ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RIQUIER.

De l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 123-150
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__123_0>

DE

L'EXISTENCE DES INTÉGRALES

DANS UN

SYSTÈME DIFFÉRENTIEL QUELCONQUE

(SUITE),

PAR M. RIQUIER,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN [1].

Existence des intégrales ordinaires dans un système harmonique et passif.

14. Nous nommerons, pour abréger, *système franc*, tout système différentiel qui, avec le double caractère harmonique et passif, possède encore les deux suivants :

1° En désignant par x, y, ..., u, v, ... les variables indépendantes et les fonctions inconnues qu'implique le système, les seconds membres sont des polynômes entiers par rapport aux dérivées de u, v, ..., et les coefficients de ces polynômes des fonctions de x, y, ..., u, v, ... olotropes à l'intérieur d'un système de cercles;

2° Si, dans le second membre d'une équation quelconque du système, on considère un terme quelconque et qu'on y fasse abstraction du coefficient, la somme des ordres des facteurs ne surpasse pas l'ordre du premier membre correspondant [2].

15. *Un système franc* (14) *admet un groupe d'intégrales ordinaires* (2), *et un seul, répondant à des conditions initiales données* (8).

---

(1) *Voir* page 65.

(2) Dans la Note communiquée à l'Académie des Sciences le 28 mars 1892, j'avais employé, pour désigner le même objet, la dénomination de *système canonique*.

Tout revient, comme nous l'avons dit plus haut (8, III), à prouver la convergence des développements de ces intégrales.

I. Si les fonctions $f(x, y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$ sont toutes deux olotropes à l'intérieur de quelque système de cercles comprenant les valeurs particulières $x_0, y_0, \ldots$; si, de plus, les valeurs de $\varphi(x, y, \ldots)$ et de toutes ses dérivées en $x_0, y_0, \ldots$ sont réelles, positives et supérieures aux modules des valeurs correspondantes de $f(x, y, \ldots)$ et de ses dérivées semblables, la fonction φ sera dite *majorante* de f par rapport aux valeurs particulières considérées.

D'après cela, les points suivants sont évidents :

Relativement à des valeurs particulières données :

Si φ est une majorante de f, toute dérivée de φ est une majorante pour la dérivée semblable de f;

Une expression entière par rapport à plusieurs fonctions telles que f et à quelques-unes de leurs dérivées d'ordres quelconques, a pour majorante l'expression qu'on obtient en remplaçant dans la proposée tous les coefficients par leurs modules, et les fonctions f avec leurs dérivées par leurs majorantes et les dérivées semblables de celles-ci.

II. *Soient $f(x, y, \ldots)$ une fonction olotrope à l'intérieur d'un système de cercles de rayons R_x, R_y, $\ldots$; $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs particulières intérieures aux cercles dont il s'agit; r une première quantité positive inférieure aux différences $R_x - \operatorname{mod} x_0$, $R_y - \operatorname{mod} y_0$, $\ldots$; α une deuxième, positive ou nulle, quelconque d'ailleurs; M une troisième supérieure à tous les modules que peut acquérir la valeur de $f(x, y, \ldots)$ à l'intérieur et sur les circonférences des cercles de rayon r décrits respectivement de x_0, y_0, $\ldots$ comme centres; $\beta, \gamma, \ldots$ des constantes positives au moins égales à $\frac{1}{r}$; enfin m un entier positif.*

Cela étant, la fonction

$$\Psi(x, y, \ldots) = \frac{M + \alpha}{[1 - \beta(x - x_0) - \gamma(y - y_0) - \ldots]^m} - \alpha$$

est majorante pour $f(x, y, \ldots)$ relativement aux valeurs $x_0, y_0, \ldots$.

Tout d'abord, ces deux fonctions sont olotropes à l'intérieur de quelque système de cercles comprenant les points $x_0, y_0, \ldots$. Faisons suivre maintenant de l'indice zéro les notations des diverses fonctions à considérer et de leurs dérivées, pour désigner leurs valeurs particulières en x_0, y_0, ... Il vient immédiatement

$$\Psi_0 = \mathrm{M} > \operatorname{mod} f_0,$$

puis

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^{i+l+\dots}\Psi}{dx^i\,dy^l\dots}\right]_0 &= (\mathrm{M}+\alpha)\,\beta^i\gamma^l\dots\times m(m+1)\dots(m+i-1)\\ &\qquad\times(m+i)(m+i+1)\dots(m+i+l-1)\\ &\qquad\times\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\geqq \mathrm{M}\,\frac{1.2\dots i}{r^i}\,\frac{1.2\dots l}{r^l}\dots > \operatorname{mod}\left[\frac{d^{i+l+\dots}f}{dx^i\,dy^l\dots}\right]_0.\end{aligned}$$

III. *Si l'on désigne par u une fonction inconnue de la variable indépendante x, par $\mathrm{U}_1(x, u)$ une composante donnée, olotrope à l'intérieur d'un système de cercles, et par x_0, u_0 des valeurs intérieures aux cercles dont il s'agit, l'équation différentielle*

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{U}_1(x, u) \tag{8}$$

est identiquement vérifiée par la substitution à u d'une série entière en $x - x_0$ se réduisant à u_0 pour $x = x_0$ (¹).

L'équation (8) constituant à elle seule un système harmonique passif (13), tout revient, comme nous le faisions remarquer il y a un instant, à prouver la convergence du développement de l'intégrale hypothétique. Dans le présent alinéa, nous désignerons par R_x, R_u les rayons des cercles à l'intérieur desquels la fonction $\mathrm{U}_1(x, u)$ est supposée olotrope; par r une quantité positive inférieure aux différences

$$\mathrm{R}_x - \operatorname{mod} x_0, \quad \mathrm{R}_u - \operatorname{mod} u_0;$$

par M une deuxième supérieure à tous les modules que peut acquérir la fonction $\mathrm{U}_1(x, u)$ à l'intérieur et sur les circonférences des cercles

(¹) La démonstration de l'alinéa III est empruntée à un Mémoire de MM. Méray et Riquier, ayant pour titre : *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles totales* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1889, p. 372 et suivantes).

de rayon r décrits de x_0, u_0 comme centres; nous poserons enfin

$$x - x_0 + u - u_0 = Z,$$
$$\Omega_1(Z) = -1 + \frac{M+1}{1-\frac{Z}{r}},$$

d'où résulte (II) que $\Omega_1(Z)$ est majorante pour $U_1(x, u)$ relativement aux valeurs x_0, u_0.

Cela étant :

1° En désignant par k un entier > 1 et par $U_k(x, u)$ l'expression ultime de $\frac{d^k u}{dx^k}$, la fonction

$$(9) \qquad \Omega_k(Z) = 1.3.5\ldots(2k-3)\left(\frac{1}{r}\right)^{k-1} \frac{(M+1)^k}{\left(1-\frac{Z}{r}\right)^{2k-1}}$$

est majorante pour $U_k(x, u)$ relativement aux valeurs x_0, u_0.

