent au changement d'indice que subit l'eau quand elle s'échauffe, donnons quelques explications sur la manière dont ils sont disposés.

En tête se trouvent, sous le titre *Calculs* :

1^o Les rotations Δ que subissent, dans l'eau à 16 degrés, pour l'arc étudié, les sept rayons précités ;

2^o Sous le titre d'angle de position, la différence entre Δ et le multiple de 180 degrés qui en est le plus rapproché, ce qui donne l'angle avec le trait solaire arrivant ou avec son prolongement ;

3^o Les variations angulaires totales qui séparent les rayons B, D, E, F, H ;

4° Les quotients de ces variations totales par les variations d'indice, c'est-à-dire la variation angulaire due à la variation 0,000001 dans l'indice, nombres dont on peut constater la quasi-constance.

Au-dessous vient, sous le titre *Observations*, un tableau à colonnes multiples, comprenant d'abord l'indication de la couleur et le rappel du chiffre de la déviation théorique pour quelques rayons; puis les résultats fournis par l'observation à diverses températures, résultats qui indiquent toujours une diminution d'indice pour l'eau chaude, et enfin la variation assignée à l'indice par ces observations pour 1 degré de température. Pour que les observations pussent servir à ce dernier calcul, il fallait être sûr qu'on y avait bien visé, à chaud comme à froid, à la même couleur, et l'on était ainsi quelquefois amené à faire un choix entre des observations qui auraient pu se valoir s'il ne s'était agi que de vérifier l'angle de position de la couleur. En pareil cas, à défaut d'un contrôle meilleur, nous considérons comme préférables les observations pour lesquelles les différences qui séparaient les directions des diverses couleurs, dans les lectures de droite et de gauche, s'écartaient le moins de l'égalité.

Ces tableaux se terminent, quand il y a lieu, par l'indication des directions dans lesquelles se voyaient, en même temps et avec une même intensité, une même couleur due à deux arcs entremêlés, couleurs qui, quoique simultanément perçues, étaient très-distinctes, attendu que, pour deux tels arcs, jusqu'au 16°, les couleurs sortent, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, des deux flancs opposés de la veine liquide. Le relèvement de ces directions nous a paru comporter plus de précision que celui des couleurs isolées d'un seul arc, et nous y avons eu recours de préférence pour certaines constatations.

Ces seize tableaux sont précédés par celui des indices que nous avons adoptés, avec leurs différences et les angles limites correspondants. Comme derniers témoignages sur le degré de confiance que méritent les observations comprises dans les tableaux, il convient d'entrer dans quelques détails propres à établir que la diversité de l'observateur, l'emploi du plus fin ou du plus gros de nos deux tubes, n'ont pas d'influence marquée sur les résultats, et à montrer l'étendue des erreurs que comporte ce genre d'observations.

Les observations suivantes faites sur l'arc 9° ou mieux sur l'ensemble

des arcs 9° et 11° entremêlés montrent bien que le diamètre du tube d'écoulement peut changer sans porter atteinte aux directions dans lesquelles émergent les couleurs. Elles ont porté sur les deux orangés d'égale intensité qu'à la température de 46 degrés on voit sortir à la fois des deux flancs de la veine. Pour bien juger du peu d'importance qu'ont les écarts des diverses lectures, on ne doit pas perdre de vue que les rotations qui sont en jeu dépassent ici 800 degrés.

PETIT TUBE. $d = 1^{\text{mm}}, 319.$		TUBE PLUS LARGE. $d = 1^{\text{mm}}, 981.$	
Lectures sur le secteur		Lectures sur le secteur	
de gauche.	de droite.	de gauche.	de droite.
26° 34'	14° 56',5	26° 31'	14° 52',5
26.40	15. 0,5	26.23,5	15. 3
26.42	14.46,5	26.24	15. 3,5
26.40	15.11,5	26.18,5	14.46
26.46,5	15.10	26.30	15.50,5
26.44	15. 1		
Moyennes. 26.41	15. 1	26.25	15. 7

Comme exemple de la manière dont on passe des lectures aux angles de position, on saura qu'ici l'arc qui séparait, du côté opposé au trait solaire arrivant, les divisions zéro du secteur de gauche et 38 degrés de celui de droite (*fig. 1*) (arc mesuré en cinq morceaux par les moyens décrits plus haut), valait 144° 27' 5". On avait donc, pour l'angle des deux directions :

1° Avec le petit tube,

$$26^{\circ} 41' + 144^{\circ} 27' 5'' + (38^{\circ} - 15^{\circ} 1' = 22^{\circ} 59'),$$

c'est-à-dire 194° 7' 6, dont la moitié donne 97° 4' pour l'angle de position compté avec le prolongement du trait solaire, quantité que nous diminuons de 4 minutes, parce qu'en mesurant au cathétomètre l'alidade et la corde de 37 degrés, nous avons reconnu que nos degrés étaient un peu trop petits et réclamaient une correction soustractive s'élevant à la fraction 0,000704 de l'arc et ne dépassant jamais 4 mi-

notes. Le supplément 83 degrés de l'arc, ainsi corrigé, donne l'angle de position avec le trait solaire arrivant.

2° Avec le grand tube, on obtient

$$26^{\circ}25' + 144^{\circ}27'5 + (38^{\circ} - 15^{\circ}7' = 22^{\circ}53'),$$

c'est-à-dire $193^{\circ}46'$, dont la moitié, $96^{\circ}53'$, diminuée de 4 minutes, donne pour angle de position $83^{\circ}11'$, c'est-à-dire sensiblement celui du petit tube.

Comme exemples de la tolérance que comportent les lectures ordinaires, quand elles portent, non plus sur deux couleurs simultanées fournies par deux arcs, mais sur une seule teinte, nous citerons l'arc 10^e qui a donné, pour le vert, à la température $t = 49^{\circ}3$:

Lectures de gauche.	Lectures de droite.
13 ^o 20'	25 ^o 20'
14. 8,5	25. 7
14.21	25.14
13.55	25. 2
Moyennes. 13.56	25.11

ce qui conduit, car ici les deux lectures se faisaient sur un même secteur, à l'angle $11^{\circ}15'$, dont la moitié, $5^{\circ}38'$, est l'angle de position du vert dans l'arc 10^e.

Autre exemple : l'arc 16^e, à la température $t = 38^{\circ}$, donne pour le vert d'intensité maximum :

Lectures de gauche.	Lectures de droite.
14 ^o 5',5	21 ^o 20'
13.45	20.57,5
13.29,5	21.31
13.56	21.20
Moyennes. 13.49	21.17

L'arc intercalé entre le 0 du secteur de gauche et le degré 38 du

secteur de droite était $33^{\circ}6'5$. On en déduit, pour l'écart angulaire des deux verts, la somme

$$13^{\circ}49' + 33^{\circ}6'5 + (38^{\circ} - 21^{\circ}17' = 16^{\circ}43'),$$

c'est-à-dire $63^{\circ}38'$, dont la moitié, $31^{\circ}49'$, exprime l'angle de position du vert.

Le 6^e arc, enfin, nous offrira un exemple des variations que peut offrir le relèvement d'une même couleur quand il est fait par divers observateurs. Les observations étaient faites sur de l'eau à 3 degrés. Nous nous dispenserons de donner les lectures primitives faites sur les secteurs, pour ne relater que les angles de position qui en ont été déduits.

	1 ^{er} observateur.	2 ^e observateur.
Rouge extrême . . .	$30^{\circ}.21'$	$30^{\circ} 26'$
Jaune	33.40	$34. 5$
Vert	35.46	35.53

Les différences ne sont pas fortes; cependant, comme elles ont lieu dans le même sens pour chaque observation, on peut craindre que le jugement d'une teinte donnée ne varie avec l'observateur. Pour nous prémunir, autant que possible, contre les conséquences que de telles divergences auraient, quoique faibles, sur la détermination des variations d'indice avec la température, nous avons eu soin que, pour chaque arc, les deux sortes de lectures, celles à chaud et celles à froid, fussent faites par le même observateur.

Tableau des relations explicites entre Δ et n ou formules de Babinet.

