ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. VOGT

Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 6 (1889), p. 3-71 (supplément)
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__S3_0>

SUR LES

INVARIANTS FONDAMENTAUX

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE,

PAR M. H. VOGT,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR AU LYCÉE DE NANCY.

INTRODUCTION.

Les mémorables travaux de M. Fuchs (*Journal de Crelle*, t. 66) ont été le point de départ d'importantes recherches sur les équations différentielles linéaires et homogènes. M. Tannery fit connaître en France les idées de l'éminent géomètre de Berlin et étudia la nature des intégrales (*Annales de l'École Normale*, 1874); M. Floquet, suivant les traces de Thome et de Fröbenius, et M. Appell (*Id.*, 1879 et 1881) montrèrent l'analogie qui existe entre ces équations et les équations algébriques; plusieurs mathématiciens, entre autres MM. Fuchs, Schwarz, Klein, Goursat, Halphen, étudièrent les relations algébriques qui peuvent exister entre les intégrales; enfin M. Poincaré, généralisant, après M. Fuchs, la méthode d'inversion si féconde en résultats, fit paraître ses importantes recherches sur les groupes fuchsiens, et sur les fonctions fuchsiennes et kleinéennes (*Acta mathematica*, t. I, II, IV, V).

A l'étude des équations différentielles se rattache intimement celle du groupe de substitutions que subissent leurs intégrales lorsque la variable décrit un contour autour des points singuliers. MM. Fuchs et Hamburger ont cherché à calculer numériquement les coefficients de ces substitutions au moyen des paramètres de l'équation différentielle;

M. Poincaré, dans un de ses Mémoires *Sur les groupes des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. IV), se place à un autre point de vue, celui de la théorie des fonctions, et montre que les groupes de substitutions dépendent de certaines fonctions de ces paramètres, qu'il appelle *invariants fondamentaux*. C'est l'étude de ces invariants et de leurs propriétés qui forme l'objet de ce travail; je le divise en trois Parties.

Dans la première, je cherche à exprimer les coefficients du groupe au moyen des invariants fondamentaux supposés connus et à en déduire les invariants de toutes les substitutions; je montre quelles relations existent entre les invariants et les polygones fuchsiens. Dans la deuxième, j'étudie les invariants comme fonctions des paramètres de l'équation différentielle, ces fonctions dépendant de certaines autres analogues au logarithme et dont je donne d'abord les propriétés. Enfin, dans la dernière Partie, j'étudie les paramètres de l'équation comme fonctions des invariants; je montre en particulier comment on peut déduire d'une équation différentielle toutes les autres ayant mêmes points singuliers et mêmes invariants fondamentaux.

Je suppose toujours que les équations différentielles sont du second ordre, de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}y,$$

et à intégrales partout régulières; de plus, que le déterminant

$$y_1y'_2 - y_2y'_1$$

est égal à l'unité, ainsi que le déterminant des coefficients de toute substitution; deux groupes transformés l'un de l'autre par une même substitution ne sont pas considérés comme distincts.

J'aurai à construire des triangles formés d'arcs de cercle orthogonaux à un cercle fondamental de rayon 1; si $z = \rho e^{i\theta}$ est l'affixe d'un point de l'intérieur de ce cercle, je définis la L d'un arc par

$$\mathrm{L} = 2\int \frac{\operatorname{mod} dz}{1-\rho^2};$$

les coordonnées ρ et θ peuvent être remplacées par R et θ, R étant la L de ρ; on a alors

$$R = L\frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Toutes les formules de la géométrie non euclidienne sont applicables à ces triangles; de plus, le z d'un point de l'intérieur du cercle est exprimé en fonction de R et de θ par

$$z = \operatorname{tangh}\frac{R}{2}e^{i\theta},$$

formule analogue à celle qui donne la projection stéréographique d'un point d'une sphère défini par un arc de grand cercle égal à R issu de l'origine et par l'angle θ que fait cet arc avec OX. On a, en effet, dans ce cas,

$$z = \operatorname{tang}\frac{R}{2}e^{i\theta}.$$

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE ALGÉBRIQUE DES GROUPES DE SUBSTITUTIONS.

1. Considérons un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle du second ordre, et la substitution

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

que subit ce système lorsque la variable décrit un certain contour; il existe, relativement à ce contour, deux intégrales particulièrement simples qui se reproduisent multipliées par des facteurs constants : ces facteurs sont les racines de l'équation fondamentale

$$\begin{vmatrix} \alpha - \omega & \beta \\ \gamma & \delta - \omega \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\omega^2 - (\alpha + \delta)\omega + 1 = 0.$$

Ces racines, et par suite leur somme, sont des invariants relatifs au contour, en ce sens qu'elles sont indépendantes du système d'intégrales choisi; à chaque substitution ou à chaque contour correspond ainsi un invariant, qui est la somme $\alpha + \delta$.

La connaissance du groupe de substitutions se déduit de celle des invariants de ces substitutions; il n'est pas nécessaire cependant d'avoir tous les invariants, mais un certain nombre d'entre d'eux, d'où l'on déduit tous les autres, et qui sont des invariants fondamentaux.

Supposons que l'équation différentielle possède n points véritablement singuliers, à distance finie, et que le point infini soit un point singulier de même nature; je dis que le nombre des invariants fondamentaux est $3(n-1)$, quel que soit d'ailleurs le nombre des points apparents.

Si l'on trace, en effet, des lacets issus d'un point quelconque et entourant chacun des n points singuliers et si l'on connaît les n substitutions fondamentales que subit un système particulier d'intégrales lorsque la variable décrit ces lacets, le groupe est entièrement déterminé, car on connaît *a priori* la substitution de ce système autour d'un point apparent; elle est de l'une des formes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et, de plus, un lacet entourant l'infini se ramène à une succession de lacets situés à distance finie. Or les n substitutions fondamentales exigent la connaissance de $3n$ coefficients; mais trois d'entre eux peuvent être pris arbitrairement, car on peut transformer le groupe par une substitution quelconque renfermant trois indéterminées. Il suffit donc de connaître $3(n-1)$ quantités, par exemple les invariants de $3(n-1)$ substitutions convenablement choisies; il y a donc $3(n-1)$ invariants fondamentaux.

Nous considérerons d'abord les groupes de substitutions indépendamment des équations différentielles qui les produisent et des contours auxquels se rapportent ces substitutions, et nous nous proposons de résoudre les problèmes suivants :

1° *Étant donné un système particulier d'invariants fondamentaux, comment détermine-t-on le groupe?*

2° *Comment calcule-t-on l'invariant d'une substitution quelconque?*

3° *Quelles sont les différentes manières de choisir les invariants fondamentaux?*

Nous allons nous occuper d'abord des deux premiers problèmes. M. Poincaré a déjà donné la solution du second, dans les cas de $n=2$ et $n=3$, dans son Mémoire *Sur les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique*, § V (¹). Avant d'aller plus loin, je donne les formules générales suivantes, relatives aux calculs des invariants :

I_{S_1} ou I_1 désignant l'invariant de la substitution S_1, I_{12} celui de la substitution $S_1 S_2$, on a

$$I_S = I_{S^{-1}},$$

$$I_{12} = I_{21},$$

$$(1) \qquad I_{123} + I_{213} = I_1 I_{23} + I_2 I_{31} + I_3 I_{12} - I_1 I_2 I_3,$$

$$(2) \qquad I_{12} + I_{1^{-1}2} = I_1 I_2,$$

$$(3) \qquad I_{1^n} = I_1^n - n I_1^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} I_1^{n-4} - \ldots.$$

Cette dernière formule n'est autre que celle qui donne $\omega_1^n + \omega_2^n$ en fonction de $\omega_1 + \omega_2$, sachant que $\omega_1 \omega_2 = 1$.

2. Je considère d'abord le cas de $n=2$: le groupe est dérivé de deux substitutions fondamentales S_1, S_2, et il y a trois invariants fondamentaux; je prends ceux des substitutions S_1, S_2 et $S_1 S_2$, et je désigne ces invariants par I_1, I_2 et I_{12}.

Le groupe ainsi déterminé est celui de l'équation de Gauss, à laquelle satisfait la série hypergéométrique. Je ne m'y arrête que pour montrer, sur un exemple simple, la méthode employée.

Les équations

$$\omega_1^2 - I_1 \omega_1 + 1 = 0,$$

$$\omega_2^2 - I_2 \omega_2 + 1 = 0$$

déterminent d'abord les substitutions canoniques

$$s_1 = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega'_1 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega'_2 \end{pmatrix},$$

(¹) *Journal de Liouville*, t. III; 1887.

dont S_1 et S_2 ne sont que des transformées; comme on peut choisir arbitrairement l'ordre des racines ω, on peut les supposer connues aussi bien que les invariants. Il ne reste plus qu'à trouver la substitution auxiliaire qui permet de passer de s_1 à s_2; je la désigne par

$$\Sigma_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \gamma_{12} & \delta_{12} \end{pmatrix}:$$

c'est la substitution par laquelle il faut transformer s_2 pour avoir la substitution S_2 du groupe, lorsqu'on suppose $S_1 = s_1$; si Σ_{21} a une signification analogue, le produit $\Sigma_{12}\Sigma_{21}$ est égal à l'unité.

En écrivant que I_{12} est l'invariant de la substitution $s_1\Sigma_{12}^{-1}s_2\Sigma_{12}$ et en posant, pour simplifier,

$$M_{12} = \frac{2I_{12} - I_1 I_2}{(\omega_1 - \omega'_1)(\omega_2 - \omega'_2)}, \tag{4}$$

on trouve

$$\begin{cases} \alpha_{12}\delta_{12} = \frac{1}{2}(M_{12} + 1), \\ \beta_{12}\gamma_{12} = \frac{1}{2}(M_{12} - 1). \end{cases} \tag{5}$$

Σ_{12} dépend de deux paramètres variables; mais tous les groupes dérivés de s_1, s_2, Σ_{12} obtenus en faisant varier ces paramètres sont des transformés les uns des autres et ne sont pas distincts, comme nous l'avons dit.

Il y a exception lorsque M_{12} est égal à ± 1; la condition nécessaire et suffisante pour que ce fait se produise est que les invariants vérifient la relation

$$I_1^2 + I_2^2 + I_{12}^2 - I_1 I_2 I_{12} - 4 = 0; \tag{6}$$

on peut toujours supposer, par un choix convenable des racines ω, que $M_{12} = +1$. On peut alors distinguer deux cas :

1° L'une des quantités β_{12}, γ_{12} est nulle et l'autre est quelconque; Σ_{12} a alors la forme

$$\Sigma_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix},$$

et tous les groupes obtenus en faisant varier k ne sont pas distincts.

2° β_{12} et γ_{12} sont nuls, et $\Sigma_{12} = 1$; le groupe est dérivé de s_1 et s_2, et se compose de substitutions toutes permutables entre elles : ce n'est pas un groupe transformé du précédent.

Une équation différentielle qui possède de tels groupes est réductible; dans le premier cas, l'une des intégrales est

$$y_1 = (x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2}$$

et l'autre

$$y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2};$$

dans le second cas, les deux intégrales sont

$$y_1 = (x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2} \qquad \text{et} \qquad y_2 = (x - a_1)^{1-r_1}(x - a_2)^{1-r_2}.$$

Mais alors on a $r_1 + r_2 = 1$, et le point infini est à apparence singulière.

L'invariant d'une substitution quelconque est une fonction rationnelle et entière des invariants fondamentaux, que l'on obtient par application des formules (1), (2) et (3). La première permet d'exprimer l'invariant d'une substitution quelconque $S_1^m S_2^n S_1^{m'} S_2^{n'} \ldots$ au moyen de ceux de la forme S_1^m, S_2^n, $S_1^m S_2^n$; on a, en effet, en désignant par σ une substitution quelconque

$$I_{1^m 2^n 1^{m'} \sigma} + I_{1^{m+m'} 2^n \sigma} = I_{2^n} I_{1^{m+m'} \sigma} + I_{1^{m'}} I_{1^m 2^n \sigma} + I_{2^n 1^{m'}} I_{1^m \sigma} - I_{2^n} I_{1^{m'}} I_{1^m \sigma},$$

de sorte que $I_{1^m 2^n 1^{m'} \sigma}$ est exprimé au moyen d'invariants plus simples et, de proche en proche, au moyen d'invariants de la forme I_{1^m}, I_{2^n}, $I_{1^m 2^n}$.

La formule (2) permet de ramener le calcul au cas où tous les exposants sont positifs; la formule (3) donne I_{1^m} en fonction de I_1; quant à $I_{1^m 2^n}$, c'est l'invariant de $s_1^m \Sigma_{12}^{-1} s_2^n \Sigma_{12}$; par suite, $M_{1^m 2^n} = M_{12}$ ou bien

$$\frac{2 I_{1^m 2^n} - I_{1^m} I_{2^n}}{(\omega_1^m - \omega_1'^m)(\omega_2^n - \omega_2'^n)} = \frac{2 I_{12} - I_1 I_2}{(\omega_1 - \omega_1')(\omega_2 - \omega_2')}. \tag{7}$$

Cette équation donne $I_{1^m 2^n}$.

3. Je considère maintenant le cas de $n = 3$; le groupe est dérivé de trois substitutions fondamentales S_1, S_2, S_3; je prends pour les six invariants fondamentaux I_1, I_2, I_3; I_{12}, I_{23}, I_{31} et je vais en déduire le groupe. Les trois premiers déterminent d'abord les substitutions canoniques

$$s_i = \begin{pmatrix} \omega_i & 0 \\ 0 & \omega_i' \end{pmatrix} \qquad (i = 1.2.3);$$

les autres donnent les substitutions auxiliaires Σ_{12}, Σ_{23}, Σ_{31} définies comme précédemment. Ces substitutions ne sont pas indépendantes; car toute substitution S, transformée successivement par Σ_{31}, Σ_{23}, Σ_{12}, doit donner la même substitution S : on en conclut que le produit $\Sigma_{31}\Sigma_{23}\Sigma_{12}$ doit avoir l'une des formes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mais on peut se limiter au premier cas; car on peut changer les signes des coefficients d'une substitution auxiliaire sans changer le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3.

Les coefficients des substitutions Σ sont donnés par

$$M_{12} = \frac{2\,I_{12} - I_1 I_2}{(\omega_1 - \omega'_1)(\omega_2 - \omega'_2)},$$
$$\alpha_{12}\delta_{12} = \tfrac{1}{2}(M_{12} + 1),$$
$$\beta_{12}\gamma_{12} = \tfrac{1}{2}(M_{12} - 1)$$

et les équations analogues; il existe encore entre les coefficients une équation que l'on obtient en exprimant que $\Sigma_{31}\Sigma_{23}\Sigma_{12} = 1$; on trouve

$$\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \delta_{12}\delta_{23}\delta_{31} = \tfrac{1}{2}(M_{12} + M_{23} + M_{31} + 1),$$
$$\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}\delta_{12}\delta_{23}\delta_{31} = \tfrac{1}{8}(M_{12} + 1)(M_{23} + 1)(M_{31} + 1),$$

de sorte que $\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}$ et $\delta_{12}\delta_{23}\delta_{31}$ sont racines de l'équation du second degré

$$(8) \qquad P_{123}^2 - \tfrac{1}{2}(M_{12} + M_{23} + M_{31} + 1)\,P_{123} + \tfrac{1}{8}(M_{12} + 1)(M_{23} + 1)(M_{31} + 1) = 0;$$

je désignerai désormais par P' la racine que je prendrai pour $\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}$ et par P'' l'autre racine.

Les substitutions Σ dépendent de trois paramètres : par exemple, de β_{12}, α_{12} et α_{23}, et des racines de l'équation précédente; mais les groupes que l'on obtient en faisant varier les trois paramètres ne sont pas distincts, et l'on arrive finalement à ce résultat :

Les invariants fondamentaux déterminent deux groupes, qui se distinguent l'un de l'autre par le choix des racines de l'équation (8).

Je vais former tous les invariants au moyen des six invariants fondamentaux; ceux des substitutions dérivées d'une ou de deux substitutions fondamentales S_1, S_2, S_3 ont été formés au n° 4; tous les autres se ramènent, à l'aide des formules (1), (2), (3), aux précédents et aux invariants I_{123} et I_{132}; tout revient donc à calculer ces deux derniers. Ce sont ceux des substitutions

$$s_1 \Sigma_{12}^{-1} s_2 \Sigma_{23}^{-1} s_3 \Sigma_{31}^{-1},$$
$$s_1^{-1} \Sigma_{12}^{-1} s_2^{-1} \Sigma_{23}^{-1} s_3^{-1} \Sigma_{31}^{-1};$$

en les formant directement, on trouve

$$(9) \qquad \begin{cases} I_{123} + I_{132} = I_1 I_{23} + I_2 I_{31} + I_3 I_{12} - I_1 I_2 I_3, \\ I_{123} - I_{132} = (P''_{123} - P'_{123})(\omega_1 - \omega'_1)(\omega_2 - \omega'_2)(\omega_3 - \omega'_3); \end{cases}$$

ce sont des fonctions rationnelles des invariants fondamentaux et des racines de l'équation (8); ils sont racines d'une équation du second degré que l'on obtient en remarquant que

$$(10) \quad 4(I_{123} - I_{132})^2 = \Sigma(I_1^2 - 4)(2I_{23} - I_2 I_3)^2 - 2\Pi(2I_{23} - I_2 I_3) - \Pi(I_1^2 - 4),$$

et l'équation du second degré est

$$(11) \quad I_{123}^2 - (\Sigma I_1 I_{23} - I_1 I_2 I_3) I_{123} + \Sigma I_1^2 + \Sigma I_{23}^2 - \Sigma I_1 I_2 I_{12} + I_{12} I_{23} I_{31} - 4 = 0;$$

tous les invariants sont, par suite, des fonctions rationnelles des invariants fondamentaux et des racines de l'équation (8) ou de l'équation (11).

On pouvait prévoir que les invariants choisis fourniraient deux groupes : si S_1, S_2, S_3 est un système de substitutions fondamentales, répondant à la question, le groupe dérivé de $S'_1 = S_1^{-1}$, $S'_2 = S_2^{-1}$, $S'_3 = S_3^{-1}$ a les mêmes invariants fondamentaux que le premier, mais l'invariant de $S'_1 S'_2 S'_3$ est égal à I_{132} et non à I_{123}; ces deux dernières quantités doivent donc se permuter lorsqu'on passe d'un groupe à l'autre.

On arriverait aux mêmes conclusions en choisissant I_1, I_2, I_3, I_{12}, I_{13} et I_{123} comme invariants fondamentaux; car, si un groupe $(S_1 S_2 S_3)$ répond à la question, il en est de même du groupe dérivé de

$$S'_1 = S_1^{-1}, \qquad S'_2 = S_1 S_2^{-1} S_1^{-1}, \qquad S'_3 = S_3^{-1};$$

l'invariant de $S'_2 S'_3$ n'est pas égal à I_{23}, mais à

$$I_{12^{-1}1^{-1}3^{-1}} = I_1 I_{123} + I_2 I_3 - I_{23} - I_{12} I_{13};$$

l'équation (11) donne du reste pour I_{23} deux valeurs se déduisant l'une de l'autre d'après l'équation précédente.

Six invariants quelconques ne peuvent déterminer un groupe unique, car le cas le plus favorable qui puisse se présenter est celui où l'on déduirait de ces six quantités un seul système de valeurs des six invariants fondamentaux choisis précédemment; on peut trouver en général plusieurs systèmes, à chacun desquels correspondent deux groupes. Il est par suite nécessaire, pour définir un seul groupe, de donner sept invariants, par exemple les six premiers et I_{123}, reliés par l'équation (11).

