GASTON DARBOUX

Sur la surface des ondes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 6 (1889), p. 379-388
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__379_0>

SUR

LA SURFACE DES ONDES,

PAR M. G. DARBOUX [1].

I.

Dans le Tome IX du *Quarterly Journal of Mathematics*, M. Niven a donné la remarquable proposition suivante, relative à la surface des ondes :

Les trois sphères passant par les trois cercles principaux et par un point quelconque M *de la surface vont se couper en un second point* P *qui est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur le plan tangent en* M.

M. Niven a remarqué que ce théorème permet de construire soit le plan tangent en un point donné, soit le point de contact d'un plan tangent donné. Je vais établir qu'il conduit à une définition simple et nouvelle de la surface des ondes, définition dont le caractère essentiel sera de n'employer aucun ellipsoïde.

En n'employant en effet qu'une partie de la proposition précédente, on voit que les sphères passant par les trois cercles principaux et par un point M de la surface des ondes vont se couper en un point P tel que, O désignant le centre de la surface, l'angle MPO soit droit.

La surface des ondes nous apparaît ainsi comme un cas particulier de la surface suivante. On considère dans l'espace trois cercles quelconques (A), (B), (C) et un point quelconque O. On cherche le lieu (Σ)

---

[1] Extrait des Tomes XCII et XCVII des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

des points M jouissant de la propriété suivante : les sphères passant par les trois cercles fixes (A), (B), (C), et par un point quelconque M du lieu vont se couper en un second point P, tel que l'angle MPO soit droit. Ce lieu est évidemment une surface : je vais d'abord montrer qu'on peut la construire par points en employant seulement la règle et le compas.

Considérons, en effet, deux sphères quelconques passant par les cercles (A) et (B); elles se coupent suivant un cercle (Γ). Je vais chercher les points du lieu situés sur (Γ). Pour cela, je remarque que toute sphère passant par le cercle (C) coupera le cercle (Γ) en deux points M et P, tels que la droite MP aille concourir en un point fixe H. Si M est un point du lieu, l'angle MPO, ou, ce qui est la même chose, l'angle HPO sera droit; le point P devra donc se trouver sur la sphère décrite sur OH comme diamètre. Il y aura donc deux positions pour le point P et, par conséquent, aussi deux positions pour le point M. Cette construction, étant générale, ne subit aucune modification dans le cas de la surface des ondes.

Il existe un cercle (K) qui rencontre les cercles (A), (B), (C) chacun en deux points. Appelons *centre radical de deux cercles* le centre radical de toutes les sphères passant par ces deux cercles. Le plan du cercle (K) est le plan des centres radicaux des trois cercles (A), (B), (C) pris deux à deux.

La surface (Σ) contient le cercle (K).

Chacune des sphères passant par le cercle (K) et l'un des cercles (A), (B), (C) coupe la surface suivant un nouveau cercle. On obtient ainsi trois cercles (A'), (B'), (C').

La surface (Σ) est, en général, du cinquième ordre. Elle admet le cercle de l'infini comme ligne double et elle coupe en outre le plan de l'infini suivant une droite qui est dans le plan perpendiculaire à la ligne OH, H désignant le point de rencontre des plans des cercles (A), (B), (C).

La surface (Σ) se réduit au quatrième ordre : 1° si les plans des cercles (A), (B), (C) se coupent suivant une droite; 2° si le point O et le point H coïncident. J'examinerai spécialement ce dernier cas.

Alors la surface admet huit plans la coupant chacun suivant un cercle et une conique. Ce sont le plan de l'infini, coupant suivant une conique et le cercle de l'infini, les plans des cercles (K), (A), (A'), (B), (B'), (C), (C′). Elle contient donc seize coniques, ce qui est d'autant plus remarquable qu'elle n'a en général aucun point singulier.

Dans une première étude sur les surfaces du quatrième ordre admettant des coniques isolées, il m'a paru qu'il existe une surface du quatrième ordre qui, sans avoir aucun point singulier, admet dix-huit plans tangents quadruples, et par conséquent trente-six coniques.

Il résulte, on le voit, des recherches précédentes que la surface des ondes est une simple variété d'une surface du quatrième ordre n'ayant aucun point singulier et contenant seize coniques isolées.