	Déviatiou Δ .	$\frac{\Delta}{2}$.	$\sin \frac{\Delta}{2}$.	$\cos \frac{\Delta}{2}$.
1 ^{er} arc.	$180 - (4r - 2i)$	$90 - (2r - i)$	$\frac{1}{3n^2}(n^2 + 8) \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$	$\sqrt{\frac{(4 - n^2)^3}{27 \cdot n^4}}$
2 ^e arc..	$360 - (6r - 2i)$	$180 - (3r - i)$	$\frac{1}{8n^3} \sqrt{(n^2 - 1)(9 - n^2)^3}$	$-\frac{1}{8n^3}(n^6 + 18 \cdot n^2 - 27)$
3 ^e arc..	$540 - (8r - 2i)$	$270 - (4r - i)$	$\left\{ \begin{aligned} &-\frac{27 \cdot n^4 + 896 \cdot n^2 - 2048}{75 \cdot n^4} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{15}} \\ &= -\frac{3^3 \cdot n^4 + 2^7 \cdot 7 \cdot n^2 - 2^{11}}{3 \cdot 5^2 \cdot n^4} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{15}} \end{aligned} \right.$	$-\frac{1}{3 \cdot 5^2 \cdot n^4} (-27 \cdot n^4 + 464 \cdot n^2 - 512) \sqrt{\frac{16 - n^2}{15}}$ $= -\frac{1}{5n^4} (-27 \cdot n^2 + 32) \left(\frac{16 - n^2}{15}\right)^{\frac{3}{2}}$
4 ^e arc..	$720 - (10r - 2i)$	$360 - (5r - i)$	$-\frac{2^4 \cdot n^6 + 5^2 \cdot 17 \cdot n^2 - 5^4}{2^3 \cdot 3^3 \cdot n^6} \sqrt{(n^2 - 1)(5^2 - n^2)}$	$\frac{2^4 \cdot n^6 + 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot n^4 + 2 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot n^2 + 5^6}{2^3 \cdot 3^3 \cdot n^6}$

Tableau des équations qu'elles fournissent pour déduire n de Δ .

1 ^{er} arc.	$n^6 + 3 \left(5 - 9 \sin^2 \frac{\Delta}{2}\right) n^4 + 48 \cdot n^2 - 64 = 0$	$z^3 + pz^2 + qz + r = 0$
2 ^e arc..	$n^4 + 8 \cos \frac{\Delta}{2} n^2 + 18 \cdot n^2 - 27 = 0$	$z^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = 0$
3 ^e arc..	$3^6 \cdot n^{10} + 3 \cdot 5^2 \left(5 \cos^2 \frac{\Delta}{2} - 2^6\right) n^8 + 1867 \cdot n^6 - 2^{12} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 71 \cdot n^4 + 2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot n^2 - 2^{22} = 0$	$z^6 + pz^5 + qz^4 + rz^3 + sz + t = 0$
4 ^e arc..	$2^4 \cdot n^6 - 2^3 \cdot 3^3 \cos \frac{\Delta}{2} n^5 + 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot n^4 - 2 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot n^2 + 5^6 = 0$	$z^6 + pz^5 + qz^4 + rz^3 + sz^2 + tz + u = 0$

Tableau des indices de l'eau et de quelques éléments qui en dépendent.

	Indice.	Variation de l'indice.	Angle limite L.	180 - 2L.	$\sqrt{n^2 - 1.57^{\circ}.2996}$.
Raie B.....	1,330 956		48.42'.23"	82.35'.14"	50,326
Raie D.....	1,333 577	0,002 621	48.34.43	82.50.34	50,554
Maximum.....	1,334 240	0,000 663	48.32.46	82.54.28	50,611
Raie E.....	1,335 850	0,001 610	48.28. 5	83. 3.50	50,750
Milieu du vert.....	1,336 594	0,000 744	48.25.56	83. 8. 8	50,815
Raie F.....	1,337 803	0,001 209	48.22.26	83.15. 8	50,919
Raie H.....	1,344 169	0,006 366	48. 4.10	83.51.40	51,467
Variation d'indice entre B et H..	0,013 213			

§ VI. — *Les tableaux. — Remarques diverses. — Variations qu'ils assignent à l'indice de l'eau, pour 1 degré de température.*

1^{er} ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 180^\circ - (4r - 2i).$	Angle de position $180^\circ - \Delta.$	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.	
$\Delta_B \dots 137^\circ.27'.26''$	$42^\circ.22'.34''$	entre B et D 1375"	0,5246	<i>Voir, page précédente, la colonne des variations d'indice; en supprimant la virgule, ils sont exprimés en millionièmes.</i>
$\Delta_D \dots 138. 0.21$	41.59.39	
$\Delta \text{ max.} \dots 138. 6. 7$	41.53.53	D et E 1184	0,5209	
$\Delta_E \dots 138.20. 5$	41.39.55	
$\Delta \text{ vert.} \dots 138.36.31$	41.23.29	E et F 1009	0,5166	
$\Delta_F \dots 138.36.54$	41.23. 6	F et H 3254	0,5111	
$\Delta_H \dots 139.31. 8$	40.28.52	B et H 6822	0,5165	

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16^\circ.$	L'observation a donné			Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 0^\circ,5$ et $t = 43^\circ.$
		$t = 0^\circ,5.$	$t = 9^\circ,2.$	$t = 43^\circ.$	
Rouge extrême..	° ' "	43° 3'	43° 26'	44° 9'
Raie B.....	42 22.34
Orangé.....
Raie D.....	41.59.39
Jaune.....	41.54	41.57	42.44	0,000 137
Vert (milieu)...	41.23.29	41.23	41.22	42.13	0,000 138
Bleu.....
Raie H.....	40.28.52

Quoique les déviations et, par suite, les variations produites dans ces déviations par les changements de température, soient faibles dans ce 1^{er} arc, cependant un échauffement de 40 degrés suffit pour amener une diminution manifeste des Δ qui donne un décroissement d'indice ne s'éloignant pas trop des résultats analogues obtenus avec des arcs plus avantageux.

Comme exemple de calcul du coefficient de variation d'indice, nous avons, pour le jaune, entre $t = 0^\circ,5$ et $t = 43^\circ$, soit pour la variation de $42^\circ,5$ de température une variation angulaire de $42^\circ 44' - 41^\circ 54' = 0^\circ 50' = 3000''$ ou bien, pour un seul degré, $\frac{3000''}{42,5} = 70'',6$ qui, divisés par 0'',5209, donnent 0,000137.

2^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 360^\circ - (6r' - 2i)$.	Angle de position $\Delta - 180^\circ$.	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
Δ_B 230.21.13"	50.21.13"	entre B et D 2478"	0,9454
Δ_D 231. 2.31	51. 2.31	D et E 2135	0,9393
Δ max.... 231.12.55	51.12.55	E et F 1825	0,9345
Δ_E 231.38. 6	51 38. 6	F et H 5882	0,924
Δ vert.... 231.49.42	51.49.42
Δ_F 232. 8.31	52. 8.31	B et H 12320	0,9269
Δ_H 233.46.33	53.46.33

OBSERVATIONS.

	Théorie $i = 16^\circ$.	L'observation a donné				Variation d'indice pour 1 ^r compris entre	
		$i = 0^\circ,7$.	$i = 8^\circ,5$.	$i = 41^\circ,8$.	$i = 43^\circ,3$.	$i = 0^\circ,7$ et $i = 41^\circ,8$.	$i = 0^\circ,7$ et $i = 43^\circ,3$.
Rouge extrême.. "	49.15'	49.12'	48.34'	48.16'
Raie B.....	50.21.13
Orangé.....	49.46
Raie D.....	51. 2.31
Jaune.....	51.20	51.10	50.19	50. 9	0,000 099	0,000 106
Vert (milieu)..	51.49.32	52.28	52.10	51. 2	51.14	0,000 126	0,000 111
Bleu.....	53. 8
Raie H.....	53.46.33

On sait qu'Airy, en faisant intervenir l'interférence, a obtenu, chez les deux premiers arcs, pour le maximum, une direction un peu différente de celle que donne la théorie ordinaire des rayons efficaces et que les expériences de Miller ont confirmé ces faibles écarts. Comme ces expériences ont été faites très-près de la veine et que, dans notre manière d'observer, on s'en trouve assez loin, on se demande quelle influence, dans la théorie nouvelle, est acquise à cette différence de distance; c'est là un point sur lequel nous nous proposons de revenir quand nous aurons régularisé l'emploi des moyens d'observation signalés au § II.