Nous avons jusqu'ici considéré les groupes en eux-mêmes; lorsqu'on les étudie comme groupes d'équations différentielles, il est nécessaire de donner, en même temps que les invariants, les chemins joignant les points singuliers deux à deux, et servant à définir les substitutions auxiliaires Σ; nous supposons pour le moment que ces chemins sont les droites joignant les points singuliers; nous verrons plus loin quelles modifications il faut faire subir au groupe lorsque l'on fait d'autres hypothèses.

Si l'on donne les coefficients de l'équation différentielle, on peut calculer, comme nous l'expliquerons dans la deuxième Partie, les invariants fondamentaux; il n'existe cependant qu'un seul groupe, et I_{123}, s'il est égal à I_∞, est parfaitement déterminé; au contraire, si l'on donne les six invariants fondamentaux, il existe en général deux équations différentielles possédant ces invariants; pour l'une, I_∞ est égal à l'une des racines de l'équation (11); pour l'autre, I_∞ est égal à l'autre racine; à chacune de ces équations correspond un groupe déterminé.

4. Les développements que nous avons donnés dans les numéros précédents permettent d'énoncer rapidement les résultats relatifs au cas général, où le groupe est dérivé de n substitutions fondamentales $S_1, S_2, \ldots, S_n$; je prendrai pour les $3n-3$ invariants fondamentaux : 1° $I_1, I_2, \ldots, I_n$; 2° $I_{12}, I_{13}, \ldots, I_{1n}$; 3° $I_{23}, I_{34}, \ldots, I_{n-1,n}$; on voit que, si l'on considère n points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ auxquels correspondent les substitutions fondamentales, les invariants choisis sont ceux qui se rapportent aux sommets, aux côtés du polygone $a_1 a_2 \ldots a_n a_1$ parcourus dans cet ordre, et aux diagonales issues du point a_1.

Les n premiers invariants déterminent les substitutions canoniques

$$s_i = \begin{pmatrix} \omega_i & 0 \\ 0 & \omega'_1 \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

les autres déterminent les substitutions auxiliaires Σ_{12}, Σ_{23}, Σ_{31}; Σ_{13}, Σ_{34}, Σ_{41}; ..., Σ_{1k}, $\Sigma_{k,k+1}$, $\Sigma_{k+1,1}$, ... au moyen d'équations analogues aux équations (4) et (5), et de $n-2$ équations du second degré analogues à l'équation (8),

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} & P^2_{1,k,k+1} - \tfrac{1}{2}(M_{1k} + M_{k,k+1} + M_{k+1,1} + 1) P_{1,k,k+1} \\ & \qquad + \tfrac{1}{8}(M_{1k} + 1)(M_{k,k+1} + 1)(M_{k+1,1} + 1) = 0, \end{aligned} \right.$$

k variant de 2 à $n-1$. Ces substitutions Σ dépendent de n paramètres arbitraires, par exemple de β_{12}, α_{12}, α_{23}, ..., $\alpha_{n-1,n}$ et des racines des équations précédentes; les paramètres n'influent pas sur le groupe; mais, en combinant de toutes les manières possibles les racines des équations (12), on obtient des groupes différents, de sorte que les $3n-3$ invariants choisis déterminent 2^{n-2} groupes distincts.

Lorsque l'on a pris un système particulier de racines des équations précédentes, le groupe correspondant est parfaitement déterminé; il en résulte que les substitutions auxiliaires reliant deux substitutions canoniques quelconques s_h, s_k sont déterminées : elles sont données par l'équation

$$\Sigma_{hk} \Sigma_{1h} \Sigma_{k1} = 1;$$

on en déduit la valeur des invariants de la forme I_{hk}; par exemple, I_{24} est donné par l'équation

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} M_{24} = & \frac{M_{12}M_{34} + M_{14}M_{23} + M_{12} + M_{13} + M_{14} + M_{23} + M_{34} + 1}{M_{13} - 1} \\ & - 8\,\frac{P'_{123}P'_{134} + P''_{123}P''_{134}}{M^2_{13} - 1}, \end{aligned} \right.$$

où P′ désigne, comme précédemment, la racine égale au produit des coefficients α, et P″ la racine égale au produit des coefficients δ. Les deux valeurs de M_{24} sont racines de l'équation

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} 1 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & 1 & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & 1 & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne, entre les invariants, la relation

$$\begin{aligned}&\Sigma(2I_{12}-I_1I_2)^2(2I_{34}-I_3I_4)^2\\&\quad-2\Sigma(2I_{13}-I_1I_3)(2I_{23}-I_2I_3)(2I_{14}-I_1I_4)(2I_{24}-I_2I_4)\\&\quad+2\Sigma(I_4^2-4)(2I_{12}-I_1I_2)(2I_{23}-I_2I_3)(2I_{31}-I_3I_1)\\&\qquad-\Sigma(I_3^2-4)(I_4^2-4)(2I_{12}-I_1I_2)^2+\Pi(I_1^2-4)=0.\end{aligned}$$

On calcule les invariants $I_{1,k,k+1}$ par la méthode employée pour le cas de $n=3$; les autres invariants des produits de trois substitutions quelconques sont des fonctions rationnelles des précédents : on détermine, par exemple, I_{234} par l'équation

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}&4(P''_{123}-P'_{123})(P''_{234}-P'_{234})\\&\quad=M_{23}(M_{23}M_{14}-M_{12}M_{34}-M_{13}M_{24})+M_{21}M_{24}+M_{31}M_{34}+M_{23}-M_{14},\end{aligned}\right.$$

que l'on déduit de l'équation (13) et des équations analogues; on peut remarquer la relation

$$\frac{P'_{123}P'_{134}}{M_{13}+1}=\frac{P'_{234}P'_{241}}{M_{24}+1}$$

et les autres analogues, qui relient les produits de trois substitutions formées au moyen de quatre substitutions fondamentales.

On peut, d'après ce qui précède, calculer au moyen des invariants fondamentaux et des racines des équations (12) les invariants des substitutions dépendant de deux ou de trois substitutions fondamentales. Tous les autres sont des fonctions rationnelles des précédents; car on a, pour déterminer l'invariant du produit de quatre substitutions quelconques, l'équation

$$\begin{aligned}2I_{abcd}=I_aI_{bcd}+I_bI_{cda}+I_cI_{dab}+I_dI_{abc}+I_{ab}I_{cd}+I_{bc}I_{da}-I_{ac}I_{bd}\\-I_aI_bI_{cd}-I_bI_cI_{da}-I_cI_dI_{ab}-I_dI_aI_{bc}+I_aI_bI_cI_d.\end{aligned}$$

On peut, par suite, ramener le calcul des invariants dépendant de m substitutions fondamentales à celui des invariants dépendant de $m-1$, et, de proche en proche, à celui des invariants déterminés précédemment.

En fonction des $3n-3$ invariants fondamentaux primitifs, chacun des autres a en général 2^{n-2} valeurs, qui se déduisent l'une de l'autre par permutation des racines d'une ou de plusieurs des équations (12). La présence de ces 2^{n-2} valeurs s'explique, comme dans le cas de trois points singuliers, par la multiplicité des groupes déterminés par les invariants.

Si l'on considère une équation différentielle ayant n points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et si l'on suppose ces points rangés dans un ordre tel qu'on rencontre successivement les diagonales $a_1 a_2, a_1 a_3, \ldots, a_1 a_n$ en tournant autour de a_1 dans le sens positif; s'il y a, de plus, p points à apparence singulière avec la substitution

$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

l'invariant I_∞ est celui de la substitution $(S_1 S_2 \ldots S_n)^{-1}\sigma^p$, et il est égal à

$$(-1)^p I_{12,\ldots n};$$

il a une seule valeur calculée au moyen des paramètres de l'équation différentielle, tandis qu'il en a 2^{n-2} en fonction des invariants fondamentaux; il faut donc choisir, dans le cas d'une équation donnée, une de ces valeurs, ce qui revient à choisir d'une seule manière les racines des équations (12); on peut dire qu'en général aux invariants fondamentaux correspondent 2^{n-2} équations différentielles, qui se distinguent par la valeur de I_∞, et chacune d'elles possède un groupe déterminé.

Les cas particuliers qui peuvent se présenter sont ceux où quelques-unes des équations (12) ont une racine double; en général, le nombre des groupes est diminué de moitié pour chaque équation présentant ce caractère; il faut encore considérer le cas où l'une des quantités M est égale à ± 1; la substitution auxiliaire correspondante peut prendre l'une des formes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, et le nombre des groupes est en général doublé.

Je pose

$$(16)\quad \begin{cases} \Theta_{abc} = (I_{abc} - I_{bac})^2 \\ \qquad = \frac{1}{4}[\Sigma(I_a^2 - 4)(2I_{bc} - I_b I_c)^2 - 2\Pi(2I_{bc} - I_b I_c) - \Pi(I_a^2 - 4)] \\ H_{ab} = I_a^2 + I_b^2 + I_{ab}^2 - I_a I_b I_{ab} - 4. \end{cases}$$

Si toutes les équations (12) ont une racine double, sans que les quantités M soient égales à ± 1, il y a un seul groupe; les quantités

$\Theta_{1,k,k+1}$ sont nulles par hypothèse, et il en est de même des quantités quelconques Θ_{hkl}, comme cela résulte du reste de la considération des déterminants symétriques analogues à (14).

Je ne m'arrête qu'au cas particulier où le groupe est celui d'une équation différentielle réductible, c'est-à-dire possédant une intégrale de la forme

$$(x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2}\dots(x - a_n)^{r_n};$$

les conditions nécessaires pour que cette circonstance se présente sont en nombre $2n - 3$, et sont

$$(17) \qquad \begin{cases} \Theta_{123} = 0, & \Theta_{134} = 0, & \dots, & \Theta_{1,n-1,n} = 0, \\ H_{12} = 0, & H_{23} = 0, & \dots, & H_{n-1,n} = 0. \end{cases}$$

Ces conditions sont suffisantes, car, si elles sont remplies, tous les H sont nuls; on peut choisir les racines ω de telle sorte que toutes les quantités M soient égales à $+1$ et que toutes les substitutions auxiliaires aient l'une des deux formes énoncées précédemment; elles ne sont pas suffisantes pour exprimer que toutes les substitutions du groupe sont permutables entre elles, mais le calcul des invariants est le même que si elles jouissaient de cette propriété.

Des différents systèmes d'invariants fondamentaux.

5. Nous passons maintenant à la résolution du troisième problème :

Quelles sont les différentes manières de choisir les invariants fondamentaux?

Nous supposons d'abord que l'on cherche des invariants fournissant le même système de substitutions fondamentales $S_1, S_2, \dots, S_n$, que l'on conserve par conséquent $I_1, I_2, \dots, I_n$, et que l'on remplace les $2n - 3$ autres par des quantités convenablement choisies.

Nous avons vu que, si l'on prend n points $a_1, a_2, \dots, a_n$, auxquels sont affectées les substitutions fondamentales S, les $2n - 3$ derniers invariants se rapportent aux côtés $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_na_1$ et aux diagonales issues de a_1; leur nombre est celui des éléments dont la connaissance est nécessaire pour déterminer le polygone; nous verrons du reste plus loin qu'il existe souvent une analogie complète entre les invariants et un polygone de n sommets; $2n-3$ quantités, angles, côtés ou diagonales, servant à déterminer ce polygone, pourront être prises comme invariants fondamentaux; à la place de I_{hk} et I_{hkl}, on peut prendre $I_{h^m k^n}$ et $I_{h^m k^n l^p}$, au moyen desquels s'expriment rationnellement les premières quantités.

Si l'on considère un seul groupe (S), il est nécessaire de donner $4n-5$ invariants, tels que $I_1, I_2, \ldots, I_n$: $I_{12}, \ldots, I_{1n}$; $I_{123}, \ldots, I_{1,n-1,n}$ reliés par $n-2$ équations du second degré; aux invariants $I_1, I_2, \ldots, I_n$, on peut joindre $3n-5$ quantités s'exprimant rationnellement au moyen des premières, et réciproquement.

Nous considérons maintenant le cas plus important où le nouveau système d'invariants définit un autre groupe de substitutions fondamentales que le groupe $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$; nous supposons, d'une part, que l'on prenne comme système primitif celui que nous avons considéré jusqu'à présent,

$$I_1, \quad I_2, \quad \ldots, \quad I_n; \quad I_{12}, \quad \ldots, \quad I_{1n}; \quad I_{123}, \quad \ldots, \quad I_{1,n-1,n};$$

d'autre part, que l'on prenne, comme nouveau système, les invariants de n substitutions du groupe (S), $T_1, T_2, \ldots, T_n$ de leurs produits deux à deux et trois à trois; nous les désignons par

$$J_1, \quad J_2, \quad \ldots, \quad J_n; \quad J_{12}, \quad J_{23}, \quad \ldots, \quad J_{n1}; \quad J_{13}, \quad \ldots, \quad J_{123}, \quad \ldots, \quad J_{1,n-1,n}.$$

Nous pouvons toujours, d'après ce qui précède, ramener à ce cas celui où l'on prend J_1, J_2, J_n et $3n-5$ autres invariants quelconques du groupe dérivé de $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Si le système (J) est fondamental, le groupe (T) qu'il détermine doit contenir les substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_n$ exprimées au moyen de combinaisons des substitutions T et de leurs inverses. Le problème se ramène par suite au suivant :

Trouver tous les systèmes de substitutions de la forme

$$(18) \qquad T_k = S_1^{m_k} S_2^{n_k} S_3^{p_k} \ldots S_1^{m'_k} \ldots S_2^{n'_k} \ldots \qquad (k = 1.2\ldots n),$$

tels que l'on puisse déduire des équations précédentes les valeurs de S_1,

$S_2, \ldots, S_n$ *en fonction de* $T_1, T_2, \ldots, T_n$, *c'est-à-dire trouver des expressions*

$$(19) \qquad S_k = T_1^{\mu_k} T_2^{\nu_k} T_3^{\pi_k} \ldots T_1^{\mu'_k} \ldots T_2^{\nu'_k} \ldots \qquad (k = 1.2\ldots n)$$

qui rendent identiques les deux membres des équations (18).

Une première condition que doivent remplir les exposants mnp est que le déterminant

$$| \; m_k + m'_k + \ldots, \quad n_k + n'_k + \ldots, \quad p_k + p'_k + \ldots \; |$$

formé avec la somme des exposants de S_1, de S_2, ... dans $T_1, T_2, \ldots, T_n$ soit égal à ± 1; car son produit par le déterminant

$$| \; \mu_k + \mu'_k + \ldots, \quad \nu_k + \nu'_k + \ldots, \quad \pi_k + \pi'_k + \ldots \; |$$

doit être égal à l'unité; chacun d'eux est, par suite, égal à ± 1.

Cette condition est suffisante dans le cas où toutes les substitutions S sont permutables entre elles, mais elle ne l'est pas dans le cas général; je vais montrer que les conditions nécessaires et suffisantes sont que les substitutions T soient obtenues par combinaison et répétition des opérations suivantes :

1° $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont, dans un autre ordre, identiques aux substitutions S;

2° $T_1 = S_1$, $T_2 = S_2^{-1}$, $T_3 = S_3$, ..., $T_n = S_n$;

3° $T_1 = S_1$, $T_2 = S_1 S_2$, $T_3 = S_3$, ..., $T_n = S_n$.

$T_1, T_2, \ldots, T_n$ peuvent être les transformés de $S_1, S_2, \ldots, S_n$, mais les groupes sont identiques, et il n'y a pas à tenir compte de cette opération.

Je vais montrer que, si le groupe (T) est identique au groupe (S), on obtient $T_1, T_2, \ldots, T_n$, en effectuant les opérations précédentes sur $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Transportons les valeurs des S dans les seconds membres des équations (18), si

$$(20) \qquad T_k = S_a^{\alpha} S_b^{\beta} S_c^{\gamma} \ldots S_l^{\lambda} S_m^{\mu},$$

le second membre doit se réduire à T_k; comme les substitutions ne sont pas permutables, cela ne peut avoir lieu que si l'on supprime dans le produit deux substitutions T consécutives dont le produit est égal à l'unité, et si l'on peut continuer cette suppression jusqu'à ce qu'il ne reste que T_k.

Si cette substitution restante ne provient pas du premier facteur S_a^α, la dernière substitution $S_a^{\pm 1}$ de ce produit S_a^α doit avoir tous ses termes T détruits par des termes T inverses composant les substitutions suivantes; on a donc une équation de la forme

$$S_a^{\pm 1} S_b^\beta S_c^\gamma U_a = 1.$$

En appliquant au groupe (S) les opérations dont nous avons parlé, on peut remplacer S_a par $S_a^{\pm 1} S_b^\beta S_c^\gamma = U_a^{-1}$, en conservant S_b, S_c, ...; alors U_a^{-1} a, par rapport aux substitutions T, une expression plus simple que S_a. Si la substitution restante T_k se présentait dans le premier facteur S_a^α, on ferait la même réduction en considérant le dernier S_m^μ.

En répétant cette réduction, on forme, à l'aide des opérations énoncées, des combinaisons de substitutions S, ayant, par rapport aux substitutions T, les formes simples

$$V_1 = T_1^m, \qquad V_2 = T_2^n, \qquad \ldots, \qquad V_n = T_n^p;$$

mais m, n, ..., p doivent être égaux à l'unité; car, sinon le déterminant des exposants des substitutions T ne serait pas égal à ± 1; on a, par suite,

$$T_1 = V_1, \qquad T_2 = V_2, \qquad \ldots, \qquad T_n = V_n,$$

et la proposition est démontrée.

M. Stouff [1] est arrivé à des résultats analogues en cherchant la transformation des polygones fuchsiens. Le résultat précédent est général et est obtenu par la considération seule des substitutions.

Les opérations précédentes, effectuées sur les substitutions, conduisent aux transformations suivantes des $4n-5$ invariants fondamentaux :

1° Permutation des indices 1, 2, ..., n;

---

[1] Thèse *Sur la transformation des fonctions fuchsiennes;* 1888, p. 68 et suivantes.

2°

$$(21)\qquad \begin{cases} J_{12} = I_1 I_2 - I_{12}, \\ J_{23} = I_2 I_3 - I_{23}, \\ J_{123} = I_2 I_{13} - I_{123}; \end{cases}$$

tous les autres invariants I sont conservés;

3°

$$(22)\qquad \begin{cases} J_2 = I_{12}, \\ J_{12} = I_1 I_{12} - I_2, \\ J_{23} = I_{123}, \\ J_{123} = I_1 I_{123} - I_{23}, \end{cases}$$

et tous les autres sont conservés.

La première transformation conserve les substitutions fondamentales. En laissant ce cas de côté, on voit que, si un système de $4n - 5$ invariants est fondamental, ils s'expriment en fonction entière des premiers, et réciproquement. On peut encore énoncer ce résultat sous la forme suivante : Si l'on cherche une transformation d'invariants fournie par les équations

$$J_k = f_k(I_1, I_2, \ldots, I_{12}, \ldots), \qquad (k = 1, 2, \ldots, 4n - 5),$$

où les fonctions f soient obtenues d'après les règles de calcul données pour les invariants, et si cette transformation est réversible rationnellement, elle est obtenue par combinaison de transformations conservant $S_1, S_2, \ldots, S_n$, et des transformations (21) et (22); ces dernières sont entières, ainsi que les transformations inverses.

Les $4n - 5$ invariants primitifs étant reliés par les $n - 2$ équations (12), ceux du nouveau système doivent satisfaire à $n - 2$ équations analogues; les transformations (21) et (22) laissent invariables les premiers membres de ces équations, qui sont de véritables invariants. On a donc des transformations en elle-même d'une multiplicité d'ordre $3n - 3$ dans un espace à $4n - 5$ dimensions.