Il résulte, en effet, des alinéas I et II, combinés avec la définition de Ω_1, que l'expression ultime

$$U_2 = \frac{dU_1}{dx} + \frac{dU_1}{du} U_1$$

a pour majorante

$$\frac{d\Omega_1}{dx} + \frac{d\Omega_1}{du}\Omega_1 = \frac{d\Omega_1}{dZ}(1+\Omega_1) = \frac{d\Omega_1}{dZ}\,\frac{M+1}{1-\frac{Z}{r}} = \frac{1}{r}\,\frac{(M+1)^2}{\left(1-\frac{Z}{r}\right)^3} = \Omega_2;$$

le point en question se trouve ainsi démontré pour Ω_2 et U_2. En le supposant vrai pour Ω_k et U_k, l'expression

$$\frac{dU_k}{dx} + \frac{dU_k}{du} U_1,$$

qui, à cause de la passivité du système (8), coïncide bien avec l'expression ultime U_{k+1} (12, VII), a de même pour majorante

$$\frac{d\Omega_k}{dx} + \frac{d\Omega_k}{du}\Omega_1 = \frac{d\Omega_k}{dZ}(1+\Omega_1) = \frac{d\Omega_k}{dZ}\,\frac{M+1}{1-\frac{Z}{r}} = \Omega_{k+1}.$$

2° En désignant par ξ le module de $x - x_0$ et par q un entier positif quelconque, le terme en $(x-x_0)^q$ dans le développement de l'intégrale hypothétique de (8) a un module inférieur à

$$r\left[\frac{2(M+1)\xi}{r}\right]^q. \tag{10}$$

Effectivement, le terme dont il s'agit est

$$U_q(x_0, u_0)\frac{(x-x_0)^q}{1.2\ldots q}. \tag{11}$$

Or, si $q=1$, on a, d'après la définition de M,

$$\operatorname{mod} U_1(x_0, u_0) < M,$$

et à plus forte raison

$$\operatorname{mod} U_1(x_0, u_0) < 2(M+1) = r\left[\frac{2(M+1)}{r}\right];$$

si q est >1, en faisant dans la fonction (9) $k=q$, $x=x_0$, $u=u_0$, on a, d'après 1°,

$$\begin{aligned}\operatorname{mod} U_q(x_0, u_0) &< 1.3.5\ldots(2q-3)\left(\frac{1}{r}\right)^{q-1}(M+1)^q\\ &< r.2.4.6\ldots 2q\left(\frac{1}{r}\right)^q(M+1)^q\\ &< r.1.2.3\ldots q\left[\frac{2(M+1)}{r}\right]^q.\end{aligned}$$

Donc, pour toute valeur positive et entière de q, le module du terme (11) est inférieur à la quantité (10).

3° Le développement de l'intégrale hypothétique a un rayon de convergence au moins égal à la quantité positive $\frac{r}{2(M+1)}$.

Effectivement, l'expression (10) est le terme général du développement de

$$r\left[1-\frac{2(M+1)\xi}{r}\right]^{-1}$$

en une série entière par rapport à ξ, qui converge tant que ξ reste inférieur à $\frac{r}{2(M+1)}$. A plus forte raison le développement de l'intégrale hypothétique est convergent, si le module de $x - x_0$ tombe au-dessous de cette dernière quantité.

IV. Si l'on considère divers groupes de fonctions, dépendant respectivement d'autant de groupes de variables, et divers produits dont chacun ait pour facteurs des dérivées provenant d'un même groupe de fonctions :

1° On nommera *taille* d'un semblable produit la somme des ordres des facteurs;

2° On dira que deux produits, provenant soit d'un même groupe de fonctions, soit de deux groupes distincts, sont *isomorphes*, si, quel que soit k, le nombre des dérivées d'ordre k est le même dans l'un et dans l'autre.

V. 1° *Si, désignant par* w *une fonction de la variable indépendante* t, *on exécute sur la fonction composée* $F(t, w)$, *à composante indéterminée*, $k(\geqq 1)$ *différentiations consécutives, puis, que l'on ordonne le résultat par rapport aux dérivées de* w, *l'algorithme final pourra s'obtenir comme il suit : assimilant pour un instant l'unité à un produit de taille nulle, on considérera les divers produits de tailles* $0, 1, 2, \ldots, k$ *formés avec les dérivées de* w, *on multipliera chacun d'eux par un coefficient convenablement choisi, égal à quelque somme de multiples entiers de dérivées partielles de la composante, et l'on ajoutera tous les résultats.*

Ce point est évident pour $k = 1$, et l'on vérifiera sans difficulté que, s'il est vrai pour une valeur quelconque de k, il l'est encore pour la suivante.

2° *Si l'on exécute sur l'expression*

$$\Phi(t, w) + \Psi(t, w)\frac{dw}{dt},$$

où Φ, Ψ *désignent deux composantes indéterminées*, $k - 1$ *différentiations consécutives, puis, que l'on ordonne le résultat par rapport aux dérivées de* w, *l'algorithme ainsi obtenu ne diffère du précédent que par les fonctions de* t, w *qui y jouent le rôle de coefficients. Ces dernières deviennent, dans le cas actuel, des sommes de termes dont chacun est le produit de quelque entier positif soit par la fonction* Φ, *soit par la fonction* Ψ, *soit par quelqu'une de leurs dérivées partielles. Dans le coefficient* *d'un produit de taille inférieure à k figure nécessairement quelque dérivée partielle de Φ (ou cette fonction elle-même, si $k = 1$); dans le coefficient d'un produit de taille k ne peuvent figurer que la fonction Ψ et ses dérivées partielles.*

VI. *Si l'on désigne par $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ les variables indépendantes et les fonctions inconnues d'un système franc $(\mathfrak{A})$ (14), et par x_0, $y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$ des valeurs particulières arbitrairement choisies à l'intérieur des cercles où les coefficients des seconds membres sont supposés olotropes, le système déduit de $(\mathfrak{A})$ en y remplaçant les coefficients dont il s'agit par certaines majorantes relatives à ces valeurs admet un groupe d'intégrales prenant en $x_0, y_0, \ldots$ les valeurs initiales respectives u_0, $v_0, \ldots$, tandis que leurs dérivées de tous ordres, tant principales que paramétriques, ont des valeurs initiales essentiellement positives.*

Soient

g le nombre des fonctions inconnues $u, v, \ldots$;
ε une quantité positive moindre que 1;
μ une quantité positive quelconque;
$\Theta(\tau)$ la fonction $\frac{1}{1-\tau}$.

Il résulte de l'alinéa III que, en désignant par w une fonction inconnue de la variable indépendante t, l'équation différentielle

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\mu\,\Theta(t + gw)}{1 - \varepsilon\,\Theta(t + gw)} \tag{12}$$

est identiquement vérifiée par la substitution à w d'une série entière en t dont la somme s'annule avec t [1]. D'ailleurs les valeurs initiales des dérivées de cette intégrale sont toutes positives. Effectivement, si l'on développe $\Theta(\tau)$ par la formule

$$1 + \tau + \tau^2 + \ldots,$$

[1] La fonction $\frac{\mu\,\Theta(\tau)}{1-\varepsilon\,\Theta(\tau)}$ a déjà été employée par MM. Méray et Riquier dans l'étude de certains systèmes du premier ordre (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1890, p. 47 et suiv.).

et que, après avoir remplacé τ par $t + gw$, on ordonne le résultat par rapport aux puissances de t et w, on voit immédiatement que les valeurs initiales de la fonction $\Theta(t + gw)$ et de ses dérivées de tous ordres sont essentiellement positives. Il en est de même de la fonction $\frac{1}{1 - \varepsilon\,\Theta(t + gw)}$, qu'on peut développer suivant la formule

$$1 + \varepsilon\Theta + \varepsilon^2\Theta^2 + \ldots,$$

par suite enfin du produit

$$\mu\,\Theta(t + gw)\frac{1}{1 - \varepsilon\,\Theta(t + gw)},$$

second membre de l'équation (12). Les valeurs initiales des dérivées de tous ordres de notre intégrale jouissent donc, elles aussi, de la propriété annoncée; car, en vertu des formules ultimes appliquées à leur calcul, elles se présentent sous forme d'expressions entières, à coefficients entiers et positifs, par rapport aux valeurs initiales du second membre et de ses dérivées partielles. Nous désignerons par $W(t)$ l'intégrale considérée de l'équation (12).