3^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 340^\circ - (8r - 2i).$	Angle de position $360^\circ - \Delta.$	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
$\Delta_B \dots\dots 317.30.32''$	$42.29.28''$	entre B et D 3478''	1,327
$\Delta_D \dots\dots 318.28.30$	$41.31.30$	D et E 2996	1,318
$\Delta \text{ max.} \dots 318.43.5$	$41.16.55$	E et F 2562	1,312
$\Delta_E \dots\dots 319.18.26$	$40.41.34$	F et H 8253	1,296
$\Delta \text{ vert.} \dots 319.34.43$	$40.25.17$
$\Delta_F \dots\dots 320.1.8$	$39.58.52$	B et H 17289	1,308
$\Delta_H \dots\dots 322.18.40$	$37.41.20$

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16^\circ.$	L'observation a donné			Variation d'indice pour 1° compris entre	
		$t = 1^\circ,6.$	$t = 36^\circ,9.$	$t = 42,8.$	$t = 1^\circ,6$ et $t = 36^\circ,9.$	$t = 1^\circ,6$ et $t = 42^\circ,8.$
Rouge extrême.....''	$43.7'$	$44.43'$	$44.49'$
Raie B.....	$42.29.28$
Orangé.....	43.12	43.52
Raie D.....	$41.31.30$
Jaune.....	41.11	42.30	42.18	0,000 103	0,000 073
Vert (moyen).....	$40.25.17$	39.41	40.47	41.15	0,000 086	0,000 105
Bleu.....	39.22
Raie H.....	$37.41.20$

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à la temp. $t = 1,0$ deux rouges égaux, dus aux arcs 3^e et 4^e, dans la direction $42.52'$
 » » $t = 36,9$ deux orangés égaux, » 3^e et 4^e, » 42.16
 » » $t = 42,8$ deux orangés jaunâtres égaux, » 3^e et 4^e, » 42.59

L'arc 3^e, si faible dans la nature, dont je n'ai pu que deux fois apercevoir un pâle lambeau, est, dans la chambre obscure, un très-bel arc qui, aux températures ordinaires, se mêle à peine à l'arc 4^e, l'empiétement mutuel ne portant que sur les rouges extrêmes antérieurs à la raie B. La température s'élève-t-elle, les arcs se pénètrent de plus en plus, et les teintes pareilles, qui continuent de se voir dans une même direction, marchent vers leurs extrémités violettes.

4^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 720^\circ - (10r - 2i)$	Angle de position $\Delta - 360^\circ$	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
Δ_B 402.44'.24"	42.44'.24"	entre B et D 4443"	1,695
Δ_D 403.58.27	43.58.27	D et E 3829	1,685
Δ max. 404.17. 5	44.17. 5	E et F 3273	1,676
Δ_E 405. 2.16	45. 2.16	F et H 10557	1,658
Δ vert. 405.23. 5	45.23. 5
Δ_F 405.56.49	45.56.49	B et H 22102	1,673
Δ_H 408.52.46	48.52.46

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16^\circ$.	L'observation a donné		Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 1^\circ,5$ et $t = 48^\circ,8$.
		$t = 1^\circ,5$.	$t = 48^\circ,8$.	
Rouge extrême. "	43. 9'	40.27'
Raie B.	42.44.24
Orangé.	43.54	41.44
Raie D.	43.58.27
Jaune.	44.29	42. 8	0,000 107
Vert moyen.	45.23. 5	46. 1	43.44	0,000 104
Bleu.	46.24
Raie H.	48.52.46

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 2,1$, deux rouges égaux, dus aux arcs 4^e et 3^e, dans la direction 42.58'
 » $t = 36,9$, deux orangés égaux, » 4^e et 3^e, » 42.46

5^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 900^\circ - (12r - 2i)$.	Angle de position $840^\circ - \Delta$.	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'Indice = 0,000 001.
Δ_B 487. 3 ' 33 "	52. 56. 27 "	entre B et D 5395 "	1, 327
Δ_D 488. 33. 28	51. 26. 32	D et E 4648	1, 318
Δ_{max} 488. 56. 5	51. 3. 55	E et F 3974	1, 312
Δ_E 489. 50. 56	50. 9. 4	F et H 12880	1, 296
Δ_{vert} 490. 16. 13	49. 43. 47
Δ_F 490. 57. 10	49. 2. 50	B et H 26897	1, 308
Δ_H 494. 31. 50	45. 28. 10

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16^\circ$.	L'observation a donné			Variation d'Indice pour 1° compris entre	
		$t = 0^\circ, 7$.	$t = 6^\circ, 8$.	$t = 44^\circ, 3$.	$t = 0^\circ, 7$ et $t = 44^\circ, 3$.	$t = 6^\circ, 8$ et $t = 44^\circ, 3$.
Rouge extrême	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "
Raie B	52. 56. 27	53. 51	53. 50	57. 29
Orangé	55. 15
Raie D	51. 26. 32
Jaune	50. 35	50. 38	53. 50	0,000 133	0,000 106
Vert moyen	49. 43. 47	48. 34	48. 57	52. 7	0,000 130	0,000 133
Bleu
Raie H	45. 28. 10

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 0, 7$, deux orangés égaux, dus aux arcs 5^e et 2^e, dans la direction 51. 00'
 " $t = 41, 5$, deux jaunes égaux, " 5^e et 2^e, " 55. 33
 " $t = 41, 5$, deux jaunes orangés égaux, " 5^e et 2^e, " 54. 40
 " $t = 41, 5$, deux bleus égaux, " 18^e et 19^e, " 42. 45

L'étude du 5^e arc-en-ciel de l'eau nous a donné de la peine, et cependant, parmi les arcs

énergiques, le seul qui s'y mêle est le 2^e arc, si court et si reconnaissable. Nous avons été longtemps sans soupçonner que nos embarras pourraient bien venir des arcs 18 et 19, dont le premier a ses couleurs développées dans le même sens que l'arc 5. Voici comment nous nous sommes convaincu de la réalité de cette influence inattendue.

Quand, en inclinant suffisamment la veine, on rabat sur le bois de l'alidade les arcs 5 et 2 et aussi l'arc n^o 1, qui est dans les mêmes parages, on s'aperçoit que la lunette continue de montrer deux arcs sur les bords opposés du filet, lesquels, débarrassés par cet artifice de leurs brillants rivaux, apparaissent alors avec netteté, offrent des coïncidences de couleurs variables avec la température et se prêtent très-bien au relèvement de leurs principales couleurs. Ce serait à eux qu'appartiendraient ces deux bleus d'égale énergie qui, à la température de 41 degrés, se montrent dans la direction 42° 45'; le lecteur s'en convaincra quand il verra, § VII, les directions que nous avons obtenues pour plusieurs couleurs de ces deux arcs, et qu'il verra combien peu, quoiqu'il s'agisse d'angles de près de 1600 et de 1700 degrés, elles s'éloignent des directions théoriques.

Pour apprécier l'effet que peut avoir l'inclinaison de la veine liquide, imaginons deux plans dont l'un passe par l'axe du cylindre et la verticale, l'autre passant par le même axe et se trouvant normal au premier. Ce deuxième plan diamétral divise le cylindre en deux moitiés telles, que si dans l'une les normales intérieures à la surface sont toutes inclinées au-dessous de l'horizon, dans l'autre elles se relèvent au-dessus; une réflexion qui utilise une des premières normales déprimera le rayon réfléchi, tandis qu'il sera relevé par les réflexions opérées dans l'autre moitié. Cela posé, on conçoit que, quand les réflexions sont nombreuses et le sens de l'inclinaison convenable, elles puissent se partager à peu près également entre les deux moitiés et y occuper des positions qui donneront pour les relèvements et les dépressions deux sommes à peu près égales, cas auquel le rayon sortant se retrouvera horizontal et retrouvera la lunette, comme si le filet cylindrique fût resté vertical. Le même genre de compensation n'étant plus possible pour des arcs qui, comme 1 et 2, et même 5 et 6, sont engendrés par un petit nombre de réflexions, ou tout au moins n'ayant pas lieu pour le même sens d'inclinaison, un calcul en règle vérifierait, ce nous semble, ces prévisions.

6° ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 1080^\circ - (14r - 2i).$	Angle de position $\Delta - 540^\circ.$	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
$\Delta_B \dots\dots 570^\circ.52'.34''$	$30^\circ.52'.34''$	entre B et D 6323	2,412
$\Delta_D \dots\dots 572.37.57$	$32.37.57$	D et E 5458	2,401
$\Delta_{\text{max}} \dots 573. 4.32$	$33. 4.32$	E et F 4669	2,391
$\Delta_E \dots\dots 574. 8.55$	$34. 8.55$	F et H 15001	2,356
$\Delta_{\text{vert}} \dots 574.38.39$	$34.38.39$
$\Delta_F \dots\dots 575.26.44$	$35.26.44$	B et H 31451	2,380
$\Delta_H \dots\dots 579.36.45$	$39.36.45$

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16^\circ.$	L'observation a donné		Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 3^\circ$ et $t = 38^\circ,4$.
		$t = 3^\circ.$	$t = 38^\circ,4.$	
Rouge extrême.....	° ' "	$30^\circ.21'$	$28^\circ. '$
Raie B.....	30.52.34
Orangé.....	31.55
Raie D.....	32.37.57
Jaune.....	33.40	30.44	0,000 117
Vert moyen.....	34.38.39	35.46	33 29	0,000 098
Bleu.....	38.57	35.56
Raie H.....	39.36.45

Cet arc est, comme le précédent, mais à l'autre bout, dans le champ des deux arcs si étendus 18 et 19 (fig. 3); cependant son étude ne nous a pas présenté les mêmes difficultés.

7^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 1260^\circ - (16r - 2i).$	Angle de position $720^\circ - \Delta.$	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
$\Delta_B \dots\dots 654^\circ.22'.26''$	$65^\circ.37'.44''$	entre B et D 7271''	2,774
$\Delta_D \dots\dots 656.23.27$	63.36.23	D et E 6268	2,758
$\Delta_{\text{max}} \dots\dots 656.54.9$	63.5.51	E et F 5360	2,746
$\Delta_E \dots\dots 658.8.5$	61.51.55	F et H 17286	2,715
$\Delta_{\text{vert}} \dots\dots 658.42.10$	61.17.50
$\Delta_F \dots\dots 659.37.25$	60.22.35	B et H 36185	2,739
$\Delta_H \dots\dots 664.25.31$	55.34.29

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16^\circ.$	L'observation a donné		Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 1^\circ$ et $t = 37^\circ.8.$
		$t = 1^\circ.$	$t = 37^\circ.8.$	
Rouge extrême..... "	$66^\circ.54'$	$71^\circ.3'$
Raie B.....	65.37.34
Orangé.....	64.20	67.10
Raie D.....	63.36.23
Jaune.....	62.20	65.28	0,000 108
Vert moyen.....	61.17.50	59.50	62.51	0,000 1045
Bleu.....	51.43
Raie H.....	55.34.29

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 37,8$, deux rouges orangés égaux, dus aux arcs 7^e et 13^e, dans la direction $70.12'$
 „ $t = 37,8$, deux bleus violâtres égaux, „ 7^e et 17^e, „ 55.52

8^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 1440^\circ - (18r - 2i).$	Angle de position $\Delta - 720^\circ.$	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
$\Delta_B \dots\dots 737^\circ.40'.8''$	$17^\circ.40'.8''$	entre B et D 8206"	3,131
$\Delta_D \dots\dots 739.56.54$	$19.56.54$	D et E 7073	3,112
$\Delta \text{ max.} \dots 740.21.24$	$20.21.24$	E et F 6046	3,096
$\Delta_E \dots\dots 741.54.47$	$21.54.47$	F et H 19507	3,064
$\Delta \text{ vert.} \dots 742.33.15$	$22.33.15$
$\Delta_F \dots\dots 743.35.33$	$23.35.33$	B et H 40833	3,090
$\Delta_H \dots\dots 749.0.40$	$29.0.40$

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16^\circ.$	L'observation a donné		Variation d'indice pour 1 ^e compris entre $t = 1^\circ,7$ et $t = 38^\circ,6$
		$t = 1^\circ,7.$	$t = 38^\circ,6.$	
Rouge extrême.....	$^\circ \quad ' \quad ''$	$17.17'$	$^\circ \quad ' \quad ''$
Raie B.....	$17.40.8$
Orangé.....	19.13
Raie D.....	$19.56.54$
Jaune.....	20.34	17.23	0,000 100
Vert moyen.....	$22.33.15$	23.48	20.28	0,000 105
Bleu.....	26.25
Raie H.....	$29.0.40$

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 38^\circ,6$, deux rouges orangés égaux, dus aux arcs 8^e et 12^e, dans la direction $14^\circ 29'$

9^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 1620'' - (20'' - 2i)$.	Angle de position $900'' - \Delta$.	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
Δ_B $820^{\circ}.49'.14''$	$79^{\circ}.10'.46''$	entre B et D 9138''	3",486
Δ_D $823.21.32$	$76.38.28$	D et E 7876	3,465
Δ max.... $823.59.52$	$76. 0. 8$	E et F 6732	3,447
Δ_E $825.32.48$	$74.27.12$	F et H 21712	3,411
Δ vert.... $826.15.37$	$73.44.23$
Δ_F $827.25.$	$72.35.$	B et H 45458	3,440
Δ_H $833.26.52$	$66.33. 8$

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16^{\circ}$.	L'observation a donné		Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 1^{\circ},6$ et $t = 44^{\circ},9$.
		$t = 1^{\circ},6$.	$t = 44^{\circ},9$	
Rouge extrême..... "	$81^{\circ}. 2'$	$85^{\circ}.36'$
Raie B.....	$79.10.46$
Orangé.....	77.19	$82. 6$.. .
Raie D.....	$76.38.28$
Jaune.....	75.45	80.49	0,000 121
Vert moyen.....	$73.44.23$	72.10	76.50	0,000 112
Bleu.....	67.52	73.54
Raie H.....	$66.33. 8$
Violet extrême.....	$61. 7$	67.59

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 0^{\circ},7$, deux verts bleuâtres égaux, dus aux arcs 9° et 15° , dans la direction $71^{\circ}.18'$
 » $t = 43,8$, deux rouges orangés égaux, » 9° et 11° , » 83.49
 » $t = 43,8$, deux violets égaux, » 9° et 15° , » 71.24
 » $t = 46,5$, deux orangés jaunâtres égaux, » 9° et 11° , » 82.56

10^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 1800^\circ - (22r - 2i).$	Angle de position $\Delta - 900^\circ.$	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
$\Delta_B \dots\dots 903.52'. 9''$	$3.52'. 9''$	entre B et D 10067"	3,841
$\Delta_D \dots\dots 906.39.56$	6.39.56	D et E 8667	3,817
$\Delta_{\text{max}} \dots\dots 907.22.11$	7.22.11	E et F 7416	3,797
$\Delta_E \dots\dots 909. 4.33$	9. 4.33	F et H 23713	3,725
$\Delta_{\text{vert}} \dots\dots 909.51.43$	9.51.43
$\Delta_F \dots\dots 911. 8. 9$	11. 8. 9	B et H 49873	3,774
$\Delta_H \dots\dots 917.43.22$	17.43.22

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16^\circ.$	L'observation a donné			Variation d'indice pour 1° compris entre		
		$t = 1^\circ, 6.$	$t = 37^\circ, 3.$	$t = 80^\circ, 2.$	$t = 2^\circ$ et $t = 37^\circ.$	$t = 3^\circ$ et $t = 40^\circ.$	$t = 2^\circ$ et $t = 50^\circ.$
Rouge extrême.	0 "	0	0	0
Raie B.....	3.52. 9
Orangé.....	4.53
Raie D.....	6.39.56
Jaune.....	7.26	2.54	0,000 120	0,000 104
Vert moyen....	9.51.43	11.42	7.42	5.27	0,000 107	0,000 106	0,000 122
Bleu.....	8.40
Raie H.....	17.43.22
Violet.....	12.25

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 1^\circ, 6$, deux verts égaux, dus aux arcs 5 et 14, dans la direction $12^\circ 55'$.