Si le groupe (S) offre certaines particularités, il en est de même du nouveau groupe (T); en particulier, si le premier est formé de substitutions toutes permutables entre elles ou s'il est le groupe d'une équation différentielle réductible, le nouveau groupe jouit de la même propriété. On vérifie, en effet, que les opérations simples transforment en lui-même le système des $2n-3$ équations (17)

$$\begin{array}{llll} \Theta_{123}=0, & \Theta_{134}=0, & \ldots, & \Theta_{1,n-1,n}=0, \\ H_{12}=0, & H_{23}=0, & \ldots, & H_{n-1,n}=0. \end{array}$$

L'opération (21) laisse invariables les premiers membres de ces équations; l'opération (22) les change en des combinaisons rationnelles de ces premiers membres. Si l'on a, par exemple, $n=3$, et si l'on représente par Q le premier membre de l'équation

$$Q=I_{123}-\tfrac{1}{2}(I_1 I_{23}+I_2 I_{31}+I_3 I_{12}-I_1 I_2 I_3)=0;$$

si, de plus, on désigne par [F] une fonction F des I, dans laquelle on remplace les I par les J, et les J par leurs valeurs données par la transformation (22), on a

$$[Q]=QI_1+\frac{1}{2I_{23}-I_2 I_3}[\Theta_{123}+H_{23}(I_1^2-4)-H_{12}(I_3^2-4)-H_{31}(I_2^2-4)],$$

$$[\Theta_{123}]=\Theta_{123}+4[Q]^2-4Q^2,$$

$$[H_{12}]=H_{12}, \qquad [H_{13}]=H_{13},$$

$$\begin{aligned}[H_{23}]=\frac{Q}{2}(2I_{123}+I_1 I_{23}+I_2 I_{31}-I_3 I_{12}+I_1 I_2 I_3)-\Theta_{123}\frac{I_1 I_2}{4(2I_{12}-I_1 I_2)}\\ +H_{23}\frac{I_1(I_1 I_{12}-2I_2)}{2(2I_{12}-I_1 I_2)}+H_{31}\frac{I_2(I_2 I_{12}-2I_1)}{2(2I_{12}-I_1 I_2)}-H_{12}\frac{I_{12}(I_3^2-4)}{2(2I_{12}-I_1 I_2)}.\end{aligned}$$

On a ainsi des transformations en elle-même d'une multiplicité d'ordre n prise dans une multiplicité d'ordre $3n-3$ dans l'espace à $4n-5$ dimensions. En particulier, dans le cas de $n=2$, une permutation des variables et la transformation

$$X=x, \qquad Y=y, \qquad Z=xy-z$$

transforment en elle-même la surface dont l'équation est

$$x^2+y^2+z^2-xyz-4=0.$$

6. Au problème que nous venons de résoudre se rattache la question plus générale suivante : Étant donné un système de n substitutions d'un groupe (S), $V_1, V_2, \ldots, V_n$, déterminer les substitutions fondamentales $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Nous calculerons les $4n-5$ invariants fondamentaux du groupe dérivé de $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en fonction des coefficients de ces substitutions; nous prendrons $J_1, J_2, \ldots, J_n$; $J_{12}, J_{23}, \ldots, J_{123}, \ldots$ comme précédemment. Tout revient alors à calculer les invariants I du groupe (S); nous exprimerons pour cela les J au moyen des $4n-5$ invariants fondamentaux I d'après les règles données dans les premiers paragraphes, et nous résoudrons le système des équations algébriques ainsi formées : elles nous fourniront un ou plusieurs systèmes de valeurs des inconnues I ou même une infinité si le système est indéterminé.

Si l'on obtient une seule solution, les groupes (V) et (S) sont identiques, et nous avons considéré ce cas. Si l'on trouve p systèmes de valeurs des I, il y a p groupes (S) répondant à la question; ils sont isomorphes entre eux et contiennent tous le groupe (V).

Si l'on prend, par exemple, dans le cas de $n=2$,

$$V_1 = S_1^3 S_2^2, \qquad V_2 = S_1 S_2$$

et si l'on représente par x, y, z, X, Y, Z les invariants fondamentaux des groupes (S) et (V), on a

$$\begin{aligned} X &= (x^2-1)(yz-x) - x(y^2-2), \\ Y &= z, \\ Z &= (x^2-1)(yz^2-xz-y) - xy^2z + x^2y + xz; \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} z &= Y, \\ y &= Z - XY + xY, \end{aligned}$$

x étant donné par l'équation du troisième degré

$$x^3 - x^2Y(XY-Z) + x(Y^2+Z^2+X^2Y^2-2XYZ-3) - Y(XY-Z) + X = 0,$$

de sorte qu'il y a trois groupes (S) répondant à la question.

Relations entre les invariants et la représentation conforme.

7. Nous étudions maintenant les relations qui existent entre les invariants et les équations différentielles. Nous considérons une équation ayant n points singuliers à distance finie, le point infini étant de

même nature, et ne possédant aucun point à apparence singulière; nous nous proposons le problème suivant :

Étant donnés les invariants du groupe de l'équation, reconnaître si ce groupe est formé de substitutions laissant invariable un cercle fondamental de rayon un, et, en particulier, si c'est un groupe fuchsien.

C'est le principe de la représentation conforme qui nous donnera la solution de la question. Les éléments d'un polygone fuchsien sont des invariants qui doivent s'exprimer au moyen de ceux que nous avons considérés jusqu'à présent; nous sommes donc amené à chercher les relations qui existent entre ces différentes quantités. Nous en déduirons même, dans le cas où elles sont réelles, des constructions géométriques simples remplaçant les calculs algébriques que nous avons donnés pour la détermination du groupe et des invariants des substitutions quelconques au moyen des invariants fondamentaux.

Le cas le plus simple est celui de l'équation de Gauss à deux points singuliers. La représentation conforme a été faite au moyen des intégrales de cette équation par M. Schwarz, dans son Mémoire *Sur la série hypergéométrique* (*Journal de Crelle*, t. 75).

Soient λ_1, λ_2, λ_3 les différences des racines des trois équations fondamentales déterminantes; le triangle ayant pour angles $\pi\lambda_1$, $\pi\lambda_2$ et $\pi\lambda_3$ est la représentation d'un demi-plan de la variable limité par l'axe réel, représentation faite au moyen du rapport $\frac{y_1}{y_2}$ de deux intégrales particulières; deux triangles symétriques ayant un côté commun forment un polygone analogue aux polygones fuchsiens.

Les formules

$$(23)\qquad \left\{ \begin{aligned} I_1 &= -2\cos\pi\lambda_1, \\ \omega_1 - \omega'_1 &= -2i\sin\pi\lambda_1 \end{aligned} \right.$$

et les formules analogues donnent les invariants fondamentaux I_1, I_2 et $I_3 = I_{12}$, et, par suite, le groupe. Si μ_{23}, μ_{31}, μ_{12} sont les longueurs ou les L des côtés opposés aux angles $\pi\lambda_1$, $\pi\lambda_2$, $\pi\lambda_3$, il faut distinguer plusieurs cas, suivant que le triangle existe sur la sphère ou est formé d'arcs orthogonaux au cercle de rayon 1. Les substitutions canoniques s_1, s_2, s_3 sont données par les équations précédentes; la substitution auxiliaire Σ_{12} par

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{lcl} M_{12} = \cos\mu_{12} & \text{ou} & M_{12} = \operatorname{ch}\mu_{12}, \\ \alpha_{12}\delta_{12} = \cos^2\dfrac{\mu_{12}}{2} & \text{»} & \alpha_{12}\delta_{12} = \operatorname{ch}^2\dfrac{\mu_{12}}{2}, \\ \beta_{12}\gamma_{12} = -\sin^2\dfrac{\mu_{12}}{2} & \text{»} & \beta_{12}\gamma_{12} = \operatorname{sh}^2\dfrac{\mu_{12}}{2}. \end{array}\right.$$

Les invariants fondamentaux I_1, I_2, I_3 doivent être réels et compris entre -2 et $+2$; dans le premier cas, où le triangle est sphérique, la quantité

$$H_{12} = I_1^2 + I_2^2 + I_{12}^2 - I_1 I_2 I_{12} - 4$$

doit être négative; dans le second cas, positive. Les substitutions du groupe laissent alors invariable le cercle de rayon 1, et il suffit que λ_1, λ_2, λ_3 soient les inverses de nombres entiers pour que le groupe soit fuchsien; enfin, si H_{12} est nulle, l'une des quantités $\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \lambda_3$ est nulle ou entière, et le triangle existe dans le plan.

Soit $A_1 A_2 A_{12}$ le triangle de Schwarz; on en déduit différents points affectés aux différentes substitutions du groupe, et ces substitutions elles-mêmes par la règle suivante :

1° A un sommet A_α et à un nombre λ_α, déterminé par des équations analogues à (23), correspondent toutes les substitutions S_α^m, m étant positif ou négatif, et l'on a

$$I_{\alpha^m} = (-1)^m 2 \cos m\pi\lambda_\alpha;$$

2° L'arc qui joint deux points A_α, A_β définit la substitution auxiliaire $\Sigma_{\alpha\beta}$ et

$$M_{\alpha\beta} = M_{\alpha^m\beta^n} = \cos A_\alpha A_\beta \quad \text{ou} \quad \operatorname{ch} A_\alpha A_\beta;$$

3° Si l'on construit sur $A_\alpha A_\beta$ un triangle $A_\alpha A_\beta A_{\alpha\beta}$ ayant pour angles adjacents $\pi\lambda_\alpha$ et $\pi\lambda_\beta$, le sommet opposé $A_{\alpha\beta}$ est le point représentatif de $(S_\alpha S_\beta)^{-1}$ ou de $S_\alpha S_\beta$, et

$$I_{\alpha\beta} = -2\cos\pi\lambda_{\alpha\beta},$$
$$\omega_{\alpha\beta} - \omega'_{\alpha\beta} = -2i\sin\pi\lambda_{\alpha\beta},$$

$\pi\lambda_{\alpha\beta}$ étant l'angle $A_{\alpha\beta}$ du triangle, pris en signe contraire.

Les trois angles A_α, A_β, $A_{\alpha\beta}$ sont supposés positifs lorsqu'on les décrit dans le sens inverse du sens ordinaire de la Trigonométrie, en parcourant le périmètre dans le sens $A_\alpha A_\beta A_{\alpha\beta}$; de la sorte, ils correspondent toujours à trois substitutions S_α, S_β, $(S_\alpha S_\beta)^{-1}$, dont le produit dans cet ordre est égal à l'unité.

Cette règle, qui est évidente pour le triangle primitif, se vérifie dans tous les cas au moyen des formules données dans le calcul des invariants. Dans le cas des triangles sphériques, les arcs se coupent toujours en des points réels, et les invariants de toutes les substitutions ont un module inférieur à 2; il peut ne plus en être de même dans le cas de la pseudosphère, mais les constructions sont toujours possibles cependant, car on peut construire un arc orthogonal au cercle fondamental et passant par le point de rencontre imaginaire de deux arcs qui ne se coupent pas.

8. Considérons le cas général et le polygone de représentation conforme : nous supposons qu'il est formé d'arcs orthogonaux au cercle fondamental, les raisonnements étant les mêmes lorsqu'il est tracé sur la sphère; nous nous limitons au cas où il est de première famille et de genre zéro; il a $n+1$ cycles correspondant aux points singuliers a_1, a_2, ..., a_n et au point infini que nous appellerons a_{n+1}, et la somme des angles de chacun d'eux doit être un sous-multiple de 2π pour que le groupe soit fuchsien; cependant, pour plus de généralité, nous supposerons cette somme quelconque, ce qui ne change rien aux raisonnements.

Comme on peut ajouter au polygone et en retrancher des parties congruentes, on peut le ramener à la forme $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\beta_2\ldots\beta_n$, considérée par M. Poincaré dans son Mémoire sur le groupe des équations linéaires (*Acta mathematica*, t. IV). Deux des cycles sont α_1 et α_{n+1} avec les angles $2\pi\lambda_1$ et $2\pi\lambda_{n+1}$; les autres comprennent deux sommets : α_2 et β_2, α_3 et β_3, ... avec les angles $2\pi\lambda_2$, $2\pi\lambda_3$, ..., $2\pi\lambda_n$.

L'arc diagonal $\alpha_1\alpha_{n+1}$ décompose le polygone en deux parties : l'une d'elles et les n quantités λ_1, λ_2, ..., λ_n déterminent complètement la seconde, car les côtés conjugués sont congruents; je dis de plus que ces n quantités λ et les n sommets α_1, α_2, ..., α_n suffisent pour connaître le polygone tout entier. Il dépend, en effet, de $4n-3$ paramètres, mais la condition que les côtés soient deux à deux congruents fournit n équations; la connaissance de λ_1, λ_2, ..., λ_n en fournit n autres, de sorte qu'il reste $2n-3$ arbitraires, ce qui est le nombre des paramètres déterminant le polygone $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$.

Nous obtenons ainsi $3n-3$ quantités pour déterminer le polygone : c'est le nombre des invariants fondamentaux du groupe. Nous allons les former explicitement au moyen des éléments du polygone.

Les quantités λ donnent d'abord les invariants I_k et les substitutions canoniques au moyen des équations analogues à (23). Si nous traçons les arcs diagonaux $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \ldots, \alpha_1\alpha_n$ issus de α_1 et si nous désignons par $\mu_{12}, \mu_{13}, \ldots, \mu_{1n}, \mu_{23}, \ldots, \mu_{n-1,n}$ les L de ces arcs et des côtés du polygone, nous déterminons les quantités M et, par suite, les invariants I par les formules

$$M_{hk} = \operatorname{ch}\mu_{hk}.$$

Nous obtenons ainsi les $3n-3$ invariants d'un groupe; il est vrai qu'ils déterminent 2^{n-2} groupes différents, et cette multiplicité des groupes est intimement liée à cette remarque : les côtés d'un polygone et les diagonales issues d'un sommet déterminent $n-2$ triangles partiels; on peut remplacer plusieurs d'entre eux par des triangles symétriques et former ainsi 2^{n-2} polygones distincts de n côtés, en assemblant ces triangles de toutes les manières possibles.

Nous obtiendrons un groupe unique en considérant les angles que font entre eux les arcs issus de α_1; nous les désignons par $\varphi_{23}, \varphi_{34}, \ldots, \varphi_{n-1,n}$, et nous les considérons comme positifs lorsqu'ils sont décrits dans le sens ordinaire de la Trigonométrie. Ces $n-2$ angles et les $n-1$ arcs $\mu_{12}, \mu_{13}, \ldots, \mu_{1n}$ donnent, en désignant par Δ_{1hk} le sinus du triangle $\alpha_1\alpha_h\alpha_k$ pris avec un signe convenable,

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} M_{hk} &= \operatorname{ch}\mu_{hk} = \operatorname{ch}\mu_{1h}\operatorname{ch}\mu_{1k} - \operatorname{sh}\mu_{1h}\operatorname{sh}\mu_{1k}\cos\varphi_{hk},\\ \Delta_{1hk} &= \operatorname{sh}\mu_{1h}\operatorname{sh}\mu_{1k}\sin\varphi_{hk},\\ P''_{1hk} - P'_{1hk} &= -\frac{i}{2}\Delta_{1hk},\end{aligned}\right.$$

P′ et P″ étant les racines des équations (12).

Les équations (23), (24), (25) déterminent les substitutions canoniques et les substitutions auxiliaires Σ; en choisissant pour S_1 la substitution canonique s_1, on a, en général,

$$S_k = \Sigma_{1k}^{-1} s_k \Sigma_{1k} = \begin{pmatrix} \omega_k\alpha_{1k}\delta_{1k} - \omega'_k\beta_{1k}\gamma_{1k}, & (\omega'_k - \omega_k)\alpha_{1k}\beta_{1k} \\ (\omega_k - \omega'_k)\gamma_{1k}\delta_{1k} & \omega'_k\alpha_{1k}\delta_{1k} - \omega_k\beta_{1k}\gamma_{1k} \end{pmatrix}.$$

S_2 dépend d'un paramètre arbitraire; mais toutes les autres substitutions sont déterminées, car

$$\frac{\alpha_{1k}\beta_{1k}}{\alpha_{12}\beta_{12}} = \frac{M_{1k}+1}{M_{12}-1} - \frac{4P''_{12k}}{M_{12}^2-1} = \frac{\operatorname{sh}\mu_{1k}}{\operatorname{sh}\mu_{12}}(\cos\varphi_{2k}+i\sin\varphi_{2k}),$$
$$\frac{\gamma_{1k}\delta_{1k}}{\gamma_{12}\delta_{12}} = \frac{\operatorname{sh}\mu_{1k}}{\operatorname{sh}\mu_{12}}(\cos\varphi_{2k}-i\sin\varphi_{2k}).$$

On peut prendre, par suite,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} S_2 &= \begin{bmatrix} \omega_2 \operatorname{ch}^2\frac{\mu_{12}}{2} - \omega'_2 \operatorname{sh}^2\frac{\mu_{12}}{2}, & (\omega'_2-\omega_2)\operatorname{sh}\frac{\mu_{12}}{2}\operatorname{ch}\frac{\mu_{12}}{2}, \\ (\omega_2-\omega'_2)\operatorname{sh}\frac{\mu_{12}}{2}\operatorname{ch}\frac{\mu_{12}}{2}, & \omega'_2\operatorname{ch}^2\frac{\mu_{12}}{2} - \omega_2\operatorname{sh}^2\frac{\mu_{12}}{2} \end{bmatrix}; \\ S_k &= \begin{bmatrix} \omega_k \operatorname{ch}^2\frac{\mu_{1k}}{2} - \omega'_k \operatorname{sh}^2\frac{\mu_{1k}}{2}, & (\omega'_k-\omega_k)\operatorname{sh}\frac{\mu_{1k}}{2}\operatorname{ch}\frac{\mu_{1k}}{2}(\cos\varphi_{2k}+i\sin\varphi_{2k}), \\ (\omega_k-\omega'_k)\operatorname{sh}\frac{\mu_{1k}}{2}\operatorname{ch}\frac{\mu_{1k}}{2}(\cos\varphi_{2k}-i\sin\varphi_{2k}), & \omega'_k\operatorname{ch}^2\frac{\mu_{1k}}{2} - \omega_k\operatorname{sh}^2\frac{\mu_{1k}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}\right.$$

On vérifie que ces substitutions sont bien de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta_0 & \alpha_0 \end{pmatrix},$$

où α_0 et β_0 sont les quantités imaginaires conjuguées de α et β, et où $\alpha\alpha_0 - \beta\beta_0 = 1$: elles laissent donc invariable le cercle fondamental.

On arriverait à des conclusions analogues dans le cas où le polygone est tracé sur la sphère, en remplaçant les sinus et les cosinus hyperboliques par des sinus et des cosinus ordinaires.

Les conditions nécessaires pour que le polygone existe sur la sphère, exprimées au moyen des invariants I, sont : 1° que les $n-2$ quantités $\Theta_{123}, \Theta_{134}, \ldots, \Theta_{1,n-1,n}$ soient positives; 2° que l'une quelconque des quantités H_{1k} ou $H_{k,k+1}$ soit négative; 3° que les $3n-3$ invariants fondamentaux soient réels et que l'un quelconque d'entre eux ait un module inférieur à 2. Ces conditions sont suffisantes; car, si elles sont remplies, tous les invariants sont compris entre -2 et $+2$, et toutes les quantités H sont négatives. On peut déterminer les quantités μ et φ et construire le polygone.

Si l'une des quantités Θ est nulle, les trois sommets du triangle correspondant sont sur un même arc de grand cercle; si elles sont toutes nulles, ce qui a lieu dans le cas où les invariants déterminent un seul groupe, tous les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont sur un même arc.

Pour que le polygone existe sur la pseudo-sphère, il est nécessaire : 1° que les invariants fondamentaux soient réels et que les $n+1$ invariants $I_1, I_2, \ldots, I_{n+1}$ soient compris entre -2 et $+2$; 2° que les $n-1$ quantités $\Theta_{123}, \Theta_{134}, \ldots, \Theta_{1,n-1,n}, \Theta_{1,n,n+1}$ soient positives; 3° que l'une quelconque des quantités H soit positive; les conditions précédentes indiquent que toutes le sont alors.