Considérons maintenant une relation quelconque ($\mathfrak{a}$) du système franc proposé; puis, écrivons l'équation (12) sous la forme

$$\frac{dw}{dt} = \mu\,\Theta(t + gw) + \varepsilon\,\Theta(t + gw)\frac{dw}{dt}, \tag{13}$$

et différentions cette dernière (13) autant de fois qu'il le faut pour obtenir une relation de même ordre que ($\mathfrak{a}$). Si, dans ces deux relations d'ordre égal, on suppose les seconds membres ordonnés par rapport aux dérivées qu'ils contiennent, et si, dans chaque terme de l'une et de l'autre, on fait abstraction pour un instant de la fonction qui y joue le rôle de coefficient, un terme pris à volonté dans le second membre de ($\mathfrak{a}$) a pour isomorphe un terme convenablement choisi dans le second membre de la relation que nous avons déduite de (13) (IV) (V). Dans le second membre de cette dernière, partageons alors les termes en deux groupes, suivant que chacun d'eux est ou non isomorphe de quelque terme figurant dans le second membre de ($\mathfrak{a}$). Remplaçons enfin dans les termes du second groupe toutes les dérivées par leurs expressions ultimes déduites de (12), sans toucher ni au premier membre, ni aux termes du premier groupe. La nouvelle relation ainsi obtenue, que nous désignerons par ($\mathfrak{b}$), est identiquement vérifiée, comme (12) et (13), par la substitution à w de la fonction $W(t)$.

Cela posé, faisons correspondre aux variables indépendantes et aux fonctions inconnues

$$x, \quad y, \quad \ldots, \quad u, \quad v, \ldots$$

du système harmonique autant de constantes positives

$$\alpha', \quad \alpha'', \quad \ldots, \quad \beta', \quad \beta'', \quad \ldots,$$

que nous nommerons, pour abréger, leurs *poids* respectifs, et appelons *poids* d'un produit de dérivées, par exemple de

$$\frac{d^{i+l+\cdots} u}{dx^i\, dy^l \ldots}\, \frac{d^{m+q+\cdots} v}{dx^m\, dy^q \ldots} \cdots,$$

la quantité

$$\frac{\beta'}{\alpha'^i \alpha''^l \ldots}\, \frac{\beta''}{\alpha'^m \alpha''^q \ldots} \cdots,$$

dont la loi de formation est évidente. Puis, considérant l'un quelconque des produits de dérivées qui figurent dans le second membre de ($\mathfrak{b}$), désignons par n le nombre des produits isomorphes figurant dans le second membre de ($\mathfrak{a}$), et par Σ la somme des résultats obtenus en multipliant chacun de ces derniers par son poids. Dans le second membre de ($\mathfrak{b}$), remplaçons alors la variable t par

$$\alpha'(x - x_0) + \alpha''(y - y_0) + \ldots,$$

la fonction w par

$$\frac{1}{g}\left[\beta'(u - u_0) + \beta''(v - v_0) + \ldots\right],$$

et chaque produit formé avec des dérivées de w par celle des quantités

$\dfrac{\Sigma}{n}$ qui lui correspond; substituons enfin au premier membre de la même relation ($\mathfrak{b}$) celui de la relation ($\mathfrak{a}$) multiplié par son poids. Il est facile de voir que la relation résultante sera identiquement vérifiée en $x, y, \ldots$, quand on fera

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} u = u_0 + \dfrac{1}{\beta'}\,\mathrm{W}[\alpha'(x-x_0)+\alpha''(y-y_0)+\ldots], \\ v = v_0 + \dfrac{1}{\beta''}\,\mathrm{W}[\alpha'(x-x_0)+\alpha''(y-y_0)+\ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

D'ailleurs, en y réduisant à l'unité le coefficient de la dérivée qui figure dans le premier membre, la relation finalement obtenue (($\mathfrak{a}$)) ne différera de la relation ($\mathfrak{a}$) que par les coefficients du second membre.

Comme à chaque relation ($\mathfrak{a}$) du système proposé ($\mathfrak{A}$) on peut faire correspondre une relation telle que (($\mathfrak{a}$)), on tombera sur un système (($\mathfrak{A}$)), différant de ($\mathfrak{A}$) par les seuls coefficients des seconds membres, et identiquement vérifié par la substitution à $u, v, \ldots$ des seconds membres de (14), c'est-à-dire de fonctions qui prennent en $x_0, y_0, \ldots$ les valeurs initiales $u_0, v_0, \ldots$, tandis que leurs dérivées de tous ordres ont des valeurs initiales essentiellement positives.

Je dis maintenant que, *la constante positive* ε *ayant été choisie sous la seule condition d'être inférieure à* 1, *on peut disposer des constantes*

$$(15)\qquad \mu,\quad \alpha',\quad \alpha'',\quad \ldots,\quad \beta',\quad \beta'',\ \ldots,$$

de manière que chaque coefficient du système ($\mathfrak{A}$) *ait pour majorante le coefficient correspondant de* (($\mathfrak{A}$)), *relativement aux valeurs* $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0 \ldots$.

Nous ferons tout d'abord quelques remarques sur la composition des coefficients de (($\mathfrak{A}$)), en considérant, pour fixer les idées, ceux du second membre de la relation (($\mathfrak{a}$)). Chacun d'eux est une somme de fonctions de $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ qui toutes ont des valeurs initiales positives, ainsi que leurs dérivées partielles de tous ordres. Pour le terme ne contenant aucune dérivée de $u, v, \ldots$, si l'on désigne par ϖ le poids du premier membre de (($\mathfrak{a}$)), quelqu'une des fonctions dont il s'agit s'obtient (abstraction faite de quelque facteur entier et positif) en multipliant par $\frac{\mu}{\varpi}$ quelque puissance entière et positive de

$$(16)\quad \Theta[\alpha'(x-x_0)+\alpha''(y-y_0)+\ldots+\beta'(u-u_0)+\beta''(v-v_0)+\ldots].$$

Pour tout autre terme du second membre de (($\mathfrak{a}$)), si l'on désigne par ψ le poids du produit qu'il contient, et par n le nombre des produits isomorphes figurant dans le même second membre, quelqu'une de ces fonctions s'obtient (toujours abstraction faite de quelque facteur entier et positif) en multipliant quelque puissance entière et positive de l'expression (16) soit par $\frac{\mu}{n}\frac{\psi}{\varpi}$, soit par $\frac{\varepsilon}{n}\frac{\psi}{\varpi}$, suivant que le terme considéré contient un produit de taille inférieure ou égale à l'ordre du premier membre (V).

Ainsi, les termes figurant dans l'ensemble des seconds membres de (($\mathfrak{A}$)) sont de trois sortes : 1° les termes indépendants des dérivées des fonctions inconnues; 2° les termes contenant des produits de taille inférieure à l'ordre du premier membre correspondant; 3° les termes contenant des produits de taille égale à l'ordre dont il s'agit. Nous les nommerons respectivement termes *de première, de seconde, de troisième espèce*. Dans chacun d'eux figure, d'après les explications données ci-dessus, une constante positive affectant, suivant le cas, l'une ou l'autre des trois formes

$$\frac{\mu}{\varpi},\quad \frac{\mu}{n}\frac{\psi}{\varpi},\quad \frac{\varepsilon}{n}\frac{\psi}{\varpi},$$

et que nous dirons être elle-même *de première, de seconde* ou *de troisième espèce*.

Désignons maintenant par R_x, R_y, ..., R_u, R_v, ... les rayons des cercles à l'intérieur desquels les coefficients des seconds membres de ($\mathfrak{A}$) sont supposés olotropes; par r une quantité positive inférieure à toutes les différences

$$\begin{array}{lll} R_x-\operatorname{mod}x_0, & R_y-\operatorname{mod}y_0, & \ldots, \\ R_u-\operatorname{mod}u_0, & R_v-\operatorname{mod}v_0, & \ldots; \end{array}$$

par M une limite supérieure des modules qu'acquièrent les mêmes coefficients à l'intérieur et sur les circonférences des cercles de rayon r décrits de $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$ comme centres; enfin par P la plus grande des quantités M, $\frac{1}{r}$. Il suffit évidemment (II) de faire voir que l'on peut disposer des constantes (15) de manière à rendre supérieures à P les quantités

$$\alpha', \quad \alpha'', \quad \ldots, \quad \beta', \quad \beta'', \quad \ldots,$$

ainsi que les diverses constantes positives de première, seconde et troisième espèce.