Surtout avec l'eau chaude, les couleurs les moins réfrangibles sont si rapprochées des rayons solaires, que la tête de l'observateur, les arrêtant, rend leur relèvement impossible; à moins que l'oculaire de la lunette, armé d'un prisme à réflexion totale, ne permette de se placer latéralement.

11^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 1980'' - (24r - 2i)$.	Angle de position $\Delta - 900''$.	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.	
Δ_B 986° 50' 24"	86° 50' 24"	entre B et D 10993"	4",194	A la deuxième colonne des observations ce sont les suppléments des angles de position qui figurent.
Δ_D 989.53.38	89.53 38	D et E 9478	4,170	
Δ max. 990.39.47	90.39 47	E et F 8101	4,148	
Δ_E 992.31.35	92 31.35	F et H 26142	4,106	
Δ vert. 993.23. 7	93.23. 7	
Δ_F 994.46.36	94.46.36	B et H 54714	4,141	
Δ_H 1002. 2.18	102 2.18	

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16''$.	L'observation a donné				Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 0'',5$ et $t = 39'',4$.
		$t = 0'',5$.	$t = 39'',4$.	$t = 46'',4$.	$t = 49'',8$.	
Rouge extrême	° ' "	94° 29'	99° 9'	99° 6'	99° 33'
Raie B	93. 9.36
Orangé	89.59	94.47
Raie D	90. 6.22
Jaune	88.24	93.30	95. 4	95.11	0,000 112
Vert moyen	86.36.53	84. .	89.10	90.51	92.14	0,000 114
Bleu	84 52
Raie H	77.57.42
Violet	73.51	77.17

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 0'',5$, deux verts égaux, dus aux arcs 11^e et 13^e, dans la direction 81°.39'

" $t = 2'',5$, deux verts égaux, " 11^e et 13^e, " 82°.39'

" $t = 39'',4$, deux rouges égaux, " 11^e et 9^e, " 97°. 7 (82.53)

" $t = 41'',7$, deux violets égaux, " 11^e et 13^e, " 83.34

" $t = 46'',7$, deux jaunes orangés égaux, " 11^e et 9^e, " 96.47 (83.13)

" $t = 49'',8$, deux orangés égaux, " 11^e et 9^e, " 97.10 (82.50)

12° ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 2160'' - (26r - 2i).$	Angle de position $1080'' - \Delta.$	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
$\Delta_B \dots\dots 1069.45' 5''$	$10.14' 55''$	entre B et D 11926''	4,550
$\Delta_D \dots\dots 1073. 3.51$	6.56. 9	D et E 10271	4,519
$\Delta_{\text{max}} \dots 1073.53 51$	6. 6. 9	E et F 8787	4,499
$\Delta_E \dots\dots 1075.55. 2$	4. 4.58	F et H 28398	4,461
$\Delta_{\text{vert}} \dots 1076.50.55$	3. 9. 5
$\Delta_F \dots\dots 1078.22.29$	1.37.31	B et H 59381	4,484
$\Delta_H \dots\dots 1086.14.47$	-6.14.47

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16^\circ.$	L'observation a donné					Variation d'indice pour 1° compris entre	
		$t = 1^\circ, 7.$	$t = 4^\circ.$	$t = 14^\circ, 5.$	$t = 41^\circ.$	$t = 47^\circ, 3.$	$t = 9^\circ$ et $t = 47^\circ.$	$t = 2^\circ$ et $t = 44^\circ.$
Rouge extrême...	8.46'	7.30'	12. 5'	14.52'	0,000 102
Raie B.....	10.14.55
Orangé.....	6. 9	5.38
Raie D.....	6.56. 9
Jaune.....	4.12	5 57
Vert moyen.....	3. 9. 5	0.11	6. 2	7.53	0,000 121
Bleu.....
Raie H.....	-6.14.47

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 14^\circ, 5$, deux verts égaux, dus aux arcs 12° et 12° , dans la direction $0^\circ 0' 0''$.

Cet arc-en-ciel est difficile à observer parce qu'il se voit dans la direction même du soleil, ayant, à la température de 14 degrés, tout ce qui précède le vert d'un côté de l'astre, et tout ce qui suit cette couleur de l'autre côté; ce qui amène en superposition, de chaque côté, les parties diverses des deux arcs identiques que l'expérience réalise. Pour atténuer la gêne qu'apporte la portion du trait solaire qui passe près de la veine, on a recours à des écrans mis près d'elle.

13^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 2340'' - (28'' - 2t)$.	Angle de position $\Delta - 1080''$.	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
$\Delta_B \dots\dots 1152.36.59''$	$72.36.59''$	entre B et D 12850''	4,903
$\Delta_D \dots\dots 1156.11.9$	$76.11.9$	D et E 11090	4,879
$\Delta \text{ max} \dots 1157.5.2$	$77.5.2$	E et F 9450	4,859
$\Delta_E \dots\dots 1159.15.59$	$79.15.59$	F et H 30555	4,819
$\Delta \text{ vert} \dots 1160.15.56$	$80.15.56$
$\Delta_F \dots\dots 1161.53.29$	$81.53.29$	B et H 63945	4,839
$\Delta_H \dots\dots 1170.22.34$	$90.22.34$

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16''$.	L'observation a donné			Variation d'indice pour 1'' compris entre $t = 7'',6$ et $t = 41'',1$.
		$t = 0'',6$.	$t = 7'',6$.	$t = 41'',1$.	
Rouge extrême...''	$71.37'$	$70.37'$	$70.28'$
Raie B.....	72.36.59
Orangé.....	76.33	76.
Raie D.....	76.11.9
Jaune.....	78.1	77.33	72.14	0,000 117
Vert moyen.....	80.15.56	81.39	81.55	77.14	0,000 104
Bleu.....	86.25	85.26	80.40
Raie H.....	90.22.34
Violet.....	92.48	95.1	86.31

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 0,5$, deux verts égaux, dus aux arcs 13^e et 11^e, dans la direction $82.36'$
 » $t = 40,3$, deux bleus violacés égaux, » 13^e et 11^e, » 83.19
 » $t = 41,1$, deux violets égaux, » 13^e et 11^e, » 82.55

14^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 2520^\circ - (30r - 2i).$	Angle de position $1260^\circ - \Delta.$	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
$\Delta_B \dots\dots 1235^\circ.26'.41''$	$24^\circ.33'.19''$	entre B et D 13772"	5,254
$\Delta_D \dots\dots 1239.16.13$	$20.43.47$	D et E 11871	5,223
$\Delta \text{ max} \dots 1240.14.$	$19.46.$	E et F 10151	5,199
$\Delta_E \dots\dots 1242.34.4$	$17.25.56$	F et H 32747	5,144
$\Delta \text{ vert} \dots 1243.38.40$	$16.21.20$
$\Delta_F \dots\dots 1245.23.15$	$14.36.45$	B et H 68541	5,187
$\Delta_H \dots\dots 1254.29.2$	$5.30.58$

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16^\circ.$	L'observation a donné			Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 4^\circ$ et $t = 37^\circ.$
		$t = 4^\circ.1.$	$t = 37^\circ.$	$t = 41^\circ.$	
Rouge extrême	$24^\circ.15'$	$30^\circ.40'$
Raie B	$24.33.19$
Orangé.....	29.45
Raie D	$20.43.47$
Jaune.....	19.2	25.5	27.9	$0,000\ 127$
Vert moyen....	$16.21.20$	13.43	19.40	$20\ 53$	$0,000\ 123$
Bleu	16.9
Raie H	$5.30.58$

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 39^\circ.8$, deux orangés jaunâtres, dus aux arcs 14° et 6° , dans la direction $30^\circ.00'$
 » $t = 39,8$, deux bleus violacés égaux, » 14° et 10° , » 12.56
 » $t = 40,6$, deux violets bleuâtres égaux, » 14° et 10° , » 14.52

15° ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 2700^\circ - (32r - 2i)$.	Angle de position $\Delta - 1260^\circ$.	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 601.
Δ_B 1318.14'.30"	58.14'.30"	entre B et D 14700"	5,608
Δ_D 1322.19.30	62.19.30	D et E 12669	5,574
Δ max. 1323.21.11	63.21.11	E et F 10833	5,547
Δ_E 1325.50.39	65.50.39	F et H 34936	5,490
Δ vert. 1326.57.52	66.57.52
Δ_F 1328.51.12	68.51.12	B et H 73148	5,536
Δ_H 1338.33.38	78.33.38

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16^\circ$.	L'observation a donné			Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 0^\circ,7$ et $t = 41^\circ,3$
		$t = 0^\circ,7$.	$t = 41^\circ,3$.	$t = 45^\circ,1$.	
Rouge extrême..	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "
Raie B	58.14.30
Orangé	62.42	55.48	55.26	0,000 110
Raie D	62.19.30
Jaune	64.18	57.30	57.38	0,000 109
Vert moyen	66.58.	64. 4
Bleu	73.39
Raie H	78.33.38
Violet extrême..	79.58

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 0^\circ,7$, deux verts bleuâtres égaux, dus aux arcs 15° et 9°, dans la direction 70° 33'

» $t = 42,1$, deux orangés jaunâtres égaux, » 15° et 5°, » 57.31

» $t = 42,1$, deux violets égaux, » 15° et 9°, » 69. 1

» $t = 45,1$, deux violets égaux, » 15° et 9°, » 69.53

16° ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 2880^\circ - (34r - 2i).$	Angle de position $1440^\circ - \Delta.$	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
$\Delta_B \dots\dots 1401^\circ 0' 51''$	$38^\circ 59' 9''$	entre B et D 15624"	5,961
$\Delta_D \dots\dots 1405.21.15$	34.38.45	D et E 13467	5,925
$\Delta \text{ max} \dots 1406.26.48$	33.33.12	E et F 11515	5,897
$\Delta_E \dots\dots 1409. 5 42$	30.54.18	F et H 37143	5,835
$\Delta \text{ vert} \dots 1410.18.57$	29.41 3
$\Delta_F \dots\dots 1412.17.37$	27.42 23	B et H 77749	5,884
$\Delta_H \dots\dots 1422.36.40$	17.23.20

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16^\circ.$	L'observation a donné				Variation d'indice pour 1° compris entre	
		$t = 2^\circ,5.$	$t = 4^\circ,1.$	$t = 38^\circ.$	$t = 41^\circ,3$	$t = 2^\circ,5$ et $t = 38^\circ.$	$t = 4^\circ,1$ et $t = 41^\circ,3.$
Rouge extrême .	° ' "	$37^\circ 45'$	$38^\circ 22'$	$45^\circ 13'$	$44^\circ 49'$	0,000 105
Raie B.	38.59. 9
Orangé	34.20	42. 7
Raie D.	34.38.45
Jaune	31.20	32. 3	38.50	37.25	0,000 129	0,000 088
Vert moyen	29.41. 3	25.55	27.10	31.49	32.46	0,000 102	0,000 092
Bleu
Raie H.	17.23.20

Nous donnerons, pour cet arc, le résultat de quelques calculs relatifs à l'intensité et à la constitution de la lumière qui le forme. Ils se rapportent à un rayon incident égal à l'unité.

Intensité de la lumière réfléchie polarisée dans le 1 ^{er} azimut..	I = 0,000 508
Intensité de la lumière réfléchie polarisée dans le 2 ^e azimut..	J = 0,000 070 6
Lumière réfléchie totale = I + J.....	0,000 579
Lumière naturelle qui s'y trouve, 2J.....	0,000 141
Lumière polarisée qui s'y trouve, I - J.....	0,000 437
Proportion de lumière polarisée, $\frac{I - J}{I + J}$	0,756

L'intensité vraie est bien inférieure au chiffre 0,000 579 qui convient à un rayon isolé et qui ne tient pas compte de l'affaiblissement spécial venant de ce que les rayons sont éparpillés dans un angle de près de 22 degrés.

Nous ajouterons que le trajet du rayon dans la goutte, trajet marqué par $34R \cos r$, atteint 22,5R, c'est-à-dire près de 23 fois le rayon du filet liquide.

Chacun de ces seize tableaux montre :

1° Aux températures voisines de 16 degrés une concordance générale entre les angles de position observés et ceux que le calcul assigne aux rayons principaux entre lesquels se trouvent les couleurs observées ;

2° Que la modification apportée dans ces angles de position par l'élévation de température de l'eau répond toujours à une diminution de la déviation et par conséquent de l'indice.

Pour se convaincre de la réalité de ce deuxième résultat, on n'a qu'à consulter la *fig. 3 (Pl. I)*, où les seize premiers arcs sont représentés dans la position qu'ils occupent et avec le développement angulaire qui leur est propre. Dans cette *rose des arcs-en-ciel*, chaque arc débute par la raie B pour finir à la raie H avec indication des trois raies intermédiaires D, E, F. Une flèche placée à l'extrémité H montre le sens dans lequel s'accroissent les déviations. On y voit, par exemple, que, pour les arcs 6°, 15°, 4°, 8°, etc., la diminution de l'indice amène une diminution de l'angle de position, tandis que le contraire a lieu pour des arcs tels que les 5°, 9°, 7°, 3°, 16°, etc. Cette rose donne également la clef des correspondances qui ont lieu aux diverses températures. Ainsi, aux basses températures, les arcs 11° et 13° se pénétrant mieux encore que cela n'a lieu sur la figure, offriront une coïncidence de teintes moyennes qui nous ont paru être leur vert. A 40 degrés, s'étant dégagés par un mouvement contraire, ils donneront coïncidence de leurs teintes bleues. A cette même température, les arcs 11° et 9° se seront rejoints par les rayons les moins réfrangibles, antérieurs à B, que la figure ne donne pas. Vers 50 degrés, la pénétration devient plus intime, et l'on signale la coïncidence des deux orangés.

Nous n'avons, en général, calculé la variation d'indice due à 1 degré que pour le jaune et le vert, parce que ces deux couleurs nous ont paru être les plus faciles à reconnaître. Le rouge extrême, malgré sa pureté, ne donnerait rien de bon ; car le rouge que l'on commence à voir dépend de l'intensité et peut n'être pas le même dans les deux observations faites, l'une à chaud, l'autre à froid, que l'on compare. Cette intensité ne saurait, au contraire, influencer sur la direction dans laquelle une couleur composée, non extrême, semble la plus énergique. Nous avons résumé dans un tableau les déterminations de ce genre faites sur les

divers arcs; elles conduisent à une moyenne qui est la même pour ces deux couleurs, à savoir : 0,000 112. Si l'on ne considérait que les cinq arcs 7^e, 9^e, 11^e, 13^e, 15^e les plus voisins de la direction perpendiculaire au trait solaire, on aurait 113 et 109, dont la moyenne, 0,000 111, diffère bien peu de la moyenne générale.

Tableau de la variation d'indice pour 1 degré de variation de température.

N° de l'arc.	Jaune.	Vert.
1 ^{er}	0,000 137	0,000 138
2 ^e	0,000 102	0,000 118
3 ^e	0,000 088	0,000 095
4 ^e	0,000 107	0,000 104
5 ^e	0,000 120	0,000 131
6 ^e	0,000 117	0,000 098
7 ^e	0,000 108	0,000 105
8 ^e	0,000 100	0,000 105
9 ^e	0,000 121	0,000 112
10 ^e	0,000 112	0,000 112
11 ^e	0,000 112	0,000 114
12 ^e	0,000 121
13 ^e	0,000 117	0,000 104
14 ^e	0,000 127	0,000 123
15 ^e	0,000 110	0,000 109
16 ^e	0,000 108	0,000 097
Sommes	0,001 686	0,001 786
Moyennes . . .	$\frac{1}{15} = 0,000 112$	$\frac{1}{16} = 0,000 1116$

Les *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. LVIII, p. 117, contiennent les résultats d'un travail de MM. Dale et Gladstone sur les variations d'indice de l'eau avec la température. Dans ces études, faites avec un prisme et poussées jusqu'à 80 degrés, les Auteurs ne paraissent pas avoir été incommodés par les déformations du prisme, puisqu'ils n'ont pas cessé de voir les principales raies et de pouvoir opérer sur elles. Cependant on ne peut pas ne pas être frappé de la marche désordonnée que suivent leurs coefficients de variation, donnés de 5 en 5 degrés. Ces irrégularités doivent tenir à ce que des variations d'indice de l'ordre de celles qui affectent l'eau dans ces circonstances, n'amènent dans les déviations minimum que de très-faibles variations (quelque chose

comme 2'20" dans un prisme de 60 degrés et pour une variation de 10 degrés). Néanmoins, si nous prenons la variation totale accomplie entre 0 et 50 degrés, nous trouvons 0,0050 qui, divisé pour 50, donne, pour la variation moyenne due à un degré, le nombre 0,000100, dont le nôtre n'est pas très-éloigné.