Si l'on joint à ces conditions d'inégalité les relations exprimant que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ sont les inverses de nombres entiers, on obtient les conditions nécessaires pour que le groupe soit fuchsien.

Si toutes les quantités Θ et H sont nulles et si les quantités λ sont réelles, on a vu que l'équation est réductible; le polygone existe alors dans le plan. Je dis que les conditions nécessaires que l'on vient de donner pour l'existence d'un polygone fuchsien sont aussi suffisantes. En effet, un groupe de trois invariants, tels que I_1, I_2, I_{12}, permet de construire un triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_{12}$ analogue au triangle de Schwarz; le sommet α_{12} peut être imaginaire, si I_{12} a un module supérieur à 2; mais les autres sommets sont toujours réels; construisons de même les triangles $\alpha_2\alpha_3\alpha_{23}, \alpha_3\alpha_1\alpha_{31}, \ldots$, de la même manière; les côtés $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \ldots$ sont égaux à $\mu_{12}, \mu_{13}, \ldots$. A l'un des 2^{n-2} groupes définis par les $3n-3$ invariants fondamentaux correspond un seul système d'angles φ_{hk} déterminés par les équations (25); ces angles sont réels, car les quantités Θ sont positives, et ils permettent de construire le polygone $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$.

Ses sommets, et les sommets réels ou imaginaires $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots$ des triangles auxiliaires définissent un groupe; ses substitutions sont données par les équations (26), mais on les obtient aussi au moyen de constructions géométriques; la règle donnée au numéro précédent pour la construction des points relatifs à toutes les substitutions du groupe et des invariants de ces substitutions subsiste sans exception, comme on le vérifie facilement; quelques-uns de ces points peuvent être imaginaires, mais le point α_{n+1} représentatif de $S_1 S_2 \ldots S_n$ est réel, car λ_{n+1} est réel, et $\Theta_{1,n,n+1}$ est positif.

Ainsi donc, un système de $3n-3$ invariants étant donné indépendamment de toute équation différentielle, et satisfaisant aux conditions énoncées plus haut, fournit un polygone $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, ou plutôt un système de 2^{n-2} polygones formés des mêmes triangles partiels; considérons celui pour lequel tous les angles φ sont de même signe; on en déduit un sommet α_{n+1}, puis des sommets $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ en prenant $\beta_1\beta_2$ congruent à $\alpha_1\alpha_2$ et faisant avec lui un angle égal à $2\pi\lambda_1$, et ainsi de suite. Ce polygone est fuchsien, et il lui correspond une équation fuchsienne que l'on peut former, équation qui fournit la représentation conforme sur le polygone construit. Nous avons ainsi reconnu sur les invariants si le groupe est fuchsien, et de plus construit géométriquement le polygone fuchsien correspondant.

Nous verrons dans la deuxième Partie comment on calcule les invariants fondamentaux au moyen des coefficients d'une équation différentielle donnée; en la prenant sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A_1}{(x-a_1)^2} + \frac{A_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a_n)^2} + \frac{B_1}{x-a_1} + \frac{B_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{B_n}{x-a_n},$$

on doit avoir

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_n = 0,$$

et l'on peut choisir $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$. Cherchons les conditions pour que l'équation soit fuchsienne; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ doivent être les inverses de nombres entiers, et $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et $B_1a_1 + B_2a_2 + \ldots + B_na_n$ sont donnés par

$$A_k = \frac{\lambda_k^2 - 1}{4},$$

$$B_1a_1 + B_2a_2 + \ldots + B_na_n = \frac{\lambda_{n+1}^2 - 1}{4}.$$

Il existe $2n-4$ autres invariants; en écrivant qu'ils sont réels, on obtient $2n-4$ équations réelles entre les coefficients B et les points singuliers $a_3, a_4, \ldots, a_n$; en particulier, si ces derniers sont donnés, on a autant d'équations que de paramètres réels dans les coefficients B, et l'on sait que ces équations ont toujours une seule solution. Il faut de plus que les inégalités dont on a parlé soient vérifiées.

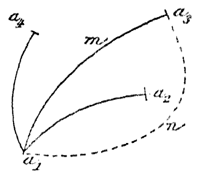
9. Lorsque l'on considère les invariants du groupe d'une équation différentielle, il est nécessaire de donner non seulement leur valeur, mais encore leur signification géométrique, ou plutôt les chemins

relatifs aux substitutions auxiliaires Σ qui relient les systèmes canoniques appartenant aux différents points singuliers; cette remarque n'a pas d'importance dans le cas de $n=2$, car les chemins se ramènent tous aux trois segments $-\infty$, 0, 1, $+\infty$ de l'axe réel, mais il n'en est plus de même dans le cas général.

Après avoir fait des hypothèses particulières et déterminé le groupe d'une équation différentielle E au moyen d'invariants I, on peut se demander ce qu'il advient lorsque l'on change les chemins auxiliaires, tout en conservant aux invariants leurs valeurs primitives.

Soient $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les substitutions que subit un système d'intégrales relatif au point a_1 lorsque la variable tourne autour de ce point ou décrit les lacets a_1a_2, a_1ma_3, ..., a_1a_n; supposons maintenant

Fig. 1.



que Σ_{13} se rapporte à a_1na_3 au lieu de a_1ma_3 et que les autres lacets soient conservés; le groupe (S) se rapporte alors à une équation différentielle E′ différente de la première, quoique ayant les mêmes points singuliers; relativement au système primitif de lacets a_1a_2, a_1ma_3, les équations E et E′ ont des groupes différents (S) et (S′) tels que

$$S'_3 = S_2^{-1}S_3S_2,$$
$$S'_k = S_k \qquad (k \neq 3);$$

on voit que le groupe (S′) se déduit de (S) en lui appliquant les opérations du n° 5; les deux groupes sont formés de substitutions identiques, mais notées différemment. On arrive aux mêmes conclusions en changeant d'une manière quelconque les chemins auxiliaires.

Il est plus important de déterminer quel changement il faut faire subir aux invariants I, et quels invariants $J_1, J_2, \ldots$ il faut employer pour que l'équation E′, dont le groupe (T) se déduit des J lorsqu'on les rapporte aux nouveaux lacets a_1a_2, a_1na_3, ..., ne soit pas distincte de l'équation E, et pour que la substitution T_3, relative à $a_1 n a_3$ qu'on déduit de J_{13}, conduise au même système d'intégrales pour le point a_3 que la substitution S_3 relative à $a_1 m a_3$; le raisonnement précédent nous fournit la solution; les nouveaux invariants J sont identiques aux I, sauf J_{13}, J_{23}, J_{34}, J_{123} et J_{134} qui sont les invariants des substitutions

$$S_1 S_2 S_3 S_2^{-1}, \quad S_2^2 S_3 S_2^{-1}, \quad S_2 S_3 S_2^{-1} S_4, \quad S_1 S_2^2 S_3 S_2^{-1}, \quad S_1 S_2 S_3 S_2^{-1} S_4,$$

et que l'on exprime au moyen des I par des formules connues.

Comme on applique les opérations du n° 5, les J forment un nouveau système d'invariants fondamentaux.

Dans le cas où les invariants satisfont aux conditions d'existence d'un polygone fuchsien, les côtés et les diagonales de ce polygone correspondent à un système de coupures tracées dans le plan de la variable, et les triangles ainsi formés dans les deux plans sont la représentation conforme les uns des autres; un changement des coupures joignant les points singuliers donne une transformation simple du polygone fuchsien auquel on ajoute ou retranche certaines parties congruentes. Cela nous indique que les invariants J sont, comme les I, réels et satisfont aux inégalités nécessaires pour l'existence d'un polygone; nous arrivons à cette conclusion que les opérations du n° 5, appliquées comme nous venons de le faire, conservent le signe des quantités Θ et H; tout point dont les coordonnées sont les invariants dans un espace à $4n-5$ dimensions, et situé à l'intérieur de la variété limitée par les équations $\Theta = 0$, $H = 0$ est transformé en un point situé également à l'intérieur de cette variété; nous avons déjà vu que les points de la variété limite définie par $\Theta = 0$, $H = 0$ sont transformés en d'autres points de cette même limite.

Nous verrons plus loin à quoi tiennent les différences des valeurs des invariants du groupe d'une équation donnée, lorsqu'on change le système des lacets; c'est à la présence de fonctions multiformes dans leur expression.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DES FONCTIONS Λ.

10. Je vais exprimer l'invariant d'une substitution quelconque et, en particulier, les invariants fondamentaux au moyen des paramètres A et B de l'équation différentielle mise sous la forme

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A_1}{(x-a_1)^2} + \frac{A_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a_n)^2} + \frac{B_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{B_n}{x-a_n}.$$

M. Poincaré a montré que l'intégrale générale est une fonction uniforme de ces paramètres, développable en une série de la forme

$$(2)\qquad y = f_{\substack{00\ldots\\00\ldots}}(x) + f_{\substack{10\ldots\\00\ldots}}(x)A_1 + \ldots + f_{\substack{k_1,k_2,\ldots\\l_1,l_2,\ldots}} A_1^{k_1}A_2^{k_2}\ldots B_1^{l_1}B_2^{l_2}\ldots.$$

Les fonctions f s'obtiennent par quadrature; car

$$\frac{d^2}{dx^2} f_{\substack{00\ldots\\00\ldots}} = 0,$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f_{\substack{10\ldots\\00\ldots}} = \frac{1}{(x-a_1)^2} f_{\substack{00\ldots\\00\ldots}},$$

et, en général,

$$\frac{d^2}{dx^2} f_{\substack{k_1,k_2,\ldots\\l_1,l_2,\ldots}} = \frac{1}{(x-a_1)^2} f_{\substack{k_1-1,k_2,\ldots\\l_1,l_2,\ldots}} + \frac{1}{(x-a_2)^2} f_{\substack{k_1,k_2-1,\ldots\\l_1,l_2,\ldots}} + \ldots + \frac{1}{x-a_1} f_{\substack{k_1,k_2,\ldots\\l_1-1,l_2,\ldots}} + \ldots;$$

les quadratures successives conduisent aux fonctions Λ, définies par les équations

$$\Lambda(x, x_0, a_1) = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-a_1},$$

$$\Lambda(x, x_0, a_1, a_2) = \int_{x_0}^{x} \Lambda(x, x_0, a_1)\frac{dx}{x-a_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et l'on voit de suite que toute fonction f est une fonction linéaire d'expressions Λ, avec des coefficients fonctions entières de x, de la forme

$$f = g_0(x) + g_1(x)\Lambda_1 + g_2(x)\Lambda_2 + \ldots. \tag{3}$$

Ces fonctions Λ ne sont pas uniformes; je vais montrer que, si la variable décrit un contour fermé, une fonction Λ renfermant k points singuliers reprend sa valeur primitive, augmentée de fonctions analogues renfermant au plus $k-1$ points singuliers.

Je considère, pour fixer les idées, la fonction

$$\Lambda(x, x_0, a_1, a_2, a_3);$$

elle satisfait à l'équation différentielle linéaire du troisième ordre et à second membre

$$\begin{vmatrix} y' & \dfrac{1}{x-a_3} & 0 \\ y'' & \dfrac{-1}{(x-a_3)^2} & \dfrac{1}{(x-a_3)(x-a_2)} \\ y''' - \dfrac{1}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} & \dfrac{2}{(x-a_3)^3} & \dfrac{-2}{(x-a_3)^2(x-a_2)} - \dfrac{1}{(x-a_3)(x-a_2)^2} \end{vmatrix} =$$

dont l'intégrale générale s'obtient en ajoutant à l'intégrale particulière, qui est la fonction considérée, l'intégrale générale de l'équation sans second membre, c'est-à-dire

$$C_1 + C_2\Lambda(x, x_0, a_3) + C_3\Lambda(x, x_0, a_2, a_3).$$

On verrait de même que les valeurs de $\Lambda(x, x_0, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ diffèrent d'une somme de fonctions Λ, obtenues en supprimant successivement les points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dans la fonction primitive, et sont, en général,

$$\left\{\begin{aligned} \Lambda = {} & \Lambda(x, x_0, a_1, a_2, \ldots, a_k) \\ & + C_1\Lambda(x, x_0, a_2, \ldots, a_k) + \ldots + C_{k-1}\Lambda(x, x_0, a_k) + C_k. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Pour déterminer les constantes, faisons $x = x_0$ dans les deux membres et leurs $k-1$ premières dérivées, on obtient

$$\begin{aligned} C_k &= \Lambda(x, x_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)_{x=x_0}, \\ C_{k-1} &= \Lambda(x, x_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})_{x=x_0}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1 &= \Lambda(x, x_0, a_1)_{x=x_0}, \end{aligned}$$

x reprenant la valeur x_0 après avoir décrit le contour, puis suivi en sens inverse le chemin primitif d'intégration $x_0 \ldots x$.

Si l'on connaît la valeur des seconds membres pour deux contours C et C', l'équation (4) et d'autres analogues fourniront leur valeur pour le contour C + C'; il suffit donc d'avoir leur valeur pour des contours simples pour en déduire celle qu'ils acquièrent pour des contours quelconques.

Je vais me servir de cette proposition pour démontrer que le développement (2) n'est possible que d'une seule manière ou que le développement (3) d'un coefficient f est unique. Cela revient à montrer qu'il ne peut exister entre des fonctions A distinctes aucune relation de la forme

$$g_0(x) + g_1(x)\Lambda_1 + g_2\Lambda_2 + \ldots + g_h\Lambda_h = 0, \tag{5}$$

où $g_0, g_1, \ldots, g_h$ sont des fonctions uniformes quelconques.

Supposons d'abord que chacune des fonctions Λ ne dépende que d'un point singulier, Λ_1 de a_1 par exemple. Si la variable décrit un contour autour du seul point a_1, toutes les fonctions Λ reprennent la même valeur, à l'exception de Λ_1 qui s'augmente de $2i\pi$; comme la relation subsiste, on doit avoir

$$2i\pi\, g_1(x) = 0,$$

et $g_1(x)$ doit être identiquement nulle. Il en est de même des autres.

Supposons maintenant que le théorème soit exact lorsque les fonctions Λ renferment au plus $k-1$ points singuliers, je vais montrer qu'il est vrai lorsqu'elles en renferment k.

Je sépare les fonctions Λ renfermant k points singuliers en groupes

$$\Lambda_1, \quad \Lambda_2, \quad \ldots, \quad \Lambda_\alpha; \quad \Lambda_{\alpha+1}, \quad \Lambda_{\alpha+2}, \quad \ldots, \quad \Lambda_\beta; \quad \ldots,$$

les fonctions de chaque groupe ne différant que par le premier point, que je désignerai par

$$a_{i_1}, \quad a_{i_2}, \quad \ldots, \quad a_{i_\alpha}; \quad a_{i_{\alpha+1}}, \quad \ldots, \quad a_{i_\beta}; \quad \ldots,$$

suivant qu'il appartient à l'une ou l'autre des fonctions.

Lorsque x décrit un contour fermé C, le premier membre de l'équation (5) s'augmente d'une somme de fonctions Λ renfermant au plus

$k - 1$ points singuliers, et cette somme doit être identiquement nulle. Il en résulte, d'après l'hypothèse, une série d'équations

$$\begin{gathered} C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) + \ldots + C_\alpha g_\alpha(x) = 0, \\ C_{\alpha+1} g_{\alpha+1}(x) + C_{\alpha+2} g_{\alpha+2}(x) + \ldots + C_\beta g_\beta(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{gathered}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_\alpha$ sont respectivement égales aux valeurs que prennent

$$\Lambda(x, x_0, a_{i_1}), \quad \Lambda(x, x_0, a_{i_2}), \quad \Lambda(x, x_0, a_{i_\alpha}),$$

lorsque x reprend la valeur x_0 après avoir décrit le contour C. En choisissant convenablement ce contour, on peut faire en sorte que toutes les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_\alpha$ soient nulles, à l'exception d'une seule qui est égale à $2i\pi$; la fonction g qui a même indice doit être identiquement nulle. On verrait de même que toutes les fonctions g doivent être nulles, et le théorème est démontré.

11. Il existe des fonctions Λ ou des sommes de ces fonctions qui jouissent de propriétés analogues au logarithme et que je me propose d'étudier, parce qu'elles seront utiles dans la suite.

Je désignerai, pour simplifier, par $\Lambda(x, x_0, a_1^k)$ une fonction renfermant k points singuliers identiques à a_1 et, en général, par $\Lambda(x, x_0, a_1^k, a_2^l, \ldots)$ une fonction dont les k premiers points sont identiques à a_1, les l suivants à a_2, etc.

Je considère la fonction $\Lambda(x, x_0, a_1^k)$ et je suppose que la variable, en partant de x_0, décrive, dans le sens direct, autour de a_1, un cercle de rayon ρ; si $x_0 = a_1 + \rho e^{i\theta_0}$, on a

$$\Lambda(x, x_0, a_1) = \int_{\theta_0}^{\theta} d i\theta = i(\theta - \theta_0),$$

$$\Lambda(x, x_0, a_1^2) = \int_{\theta_0}^{\theta} i(\theta - \theta_0)\, d i\theta = \frac{i(\theta - \theta_0)^2}{1.2}$$

et, en général,

$$\Lambda(x, x_0, a_1^k) = \frac{i(\theta - \theta_0)^k}{1.2\ldots k}. \tag{6}$$

Lorsque θ prend la valeur $\theta_0 + 2\pi$, la fonction Λ devient $\frac{(2i\pi)^k}{1.2\ldots k}$, et si θ prend la valeur $\theta_0 + 2n\pi$, la fonction devient

$$\frac{(2ni\pi)^k}{1.2\ldots k}.$$

Je considère maintenant une fonction renfermant k points singuliers, dont k_1 égaux à a_1, k_2 égaux à a_2, ..., k_n à a_n, et toutes les fonctions obtenues en faisant sur ces k points singuliers toutes les permutations possibles, en nombre

$$\frac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}.$$

Je dis que *la somme de toutes ces fonctions* $\Sigma\Lambda(x, x_0, a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots)$ *prend une valeur constante, indépendante de* x_0 *et des points singuliers, lorsque* x *reprend la valeur* x_0 *après avoir décrit un contour quelconque.*

Cette somme, pour une valeur quelconque de x, est une fonction de x et de $a_1, a_2, \ldots, a_n$: je la considère comme fonction de x et de a_1; x étant dans le voisinage du point x_0 et a_1 d'un point a_1^0, elle est développable suivant les puissances croissantes de $a_1 - a_1^0$, pourvu que le module de cette quantité soit suffisamment petit et que x reste dans le domaine du point x_0. On peut continuer cette fonction lorsque x sort de ce domaine et décrit un chemin quelconque.

Les dérivées, par rapport à a_1, des différentes fonctions se calculent d'après la formule suivante :

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a_1}\Lambda(x, x_0, a_1^{\lambda}, a_p^{\mu}, \ldots, a_q^{\nu}, a_1^{\lambda'}, a_r^{\rho}, \ldots, a_s^{\sigma}, a_1^{\lambda''})\\
&\quad=\left(\frac{1}{x_0 - a_1} + \frac{1}{a_1 - a_p}\right)\Lambda(x, x_0, a_1^{\lambda-1}, a_p^{\mu}, \ldots)\\
&\qquad+\frac{1}{a_p - a_1}\Lambda(x, x_0, a_1^{\lambda}, a_p^{\mu-1}, \ldots) - \frac{1}{a_q - a_1}\Lambda(\ldots, a_q^{\nu-1}, a_1^{\lambda'}, \ldots)\\
&\qquad+\left(\frac{1}{a_1 - a_r} - \frac{1}{a_1 - a_q}\right)\Lambda(\ldots, a_q^{\nu}, a_1^{\lambda'-1}, a_r^{\rho}, \ldots) + \frac{1}{a_r - a_1}\Lambda(\ldots, a_1^{\lambda'}, a_r^{\rho-1}, \ldots)\\
&\qquad-\frac{1}{a_s - a_1}\Lambda(\ldots, a_s^{\sigma-1}, a_1^{\lambda''}) - \left(\frac{1}{a_1 - a_s} + \frac{1}{x - a_1}\right)\Lambda(\ldots, a_s^{\sigma}, a_1^{\lambda''-1}).
\end{aligned}\right.$$

La dérivée de la somme est formée de fonctions Λ renfermant $k - 1$ points singuliers; elle se réduit à

$$\left(\frac{1}{x_0 - a_1} - \frac{1}{x - a_1}\right) \Sigma \Lambda(x, x_0, a_1^{k_1 - 1}, a_2^{k_2}, \ldots),$$

la somme s'étendant à toutes les permutations des $k - 1$ points singuliers.