A cet effet, nous désignerons par

$$\alpha, \quad \beta, \quad \theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \quad \theta_p$$

$p+2$ constantes positives provisoirement indéterminées, et nous prendrons : 1° pour chacune des quantités $\alpha', \alpha'', \ldots$ le produit de α par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la variable correspondante; 2° pour chacune des quantités $\beta', \beta'', \ldots$ le quotient de β par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue correspondante. Alors le poids d'une dérivée d'ordre s a pour valeur le quotient de $\frac{\beta}{\alpha^s}$ par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la dérivée considérée. Soient, en outre,

N un entier supérieur à tous ceux que nous avons désignés d'une manière générale par n;

$h_1, h_2, \ldots, h_p$ les plus petites valeurs que puissent respectivement atteindre les cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ des diverses variables indépendantes;

$G_1, G_2, \ldots, G_p$ les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre celles des diverses fonctions inconnues;

$j_1, j_2, \ldots, j_p$ les plus petites valeurs, et $J_1, J_2, \ldots, J_p$ les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre celles des diverses dérivées figurant dans l'ensemble des équations $((\mathfrak{A}))$.

Parmi les termes de troisième espèce figurant dans l'ensemble des seconds membres, nous distinguerons spécialement ceux qui sont linéaires par rapport aux dérivées des fonctions inconnues, et nous démontrerons tout d'abord qu'on peut disposer de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$, de manière que les constantes de troisième espèce qui y figurent soient toutes supérieures à P, quels que soient α et β. Il suffit, pour réaliser cette condition, de prendre successivement

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \theta_p > 1, \\ \theta_p > \dfrac{\mathrm{PN}}{\varepsilon}; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \theta_{p-1} > 1, \\ \theta_{p-1} > \dfrac{\mathrm{PN}}{\varepsilon}\,\theta_p^{\mathrm{J}_p - i_p}; \end{array}\right. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left\{\begin{array}{l} \theta_2 > 1, \\ \theta_2 > \dfrac{\mathrm{PN}}{\varepsilon}\,\theta_3^{\mathrm{J}_3 - i_3}\ldots\theta_p^{\mathrm{J}_p - i_p}; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \theta_1 > 1, \\ \theta_1 > \dfrac{\mathrm{PN}}{\varepsilon}\,\theta_2^{\mathrm{J}_2 - i_2}\,\theta_3^{\mathrm{J}_3 - i_3}\ldots\theta_p^{\mathrm{J}_p - i_p}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

En effet, si l'on considère une relation quelconque du système $((\mathfrak{A}))$, et que l'on désigne par k l'ordre de son premier membre, les termes linéaires de troisième espèce qui peuvent figurer dans son second membre sont nécessairement aussi d'ordre k, et la dérivée que contient chacun d'entre eux a, par hypothèse : soit une cote première inférieure à celle du premier membre; soit une cote première égale à celle du premier membre avec une cote seconde inférieure; ...; soit des cotes première, seconde, ..., $(p-2)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $(p-1)^{\text{ième}}$ inférieure; soit enfin des cotes première, seconde, ..., $(p-1)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre avec une cote $p^{\text{ième}}$ inférieure. Comme on a pris $\theta_1 > 1$, $\theta_2 > 1$, ..., $\theta_p > 1$, les constantes de troisième espèce figurant dans les coefficients des termes considérés ont donc, suivant le cas, une valeur au moins égale à l'une ou à l'autre des quantités

$$\frac{\varepsilon}{N}\theta_p^{i_p-J_p}\dots\theta_3^{i_3-J_3}\,\theta_2^{i_2-J_2}\,\theta_1,$$

$$\frac{\varepsilon}{N}\theta_p^{i_p-J_p}\dots\theta_3^{i_3-J_3}\,\theta_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\varepsilon}{N}\theta_p^{i_p-J_p}\,\theta_{p-1},$$

$$\frac{\varepsilon}{N}\theta_p;$$

elles sont donc toutes supérieures à P, en vertu des inégalités (17).

Après avoir ainsi fixé $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$, je dis que l'on peut disposer de β de manière à rendre supérieures à P, quel que soit α, les diverses constantes de troisième espèce qui restent à considérer, et, en même temps, les quantités $\beta', \beta'', \dots$. Effectivement, abstraction faite d'un facteur de la forme $\frac{\varepsilon}{n}$, chacune des constantes de troisième espèce qui restent à considérer s'obtient en multipliant quelque puissance de β, d'exposant supérieur à zéro, par quelque quantité positive dépendant uniquement de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$. Si donc on désigne par Q la plus petite valeur que cette dernière atteigne dans les constantes en question, il suffira, pour réaliser la double condition que nous avons en vue, d'assujettir β aux trois inégalités

$$\beta > 1,$$

$$\beta > \frac{PN}{\varepsilon Q},$$

$$\beta > P\,\theta_1^{G_1}\,\theta_2^{G_2}\dots\theta_p^{G_p}.$$

Prenons enfin

$$\alpha > \frac{P}{\theta_1^{h_1}\,\theta_2^{h_2}\dots\theta_p^{h_p}},$$

moyennant quoi les constantes $\alpha', \alpha'', \dots$ seront elles-mêmes supérieures à P. Les diverses quantités $\alpha', \alpha'', \dots, \beta', \beta'', \dots$ se trouvant alors fixées, chacune des constantes de première et de seconde espèce est le produit par μ de quelque quantité positive connue. En désignant par L la plus petite valeur qu'atteigne cette dernière dans les constantes en question, il suffira, pour les rendre supérieures à P, de prendre $\mu > \frac{P}{L}$.

VII. *Dans un système franc* ($\mathfrak{A}$), *les développements des intégrales hypothétiques sont convergents, toutes les fois que les déterminations initiales de ces dernières sont identiquement nulles.* (On suppose, bien entendu, les valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots, u_0 = 0, v_0 = 0, \ldots$ des variables indépendantes $x, y, \ldots$ et des fonctions inconnues $u, v, \ldots$, toutes intérieures aux cercles où les coefficients des seconds membres sont supposés olotropes.)

Pour le système ($\mathfrak{A}$), en effet, les expressions ultimes des dérivées principales sont des polynômes entiers (à coefficients entiers et positifs) par rapport aux coefficients des seconds membres, à leurs dérivées partielles et aux dérivées paramétriques des fonctions inconnues; et pour le système majorant (($\mathfrak{A}$)), dont la formation est expliquée ci-dessus (VI), les expressions ultimes des mêmes dérivées sont composées exactement de la même façon avec les majorantes des coefficients de ($\mathfrak{A}$), leurs dérivées partielles, et les dérivées paramétriques des fonctions inconnues. Dès lors, puisque les valeurs initiales des dérivées paramétriques sont toutes nulles dans les intégrales hypothétiques de ($\mathfrak{A}$), et qu'elles sont, au contraire, toutes positives dans les intégrales effectives de (($\mathfrak{A}$)) dont l'existence vient d'être constatée (VI), les valeurs initiales positives fournies pour les dérivées principales de ces dernières seront évidemment supérieures aux modules des valeurs initiales fournies pour les dérivées semblables des premières. Les développements des intégrales effectives du système (($\mathfrak{A}$)) étant de toute nécessité convergents, ceux des intégrales hypothétiques de ($\mathfrak{A}$) ne peuvent manquer de l'être aussi.

VIII. *Dans un système franc* ($\mathfrak{A}$), *les développements des intégrales hypothétiques sont convergents, quelles que soient les déterminations initiales.* (On suppose toujours les valeurs initiales des variables indépendantes $x, y, \ldots$ et des fonctions inconnues $u, v, \ldots$ intérieures aux cercles où les coefficients des seconds membres sont supposés olotropes.)

Désignons par $x_0, y_0, \ldots$ les valeurs initiales de $x, y, \ldots$, par υ,

φ, ... les déterminations initiales de u, v, ..., et observons que, parmi les dérivées de υ, φ, ..., celles qui sont respectivement semblables aux dérivées principales de u, v, ... ont toutes zéro pour valeur initiale, mais que les valeurs initiales de υ, φ, ... et de leurs dérivées restantes sont précisément égales aux valeurs initiales données pour u, v, ... et leurs dérivées paramétriques semblables.