§ VII. — *Calcul et observation des arcs 17°, 18° et 19°.*

Donnons maintenant les quelques résultats que nous avons dit avoir obtenus sur les arcs 17°, 18° et 19°.

Pour calculer les déviations théoriques de ces arcs, nous nous sommes servi de la formule approximative

$$\Delta = (p + 1)(180^\circ - 2L) - \frac{\sqrt{n^2 - 1} \cdot 57^\circ 29' 86''}{p + 1},$$

qui s'obtient sans peine en remarquant que quand p est un peu grand, i et r diffèrent peu, le premier de 90 degrés et le second de l'angle limité L . Si on les remplace par $90 - x$ et $L - y$, x et y seront de petits angles qui permettront d'introduire, dans les formules, des approximations (*). Elle est très-commode pour donner Δ quand on connaît n et par suite L , mais elle le serait beaucoup moins, à cause de L , si l'on voulait de Δ connu déduire n .

(*) Le $p^{\text{ème}}$ arc-en-ciel dépend des trois équations

$$\Delta = p \cdot 180^\circ - 2(p + 1)r + 2i, \quad \sin i = n \sin r, \quad di = (p + 1)dr.$$

Si p est grand, on a i et r peu différents, l'un de 90 degrés, l'autre de l'angle-limite L défini par $\sin L = \frac{1}{n}$, et, posant $i = 90 - x$ et $r = L - y$, les trois équations en x et y deviennent

$$(1) \quad \Delta = (p + 1)(180 - 2L) + 2(p + 1)y - 2x,$$

$$(2) \quad \cos x = n(\sin L \cos y - \sin y \cos L) = \cos y - \sqrt{n^2 - 1} \sin y, \quad dx = (p + 1)dy.$$

Différentiant l'équation (2) et la combinant avec la dernière, on pourra lui substituer l'équation finie suivante, qui sera notre troisième équation :

$$(3) \quad (p + 1) \sin x = \sin y + \sqrt{n^2 - 1} \cos y.$$

Les équations (2) et (3) vont donner, comme il suit, les valeurs approchées de $\sin x$ et $\sin y$;

	$\Delta = (p+1)(180 - 2L) - \frac{\sqrt{n^2-1}}{p+1} 57^{\circ}, 2986$	Angle de position $\Delta - 1440.$	L'observation a donné		
			$t = 16^{\circ}, 5.$	$t = 17^{\circ}, 5.$	$t = 57^{\circ}, 8.$
Raie B	1483.46.34''	43.46.34''	0' . . .	0'
Raie D	1488.21.40	48.21.40
Maximum	1489.31.41	49 31.41
Raie E	1492 19.52	52.19.52
Vert	1493.37. 1	53.37. 1	56.37	55.40	. . .
Raie F	1495.42.40	55.42.40
Bleu	2 bleus égaux des arcs 17 ^e et 7 ^e , dans la dir 55° 52'		
Raie H	1506.38.28	66.38.28

L'arc 17^e, avec ses 23 degrés d'ouverture entre les raies B et H, couvre les deux arcs 4^e et 7^e avec l'intervalle de 7 degrés qui les répare. Ce recouvrement ayant lieu pour 7^e par les couleurs les plus réfrangibles de 17^e. Quand la température s'élève, 7^e et 17^e se meuvent en sens contraire, et ce mouvement accroissant les angles de position

leurs carrés ajoutés donnent la valeur exacte

$$\sin x = \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{(p+1)^2-1}}.$$

Négligeons dans (3) la faible différence qui existe entre $\cos y$ et 1, elle donnera

$$\sin y = (p+1) \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{(p+1)^2-1}} - \sqrt{n^2-1} = \sqrt{n^2-1} \left[\frac{p+1 - \sqrt{(p+1)^2-1}}{\sqrt{(p+1)^2-1}} \right].$$

Substituons au numérateur, au radical, sa valeur approchée $p+1 - \frac{1}{2p+1}$, et au dénominateur cette autre valeur approchée $(p+1)$, il viendra

$$\sin y = \sqrt{n^2-1} \frac{1}{2(p+1)^2}.$$

Introduisons dans l'équation (1), au lieu des angles x et y , ces valeurs des sinus, les deux termes $2(p+1)y - 2x$ donneront

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{p+1} - 2 \frac{\sqrt{n^2-1}}{p+1} = - \frac{\sqrt{n^2-1}}{p+1}.$$

Mais, dans ces formules, x et y étant les grandeurs linéaires des arcs dans un cercle de rayon 1, pour avoir leurs valeurs en degrés il faut les multiplier par la valeur 57°,2986 de l'arc égal au rayon; on a donc enfin

$$\Delta = (p+1)(180 - 2L) - \frac{\sqrt{n^2-1}}{p+1} 57^{\circ}, 2986.$$

de 7^e, tandis qu'il diminue ceux de 17^e, amène une coïncidence de deux bleus que nous avons obtenue en étudiant l'arc 7^e, sans pouvoir d'abord l'interpréter.

Donnons également les tableaux relatifs aux deux arcs suivants. Nous avons dit à la page 90 comment nous parvenions à les isoler des arcs plus énergiques qui s'y trouvent mêlés.

18^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

	$\Delta = 19(180 - 2L)$ $-\frac{1}{19}\sqrt{n^2 - 1.87^{\circ}, 2988.}$	Angle de position théorique $1620^{\circ} - \Delta.$	L'observation a donné	
			$t = 16^{\circ}.$	$t = 44^{\circ}.$
Rouge extrême...	56.50'	62.46'
Raie B.....	1566.30	53.30
Raie D.....	1571.27	48.33
Jaune.....	48.14	55.18
Maximum.....	1572.52	47.8
Vert (milieu),...	1576.55	43.5
Vert.....	40.8	48.6
Bleu.....	35.51
Raie H.....	1590.39	29.21

On voit, à $t = 16^{\circ}$, deux jaunes verdâtres égaux, dus aux arcs 18^e et 19^e, dans la direction $41^{\circ} 53'$
 » $t = 44^{\circ}$, deux jaunes orangés égaux, » 18^e et 19^e, » $56^{\circ} 8'$

19^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

	$\Delta = 20(180 - 2L)$ $-\frac{1}{20}\sqrt{n^2 - 1.87^{\circ}, 2988.}$	Angle de position théorique $\Delta - 1620^{\circ}.$	L'observation a donné	
			$t = 16^{\circ}.$	$t = 42^{\circ}.$
Rouge extrême...	28.31'
Raie B.....	1649.13	29.13
Raie D.....	1654.27	34.27
Jaune.....	35.19	27.28
Maximum.....	1655.54	35.54
Vert (milieu),...	1660.11	40.11
Vert.....	44.7
Bleuâtre.....	50.27	43.17
Raie H.....	1674.40	54.40

On voit, à $t = 16^{\circ}$, deux verts jaunâtres égaux, dus aux arcs 19^e et 18^e, dans la direction $42^{\circ} 23'$

§ VIII. — *Études auxquelles s'appliquerait la méthode des arcs-en-ciel. — Arc-en-ciel blanc. — Indices de certains liquides.*