On peut former les dérivées successives de la somme par rapport à a_1, y faire $a_1 = a_1^0$ et écrire le développement suivant les puissances de $a_1 - a_1^0$.

Pour continuer la fonction de x au delà du domaine du point x_0, il suffit de continuer les coefficients du développement suivant les puissances de $a_1 - a_1^0$; lorsque x, après avoir décrit un certain contour, reprend la valeur x_0, tous ces coefficients s'annulent, excepté le terme tout connu; la somme prend donc une valeur indépendante de a_1; on verrait de même qu'elle acquiert une valeur indépendante des autres points singuliers.

Pour avoir cette valeur, je distinguerai deux cas :

1° x, partant de x_0, décrit un contour simple entourant tous les points singuliers qui entrent dans les fonctions Λ, c'est-à-dire un contour équivalent à un lacet autour de l'infini; on peut alors supposer que les points singuliers occupent des positions quelconques, et se rapprochent indéfiniment de l'un d'eux a_1; chaque partie de la somme devient $\Lambda(x, x_0, a_1^k)$, et lorsque x reprend la valeur x_0, la somme acquiert la valeur

$$\frac{(2i\pi)^k}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!};$$

2° x décrit un contour simple entourant un ou plusieurs des points singuliers, mais en laissant d'autres à son extérieur; on peut supposer les premiers réunis en un seul et les seconds rejetés à l'infini : les éléments d'intégration relatifs à ces points singuliers sont alors nuls, et la somme est nulle lorsque x reprend la valeur x_0.

En particulier, la somme $\Lambda(x, x_0, a_1, a_2) + \Lambda(x, x_0, a_2, a_1)$ prend la valeur 0 ou $-4\pi^2$ suivant que x reprend la valeur x_0 après avoir décrit un contour simple entourant un point ou les deux points a_1, a_2.

Comme au paragraphe précédent, on peut, en partant de contours simples, calculer la valeur que prend une somme de fonctions Λ

lorsque x reprend la valeur x_0 après avoir décrit un contour quelconque; c'est une fonction de $2i\pi$.

12. *Une somme de fonctions* Λ *ne contenant que deux points singuliers*

$$\Lambda(x, x_0, a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, a_1^{l_1}, \ldots) + \Lambda(x, x_0, a_1^{k_1-1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_1) + \ldots,$$

étendue à toutes les permutations circulaires des lettres qui y entrent, prend une valeur constante, indépendante de x_0, a_1 *et* a_2, *lorsque* x *reprend la valeur* x_0 *après avoir décrit un contour quelconque.*

En répétant le raisonnement du paragraphe précédent, on trouve que les dérivées de cette somme, prises par rapport à a_1 ou à a_2, s'annulent identiquement lorsque x reprend la valeur x_0; la somme acquiert une valeur constante; elle est nulle si x décrit un contour simple autour de l'un des deux points; elle est égale à

$$n\frac{(2i\pi)^k}{k!}$$

si x décrit un contour simple autour de deux points, k étant la somme des exposants des points singuliers, et n le nombre des fonctions. Ainsi

$$\Lambda(x, x_0, a_1, a_2, a_1, a_2) + \Lambda(x, x_0, a_2, a_1, a_2, a_1)$$

devient 0 ou $2\frac{(2i\pi)^4}{4!}$ suivant que x décrit un contour autour d'un point ou de deux points.

Une somme de fonctions Λ *renfermant un nombre quelconque de points singuliers et étendue à toutes les permutations circulaires des lettres prend une valeur indépendante de* x_0 *lorsque* x *reprend la valeur* x_0 *après avoir décrit un contour quelconque.*

Soit k la somme des exposants, je suppose que le théorème soit vrai lorsque cette somme est égale à $k-1$; la dérivée de la somme des fonctions, prise par rapport à a_1, devient, pour $x=x_0$, une somme de termes de la forme

$$\frac{1}{a_1 - a_2}\Sigma\Lambda(x, x_0, a_1^{k_1-1}, a_2^{k_2}, \ldots)_{x=x_0},$$

les fonctions Λ ne renfermant que $k-1$ points singuliers, et les sommes étant étendues aux permutations circulaires; ces sommes étant indépendantes de x_0, il en est de même de la somme des fonctions considérées.

En prenant la dérivée de ces sommes qui renferment $k-1$ points singuliers, on peut, après plusieurs dérivations analogues, faire disparaître l'un des points singuliers dans les fonctions Λ qui composent les dérivées; on est finalement ramené à des sommes renfermant deux points singuliers; le théorème étant vrai pour ces sommes, il est vrai dans tous les cas.

Le calcul précédent montre qu'une somme de fonctions Λ étendue aux permutations circulaires prend, pour $x = x_0$, une valeur que l'on peut calculer par des quadratures successives effectuées par rapport à $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Considérons, par exemple, la somme

$$S = \Lambda(a_1, a_2, a_3) + \Lambda(a_2, a_3, a_1) + \Lambda(a_3, a_1, a_2),$$

x et x_0 étant omis, pour montrer que l'on fait $x = x_0$; nous avons

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \left(\frac{1}{a_1 - a_2} - \frac{1}{a_1 - a_3}\right)\Sigma_{23} - \frac{1}{a_1 - a_2}\Sigma_{31} + \frac{1}{a_1 - a_3}\Sigma_{12},$$

Σ_{23}, Σ_{31}, Σ_{12} représentant $\Lambda(a_2, a_3) + \Lambda(a_3, a_2)$ et les sommes analogues; par suite, en intégrant par rapport à a_1,

$$S = \Sigma_{23}\log\frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3} + \Sigma_{31}\log\frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_1} + \Sigma_{12}\log\frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2} + C_1\Sigma_{23} + C_2\Sigma_{31} + C_3\Sigma_{12},$$

C_1, C_2, C_3 étant des constantes indépendantes de a_1, a_2, a_3, et dont la présence tient à la multiplicité des déterminations des logarithmes.

Pour évaluer les fonctions Λ qui composent la somme S, nous supposons que le contour décrit par la variable se compose de lacets formés de droites partant du point x_0 et de petits cercles entourant les points singuliers. Nous convenons de plus de prendre pour valeur de $\log\frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}$ celle qui se réduit à zéro lorsque a_2 vient se confondre avec a_3 après avoir parcouru la droite a_2x_0, puis la droite x_0a_3; nous prenons d'une manière analogue les deux autres logarithmes.

En faisant ces conventions, les constantes C_1, C_2, C_3 sont nulles. En effet, si x décrit les lacets entourant a_2 et a_3, Σ_{31} et Σ_{12} sont nuls, Σ_{23}

est égal à $-4\pi^2$, de sorte que

$$S = -4\pi^2\left(\log\frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3} + C_1\right).$$

Si, de plus, a_2 vient se confondre avec a_3, en suivant le chemin $a_2 x_0 a_3$, S devient

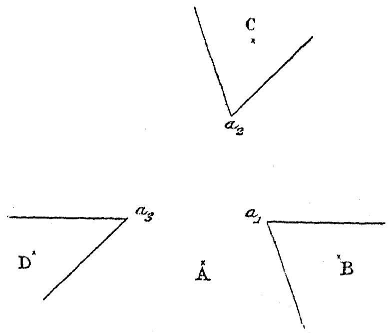
$$\Lambda(a_1, a_2^2) + \Lambda(a_2^2, a_1) + \Lambda(a_2, a_1, a_2)$$

et a une valeur nulle, car le contour n'entoure que l'un des points; comme le logarithme devient nul, on doit avoir $C_1 = 0$. On verrait de même que C_2 et C_3 sont nuls.

La fonction S que nous venons de déterminer jouit de propriétés remarquables; elle dépend de la nature du contour, de l'origine et des points singuliers a_1, a_2, a_3.

1° L'origine x_0 étant un point fixe déterminé et les logarithmes étant pris comme nous l'avons dit, on obtiendra la valeur de S relative à un contour quelconque en remplaçant Σ_{23}, Σ_{31}, Σ_{12} par les valeurs qu'acquièrent ces fonctions après que x a décrit le contour; nous les supposons connues; ce sont des fonctions de $2i\pi$.

Fig. 2.



2° S est une fonction de x_0, bien que x_0 ne figure pas explicitement dans son expression; à ce point de vue, c'est une fonction présentant des coupures, comme celles qu'a considérées M. Hermite [1], et ces coupures sont les prolongements des côtés du triangle obtenu en joignant les points a_1, a_2, a_3 (*fig.* 2) : cela tient à ce que l'ordre de suc-

---

[1] Cours rédigé par M. Andoyer, XV^e et XVI^e Leçon.

cession des lacets (a_1), (a_2), (a_3) change lorsque x_0 traverse une de ces coupures.

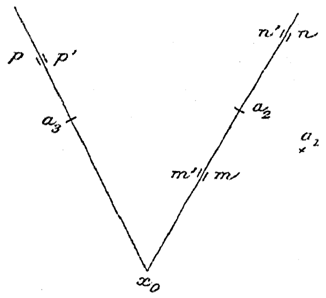
Si S_A, S_B, S_C, S_D sont les valeurs de S aux points A, B, C, D, on a

$$S_B = S_A + 2i\pi\Sigma_{23},$$
$$S_C = S_A + 2i\pi\Sigma_{31},$$
$$S_D = S_A + 2i\pi\Sigma_{12}.$$

Si le point A est tel que les lacets pris dans l'ordre (a_1), (a_2), (a_3) ne donnent plus le lacet de l'infini, il faut changer le signe de $2i\pi$.

3° S est une fonction de a_1, a_2, a_3; en supposant que a_2, a_3 et x_0 restent fixes, c'est une fonction de a_1 qui admet a_2 et a_3 comme points singuliers, et qui possède, de plus, comme coupures, les droites joignant x_0 aux points a_2 et a_3 et les prolongements de ces droites (*fig.* 3).

Fig. 3.



Si le point a_1 se déplace et traverse ces coupures; s'il passe, par exemple, de m au point m' infiniment rapproché de m, mais situé de l'autre côté de $x_0 a_2$, S éprouve le même changement que si a_1, a_2 et a_3 restent fixes, et x_0 traverse la coupure aboutissant au point a_1 dans la figure précédente. On a, par suite,

$$S_{m'} = S_m + 2i\pi\Sigma_{23},$$
$$S_{n'} = S_n + 2i\pi\Sigma_{13},$$
$$S_{p'} = S_p + 2i\pi\Sigma_{12}.$$

Ces formules donnent la variation de S lorsque a_1 revient à sa position première après avoir décrit un contour quelconque.

Les développements qui précèdent permettent d'énoncer les résultats obtenus dans le cas général. Si l'on a calculé les sommes de fonctions Λ étendues aux permutations circulaires des lettres, lorsque la somme des exposants est égale à $k-1$, on peut en déduire, par quadratures, les sommes analogues dans lesquelles la somme des exposants est égale à k; on aura, en général,

$$\Sigma\Lambda(\ldots, a_h^{\lambda}, a_k^{\mu}, a_l^{\nu}, \ldots) = \sum \int \left(\frac{da_k}{a_k - a_l} - \frac{da_k}{a_k - a_h}\right) \Sigma\Lambda(\ldots, a_h^{\lambda}, a_k^{\mu-1}, a_l^{\nu}, \ldots),$$

les sommes de fonctions Λ étant étendues aux permutations circulaires et les intégrales qui composent le second membre étant obtenues en prenant pour a_k tous les points singuliers dans l'ordre où ils se présentent. De la sorte, une somme de fonctions Λ s'exprimera au moyen des sommes d'intégrales Λ portant sur deux points singuliers, multipliées par des intégrales multiples analogues aux fonctions Λ, mais où la variable est l'un ou l'autre des points singuliers a_1, a_2, ...

Les prolongements des droites joignant entre eux les points singuliers deux à deux sont des coupures pour la somme considérée comme fonction de x_0; cette fonction reste constante tant que x_0 ne traverse pas les coupures, sinon elle s'augmente d'une somme d'intégrales analogues à celles dont elle est composée, le nombre des quadratures étant diminué d'une ou de plusieurs unités. De même, la somme considérée comme fonction de l'un des points singuliers a_1 a pour coupures les droites qui joignent x_0 aux autres points singuliers.

Calcul des invariants.

13. Je passe maintenant à la détermination des invariants. Si l'on considère deux intégrales particulières y_1 et y_2 développées autour du point x_0 d'après la méthode donnée précédemment, on peut chercher ce qu'elles deviennent lorsque x a décrit un contour fermé; leurs nouvelles valeurs, ainsi que celles de leurs dérivées, serviront à calculer les coefficients de la substitution.

Ce calcul s'effectue simplement si l'on choisit deux intégrales particulièrement simples. J'appellerai v_1 l'intégrale qui, pour $x = x_0$, est égale à l'unité et dont la dérivée est nulle, et v_2 l'intégrale qui est nulle pour $x = x_0$ et dont la dérivée se réduit à l'unité.

Soient

$$u_1 = \alpha v_1 + \beta v_2,$$
$$u_2 = \gamma v_1 + \delta v_2$$

ce que deviennent ces intégrales lorsque x a décrit un certain contour. Si l'on fait $x = x_0$ dans les deux membres de ces équations et dans leurs dérivées, on a, pour l'invariant de la substitution,

$$\alpha + \delta = (u_1)_0 + (u'_2)_0.$$

En développant l'intégrale v_1 suivant les puissances croissantes des paramètres A et B, on devra prendre pour terme indépendant l'unité; les autres se calculeront d'après la méthode du n° 10, et l'on aura, en général,

$$f_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_n \\ l_1, l_2, \ldots, l_n}} = \sum \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x-a_1)^2} \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x-a_2)^2} \cdots;$$

dans la suite des intégrations successives se présentent k_1 fois $(x-a_1)^2$, k_2 fois $(x-a_2)^2$, $\ldots$, l_1 fois $x-a_1$, $\ldots$, l_n fois $x-a_n$, et la somme Σ est étendue à toutes les permutations possibles de ces quantités dans l'intégrale multiple.

Pour la seconde intégrale v_2, on doit prendre $f_{00\ldots} = \int_{x_0}^{x} dx$, et les autres s'en déduisent par quadratures; comme on n'a besoin que des coefficients de la dérivée de la seconde intégrale, j'écrirai

$$\varphi_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_n \\ l_1, l_2, \ldots l_n}} = \sum \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x-a_1)^2} \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x-a_2)^2} \cdots \int_{x_0}^{x} dx,$$

la somme ayant la même signification que précédemment. Finalement, le coefficient de $A_1^{k_1} A_2^{k_2} \ldots B_n^{l_n}$ dans l'invariant sera

$$[A_1^{k_1} A_2^{k_2} \ldots B_n^{l_n}] = \Big[f_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_n \\ l_1, l_2, \ldots, l_n}} + \varphi_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_n \\ l_1, l_2, \ldots, l_n}} \Big]_{x=x_0},$$

x reprenant la valeur x_0 après avoir décrit le contour donné.

Nous avons vu que les coefficients f se mettent sous la forme (3) où les g sont des fonctions entières; les coefficients φ se mettront sous la même forme où les g pourront être des fonctions rationnelles ayant pour infinis $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Il en résulte que chaque coefficient du développement de l'invariant sera de la forme

$$\Sigma\, G(x_0)\, A(x_0, a_1, \ldots, a_n),$$

où les G sont des fonctions rationnelles.

Avant d'entrer dans le détail du calcul, je vais donner quelques propriétés générales des invariants et des coefficients qui entrent dans leur développement.

Ils sont indépendants du point x_0, origine du contour. Si l'on choisit, en effet, un autre point x_1, et si w_1 et w_2 sont deux intégrales déterminées dans le domaine de x_1, comme v_1 et v_2 le sont dans celui de x_0, les substitutions subies par w_1 et w_2 sont des transformées de celles qui sont subies par v_1 et v_2 et ont mêmes invariants; x_0 ne doit donc pas entrer dans leur expression.

Si l'on effectue sur la variable une substitution

$$x = \alpha\xi + \beta,$$

les intégrales qui servent alors pour le calcul des invariants sont $\eta_1 = v_1$ et $\eta_2 = \frac{1}{\alpha} v_2$; comme on a

$$\left[\eta_1 + \frac{d\eta_2}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_0} = \left[v_1 + \frac{dv_2}{dx}\right]_{x=x_0},$$

les invariants ne sont pas altérés par cette substitution. L'équation à laquelle satisfont η_1 et η_2 étant

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \eta\left[\frac{A_1}{\left(\xi - \frac{a_1-\beta}{\alpha}\right)^2} + \frac{A_2}{\left(\xi - \frac{a_2-\beta}{\alpha}\right)^2} + \ldots + \frac{B_1\alpha}{\xi - \frac{a_1-\beta}{\alpha}} + \ldots\right],$$

il en résulte que les invariants ne sont pas altérés par la transformation

$$(8)\qquad \begin{cases} A_h, & A_h; \\ B_h, & B_h\alpha; \\ a_h, & \dfrac{a_h-\beta}{\alpha}. \end{cases}$$

On en conclut d'abord qu'ils ne sont fonctions que des seules différences $a_1 - a_2, a_1 - a_3, \ldots, a_i - a_j, \ldots$; de plus, que les coefficients des puissances des paramètres A ou des produits de ces puissances sont des fonctions homogènes et de degré zéro des points singuliers a_1, a_2, ..., a_n, et enfin que le coefficient d'un terme où la somme des exposants des paramètres B est égale à m est une fonction homogène et de degré m des points singuliers.

On pourrait déterminer par un seul calcul tous les coefficients des termes où la somme des exposants est égale à p. Considérons p points singuliers distincts et l'expression suivante, où l'on fait $x = x_0$ après un contour donné,

$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p] = \sum \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-\alpha_1} \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-\alpha_2} \cdots \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-\alpha_p}$$

$$+ \sum \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-\alpha_1} \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-\alpha_2} \cdots \int_{x_0}^{x} dx,$$

les sommes Σ étant étendues aux $p!$ permutations des p points α_1, α_2, ..., α_p. On aura, si la somme des exposants k est égale à $q \leqq p$,

$$[A_1^{k_1} A_2^{k_2} \ldots A_n^{k_n} B_1^{l_1} \ldots B_n^{l_n}] = \frac{1}{k_1!\, k_2! \ldots l_1! \ldots l_n!} \frac{\partial^q}{\partial \alpha_1 \, \partial \alpha_2 \ldots \partial \alpha_q} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p],$$

en faisant ensuite dans le second membre les k_1 premiers points α_1 égaux à a_1, les k_2 suivants égaux à a_2, ...