Désignons maintenant par u', v', ... de nouvelles fonctions inconnues, puis considérons le système différentiel déduit du proposé ($\mathfrak{A}$) en y remplaçant u, v, ... et les diverses dérivées de u, v, ... qui y figurent par $\upsilon + u'$, $\varphi + v'$, ... et les dérivées semblables de ces sommes. Ce système, qui se met immédiatement sous forme harmonique, est en outre passif, car ses relations ultimes se déduisent de celles du proposé à l'aide de la même substitution. Il remplit d'ailleurs toutes les autres conditions exigées par la définition des systèmes francs (14), et, en vertu du théorème des fonctions composées ([1]), les fonctions de $x, y, \ldots, u', v', \ldots$, qui jouent le rôle des coefficients dans les seconds membres, sont certainement olotropes dans quelque système de cercles comprenant les valeurs $x_0, y_0, \ldots, 0, 0, \ldots$.

Cela posé, les valeurs initiales fournies par les relations ultimes de ($\mathfrak{A}$) pour les dérivées principales de u, v, ..., quand on prend comme déterminations initiales υ, φ, ..., coïncident respectivement avec les valeurs initiales fournies par les relations ultimes du second système pour les dérivées semblables de u', v', ..., quand on prend des déterminations initiales identiquement nulles. Or, d'après VII, les développements construits dans le second cas sont convergents; ils le sont donc aussi dans le premier.

16. *Un système harmonique et passif quelconque admet un groupe d'intégrales ordinaires* (2), *et un seul, répondant à des conditions initiales données* (8).

Tout revient, comme au numéro précédent, à prouver la convergence des développements de ces intégrales.

([1]) *Voir* mon Mémoire *Sur les principes de la Théorie générale des fonctions* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1891, p. 85).

I. *Dans un système harmonique d'ordre* K, *impliquant les fonctions inconnues* $u, v, \ldots$ *des variables indépendantes* $x, y, \ldots,$ *le second membre de toute relation ultime d'ordre supérieur à* K *est un polynôme entier par rapport aux dérivées paramétriques d'ordres supérieurs à* K, *et les coefficients de ce polynôme des fonctions* (*olotropes dans un système de cercles*) *de* $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ *et des dérivées paramétriques d'ordres* $1, 2, \ldots, K$; *de plus, si dans chaque terme du polynôme on fait abstraction du coefficient, la somme des excès sur* K *des ordres de ses facteurs est au plus égale à l'excès sur* K *de l'ordre du premier membre.*

Il est bien facile de se convaincre que l'énoncé précédent, en y supprimant le mot *paramétriques* partout où il se trouve, s'applique à toute relation primitive d'ordre supérieur à K. On en déduit aisément son exactitude pour les relations ultimes.

II. *De tout système harmonique et passif on peut, par le mécanisme décrit ci-après, déduire un système d'ordre égal jouissant d'importantes propriétés que nous établirons plus loin* (III) (IV).

A. Désignant par K l'ordre maximum des dérivées qui figurent dans les équations données, adjoignons à $u, v, \ldots$ de nouvelles fonctions inconnues en nombre égal à celui des dérivées paramétriques des ordres $1, 2, \ldots, K$, et écrivons que celles-ci sont respectivement égales aux nouvelles fonctions inconnues : nous obtiendrons ainsi un PREMIER GROUPE $\mathfrak{G}_1$, D'ORDRE $\leq$ K,

$$D.u = \mathfrak{u},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

B. Remplaçant, dans les équations du système donné, les dérivées paramétriques des ordres $1, 2, \ldots, K$ par leurs valeurs tirées des précédentes $\mathfrak{G}_1$, nous obtiendrons un SECOND GROUPE $\mathfrak{G}_2$, D'ORDRE K.

C. Comme nous l'avons expliqué au n° **1**, chacune des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ et des fonctions inconnues $u, v, \ldots$ du système harmonique donné, par suite aussi chacune des dérivées de ces dernières, se trouve affectée de p cotes. Cela étant, *nous attribuerons à chacune des nouvelles fonctions inconnues* $\mathfrak{u}, \ldots$ (**A**) *des cotes première, seconde, ...,* $p^{ième}$ *respectivement égales à celles de la dérivée paramé-*

trique correspondante; nous affecterons en outre les anciennes fonctions inconnues $u, v, \ldots$ *de cotes* $(p+1)^{\text{ièmes}}$ *quelconques, les nouvelles* $\mathfrak{u}, \ldots$ *de cotes* $(p+1)^{\text{ièmes}}$ *toutes égales entre elles, et les variables indépendantes* $x, y, z, \ldots$ *de cotes* $(p+1)^{\text{ièmes}}$ $c_x, c_y, c_z, \ldots$ *choisies de telle façon que, pour chacune des anciennes fonctions inconnues* $u, v, \ldots$, *et dans chacun des ordres* $1, 2, \ldots, K$, *les anciennes dérivées paramétriques aient des cotes* $(p+1)^{\text{ièmes}}$ *toutes distinctes entre elles.* Il suffit, pour réaliser cette dernière condition, d'attribuer à $c_x, c_y, c_z, \ldots$ des valeurs entières et positives satisfaisant aux relations

$$c_x > K c_y, \qquad c_y > K c_z, \qquad \ldots.$$

Soient, en effet,

$$\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots} u}{dx^\alpha\, dy^\beta\, dz^\gamma \ldots}, \qquad \frac{d^{\alpha'+\beta'+\gamma'+\ldots} u}{dx^{\alpha'}\, dy^{\beta'}\, dz^{\gamma'} \ldots}$$

deux dérivées paramétriques appartenant à une même fonction inconnue u et à un même ordre $\leqq K$. La différence de leurs cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ est, visiblement,

$$(18) \qquad (\alpha-\alpha')c_x + (\beta-\beta')c_y + (\gamma-\gamma')c_z + \ldots.$$

Or les quantités $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$, $\ldots$ ne sont pas toutes nulles, et l'on peut toujours supposer que la première qui ne s'annule pas est positive. Si l'on a $\alpha-\alpha' > 0$, la quantité (18) est au moins égale à

$$c_x - (\beta' c_y + \gamma' c_z + \ldots),$$

à plus forte raison à

$$c_x - (\beta' + \gamma' + \ldots) c_y,$$

différence nécessairement positive, puisque son terme additif est supérieur à Kc_y, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité. Si l'on a $\alpha-\alpha' = 0$, $\beta-\beta' > 0$, la quantité (18) est au moins égale à

$$c_y - (\gamma' c_z + \ldots),$$

à plus forte raison à

$$c_y - (\gamma' + \ldots) c_z,$$

différence encore positive, puisque son terme additif est supérieur à Kc_z, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité. Et ainsi de suite.

D. Désignons actuellement par k un entier positif $\leqq \mathrm{K}$, par q un entier positif quelconque, et considérons, relativement au système donné, une dérivée paramétrique d'ordre $k+q$ que l'on puisse, de diverses manières, regarder comme résultant d'une différentiation d'ordre q exécutée sur telles ou telles des dérivées paramétriques de l'ordre k, et par suite sur telles ou telles des nouvelles fonctions inconnues qui correspondent à celles-ci. Il est clair (**C**) que les diverses dérivées d'ordre q (des nouvelles fonctions inconnues) qui correspondent ainsi à une même dérivée paramétrique d'ordre $k+q$ du système donné ont des cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ respectivement égales aux cotes homologues de cette dernière. Je dis de plus que *leurs cotes* $(p+1)^{\text{ièmes}}$ *sont nécessairement distinctes entre elles.*

Soient, en effet,

$$\frac{d^{k+q}u}{dx^i\,dy^j\,dz^l\ldots}$$

une dérivée paramétrique d'ordre $k+q$,

$$(19)\qquad \frac{d^k u}{dx^{i'}\,dy^{j'}\,dz^{l'}\ldots},\quad \frac{d^k u}{dx^{i''}\,dy^{j''}\,dz^{l''}\ldots}$$

deux des dérivées paramétriques d'ordre k dont elle peut être considérée comme une dérivée $q^{\text{ième}}$, et

$$(20)\qquad \mathrm{u}_{i',j',l',\ldots},\quad \mathrm{u}_{i'',j'',l'',\ldots}$$

les nouvelles fonctions inconnues qui correspondent respectivement à celles-ci. Si l'on observe que les fonctions (20) ont la même cote $(p+1)^{\text{ième}}$ (**C**), et si l'on calcule la différence entre les cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ des deux dérivées

$$\frac{d^q\mathrm{u}_{i',j',l',\ldots}}{dx^{i-i'}\,dy^{j-j'}\,dz^{l-l'}\ldots},\quad \frac{d^q\mathrm{u}_{i'',j'',l'',\ldots}}{dx^{i-i''}\,dy^{j-j''}\,dz^{l-l''}\ldots},$$

on trouve, comme s'il s'agissait de (19),

$$(i'-i'')c_x+(j'-j'')c_y+(l'-l'')c_z+\ldots,$$

c'est-à-dire une quantité essentiellement différente de zéro (**C**).