Quoique nous ayons consacré beaucoup de temps à ce travail, nous sommes loin cependant d'avoir épuisé le programme que nous nous étions tracé d'avance. La cause en est surtout dans l'absence d'un local spécial où nos appareils aient pu être installés d'une manière continue et dans l'obligation où nous nous trouvions par conséquent de les disposer dans la salle des cours, ce qui nous forçait de les démonter et de les remonter sans cesse. Notre plan comprenait une étude de l'arc-en-ciel blanc que notre ami Bravais, tout récemment et trop tôt ravi à la science, attribue à des gouttes creuses, et que nous devions dès lors pouvoir réaliser, soit avec une veine liquide creuse, soit plutôt avec une veine coulant autour d'un noyau cylindrique en métal poli. Il comprenait encore l'étude des arcs de divers liquides, et notamment de ceux que fournissent par fusion la stéarine, le phosphore, le soufre et peut-être l'iode. On sait que ce dernier corps fond très-bien sous une couche d'acide sulfurique. En supposant que la vapeur épaisse dont doit s'entourer sa veine ne rendit pas impossible l'observation de ses arcs, et que sa coloration dans un mince filet n'épurât pas les rayons au point de les rendre homogènes, il serait curieux de voir s'il offrira à l'état liquide la curieuse interversion d'indices que M. Le Roux a rencontrée dans sa vapeur. Nous avons enfin songé encore à voir les différences de position produites, à la même température, pour un même arc-en-ciel d'ordre élevé, par les divers mélanges d'alcool et d'eau. Mais, on le voit, il s'agit là d'une campagne expérimentale de très-longue haleine, portant sur des corps dont quelques-uns, comme le phosphore, sont d'un maniement dangereux, et qui tous réclament les commodités et les prévisions d'une installation spéciale.

Avec de tels corps, pour lesquels on connaît à peine l'indice en bloc, la marche suivie pour l'eau, laquelle repose sur la possession des indices d'un certain nombre de rayons bien définis, n'est plus possible. Après avoir observé les divers arcs et leur avoir donné, d'après leur vivacité

décroissante et leur développement angulaire croissant, leur numéro d'ordre, une première difficulté, provenant de ce que les premiers arcs viennent à manquer dès que l'indice surpasse un certain chiffre, qui est 2 pour le premier, 3 pour le second, serait de connaître le numéro réel du premier des arcs vus et classés, afin de savoir à laquelle des formules de Babinet il conviendra de s'adresser pour obtenir l'indice. Mais il serait prématuré de traiter ici les diverses questions que doit susciter une telle étude expérimentale avant le jour où elle aura été menée à bon terme.

Ce Mémoire a été présenté à l'Institut le 25 mai 1863 et renvoyé à l'examen de MM. Babinet et E. Becquerel, dont le Rapport favorable, lu le 6 juin 1864 (*) et accepté par cet illustre Corps, proposait l'insertion du Mémoire dans le *Recueil des Savants étrangers*. Au commencement de 1867, j'apprenais que le dépôt du Mémoire au Secrétariat n'avait pas été opéré, et qu'il me fallait procéder à sa restauration. C'est ce que je viens de faire, en m'aidant d'une copie, peu différente de la rédaction perdue, que j'avais conservée.

C'est ce même travail dont les principaux résultats ont été communiqués verbalement, le 11 avril 1863, à la réunion des Sociétés savantes.

Explication des figures de la Planche I.

FIG. 1. — Cette figure représente les deux secteurs et l'alidade, les secteurs occupant, par rapport au trait solaire, les positions dans lesquelles a eu lieu le relèvement des arcs 9 et 11.

FIG. 2. — Cette figure montre, en plan et en coupe, un des secteurs avec l'alidade, adaptés tous deux à un axe cylindrique creux autour duquel ils tournent indépendamment l'un de l'autre. Ce cylindre est fixé sur une plaque épaisse de zinc et assez élevé pour recevoir tour à tour les deux secteurs et l'alidade; sa base supérieure est percée d'une petite ouverture centrale dans laquelle est reçue et s'engage la veine, non pas directement, mais par l'intermédiaire d'un flacon coupé dont le col a reçu un tube de verre qui entre exactement dans l'ouverture. Un caoutchouc amène le liquide dans un vase placé en dessous de la plaque de zinc. Avec un liquide qui se figerait comme le phosphore, on fermerait le tube de verre et on donnerait au vase récepteur une grande largeur.

La coupe, qui donne les deux secteurs superposés sous l'alidade, montre au-dessus du vase récepteur le large tube d'où s'écoule le liquide. A sa partie inférieure lui sont succes-

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVIII, p. 1046.

sivement adaptés, d'abord un tube de verre, puis le petit tube de métal dont l'inclinaison, quand il y a lieu, s'obtient en pressant du doigt, dans un sens ou dans l'autre, sur le liège qui le joint au tube de verre. On n'a pas figuré le vase de Mariotte, qui fournit en quantité suffisante, le long des parois du tube large et sans secousses, le liquide au large tube.

Tandis que le plan montre installé sur l'alidade le limbe entier du goniomètre de Babinet armé d'un prisme et disposé pour l'observation des arcs surnuméraires, la coupe montre, surélevée sur un socle et parfaitement accessible à l'œil, la lunette qui suffit seule à l'observation des arcs-en-ciel. Quand on veut la diriger sur une section de la veine autre que celle qui est à son niveau, on profite des mouvements de tirage que possèdent les supports mobiles sur lesquels reposent les couronnes des secteurs. Enfin, pour montrer comment le secteur de dessous rachète sa différence de niveau et a sa division dans le même plan horizontal que celle du secteur supérieur, on l'a figuré dans la coupe. On voit que ce résultat s'obtient en faisant ses rayons de deux morceaux raccordés de manière à abaisser la partie centrale juste de l'épaisseur du bois qui forme ces rayons.

FIG. 3. — Dans cette rose, qui contient pour la température de 16 degrés les deux positions symétriques des pieds de chacun des 16 premiers arcs-en-ciel de l'eau, on a mis en place, dans chacun d'eux, les cinq rayons principaux constitués par les raies B, D, E, F, H, se bornant toutefois à mettre ces lettres indicatrices sur un seul d'entre eux, à savoir le 15° arc-en-ciel situé dans la moitié inférieure de la figure. Une flèche placée à l'extrémité H indique le sens dans lequel croissent les déviations et se développent les couleurs, sens dans lequel s'avancera l'arc-en-ciel quand, par refroidissement, l'eau deviendra plus réfrangible.

Les couleurs prises du rouge au violet se développent dans deux sens distincts. Les arcs-en-ciel où le sens est *dextrorsum* (sens du mouvement de l'aiguille d'une montre) sont donnés par des rayons qui attaquent le liquide dans la moitié du filet qui est en haut de la figure et en sortent du côté qui est à droite de l'observateur, supposé placé de manière à voir ces arcs. Pour les autres, où les couleurs se développent *sinistrorsum*, l'entrée a lieu dans la moitié de la goutte dirigée vers le bas de la figure, et la sortie par son flanc gauche.

Pour éviter toute confusion, on a distribué ces seize arcs sur deux couronnes concentriques voisines, à savoir les arcs 1, 2, 3, 7, 8, 10, 11, 12 et 15 sur l'extérieure, et les autres arcs 4, 5, 6, 9, 12, 13, 14 et 16 sur l'intérieure. Si seuls les deux arcs symétriques qui portent le n° 12 ne sont pas sur une même couronne, c'est parce que, se développant dans les mêmes régions, ils se seraient entremêlés.

Les arcs 17, 18 et 19, si étendus, quoique réduits dans la figure comme les autres, à la partie qui va de B à H, n'auraient pu, sans superpositions, s'intercaler entre les précédents. On a dû les reléguer sur d'autres couronnes intérieures aux deux premières, à savoir 17 et 18 sur une troisième couronne, et l'arc 19, qui occupe la même région angulaire que 18, sur une quatrième, en dedans des trois autres. Pour eux, l'on n'a figuré qu'une des deux positions symétriques et que quatre rayons principaux, qui sont les raies B, D, H et le rayon qui est au milieu du vert.

Si les arcs 3 et 4, qui sur la figure n'ont rien de commun, offrent cependant, à la température ordinaire, une coïncidence de couleurs, c'est, ne l'oublions pas, parce que cette figure est incomplète et ne donne pas les couleurs qui existent et qu'on aperçoit très-bien, soit avant la raie B, soit surtout, si l'arc est d'un numéro élevé, après les rayons de la raie H.