14. Je vais calculer les invariants des substitutions que l'on obtient lorsque x décrit un contour entourant un seul point singulier a_1; on peut, en appliquant la transformation (8) du numéro précédent, choisir α et β de telle sorte que

$$\frac{a_1 - \beta}{\alpha} = a_1,$$

et donner à α un module aussi petit que l'on veut; de la sorte a_2, a_3, ..., a_n sont remplacés par des points s'éloignant à l'infini, et $B_1 B_2 \ldots B_n$ par des quantités tendant vers zéro; en d'autres termes, les invariants cherchés sont les mêmes pour l'équation donnée et pour l'équation plus simple

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{A_1}{(x-a_1)^2} y_1.$$

Le calcul donne

$$[A_1^0] = 2, \qquad [A_1^1] = 0, \qquad [A_1^2] = 2\Lambda(a_1^2), \qquad \ldots,$$

$$[A_1^k] = [(-1)^k + 1]\Lambda(a_1^k) + [(-1)^k - 1]\,\frac{k-1}{1}\,\Lambda(a_1^{k-1}) + \ldots$$
$$+ [(-1)^k + (-1)^s]\,\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+s-1)}{1.2\ldots(s-1)}\,\frac{k-s}{s}\,\Lambda(a_1^{k-s}) + \ldots$$
$$+ [(-1)^k + (-1)^{k-2}]\,\frac{(k+1)(k+2)\ldots(2k-3)}{1.2\ldots(k-3)}\,\frac{2}{k-2}\,\Lambda(a_1^2).$$

On obtiendra l'invariant I_1 en remplaçant $\Lambda(a_1^k)$ par $\frac{(2i\pi)^k}{k!}$, et en général I_{1^n} en remplaçant $\Lambda(a_1^k)$ par $\frac{(2ni\pi)^k}{k!}$.

Le résultat obtenu concorde bien avec celui que l'on déduit de la considération de l'équation fondamentale déterminante relative à a_1; cette équation est

$$r^2 - r - A_1 = 0,$$

et

$$I_1 = e^{2i\pi r_1} + e^{2i\pi r_1'} = -2\cos\pi\sqrt{1+4A_1}$$
$$= -2\left[1 - \frac{\pi^2}{2!}(1+4A_1) + \frac{\pi^4}{4!}(1+4A_1)^2 - \ldots\right].$$

Ce développement ordonné suivant les puissances de A_1 est identique à celui que nous avons obtenu, comme cela résulte des identités suivantes, faciles à démontrer,

$$2 = -2\cos\pi = -2\left[1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} + \ldots + (-1)^s\,\frac{\pi^{2s}}{2s!} + \ldots\right],$$
$$0 = -8\left[-\frac{\pi^2}{2!} + \frac{2}{1}\,\frac{\pi^4}{4!} - \ldots + (-1)^s\,\frac{s}{1}\,\frac{\pi^{2s}}{2s!} + \ldots\right],$$

et, en général,

$$[A_1^k] = -2.4^k\left[(-1)^k\,\frac{\pi^{2k}}{2k!} + (-1)^{k+1}\,\frac{k+1}{1}\,\frac{\pi^{2k+2}}{(2k+2)!} + \ldots\right.$$
$$\left. + (-1)^s\,\frac{s(s-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots(s-k)}\,\frac{\pi^{2s}}{2s!} + \ldots\right].$$

15. Je considère maintenant l'invariant d'une substitution quelconque; un coefficient du développement suivant les puissances des

paramètres A et B est une fonction linéaire des fonctions Λ, les coefficients étant des fonctions rationnelles de x_0 et des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Je vais d'abord montrer qu'on ne peut le mettre sous cette forme que d'une seule manière; autrement dit, il n'existe entre des fonctions Λ où l'on a donné à x la valeur x_0 après lui avoir fait décrire un contour quelconque, aucune relation de la forme

$$g_1(x_0, a_1, a_2, \ldots)\,\Lambda_1(a_1, a_2, \ldots) + g_2\Lambda_2 + \ldots + g_h\Lambda_h = 0.$$

En effet, la fonction de x qui donne naissance au premier membre,

$$g_1(x, a_1, \ldots)\,\Lambda_1(x, x_0, a_1, a_2, \ldots) + g_2\Lambda_2 + \ldots + g_h\Lambda_h$$

reprendrait la valeur zéro lorsqu'on donnerait à x la valeur x_0 après lui avoir fait décrire un contour quelconque; ce serait une fonction uniforme de x, ce que nous avons reconnu être impossible.

Cela posé, soit C un coefficient du développement de l'invariant suivant les puissances des A et des B; c'est une somme de fonctions Λ affectées de coefficients g; je vais démontrer le théorème suivant :

Les coefficients g sont indépendants de x_0; les fonctions Λ se partagent en groupes, chacun d'eux contenant toutes les fonctions Λ qui se déduisent de la première par permutation circulaire des lettres; de plus, toutes les fonctions d'un groupe sont affectées du même coefficient g.

Soit k la somme des exposants des points singuliers dans les fonctions Λ où elle est la plus élevée; $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_\alpha$ un groupe de fonctions Λ renfermant k points singuliers, et se déduisant de la première par permutation circulaire des lettres, $\Lambda_{\alpha+1}, \Lambda_{\alpha+2}, \ldots, \Lambda_\beta$ les autres fonctions Λ renfermant k points singuliers, et partagées également en groupes; soient enfin $\Lambda_{\beta+1}, \Lambda_{\beta+2}, \ldots$ celles qui renferment au plus $k-1$ points singuliers. On aura, par exemple,

$$\begin{aligned} C = {} & g_1(x_0, a_1, \ldots)\,\Lambda_1(x_0, a_1^\lambda, a_p^\mu, \ldots, a_s^\sigma) + g_2\Lambda_2(x_0, a_1^{\lambda-1}, a_p^\mu, \ldots, a_s^\sigma, a_1) \\ & + g_3\Lambda_3 + \ldots + g_\alpha\Lambda_\alpha + g_{\alpha+1}(x_0, a_1, \ldots)\,\Lambda_{\alpha+1}(x_0, a_1^{\lambda'}, a_q^\nu, \ldots) + \ldots \\ & + g_\beta\Lambda_\beta + g_{\beta+1}(x_0\, a_1, \ldots)\,\Lambda_{\beta+1}(x_0, a_1^{\lambda-1}, a_p^\mu, \ldots, a_s^\sigma) + \ldots . \end{aligned}$$

C étant indépendant de x_0, comme nous l'avons vu, ne change pas si l'on remplace x_0 par $x_0+\xi$, de sorte que

$$C = g_1(x_0+\xi, a_1, \ldots)\Lambda_1(x_0+\xi, a_1^\lambda, \ldots)+\ldots;$$

la définition d'une fonction Λ et sa représentation par des quadratures montrent, d'autre part, que

$$\Lambda(x_0+\xi, a_1^\lambda, a_p^\mu, \ldots) = \Lambda[x_0, (a_1-\xi)^\lambda, (a_p-\xi)^\mu, \ldots],$$

ou, en développant le second membre suivant les puissances de ξ,

$$= \Lambda(x_0, a_1^\lambda, a_p^\mu, \ldots) - \frac{\xi}{1}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}+\frac{\partial}{\partial a_p}+\ldots\right)\Lambda(x_0, a_1^\lambda, a_p^\mu, \ldots)+\ldots.$$

Les termes qui suivent le premier se calculent d'après la formule (7) du n° 11, et sont une somme de fonctions Λ en nombre fini, renfermant au plus $k-1$ points singuliers. En remplaçant les fonctions Λ par leurs valeurs ainsi calculées, on a

$$C = g_1(x_0+\xi, a_1, \ldots)\Lambda_1(x_0, a_1^\lambda, a_p^\mu, \ldots)+\ldots+g_\beta(x_0+\xi, a_1, \ldots)\Lambda_\beta,$$

plus des termes renfermant au plus $k-1$ points singuliers; en identifiant les deux valeurs ainsi trouvées pour C, on a, pour les termes renfermant k points,

$$\begin{gathered} g_1(x_0+\xi, a_1, \ldots) = g_1(x_0, a_1, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_\beta(x_0+\xi, a_1, \ldots) = g_\beta(x_0, a_1, \ldots), \end{gathered}$$

ce qui indique que les coefficients $g_1, g_2, \ldots, g_\beta$ sont indépendants de x_0.

Considérons maintenant les termes renfermant $k-1$ points singuliers, et en particulier la fonction

$$\Lambda_{\beta+1}(x_0, a_1^{\lambda-1}, a_p^\mu, \ldots, a_s^\sigma);$$

dans la première valeur de C, son coefficient est $g_{\beta+1}(x_0, a_1, \ldots)$; dans la seconde valeur, après transformation des fonctions Λ, les termes renfermant $\Lambda_{\beta+1}(x_0, a_1^{\lambda-1}, \ldots)$ sont :

1°

$$g_{\beta+1}(x_0+\xi, a_1, \ldots)\Lambda(x_0, a_1^{\lambda-1}, a_p^\mu, \ldots);$$

2° Des termes provenant des dérivées

$$\frac{\partial}{\partial a_1}\Lambda_1(x_0, a_1^\lambda, a_p^\mu, \ldots), \qquad \frac{\partial}{\partial a_p}\Lambda_1(x_0, a_1^\lambda, a_p^\mu, \ldots);$$
$$\frac{\partial}{\partial a_1}\Lambda_2(x_0, a_1^{\lambda-1}, \ldots, a_s^\sigma, a_1), \qquad \frac{\partial}{\partial a_s}\Lambda_2(x_0, a_1^{\lambda-1}, \ldots, a_s^\sigma, a_1)$$

et d'autres analogues, telles que

$$\frac{\partial}{\partial a_r}\Lambda_{\alpha+h}(x_0, a_1^{\lambda-1}, a_p^\mu, \ldots, a_r^{\rho+1}, \ldots, a_s^\sigma).$$

En les calculant d'après les formules (7), on trouve que le coefficient de $\Lambda_{\beta+1}$ est égal à

$$-\xi(g_1-g_2)\frac{1}{x_0-a_1}+\sum -\xi g_m\frac{1}{a_i-a_j},$$

le premier terme contenant seul le facteur $\frac{1}{x_0-a_1}$; en identifiant les deux coefficients de $\Lambda_{\beta+1}$, on a

$$g_{\beta+1}(x_0, a_1, \ldots) = g_{\beta+1}(x_0+\xi, a_1, \ldots) - \xi(g_1-g_2)\frac{1}{x_0-a_1}+\sum -\xi g_m\frac{1}{a_i-a_j},$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x_0}g_{\beta+1}(x_0, x_1, \ldots)+\frac{\xi}{12}\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}g_{\beta+1}+\ldots=(g_1-g_2)\frac{1}{x_0-a_1}+\sum g_m\frac{1}{a_i-a_j}.$$

Une telle égalité est impossible, car le seul terme du second membre renfermant x_0 est $(g_1-g_2)\frac{1}{x_0-a_1}$, et ne peut être la dérivée par rapport à x_0 d'une fonction rationnelle de cette quantité; on doit donc avoir

$$g_1 = g_2,$$

et l'on verra de même que

$$g_1 = g_2 = \ldots = g_\alpha.$$

Le théorème étant ainsi démontré pour les termes renfermant k points singuliers, il résulte d'un théorème énoncé au n° 12 que l'ensemble de ces termes est indépendant de x_0; si l'on représente cet ensemble par C_1, la quantité $C - C_1$ est également indépendante de x_0; comme les fonctions Λ qui la composent renferment au plus

$k-1$ points singuliers, on voit, en répétant le raisonnement précédent, et en continuant ainsi de proche en proche, que le théorème énoncé est complètement général, et s'applique à tous les termes du coefficient C.

Ainsi l'on trouve

$$[A_1A_2]=2[\Lambda(a_1, a_2)+\Lambda(a_2, a_1)],$$
$$[B_1B_2]=-(a_1-a_2)^2[\Lambda(a_1, a_2)+\Lambda(a_2, a_1)],$$
$$[A_1A_2A_3]=\sum 4\frac{(a_1-a_2)^2}{(a_1-a_3)(a_2-a_3)}[\Lambda(a_1, a_2)+\Lambda(a_2, a_1)],$$
$$\begin{aligned}[B_1B_2B_3]=&-(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)[\Lambda(a_1, a_2, a_3)+\Lambda(a_2, a_3, a_1)+\Lambda(a_3, a_1, a_2)]\\&+(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)[\Lambda(a_2, a_1, a_3)+\Lambda(a_1, a_3, a_2)+\Lambda(a_3, a_2, a_1)]\\&+\Sigma(a_1-a_2)^2(2a_3-a_1-a_2)[\Lambda(a_1, a_2)+\Lambda(a_2, a_1)],\end{aligned}$$

les Σ étant étendues aux permutations circulaires des indices.

On peut faire, en outre, les remarques suivantes : les coefficients $[B_i^k]$ et $[A_i^h B_i^k]$ sont tous nuls; ils ne dépendent, en effet, que de a_i et sont homogènes et de degré k par rapport à cette quantité; mais cette propriété est incompatible avec celle de rester invariables lorsque l'on remplace a_i par $a_i+\alpha$; ils sont donc nuls. Parmi les coefficients dont l'expression ne renferme qu'un seul indice, il n'y a que les coefficients $[A_i^k]$ qui ne soient pas nuls; ils ont été calculés au n° 14.

Ce sont également les seuls qui renferment des fonctions Λ ne contenant qu'un seul point singulier, ou de la forme $\Lambda(a_i^k)$. Supposons que x décrive un contour autour du seul point a_i; l'invariant doit se réduire à I_i que nous avons déterminé et tous les coefficients, à l'exception de ceux de la forme $[A_i^k]$, doivent devenir nuls; si un autre coefficient a pour expression

$$[A_1^{k_1}A_2^{k_2}\ldots B_1^{l_1}\ldots]=g_1\Lambda(a_i)+g_2\Lambda(a_i^2)+\ldots+g_\alpha\Sigma\Lambda(a_1, a_2, \ldots)+\ldots,$$

les fonctions $\Sigma\Lambda$ renfermant plusieurs points singuliers s'annulent lorsque le contour entoure un seul point, car ce sont des intégrales multipliées par des sommes de fonctions Λ à deux points singuliers, et ces dernières deviennent nulles; la somme

$$g_1\Lambda(a_i)+g_2\Lambda(a_i^2)+\ldots$$

doit, par suite, se réduire à zéro, ce qui exige que $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, ...

Il ne doit donc entrer dans le coefficient d'un terme renfermant plusieurs indices que des fonctions Λ renfermant au moins deux points singuliers.

16. L'expression d'un invariant quelconque est une combinaison de sommes de fonctions Λ étendues aux permutations circulaires, et l'étude que nous avons faite de ces sommes nous donnera des propriétés des invariants.

Rien ne distingue les invariants les uns des autres, au point de vue de leur développement, lorsqu'on laisse aux fonctions Λ qui y entrent toute leur généralité; ce n'est qu'en donnant à ces fonctions la valeur qu'elles acquièrent pour un contour donné que l'on aura l'invariant relatif à ce contour.

Un invariant est une fonction de l'origine du contour, des paramètres A, B, des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et enfin du contour choisi.

C'est d'abord une fonction uniforme des paramètres A et B; nous verrons dans la III[e] Partie que cette fonction ne change pas lorsqu'on fait subir aux paramètres des transformations rationnelles et réversibles analogues aux transformations Cremona.

Supposons maintenant que l'origine et les points singuliers soient fixes, et que l'on fasse varier le contour; on donnera aux fonctions Λ les valeurs qu'elles acquièrent relativement à ces contours, et l'on aura les valeurs de l'invariant. Nous savons que ces valeurs ne sont pas indépendantes, et qu'elles sont fonctions entières de $3(n-1)$ d'entre elles, et des racines de $n-2$ équations algébriques du second degré; on peut inversement se servir de ces résultats connus pour trouver de nouvelles propriétés de combinaisons de fonctions Λ. Ces combinaisons, lorsque x décrit des contours quelconques, sont des fonctions algébriques de $3(n-1)$ valeurs distinctes qu'elles prennent pour des contours simples.

Pour donner un exemple, considérons la fonction

$$F = \Sigma\,\Lambda(a_1, a_2, a_3) - \Sigma\,\Lambda(a_2, a_1, a_3),$$

elle entre dans les invariants d'une équation ayant trois points singuliers, et a trois valeurs fondamentales, correspondant aux contours $S_1 S_2$, $S_2 S_3$, $S_3 S_1$; si nous voulons sa valeur pour le contour $S_1 S_2 S_3$, nous considérerons l'équation (11) (n° 3, Ire Partie) qui donne I_{123} et, dans le premier membre, le coefficient de $B_1^2 B_2^2 B_3^2$; en représentant par $[\varphi]_S$ la valeur du coefficient $[\varphi]$ relative à un contour S, on obtient

$$\begin{aligned} \{[B_1 B_2 B_3]_{123} - [B_1 B_2 B_3]_{12} - [B_1 B_2 B_3]_{23} - [B_1 B_2 B_3]_{31}\}^2 \\ + [B_1 B_2]_{12} [B_2 B_3]_{23} [B_3 B_1]_{31} = 0; \end{aligned}$$

d'où, en se reportant aux valeurs trouvées au n° 15, on trouve

$$(F_{123} - F_{12} - F_{23} - F_{31})^2 + (4\pi^2)^3 = 0,$$

équation qui donne la valeur de F relative au contour $S_1 S_2 S_3$ en fonction de ses valeurs relatives aux trois contours fondamentaux; elle est du second degré comme l'équation d'où l'on est parti, ce que l'on explique comme nous l'avons vu.

La valeur de F relative à un contour quelconque est une fonction rationnelle et entière des quatre valeurs précédentes F_{12}, F_{23}, F_{31}, F_{123}.

Supposons maintenant que les points singuliers soient fixes, et que l'on fasse varier l'origine x_0 du contour; cherchons ce que devient l'invariant d'une substitution donnée $S_1^\alpha S_2^\beta \ldots$; nous supposons, comme dans le calcul des fonctions Λ, que x dérive autour de a_1, $a_2, \ldots, a_n$ des lacets formés de droites issues de x_0, et de petits cercles entourant les points singuliers.

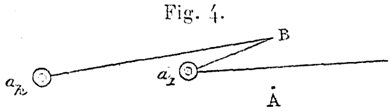
Un invariant est une fonction de x_0 ayant pour coupures les prolongements des droites joignant les points singuliers deux à deux; elle a une valeur constante dans chacune des parties du plan limitées par ces coupures, et change de valeur lorsque x_0 traverse l'une de ces droites.

Cette propriété résulte de la propriété analogue que nous avons démontrée pour les sommes de fonctions Λ; la transformation de l'invariant résulte de celle de ces fonctions.

Mais on peut déterminer *a priori* la transformation de l'invariant au moyen de celle de la substitution et, comme dans ce qui précède, en déduire inversement la transformation subie par des combinaisons de fonctions Λ.

Soient S_1, S_2, ..., S_k, ..., S_n les substitutions relatives aux lacets issus de x_0 et entourant les points singuliers lorsque x_0 occupe une position A (*fig.* 4); si ce point traverse la coupure formée par le prolongement de $a_k a_1$ au delà de a_1 pour occuper la position B, et si Σ_1,

Fig. 4.



Σ_2, ..., Σ_k, ... sont les substitutions relatives aux nouveaux lacets, elles sont identiques aux substitutions S, à l'exception de Σ_k, qui est

$$\Sigma_k = S_1 S_k S_1^{-1}.$$

Il en résulte que l'invariant relatif à un contour $\ldots S_i^\alpha S_k^\beta S_l^\gamma \ldots$ change de valeur et devient l'invariant relatif à

$$\ldots \Sigma_i^\alpha \Sigma_k^\beta \Sigma_l^\gamma \ldots = \ldots S_i^\alpha S_1 S_k^\beta S_1^{-1} S_l^\gamma \ldots,$$

ou bien que

$$[I_{\ldots i^\alpha k^\beta l^\gamma \ldots}]_B = [I_{\ldots i^\alpha 1 k^\beta 1^{-1} l^\gamma \ldots}]_A.$$

Si x_0 traversait la coupure en tournant dans le sens inverse autour de a_1, il faudrait remplacer Σ_k par $S_1^{-1} S_k S_1$.