E. Désignons par Δ une dérivée des anciennes fonctions inconnues $u, v, \ldots$, jouissant de la double propriété d'être paramétrique par rapport au système donné, et cardinale (11) par rapport au système des équations $\mathfrak{G}_1$; puis considérons, dans le groupe formé par les nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}, \ldots$ et leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, K$ les divers termes que le changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $D.u, \ldots$ rend identiques à Δ; partageons enfin les termes dont il s'agit en groupes successifs d'après les valeurs décroissantes de leurs ordres ($\geqq 0$), et rangeons les dérivées de chaque groupe d'après les valeurs décroissantes de leurs cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$, nécessairement distinctes (**D**): la suite totale ainsi obtenue comprend nécessairement plus d'un terme et nous égalerons le dernier d'entre eux à chacun des précédents, en ayant soin qu'ils figurent toujours, ceux-ci dans les premiers membres, celui-là dans les seconds membres des équations résultantes.

En variant de toutes les manières possibles le choix de la dérivée Δ, et répétant chaque fois l'opération précédente, nous tomberons sur un TROISIÈME GROUPE $\mathfrak{G}_3$, D'ORDRE $\leqq$ K.

F. Enfin, prenons à volonté deux équations, l'une dans le groupe $\mathfrak{G}_1$, l'autre dans le groupe $\mathfrak{G}_2$, sous la seule condition que leurs premiers membres soient les dérivées d'une même fonction inconnue. Si $D.u = \mathfrak{u}$ est l'équation extraite de $\mathfrak{G}_1$, et $\mathfrak{D}.D.u$ la résultante d'ordre minimum des deux premiers membres, la dérivation exprimée par le symbole $\mathfrak{D}$. est d'ordre nécessairement supérieur à zéro et au plus égal à K. Cela étant, on considérera la relation ultime du système donné qui a pour premier membre $\mathfrak{D}.D.u$, et l'on y remplacera celui-ci par $\mathfrak{D}.\mathfrak{u}$; quant aux dérivées paramétriques qui peuvent figurer dans le second membre, on les remplacera, si elles sont d'ordres $1, 2, \ldots, K$, par les nouvelles fonctions inconnues correspondantes, et si elles sont d'ordres $K+1, K+2, \ldots$, par des dérivées d'ordres $1, 2, \ldots$ appartenant à celles des nouvelles fonctions inconnues qui correspondent aux dérivées paramétriques de l'ordre K; on aura soin seulement, toutes les fois qu'une substitution de cette dernière sorte sera possible de plusieurs manières, de choisir, parmi les diverses dérivées à substituer, celle dont la cote $(p+1)^{\text{ième}}$ est la plus faible (**D**).

En variant de toutes les manières possibles, sous la seule condition que leurs premiers membres appartiennent à une même fonction inconnue, le choix des deux équations respectivement prises dans les groupes $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, et répétant chaque fois l'opération précédente, on obtiendra un QUATRIÈME ET DERNIER GROUPE $\mathfrak{G}_4$, D'ORDRE $\leqq$ K.

G. Le système d'ordre K

$$[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4], \tag{21}$$

formé par la réunion des quatre groupes précédents, est celui que nous avons annoncé au début du présent alinéa II. Il nous faudra souvent, dans ce qui suit, comparer le système donné au système (21) : nous les appellerons respectivement, pour abréger, l'*ancien* et le *nouveau système*.

III. *Le nouveau système* (21) *est un système franc* (14).

A. *Chacune des équations du nouveau système, considérée isolément, est harmonique* (12, III), *et possède, relativement aux variables indépendantes, aux fonctions inconnues que ce système implique et à leurs dérivées, les caractères que nous avons désignés par* 1° *et* 2° *dans la définition du n°* 14.

Ce point est évident pour les équations $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$. Quant aux équations $\mathfrak{G}_4$, il résulte de leur mode de formation, combiné avec l'alinéa I, que le second membre de chacune d'elles est un polynôme entier par rapport aux dérivées des nouvelles fonctions inconnues qui correspondent aux anciennes dérivées paramétriques de l'ordre K, et que les coefficients de ce polynôme sont des fonctions (olotropes dans un système de cercles) des variables $x, y, \ldots$ et de toutes les fonctions inconnues, anciennes et nouvelles. — Si l'équation considérée a été déduite d'une relation ultime d'ordre inférieur ou égal à K, elle ne contient dans son second membre aucune dérivée. — Si, au contraire, elle a été déduite d'une relation ultime d'ordre supérieur à K, il résulte de I que dans chaque terme de cette dernière, abstraction faite du coefficient, la somme des excès sur K des ordres des facteurs est au plus égale à l'excès sur K de l'ordre du premier membre, et, à plus forte raison, à l'excès de cet ordre sur celui d'une équation $\mathfrak{G}_1$ quelle qu'elle soit : donc, si d'un terme quelconque figurant dans le second membre de l'équation considérée du groupe $\mathfrak{G}_4$, on supprime par la pensée le coefficient, la somme des ordres des facteurs est au plus égale à l'ordre du premier membre. Lorsque la nouvelle fonction inconnue dont quelque dérivée figure dans le premier membre de cette équation correspond à une ancienne dérivée paramétrique d'ordre inférieur à K, le second membre est d'ordre nécessairement inférieur au premier membre. Lorsque la fonction inconnue dont il s'agit correspond, au contraire, à une ancienne dérivée paramétrique d'ordre K, le second membre peut contenir quelque dérivée d'ordre égal au premier membre; mais, en pareil cas, comme la substitution aux nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}$, ... et à leurs dérivées, des quantités $D.u$, ... et de leurs dérivées semblables, transforme l'équation considérée en une relation ultime, nécessairement harmonique (12, III, IV), de l'ancien système, il résulte du choix que nous avons fait pour les cotes des nouvelles fonctions inconnues (II, **C**) que les dérivées d'ordre égal au premier membre, qui figurent dans le second, remplissent, relativement à leurs cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$, la condition indiquée au n° 1.

B. *Aucun des premiers membres du système* (21) *ni aucune de leurs dérivées ne figurent dans le second membre d'une équation quelconque de ce système.*

Effectivement :

1° Les équations $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ ont pour premiers membres diverses dérivées des anciennes fonctions inconnues, et ne contiennent dans leurs seconds membres aucune dérivée quelle qu'elle soit.

2° Aucune dérivée des anciennes fonctions inconnues ne figure ni dans $\mathfrak{G}_3$, ni dans $\mathfrak{G}_4$.

3° Les premiers membres de $\mathfrak{G}_4$ ou leurs dérivées ne peuvent figurer dans les seconds membres ni de $\mathfrak{G}_3$ ni de $\mathfrak{G}_4$: car le changement de $\mathfrak{u}$, ... en $D.u$, ... transforme les équations $\mathfrak{G}_3$ en autant de relations identiques dont chacune a pour premier et pour second membre une même dérivée paramétrique de l'ancien système; il transforme les équations $\mathfrak{G}_4$ en relations ultimes (de l'ancien système) ne contenant dans leurs seconds membres que des dérivées paramétriques, et enfin les premiers membres de $\mathfrak{G}_4$, ainsi que leurs dérivées, en autant de dérivées principales.