Si l'on a choisi un système d'invariants fondamentaux, et si l'on déplace l'origine du contour, on obtient un autre système également fondamental.

Nous pouvons préciser ce que nous avons dit au n° 9 (Ire Partie); nous avons défini les substitutions auxiliaires Σ_{12}, Σ_{13}, ... au moyen de droites joignant les points a_1, a_2, ..., a_n, ou de coupures se ramenant à ces droites; on peut supposer, sans rien changer, que l'on prenne une origine des contours x_0 à l'intérieur du polygone $a_1 a_2 \ldots a_n$, et que le chemin $a_i a_k$ soit formé des deux droites $a_i x_0$, $x_0 a_k$ ou de coupures se ramenant à ces droites; les invariants sont alors bien définis. Si maintenant x_0 varie dans le plan, les invariants, tout en gardant le même nom, changent de valeurs, les chemins auxiliaires changent également, mais le groupe reste le même. On peut donc, sans changer le groupe, faire subir aux invariants les transformations résultant de la variation de l'origine x_0; à chaque transformation correspond un changement des coupures $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, $\ldots$, $a_1 a_n$ et un changement correspondant des invariants.

Si l'on considère un invariant particulier, calculé lorsque x_0 occupe une position déterminée dans le plan, et si x_0 varie, le nombre de valeurs distinctes de cet invariant est fini, car le nombre des régions déterminées par les prolongements des droites $a_1 a_2, \ldots, a_i a_k, \ldots$ est limité. Les combinaisons de fonctions Λ entrant dans les coefficients du développement, et calculés relativement à un contour donné, ont un nombre fini de valeurs.

Ainsi, si l'on a deux points singuliers a_1, a_2, les invariants n'ont qu'une seule valeur, quelle que soit la position de x_0; cela résulte du reste de ce que les coefficients sont formés au moyen de fonctions Λ renfermant deux points singuliers, et ce sont des fonctions numériques de $2i\pi$, par conséquent des constantes.

Si l'on a trois points singuliers, chaque invariant à quatre valeurs distinctes.

Finalement, un invariant est une fonction des points singuliers a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Si l'on suppose x_0 fixe, ainsi que a_2, a_3, $\ldots$, a_n, et si a_1 est variable, il résulte de l'étude des fonctions Λ que l'invariant est une fonction de a_1 ayant pour points singuliers les autres points, et pour coupures les droites joignant x_0 aux points a_2, a_3, $\ldots$, a_n; on obtient les transformations de l'invariant au moyen de ce qui précède. Si l'on se reporte à la figure (3) du n° 12, on voit que

$$[\mathrm{I}_{\ldots 1^{\alpha} h^{\beta} 2^{\gamma} k^{\delta} \ldots}]_{m'} = [\mathrm{I}_{\ldots 1^{\alpha} h^{\beta} 1 2^{\gamma} 1^{-1} k^{\delta} \ldots}]_{m},$$
$$[\mathrm{I}_{\ldots 1^{\alpha} h^{\beta} 2^{\gamma} k^{\delta} \ldots}]_{n'} = [\mathrm{I}_{\ldots 2^{-1} 1^{\alpha} 2 h^{\beta} 2^{\gamma} k^{\delta} \ldots}]_{n}.$$

On voit, en particulier, que si, dans cette figure, a_1 décrit autour de a_2 et dans le sens direct un lacet ne rencontrant aucune autre coupure que $x_0 a_2$, et s'il revient à sa première position, l'invariant précédent se transforme en

$$\mathrm{I}_{\ldots 2^{-1} 1^{\alpha} 2 h^{\beta} 1^{-1} 2^{\gamma} 1 k^{\delta} \ldots}.$$

TROISIÈME PARTIE.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AYANT MÊMES INVARIANTS.

17. Nous nous proposons d'étudier les coefficients d'une équation différentielle considérés comme fonctions des invariants fondamentaux : nous supposons qu'elle a n points véritablement singuliers et p points à apparence singulière, les racines des équations déterminantes relatives à ces derniers étant $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. L'équation est alors de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Py, \tag{1}$$

où

$$P = \sum \frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum \frac{\frac{3}{4}}{(x-b_k)^2} + \sum \frac{B_i}{x-a_i} + \sum \frac{D_k}{x-b_k}$$

et où D_k satisfait à l'équation

$$D_k^2 = E_k, \tag{2}$$

E_k étant le résultat de substitution de b_k à la place de x dans

$$P - \frac{\frac{3}{4}}{(x-b_k)^2} - \frac{D_k}{x-b_k}.$$

Le nombre des paramètres dont dépend l'équation est $3(n-1)+p$, car on peut choisir arbitrairement deux des $n+p$ points singuliers, et les coefficients B et D doivent avoir une somme nulle. Comme l'équation possède $3(n-1)$ invariants fondamentaux, il doit être possible, en général, de prendre p paramètres arbitraires et de déterminer les autres en fonction des invariants; en particulier, on peut supposer que l'équation n'a pas de points à apparence singulière et se proposer de déterminer les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et les paramètres A et B. Nous ne traiterons pas ce problème et nous supposerons les points véritablement singuliers donnés; il faudra alors supposer $p \geqq n-2$ pour que le nombre des inconnues soit au moins égal à celui des invariants fondamentaux.

Nous nous limiterons à la question suivante :

Si l'on connaît une équation différentielle du second ordre, à intégrales régulières, et ayant n points véritablement singuliers donnés à l'avance : $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *comment peut-on déterminer toutes les autres équations différentielles de même nature, ayant les mêmes points véritablement singuliers et les mêmes invariants fondamentaux que la première?*

Nous supposerons de plus que l'équation donnée a $p = n - 2$ points à apparence singulière, comme cela a lieu, en général, pour les équations réduites, au sens donné par M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. V, p. 209 et suiv.).

Si les équations ont mêmes invariants fondamentaux, les valeurs de ces invariants, lorsque l'origine x_0 du contour se déplace, devront encore être égales. Or les nouvelles valeurs sont des fonctions non seulement des $3(n-1)$ invariants primitifs, mais encore des $n-2$ invariants, tels que I_{123}, c'est-à-dire des racines des $n-2$ équations du second degré dont nous avons parlé. Il est donc nécessaire, pour que les $3(n-1)$ invariants restent égaux pour toutes les positions de x_0, que l'on choisisse de la même manière les racines de ces $n-2$ équations pour les deux équations différentielles; mais alors elles ont des groupes identiques, relativement aux contours entourant les points véritablement singuliers. La question peut donc s'énoncer ainsi :

Étant donnée une équation différentielle ayant n points véritablement singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *donnés, et* $n-2$ *points apparents, trouver toutes les équations ayant les mêmes points véritablement singuliers et le même groupe que la première pour les contours entourant ces points singuliers.*

Le cas de l'équation de Gauss se traite directement. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les différences des racines des trois équations déterminantes de l'équation donnée; $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ les quantités analogues relatives à une nouvelle équation; $A_1, A_2, B_1, A'_1, A'_2, B'_1$ les paramètres, on a

$$I_1 = -2\cos\pi\lambda_1 = -2\cos\pi\lambda'_1,$$
$$\lambda'_1 = 2k_1 \pm \lambda_1,$$

k_1 étant un nombre entier. On en déduit la relation

$$\sqrt{1+4A_1} \pm \sqrt{1+4A'_1} = 2k_1,$$
$$(A'_1 - A_1)^2 - 2k_1^2(A'_1 + A_1) + k_1^4 - k_1^2 = 0;$$

de même

$$(A'_2 - A_2)^2 - 2k_2^2(A'_2 + A_2) + k_2^4 - k_2^2 = 0,$$
$$[A'_1 + A'_2 + B'_1(a_1 - a_2) - A_1 - A_2 - B_1(a_1 - a_2)]^2$$
$$- 2k_3^2[A'_1 + A'_2 + B'_1(a_1 - a_2) + A_1 + A_2 + B_1(a_1 - a_2)] + k_3^4 - k_3^2 = 0,$$

k_1, k_2, k_3 étant des nombres entiers.

Ces transformations reviennent, soit à une permutation des deux racines de l'une des équations déterminantes, soit à l'addition d'un nombre entier quelconque à l'une des racines.

18. Dans le cas général, cette méthode n'est applicable qu'à la recherche des relations qui lient les paramètres A; elles sont de même nature que les précédentes et indiquent que les racines des équations fondamentales des équations cherchées et de l'équation donnée, relatives au même point singulier, diffèrent d'un nombre entier. Mais, pour trouver les relations entre les coefficients B et entre les points apparents, il faut opérer d'une autre manière et chercher les équations qui ont même groupe relativement aux contours entourant les points a_1, $a_2, \ldots, a_n$.

Les équations de même espèce que l'équation donnée répondent à la question. Leurs intégrales sont données par

$$Y = fy + \varphi y',$$

où f et φ sont des fonctions rationnelles de x; elles subissent la même substitution que y pour un contour quelconque. Une autre solution est fournie par certaines des équations de même famille que la première : celles dont les intégrales sont données par

$$Y = \sqrt{\psi}(fy + \varphi y'),$$

où f et φ sont des fonctions rationnelles de x et où ψ est une fonction rationnelle n'ayant pour zéro ni pour infini aucun des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$; Y et y ont, en effet, même substitution pour tout contour entourant les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et ne contenant à son intérieur aucun point de ramification de $\sqrt{\psi}$; d'autre part, la multiplication par cette quantité ne peut avoir d'autre effet que de faire disparaître ou d'introduire des points apparents, qui n'ont pas d'influence sur la solution du problème.

Je dis que, réciproquement, toutes les équations répondant à la question sont contenues parmi celles que je viens de mentionner. Soient, en effet, y_1 et y_2 un système fondamental de la première équation, tel que $y_1 y_2' - y_2 y_1' = 1$; Y_1, Y_2 un système analogue d'une autre équation; $b_1, b_2, \ldots, b_p$ les points apparents de la première; $c_1, c_2, \ldots, c_q$ ceux de la seconde. Soient, de plus,

$$\pi = (x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_p),$$
$$\Pi = (x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_q);$$

les deux fonctions

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\Pi}\,Y_1 & \sqrt{\Pi}\,Y_2 \\ \sqrt{\pi}\,y_1 & \sqrt{\pi}\,y_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \sqrt{\Pi}\,Y_1 & \sqrt{\Pi}\,Y_2 \\ \sqrt{\pi}\,y_1' & \sqrt{\pi}\,y_2' \end{vmatrix}$$

se reproduisent après un contour quelconque, entourant ou non les points b et c: ce sont, par suite, des fonctions rationnelles de x, et, en les représentant par $-\varphi$ et f, on a

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi\Pi}}(f y_1 + \varphi y_1'),$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi\Pi}}(f y_2 + \varphi y_2');$$

la proposition est par là démontrée.

Je suivrai une marche analogue à celle qu'emploie M. Poincaré pour la réduction des équations; je poserai

$$Y = \psi(-\theta y + y'), \tag{3}$$

θ étant une fonction rationnelle de x, ψ étant le produit d'une fonction rationnelle par la racine d'une fonction analogue n'ayant aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pour zéro ni infini [1]; Y satisfait à une équation du second ordre

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = QY, \tag{4}$$

si ψ et θ sont liés par la relation

$$\theta^2 + \theta' = P + \frac{C}{\psi^2}, \tag{5}$$

où C est une constante ; Q est alors donné par l'équation

$$Q = P + \frac{\psi''}{\psi} - 2\frac{(\psi\theta)'}{\psi}. \tag{6}$$

La recherche de θ se ramène à l'intégration d'une équation linéaire du second ordre; si l'on pose, en effet,

$$\theta = \frac{v'}{v}, \qquad \psi = vw,$$

on a

$$\frac{v''}{v} = P + \frac{C}{\psi^2}, \tag{7}$$

$$\frac{w''}{w} = Q + \frac{C}{\psi^2}; \tag{8}$$

on a, par suite, à déterminer ψ de manière que l'équation (7) ait une intégrale dont la dérivée logarithmique soit rationnelle, et à intégrer cette équation; la symétrie des équations (7) et (8) montre que l'on passera inversement de la seconde équation à la première en posant

$$y = \Psi(-\Theta Y + Y'),$$

$$\Psi = \psi, \qquad \Theta + \theta = \frac{\psi'}{\psi}.$$

Nous introduirons des quantités β et δ qui se déduisent des para-

---

(1) La fonction désignée ici par θ est égale et de signe contraire à celle qu'emploie M. Poincaré dans son Mémoire (*Acta mathematica*, t. V, p. 219); de même, la fonction désignée par ψ est l'inverse du carré de la fonction ψ du Mémoire cité.

mètres A, B et D, et jouent le même rôle; nous poserons

$$\theta_1 = \frac{r_1}{x-a_1} + \frac{r_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{r_n}{x-a_n} - \frac{\frac{1}{2}}{x-b_1} - \ldots - \frac{\frac{1}{2}}{x-b_p},$$

$$P = \theta_1^2 + \theta'_1 + P_2 = \theta_1^2 + \theta'_1 + \sum \frac{\beta_i}{x-a_i} + \sum \frac{\delta_k}{x-b_k},$$

où

$$(9)\quad \begin{cases} \beta_i = B_i - 2r_i\left(\dfrac{r_1}{a_i-a_1} + \ldots + \dfrac{r_n}{a_i-a_n} - \dfrac{\frac{1}{2}}{a_i-b_1} - \ldots - \dfrac{\frac{1}{2}}{a_i-b_p}\right), \\ \delta_k = D_k + \left(\dfrac{r_1}{b_k-a_1} + \ldots + \dfrac{r_n}{b_k-a_n} - \dfrac{\frac{1}{2}}{b_k-b_1} - \ldots - \dfrac{\frac{1}{2}}{b_k-b_p}\right). \end{cases}$$

On doit avoir

$$(10)\quad \begin{cases} \Sigma\beta_i + \Sigma\delta_k = 0, \\ \delta_k^2 - 2\delta_k\left(\theta_1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-b_k}\right)_{x=b_k} = \left(P_2 - \dfrac{\delta_k}{x-b_k}\right)_{x=b_k}. \end{cases}$$

Nous poserons ensuite

$$\theta = \theta_1 + \theta_2, \qquad \rho = \rho_1\rho_2, \qquad \psi = \rho_1 w_1, \qquad \rho_2 w_2 = 1, \qquad \Theta = \Theta_1 + \Theta_2,$$

$$\theta_1 = \frac{\rho'_1}{\rho_1}, \qquad \theta_2 = \frac{\rho'_2}{\rho_2}, \qquad \Theta_1 = \frac{w'_1}{w_1}, \qquad \Theta_2 = \frac{w'_2}{w_2}, \qquad Q = \Theta_1^2 + \Theta'_1 + Q_2,$$

et nous aurons

$$\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2 + \theta'_2 = P_2 + \frac{C}{\psi^2},$$

$$\Theta_2 + 2\Theta_1\Theta_2 + \Theta'_2 = Q_2 + \frac{C}{\psi^2},$$

pour déterminer θ_2, Q_2 et, par suite, Q.

La réduction est possible de plusieurs manières, car on peut remplacer l'une des racines r_k par $1 - r_k$, et $-\frac{1}{2}$ par $\frac{3}{2}$.

19. Un cas particulièrement simple est celui où la constante C est nulle; cela ne peut avoir lieu, d'après l'équation (7), que si l'équation donnée a une intégrale dont la dérivée logarithmique soit rationnelle; toutes les équations cherchées jouissent de la même propriété, et sont réductibles; l'une des intégrales est précisément

$$\rho_1 = (x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\ldots(x-b_1)^{-\frac{1}{2}}\ldots(x-b_p)^{-\frac{1}{2}},$$

et l'autre est

$$v_1 \int \frac{dx}{v_1^2};$$

on prendra dans ce cas $v_2 = 1$; ψ sera une fonction quelconque de la forme

$$\psi = (x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\ldots(x-a_n)^{m_n}(x-b_1)^{-\frac{1}{2}}\ldots(x-b_p)^{-\frac{1}{2}}(x-c_1)^{-\frac{1}{2}}\ldots(x-c_q)^{-\frac{1}{2}},$$

de sorte que l'une des intégrales de la nouvelle équation sera

$$Y_1 = w_1 = (x-a_1)^{m_1-r_1}(x-a_2)^{m_2-r_2}\ldots(x-a_n)^{m_n-r_n}(x-c_1)^{-\frac{1}{2}}\ldots(x-c_q)^{-\frac{1}{2}},$$

et l'on aura

$$Q = \frac{w_1''}{w_1} = \Theta_1^2 + \Theta_1';$$

on pourra, du reste, choisir ψ, de façon que la nouvelle équation n'ait plus de points à apparence singulière.

Les racines des équations déterminantes de Q diffèrent de nombres entiers des racines correspondantes relatives à P, de sorte qu'il existe entre les paramètres A les relations déjà trouvées

$$(A_i' - A_i)^2 - 2(m_i - 1)^2(A_i' + A_i) + (m_i - 1)^4 - (m_i - 1)^2 = 0;$$

les coefficients β_i et δ_k sont nuls dans chacune des équations.

On peut faire à ce sujet la remarque suivante : les équations

$$\beta_1 = 0, \qquad \beta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \beta_n = 0$$

sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation ait pour intégrale v_1 : on voit, en effet, que ces équations entraînent $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, ..., $\delta_p = 0$; car, si dans les équations (10) on fait les β égaux à zéro, on a, entre les p quantités δ, $p+1$ équations qui n'admettent en général d'autre solution que zéro.

Il existe plusieurs systèmes de quantités β, obtenus en permutant les racines des équations déterminantes; tous les éléments de l'un de ces systèmes doivent être nuls pour que l'équation soit réductible. Nous avons trouvé, d'autre part, au nº 4 (I^re Partie), $2n-3$ équations (17); ce sont des relations algébriques entre les invariants fondamentaux, qui sont des fonctions transcendantes des paramètres A et B; les deux systèmes d'équations doivent être équivalents.

Pour le montrer sur un exemple, considérons le cas de l'équation hypergéométrique, sans points apparents; il y a quatre systèmes de valeurs de β_1 :

$$\beta_{11} = B_1 - \frac{2r_1r_2}{a_1-a_2} \qquad = \frac{1}{a_1-a_2}(r_3-r_1-r_2)(r_3+r_1+r_2+1),$$

$$\beta_{12} = B_1 - \frac{2(1-r_1)r_2}{a_1-a_2} \qquad = \frac{1}{a_1-a_2}(r_3+r_1-r_2-1)(r_3-r_1+r_2+2),$$

$$\beta_{13} = B_1 - \frac{2r_1(1-r_2)}{a_1-a_2} \qquad = \frac{1}{a_1-a_2}(r_3-r_1+r_2-1)(r_3+r_1-r_2+2),$$

$$\beta_{14} = B_1 - \frac{2(1-r_1)(1-r_2)}{a_1-a_2} = \frac{1}{a_1-a_2}(r_3+r_1+r_2-2)(r_3-r_1-r_2+3);$$

l'équation est réductible dès que l'une des quantités $r_1 \pm r_2 \pm r_3$ est nulle ou égale à un nombre entier; pour l'exprimer sous forme de relation invariante, nous écrirons

$$\sin\pi(r_1+r_2+r_3)\sin\pi(r_1+r_2-r_3)\sin\pi(r_1-r_2+r_3)\sin\pi(-r_1+r_2+r_3) = 0;$$

le premier membre n'est autre que le carré du sinus du triangle de Schwarz, et cette relation n'est autre que

$$I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 - I_1I_2I_3 - 4 = 0;$$

l'équation $\beta_{11}\beta_{12}\beta_{13}\beta_{14} = 0$ et la précédente sont donc bien équivalentes.