4° Les premiers membres de $\mathfrak{G}_3$, non plus que leurs dérivées, ne peuvent figurer dans les seconds membres de $\mathfrak{G}_3$. Effectivement, si l'on prend à volonté l'une des équations $\mathfrak{G}_3$, et si l'on considère, dans le groupe formé par les nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}$, ... et leurs dérivées de tous ordres, les divers termes que le changement de $\mathfrak{u}$, ... en $\mathrm{D}.u$, ... transforme, avec le second membre de cette équation, en une même dérivée de l'ancien système, le second membre dont il s'agit, comparé aux autres termes, appartient certainement à l'ordre minimum, en même temps qu'il possède, dans cet ordre, la cote $(p+1)^{\text{ième}}$ la plus faible (II, **E**). D'un autre côté, dans chacune des équations $\mathfrak{G}_3$ ou de celles qu'on en déduit par différentiations, le premier membre est toujours, soit d'ordre supérieur au second membre, soit d'ordre égal avec une cote $(p+1)^{\text{ième}}$ supérieure; il ne peut donc coïncider avec le second membre d'aucune des équations $\mathfrak{G}_3$.

5° Les premiers membres de $\mathfrak{G}_3$ ou leurs dérivées ne peuvent figurer dans les seconds membres de $\mathfrak{G}_4$: car le premier membre de chaque relation $\mathfrak{G}_3$ et ses dérivées, qui, après le changement de $\mathfrak{u}$, ... en $\mathrm{D}.u$, ..., deviennent respectivement identiques au second membre correspondant et à ses dérivées semblables, ont, avant cette substitution, soit des ordres respectivement supérieurs, soit des ordres respectivement égaux avec des cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ respectivement supérieures; et, d'un autre côté, dans les relations ultimes de l'ancien système qui ont servi à former les relations $\mathfrak{G}_4$, on a eu soin de remplacer chaque dérivée paramétrique des ordres $1, 2, \ldots, \mathrm{K}$ par la nouvelle fonction inconnue correspondante, puis chaque dérivée paramétrique d'ordre supérieur à K par une dérivée de nouvelle fonction inconnue qui fût d'ordre le plus petit possible, en même temps qu'elle possédait, dans cet ordre, la cote $(p+1)^{\text{ième}}$ la plus faible possible (II, **F**).

Pour achever d'établir que le système (21) *est un système franc, il ne nous reste donc plus qu'à démontrer sa passivité.*

C. *Si aux nouvelles fonctions inconnues* $\mathfrak{u}$, ... *du système* (21) *et à leurs dérivées paramétriques de tous ordres on substitue respectivement* $\mathrm{D}.u$, ... *et leurs dérivées semblables, on reproduit une fois et une seule chacune des dérivées paramétriques de l'ancien système* (II, **G**), *et aucune de ses dérivées principales.*

Ce point résulte immédiatement des suivants :

1° Si aux nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}$, ... et à leurs dérivées de tous ordres on substitue respectivement $\mathrm{D}.u$, ... et leurs dérivées semblables, on reproduit, avec certaines dérivées principales de l'ancien système, au moins une fois chacune de ses dérivées paramétriques.

Car, dans l'ancien système, toute dérivée paramétrique d'ordre supérieur à K est forcément la dérivée de quelque dérivée paramétrique des ordres 1, 2, ..., K; une dérivée paramétrique d'ordre quelconque coïncide donc, à la notation près, soit avec quelqu'une des nouvelles fonctions inconnues, soit avec quelqu'une de leurs dérivées.

2° Parmi les dérivées des nouvelles fonctions inconnues, celles que le changement de $\mathfrak{u}$, ... en $\mathrm{D}.u$, ... transforme en dérivées principales de l'ancien système sont elles-mêmes principales relativement au nouveau.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de la nouvelle fonction inconnue $\mathfrak{u}$, définie par la relation $\mathrm{D}.u = \mathfrak{u}$; et soient

$$\mathrm{D}_1.u,\quad \mathrm{D}_2.u,\quad \ldots$$

les dérivées de u figurant dans les premiers membres de l'ancien système,

$$\mathfrak{D}_1.\mathrm{D}.u,\quad \mathfrak{D}_2.\mathrm{D}.u,\quad \ldots \tag{22}$$

les résultantes d'ordre minimum (11) des couples respectifs

$$\begin{cases}\mathrm{D}_1.u,\\ \mathrm{D}.u,\end{cases}\quad \begin{cases}\mathrm{D}_2.u,\\ \mathrm{D}.u,\end{cases}\quad \ldots.$$

Les dérivées de la fonction $\mathfrak{u}$ figurant dans les premiers membres des équations $\mathfrak{G}_4$ sont alors

$$\mathfrak{D}_1.\mathfrak{u},\quad \mathfrak{D}_2.\mathfrak{u},\quad \ldots. \tag{23}$$

Cela étant, si la dérivée $\mathfrak{D}.\mathrm{D}.u$, déduite de $\mathfrak{D}.\mathfrak{u}$ par la substitution de $\mathrm{D}.u$ à $\mathfrak{u}$, est principale relativement à l'ancien système, elle coïncide avec quelqu'une des expressions (22) ou de leurs dérivées, c'est-à-dire que $\mathfrak{D}.\mathfrak{u}$ coïncide avec quelqu'une des expressions (23) ou de leurs dérivées; $\mathfrak{D}.\mathfrak{u}$ est donc une dérivée principale relativement au nouveau système.

3° Si, dans le groupe formé par les nouvelles fonctions inconnues et leurs dérivées de tous ordres, on considère tous les termes que le changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $\mathrm{D}.u, \ldots$ transforme en une même dérivée paramétrique de l'ancien système, il en est un, et un seul, qui coïncide avec quelqu'une des nouvelles fonctions inconnues ou de leurs dérivées paramétriques.

Effectivement, si l'on partage les termes considérés en groupes successifs d'après les valeurs décroissantes de leurs ordres (positifs ou nuls), puis les termes de chaque groupe en sous-groupes successifs d'après les valeurs décroissantes de leurs cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$, il résulte d'une observation antérieure (II, D) que ces sous-groupes ne contiennent chacun qu'un seul terme. Dans la suite

$$(24) \qquad \mathfrak{D}^{(1)}.\mathfrak{u}^{(1)}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{D}^{(r)}.\mathfrak{u}^{(r)}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{D}^{(s)}.\mathfrak{u}^{(s)},$$

ainsi obtenue, un terme quelconque est évidemment étranger au groupe formé par les premiers membres de $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_4$ et leurs dérivées, et il suffit dès lors de prouver que le dernier d'entre eux $\mathfrak{D}^{(s)}.\mathfrak{u}^{(s)}$ est étranger au groupe formé par les premiers membres de $\mathfrak{G}_3$ et leurs dérivées, tandis qu'au contraire chacun des précédents en fait nécessairement partie.

Or, si le dernier terme $\mathfrak{D}^{(s)}.\mathfrak{u}^{(s)}$ figurait comme premier membre dans quelqu'une des équations $\mathfrak{G}_3$ ou de celles qu'on en déduit par différentiations, le second membre de cette relation, que la substitution de $\mathrm{D}.u, \ldots$ à $\mathfrak{u}, \ldots$ transforme en la même dérivée paramétrique de l'ancien système, serait, soit d'ordre inférieur au premier membre, soit d'ordre égal, mais de cote $(p+1)^{\text{ième}}$ inférieure; $\mathfrak{D}^{(s)}.\mathfrak{u}^{(s)}$ ne serait donc pas le dernier terme de la suite (24), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Considérons maintenant, dans la suite (24), l'un quelconque des termes qui précèdent le dernier, par exemple $\mathfrak{D}^{(r)}.\mathfrak{u}^{(r)}$, et soient

$$\mathrm{D}^{(r)}.u = \mathfrak{u}^{(r)},$$
$$\mathrm{D}^{(s)}.u = \mathfrak{u}^{(s)}$$

celles des équations $\mathfrak{G}_1$ qui définissent les nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}^{(r)}$, $\mathfrak{u}^{(s)}$. La dérivée paramétrique de l'ancien système en laquelle se transforment, par le changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $\mathrm{D}.u, \ldots$, les différents termes de la suite (24), admet alors, entre autres expressions, les deux suivantes

$$\mathfrak{D}^{(r)}.\mathrm{D}^{(r)}.u, \quad \mathfrak{D}^{(s)}.\mathrm{D}^{(s)}.u,$$

et, par suite, coïncide forcément, soit avec la résultante d'ordre minimum de $\mathrm{D}^{(r)}.u$, $\mathrm{D}^{(s)}.u$, soit avec quelque dérivée de cette résultante. Si l'on désigne maintenant par

$$\mathfrak{D}^{(r')}.\mathrm{D}^{(r)}.u, \quad \mathfrak{D}^{(s')}.\mathrm{D}^{(s)}.u$$

les deux expressions dont cette résultante est susceptible au moyen de $\mathrm{D}^{(r)}.u$, $\mathrm{D}^{(s)}.u$, il est facile de voir que la quantité $\mathfrak{D}^{(r')}.\mathfrak{u}^{(r)}$ est forcément, ou d'ordre supérieur à $\mathfrak{D}^{(s')}.\mathfrak{u}^{(s)}$, ou d'ordre égal avec une cote $(p+1)^{\text{ième}}$ supérieure : car une même différentiation (d'ordre positif ou nul), exécutée sur $\mathfrak{D}^{(r')}.\mathfrak{u}^{(r)}$, $\mathfrak{D}^{(s')}.\mathfrak{u}^{(s)}$, fait retomber sur les quantités $\mathfrak{D}^{(r)}.\mathfrak{u}^{(r)}$, $\mathfrak{D}^{(s)}.\mathfrak{u}^{(s)}$, dont la première jouit précisément, par rapport à la seconde, de l'une ou l'autre propriété. D'ailleurs les ordres de $\mathfrak{D}^{(r')}.\mathfrak{u}^{(r)}$, $\mathfrak{D}^{(s')}.\mathfrak{u}^{(s)}$ sont au plus égaux à K. Il résulte alors du mode de formation des équations $\mathfrak{G}_3$ que $\mathfrak{D}^{(r')}.\mathfrak{u}^{(r)}$ coïncide avec quelqu'un de leurs premiers membres, et, par suite, que $\mathfrak{D}^{(r)}.\mathfrak{u}^{(r)}$ coïncide, soit avec quelqu'un de ces premiers membres, soit avec quelqu'une de leurs dérivées.

D. *Les relations ultimes du nouveau système* (21) *peuvent être partagées en deux catégories se distinguant l'une de l'autre par ce caractère, que le changement de* $\mathfrak{u}, \ldots$ *en* $\mathrm{D}.u, \ldots$ *transforme celles de la première en relations ultimes de l'ancien système, et celles de la deuxième en relations identiques ayant chacune pour premier et pour second membre une même dérivée paramétrique de ce dernier système.*

Si l'on dispose les relations ultimes du système (21) par groupes successifs d'après les valeurs croissantes de leurs classes (4), le point dont il s'agit est évident pour celles du premier groupe, puisqu'elles font toutes *directement* partie du système (21). Il suffit dès lors de prouver qu'en le supposant exact pour les relations ultimes des classes $1, 2, \ldots, j$, il ne cesse pas de l'être pour les relations ultimes de classe $j+1$.

Or, les relations *primitives* (2) de classe $j+1$ (4) du système (21) sont de trois sortes, suivant que la substitution des quantités $\mathrm{D}.u, \ldots$ à $\mathfrak{u}, \ldots$ les transforme : 1° en relations identiques ayant chacune pour premier et pour second membre une même dérivée paramétrique de l'ancien système; 2° en relations identiques ayant chacune pour premier et pour second membre une même dérivée principale de l'ancien système; 3° en relations ultimes de l'ancien système ou en relations ultimes différentiées.

Si, dans une relation primitive de la première sorte, le second membre est paramétrique relativement au système (21), cette relation est en même temps ultime, et appartient à la seconde des deux catégories dont parle l'énoncé. Si le second membre est au contraire principal, il appartient forcément à quelqu'une des classes $1, 2, \ldots, j$, et son expression ultime est de deuxième catégorie (nous voulons dire qu'elle est fournie par une relation ultime de deuxième catégorie); en la substituant au second membre dont il s'agit, on tombe évidemment sur une relation ultime de même catégorie.

Dans une relation primitive de la seconde sorte, le second membre, nécessairement principal (**C**, 2°), appartient à quelqu'une des classes $1, 2, \ldots, j$, son expression ultime est de première catégorie, et, en la substituant au second membre, on tombe sur une relation ultime de première catégorie.

Enfin, dans une relation primitive de la troisième sorte, le second membre peut contenir des dérivées principales de classes $1, 2, \ldots, j$, dont chacune doit être remplacée par une expression ultime de première ou de seconde catégorie, suivant que le changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $\mathrm{D}.u, \ldots$ la transforme en une dérivée principale ou paramétrique de l'ancien système. Comme celui-ci, à cause de sa passivité, n'admet pour chacune de ses dérivées principales qu'une seule expression immédiate (12, VII), cette substitution, suivie du changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $\mathrm{D}.u, \ldots$, redonne forcément une relation ultime de l'ancien système.

E. *Le système* (21) *est passif.*

Dans le système en question, deux relations ultimes de même premier membre appartiennent toutes deux à la première catégorie ou toutes deux à la seconde (**D**).

Si deux relations ultimes de même catégorie ont le même premier membre, elles ont forcément aussi le même second membre. Car, selon qu'elles appartiennent à la première ou à la seconde catégorie, le changement de $\mathfrak{u}$, ... en $D.u$, ... les transforme, soit en une même relation ultime de l'ancien système, soit en une même identité ayant pour premier et pour second membre quelque dérivée paramétrique de ce dernier; et, d'un autre côté, si l'on forme successivement dans l'ancien système et dans le nouveau un groupe avec les variables indépendantes, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques, les deux groupes ainsi obtenus sont identiques à la notation près (**C**).

IV. *Les conditions initiales, à l'aide desquelles on détermine complètement un groupe d'intégrales ordinaires hypothétiques* (8), *ayant été choisies arbitrairement dans l'ancien système* (II, **G**), *on peut, dans le nouveau, les choisir de telle façon, que les développements correspondant aux anciennes fonctions inconnues soient les mêmes de part et d'autre.*

Le groupe formé par les variables indépendantes, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques étant le même de part et d'autre à la notation près (III, **C**), on prendra pour ces quantités, dans le nouveau système, les mêmes valeurs initiales que dans l'ancien. Les relations ultimes du nouveau système, en vertu même de leur structure (III, **D**), fournissent alors, pour ses diverses dérivées principales, des valeurs initiales respectivement égales à celles que possèdent, dans l'ancien, les dérivées (principales ou paramétriques) identiques aux précédentes ou s'en déduisant par le changement de $\mathfrak{u}$, ... en $D.u$, ...

V. *Dans un système harmonique et passif, et avec des conditions initiales arbitraires, les développements des intégrales ordinaires hypothétiques sont convergents.*

Il suffit, pour s'en convaincre, de rapprocher du n° 15 les précédents alinéas II, III, IV.

17. En combinant une proposition démontrée ci-dessus (16, IV) avec la proposition inverse qui se démontre de même, on voit immédiatement que *la recherche des intégrales ordinaires d'un système harmonique passif se ramène, si l'on veut, à celle des intégrales ordinaires d'un système franc d'ordre égal* (14).

(*A suivre.*)