20. Je considère le cas général où C n'est pas nul; on voit *a priori* que les racines des équations déterminantes relatives à Y diffèrent de nombres entiers des racines correspondantes relatives à y; je suppose $p = n-2$, et je cherche la transformation qui remplacerait les racines de l'équation déterminante du point a_1 : r_1 et $1-r_1$ par $-r_1$ et $1+r_1$.

Je pose

$$\frac{C}{\psi^2} = C\frac{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_{n-2})(x-c_1)\ldots(x-c_{n-2})}{(x-a_2)^2(x-a_3)^2\ldots(x-a_n)^2}$$
$$= \sum_2^n \frac{\lambda_i}{(x-a_i)^2} + \sum_2^n \frac{\mu_i}{x-a_i},$$

$$\theta_2 = \frac{s_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{s_n}{x-a_n};$$

l'équation

$$\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2 + \theta'_2 = P_2 + \frac{C}{\psi^2}$$

fournit entre les inconnues C, $c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}, s_2, \ldots, s_n$ les relations suivantes :

$$(11) \qquad s_i^2 - s_i + 2r_i s_i = \lambda_i,$$

$$(12) \qquad 2r_1\left(\frac{s_2}{a_1 - a_2} + \ldots + \frac{s_n}{a_1 - a_n}\right) = \beta_1,$$

$$(13) \qquad 2(s_i + r_i)\sum_2^{n}{}' \frac{s_h}{a_i - a_h} + 2s_i\left(\sum_1^{n}{}' \frac{r_h}{a_i - a_h} - \sum_1^{n-2} \frac{\frac{1}{2}}{a_i - b_k}\right) = \beta_i + \mu_i,$$

$$(14) \qquad \sum_2^{n} \frac{s_h}{b_k - a_h} = -\delta_k.$$

i varie de 2 à n, et k de 1 à $n-2$; les sommes Σ sont prises par rapport à h ou k, et dans Σ' on doit exclure la valeur $h = i$.

Les équations (12) et (14) sont $n-2$ équations linéaires entre les $n-2$ inconnues s, et ont une seule solution, car le déterminant des coefficients des inconnues n'est pas nul en général; les équations (11) donnent ensuite les quantités λ, d'où l'on déduit C, $c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}$. Si l'on représente, en effet, par F_1, f_1, f_2 les produits

$$\begin{aligned} F_1 &= (x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n), \\ f_1 &= (x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_{n-2}), \\ f_2 &= (x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_{n-2}), \end{aligned}$$

la formule de Lagrange donne

$$(15) \qquad C f_2(x) = \sum_2^{n} \lambda_i \frac{F'_1(a_i)}{f_1(a_i)} \frac{F_1(x)}{x - a_i}$$

et fournit une équation algébrique de degré $n-2$ dont les points c sont les racines; il reste $n-1$ équations (13) qui se réduisent à $n-2$, en vertu de la relation

$$\Sigma\beta_i + \Sigma\delta_k + \Sigma\mu_i = 0,$$

mais ces équations sont satisfaites en vertu des relations (10), qui expriment que les points b sont apparents.

Toutes les inconnues sont déterminées par suite d'une manière unique; on peut remarquer que les quantités s et les coefficients du polynôme $f_2(x)$ sont des fonctions symétriques des quantités b_k et δ_k.

Pour calculer le polynôme Q, on prendra

$$w_1 = \frac{\psi}{v_1} = (x-a_1)^{-r_1}(x-a_2)^{1-r_2}\dots(x-a_n)^{1-r_n}(x-c_1)^{-\frac{1}{2}}\dots(x-c_{n-2})^{-\frac{1}{2}},$$
$$\Theta_2 = -\theta_2,$$

de sorte qu'il suffira de changer dans les équations précédentes r_1 en $-r_1$, r_2 en $1-r_2$, ..., r_n en $1-r_n$, s_i en $-s_i$ et b_k en c_k; les quantités λ et μ ne seront pas changées, tandis que β_i et δ_k devront être remplacées par les quantités β'_i et δ'_k relatives à la nouvelle équation.

On trouve ainsi

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\beta'_1 = \beta_1,\\ &\beta_i - \beta'_i = 2\sum_2^{n}{}' \frac{s_h}{a_i-a_h} + 2s_i\sum_2^{n}{}' \frac{1}{a_i-a_h} - 2s_i\sum_1^{n-2}\frac{\frac{1}{2}}{a_i-b_k} - 2s_i\sum_1^{n-2}\frac{\frac{1}{2}}{a_i-c_k},\\ &\delta'_k = \sum_2^{n}\frac{s_h}{c_k-a_h}. \end{aligned}\right.$$

On peut exprimer les nouveaux paramètres au moyen des anciens, et des points a et b, en remarquant que le coefficient de $2s_i$ est $-\frac{1}{2}\frac{\mu_i}{\lambda_i}$; on a ainsi

$$\beta'_i - \beta_i = \frac{1}{s_i+2r_i-1}\left[-\beta_i + 2(1-r_i)\sum_2^{n}{}'\frac{s_h}{a_i-a_h} + 2s_i\sum_1^{n}{}'\frac{r_h}{a_i-a_h} - 2s_i\sum_1^{n-2}\frac{\frac{1}{2}}{a_i-b_k}\right];$$

le second membre est une fonction rationnelle du premier degré de β_1, β_i, δ_1, δ_2, ..., δ_{n-2}.

La transformation que nous venons d'effectuer fournit une équation ayant les mêmes points singuliers a_1, a_2, ..., a_n que la première; l'équation déterminante relative à a_1 a pour racines $-r_1$ et $1+r_1$; les équations relatives à a_2, a_3, ..., a_n et à l'infini ne sont pas changées. Les points apparents b_1, b_2, ..., b_{n-2} disparaissent et sont remplacés par c_1, c_2, ..., c_{n-2}, auxquels correspondent les racines $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

La transformation est de plus réversible, comme cela résulte de la symétrie des calculs relatifs à θ, Θ, P et Q : elle est donc du genre des transformations Cremona; enfin elle est quadratique, car, si on l'effectue sur Q, on retombe sur la fonction primitive P.

On a ainsi augmenté d'une unité la racine r_1; si l'on veut encore l'augmenter d'une unité, il est nécessaire d'opérer la réduction du polynôme Q auquel on est parvenu, en permutant les deux racines $-r_1$ et $1+r_1$, et en posant

$$w_1 = (x-a_1)^{1+r_1}(x-a_2)^{1-r_2}\ldots(x-a_n)^{1-r_n}(x-c_1)^{-\frac{1}{2}}\ldots(x-c_{n-2})^{-\frac{1}{2}};$$

on arrivera alors à une équation telle que les racines relatives à a_1 soient $-1-r_1$ et $2+r_1$, les racines relatives aux autres points n'étant pas changées.

On peut répéter la même transformation pour les différents points a_1, a_2, ..., a_n; la méthode s'applique aussi au point infini; si r_{n+1} et $-1-r_{n+1}$ sont les racines correspondantes, on peut former une nouvelle équation dont les racines soient $-r_{n+1}$ et $-1+r_{n+1}$; on pose pour cela

$$\frac{C}{\psi^2} = C\frac{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_{n-2})(x-c_1)\ldots(x-c_{n-2})}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2},$$

et l'on obtient des formules de transformation analogues aux précédentes.

21. Nous avons employé, pour faire la transformation, des fonctions ψ et θ particulières; il reste à montrer que ce sont les seules fonctions répondant à la question lorsque l'on astreint la nouvelle équation à avoir, comme la première, $n-2$ points apparents.

Supposons que l'on ait formé par la méthode précédente une équation ayant les points singuliers a_1, a_2, ..., a_n, auxquels correspondent les racines r'_1, $1-r'_1$, r'_2, ... et qu'elle ait $n-2$ points apparents b'_1, b'_2, ..., b'_{n-2}; je dis que toute autre équation sera identique à la précédente si elle satisfait aux conditions suivantes : elle a les mêmes points singuliers avec les mêmes racines correspondantes; elle a même groupe relativement aux contours formés de lacets entourant ces points, enfin elle a $n-2$ points apparents répartis d'une manière quelconque dans le plan.

Soient y_1 et y_2 deux intégrales de la première équation, et Y_1 et Y_2 deux intégrales d'une autre équation dont nous venons de parler; en se reportant aux formules du n° 18, on voit que la fonction ψ est, au signe près, égale au déterminant

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Dans le domaine d'un point singulier tel que a_1, les racines des équations fondamentales sont r'_1 et $1-r'_1$; le déterminant contient, par suite, en facteur $(x-a_1)^{r'_1}(x-a_1)^{1-r'_1} = x-a_1$, et la fonction ψ doit être divisible par le produit $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Dans le domaine du point infini, les racines sont r'_{n+1} et $-1-r'_{n+1}$; ψ doit alors contenir $\frac{1}{x}$ à une puissance égale ou supérieure à -1; autrement dit, ψ^2 est de la forme

$$\psi^2 = \frac{\psi_1}{\psi_2}(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2,$$

et a un degré au moins égal à -2; le degré de ψ_2 est, par suite, au moins égal à $2n-2$, et cette fonction ne s'annule pour aucune des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Si ψ_2 est divisible par $(x-b'_1)(x-b'_2)\ldots(x-b'_{n-2})$, ces points apparents disparaissent, et c'est le cas le plus favorable qui puisse se présenter; après suppression des facteurs contenus dans le produit précédent, il reste au dénominateur de ψ^2 un polynôme de degré au moins égal à n; je dis que les racines de ce polynôme sont des points apparents de la nouvelle équation différentielle; il suffit de faire voir pour cela que l'une au moins des intégrales

$$Y_1 = \psi(-\theta y_1 + y'_1),$$
$$Y_2 = \psi(-\theta y_2 + y'_2)$$

devient infinie en même temps que ψ pour toute valeur de x autre que $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b'_1, \ldots, b'_{n-2}$, ou bien que $-\theta y_1 + y'_1$ et $-\theta y_2 + y'_2$ ne s'annulent pas en même temps.

Si elles s'annulaient, en effet, pour $x = x_0$, on aurait

$$-\theta y_1 + y'_1 = (x - x_0)^\alpha F_2,$$
$$-\theta y_2 + y'_2 = (x - x_0)^\alpha F_1;$$

d'où

$$y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = (x - x_0)^\alpha (F_1 y_1 - F_2 y_2),$$

et le premier membre s'annulerait pour $x = x_0$, ce qui est impossible puisqu'il est égal à l'unité pour toute valeur autre que $a_1, a_2, \ldots, a_n, b'_1, b'_2, \ldots, b'_{n-2}$.

Ainsi donc la seconde équation a au moins n points apparents, ce qui est contraire à l'hypothèse; il faut alors supposer que ψ est nul, ou que

$$\frac{Y_1}{y_1} = \frac{Y_2}{y_2} = \frac{\alpha Y_1 + \beta Y_2}{\alpha y_1 + \beta y_2} = f(x);$$

mais $\alpha Y_1 + \beta Y_2$ ne satisfait à une équation du second ordre de la forme $Y'' = QY$ que si f est constant; la seule transformation possible est, par suite, $Y = Cy$, et les deux équations différentielles sont identiques; la proposition est ainsi démontrée.

Nous arrivons finalement à la conclusion suivante :

Étant donnée une équation différentielle du second ordre, de la forme $y'' = Py$, et à intégrales régulières, possédant n points singuliers et $n - 2$ points apparents, il existe une infinité d'équations de même nature possédant les mêmes points véritablement singuliers que la première, et les mêmes invariants fondamentaux, et ayant le même nombre de points apparents; les racines des équations déterminantes relatives aux points singuliers et à l'infini diffèrent de nombres entiers quelconques des racines correspondantes affectées à l'équation donnée. Si $r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}$ sont racines des $n + 1$ équations déterminantes de l'équation différentielle donnée, et $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$ des nombres entiers positifs ou négatifs choisis arbitrairement, il existe une seule équation différentielle satisfaisant aux conditions données, et dont les équations déterminantes admettent pour racines

$$k_1 + r_1, \quad k_2 + r_2, \quad \ldots, \quad k_n + r_n, \quad k_{n+1} + r_{n+1};$$

les $n - 2$ points apparents de cette dernière équation sont les racines d'une équation algébrique de degré $n - 2$; de plus, les coefficients de cette équation algébrique et les paramètres de la nouvelle équation différentielle sont des fonctions rationnelles des paramètres de la première, et des racines $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$.

Un raisonnement analogue montre qu'il existe une infinité d'équations de même nature que la première lorsque l'on n'assujettit plus le nombre des points apparents à être égal à $n-2$, même lorsque l'on choisit les racines k_1+r_1, k_2+r_2, ... des nouvelles équations déterminantes; s'il y a $n+2p$ points apparents dans la nouvelle équation, les formules de transformation contiennent $2p+2$ arbitraires.

Toutes ces transformations sont analogues aux transformations Cremona des équations algébriques; les paramètres de l'équation réduite représentent ici les modules de classe de Riemann, et les invariants fondamentaux, les modules de périodicité; car ce sont les invariants des transformations.

22. Ce qui précède nous fournit quelques indications sur la nature des paramètres de l'équation différentielle considérés comme fonctions des invariants. Nous avons vu que les invariants I peuvent être remplacés par $3n-3$ autres : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}, \mu_{12}, \mu_{13}, \ldots, \varphi_{23}, \varphi_{34}, \ldots$; ils sont fournis, pour toute valeur réelle ou imaginaire des invariants, par les équations (23), (24) et (25) (I[re] Partie), et peuvent être eux-mêmes imaginaires.

Les paramètres d'une équation différentielle possédant n points singuliers donnés et $n-2$ points apparents sont des fonctions uniformes des quantités $2\pi\lambda_1$, $2\pi\lambda_2$, ..., $2\pi\lambda_{n+1}$, μ et φ, car nous avons démontré qu'il n'y a qu'une seule équation possédant ces invariants; en particulier,

$$A_k = \frac{\lambda_k^2 - 1}{4},$$

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + B_1 a_1 + \ldots + B_n a_n + D_1 b_1 + \ldots + D_{n-2} b_{n-2} = \frac{\lambda_{n+1}^2 - 1}{4}.$$

Lorsque les λ varient et passent par une valeur entière, les points singuliers correspondants deviennent des points critiques logarithmiques; si l'on augmente ou si l'on diminue ces mêmes variables de nombres pairs, les nouvelles valeurs des paramètres sont des fonctions rationnelles des premières, et réciproquement. On peut encore ajouter que si l'on donne à certaines des quantités φ des valeurs égales et de signes contraires aux valeurs primitives, sans changer les autres invariants, on obtient un autre des 2^{n-2} groupes fournis par le système des $3n-3$ invariants $I_1, I_2, \ldots, I_n, I_{12}, \ldots, I_{1n}$, et l'équation correspondante à cet autre groupe.

Lorsque l'on considère les paramètres comme fonctions des invariants I, on obtient des fonctions d'une nature plus compliquée; elles ne sont plus uniformes, et présentent de plus des singularités; ces dernières tiennent surtout à la nature des invariants λ, μ et φ considérés comme fonctions des I.

La présence des différentes valeurs de ces fonctions non uniformes tient à plusieurs causes :

1° Les λ ont une infinité de valeurs en fonction de $I_1, I_2, \ldots, I_{n+1}$; à ce point de vue, nous avons vu comment se déduisent les unes des autres ces valeurs et les équations correspondantes; de plus les I ont pour valeurs singulières ± 2 et lorsque I_1, par exemple, acquiert une de ces valeurs, deux des branches de

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{I_1}{2}\right)$$

se confondent; ces points ± 2 sont pour les paramètres de l'équation des points critiques algébriques.

2° Lorsque l'une des quantités Θ_{123}, Θ_{134}, $\Theta_{1,n-1,n}$ dont nous avons parlé dans la première Partie s'annule, la quantité φ correspondante s'annule; deux groupes différents deviennent identiques : ceux que l'on déduit l'un de l'autre en changeant l'un des angles φ en $-\varphi$ et deux des 2^{n-2} équations correspondant aux 2^{n-2} groupes ont leurs paramètres égaux; on a donc des surfaces singulières analogues à des points critiques algébriques où deux branches des fonctions se confondent; lorsque toutes les fonctions Θ s'annulent, les 2^{n-2} groupes sont confondus en un seul. Nous avons vu qu'on peut s'affranchir de ces singularités en considérant $4n-5$ invariants, et une variété d'ordre $3n-3$ formée par les $n-2$ équations auxquelles satisfont les $n-2$ invariants $I_{123}, I_{134}, \ldots$, variété prise dans l'espace à $4n-5$ dimensions.

3° Lorsque l'une des quantités $H_{12}, H_{13}, \ldots, H_{23}, \ldots$ s'annule, les invariants fournissent deux groupes, car la substitution auxiliaire Σ peut prendre l'une des formes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix},$$

deux équations différentielles peuvent exister; on a des surfaces où existent deux valeurs des paramètres au lieu d'une seule.

4° Lorsque les $2n-3$ équations (17), n° 4,

$$\begin{array}{lll} \Theta_{123}=0, & \Theta_{134}=0, & \ldots, \\ H_{12}=0, & H_{13}=0, & \ldots \end{array}$$

sont satisfaites, l'équation devient réductible, et les quantités β_i et δ_k deviennent nulles; il y a alors une infinité d'équations différentielles fournies par les invariants, car nous avons vu au n° 19 que l'on peut alors, sans changer les invariants, remplacer les $n-2$ points apparents $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$ par d'autres $c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}$ absolument quelconques, et même supprimer les points apparents.

Le cas le plus important est celui où les invariants sont réels et satisfont aux conditions d'existence d'un polygone; il faut alors que les quantités Θ soient positives, et l'une des quantités H positive pour la pseudosphère, négative pour la sphère; il existe alors une équation sans points apparents possédant les invariants donnés; ses paramètres et ses points singuliers sont des fonctions uniformes des invariants, car M. Poincaré a démontré qu'il existe une seule équation fournissant la représentation conforme sur un polygone donné; mais on ne peut affirmer que l'on puisse continuer analytiquement cette équation lorsque les conditions précédentes cessent d'être remplies; on peut dire simplement que le polygone n'existe plus.

23. En résumé, pour déterminer un groupe dérivé de n substitutions fondamentales, il est nécessaire de donner $3n-3$ invariants fondamentaux, mais ils déterminent en général 2^{n-2} groupes différents; ils se distinguent par le choix des racines de $n-2$ équations du second degré dont les coefficients dépendent des $3n-3$ invariants primitifs; il est nécessaire de donner alors $4n-5$ invariants pour déterminer un seul groupe.

Lorsque les invariants sont réels et satisfont à certaines inégalités, ils déterminent un polygone sphérique ou pseudo-sphérique analogue aux polygones fuchsiens; c'est la représentation conforme du plan de la variable, faite au moyen du rapport de deux intégrales d'une équation différentielle sans points apparents admettant le groupe donné. On peut déduire de là en particulier les conditions pour qu'une équation soit fuchsienne.

Les invariants sont des fonctions des paramètres et des points singuliers de l'équation différentielle; ce sont des fonctions uniformes des paramètres A et B, et elles restent invariables lorsque l'on fait subir à ces paramètres et aux points apparents des transformations analogues aux transformations Cremona. Ce sont des fonctions non uniformes de l'origine des contours qui servent à définir le groupe; leurs valeurs se déduisent l'une de l'autre par des transformations rationnelles et entières, et réversibles; ce sont aussi des fonctions non uniformes des points singuliers de l'équation différentielle; lorsque l'un d'eux décrit un contour fermé entourant un ou plusieurs autres points, elles subissent des transformations analogues aux précédentes.

Inversement, les paramètres d'une équation différentielle ayant n points singuliers donnés et $n-2$ points apparents sont des fonctions non uniformes des invariants; leurs valeurs se déduisent l'une de l'autre par des transformations Cremona; de plus, elles ont des points et des surfaces singulières analogues à des points critiques algébriques.