Je terminerai en ajoutant un petit complément à deux de mes Communications antérieures. On sait que, si trois points d'une droite invariable décrivent des plans rectangulaires, tout point de la droite décrit un ellipsoïde. J'ajoute à ce théorème de Dupin que *la droite, dans toutes ses positions, demeure normale à une surface fixe dont les lignes de courbure sont algébriques*. Cette surface est une variété des surfaces de quatrième classe, considérées dans ma Communication du 3 janvier, et les surfaces développables formées par les normales en tous les points d'une ligne de courbure sont tangentes à une surface du second degré, comme cela a lieu d'ailleurs pour les surfaces les plus générales de ce genre.

On voit que nous déterminons la surface sur les normales de laquelle les plans coordonnés interceptent des segments de longueur donnée. D'une manière générale, on peut toujours obtenir par de simples quadratures l'équation de la surface qui est définie par une relation quelconque entre les trois longueurs des segments compris entre le pied de la normale et les trois plans coordonnés, au moins quand ces trois plans sont rectangulaires. En étudiant cette équation, on est conduit à un théorème intéressant :

S'il existe deux relations entre les longueurs des trois segments de la normale compris entre le pied de cette normale et les trois plans coordonnés, l'une de ces relations est nécessairement la suivante : les segments de la normale compris entre les trois plans coordonnés ont des rapports invariables.

Ce théorème se vérifie en particulier pour la surface que nous venons de considérer, et qui est normale à toutes les positions d'une droite invariable dont trois points décrivent les plans coordonnés.

II.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'une surface. Désignons par p, q, r des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale et assujetties en outre à satisfaire à la condition

$$px + qy + rz = 1. \tag{1}$$

Enfin désignons par p', q', r' les trois quantités

$$p' = qz - ry, \qquad q' = rx - pz, \qquad r' = py - qx, \tag{2}$$

de telle manière que les six coordonnées de la normale seront p, q, r, p', q', r'.

Avec ces notations l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface sera

$$dp\,dx + dq\,dy + dr\,dz = 0, \tag{3}$$

et celle des lignes de courbure

$$dp\,dp' + dq\,dq' + dr\,dr' = 0. \tag{4}$$

Je me propose d'appliquer ces résultats très simples à l'étude des lignes asymptotiques et des lignes de courbure de la surface des ondes.

J'examinerai d'abord ce qui concerne les lignes asymptotiques. La surface des ondes étant un cas particulier de la surface à seize points singuliers, on pourrait déduire la détermination de ces lignes de celle qui a été donnée par MM. Klein et Lie pour la surface de Kummer; mais il y a intérêt à les déterminer directement, et nous allons voir d'ailleurs que la méthode suivie dans cette recherche donne les lignes asymptotiques d'une infinité de surfaces nouvelles.

L'étude détaillée et complète de la surface des ondes repose sur l'emploi simultané de quatre variables qui sont les suivantes. Considérons un point M de la surface. Le rayon qui joint le point M au centre O de la surface coupe celle-ci en un second point M'. Nous poserons

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 = \beta, \qquad \overline{\mathrm{OM}'}^2 = \alpha'.$$

Désignons de même par α et β' les carrés des distances du centre au plan tangent en M et au plan tangent parallèle. Ces quatre variables seront liées par les deux relations contenues dans l'identité

$$(5)\quad x(x-\beta)(x-\beta')-(x-a)(x-b)(x-c)=\frac{abc}{\alpha\alpha'}(x-\alpha)(x-\alpha'),$$

qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de x.

Cela posé, on aura, pour un point quelconque de la surface des ondes, les valeurs de x, y, z, p, q, r que l'on déduirait des formules suivantes

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} x&=C\left(\frac{a-\alpha}{\alpha}\right)^{m_1}\left(\frac{a-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m_2}(a-\beta)^{n_1}(a-\beta')^{n_2},\\ y&=C'\left(\frac{b-\alpha}{\alpha}\right)^{m_1}\left(\frac{b-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m_2}(b-\beta)^{n_1}(b-\beta')^{n_2},\\ z&=C''\left(\frac{c-\alpha}{\alpha}\right)^{m_1}\left(\frac{c-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m_2}(c-\beta)^{n_1}(c-\beta')^{n_2},\end{aligned}\right.$$

en y faisant

$$m_1=n_2=0,\qquad m_2=n_1=\tfrac{1}{2},$$

et en disposant convenablement des constantes C, C′, C″.

Je vais considérer d'une manière générale les surfaces définies par les formules (6). On a, pour elles,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} p&=\frac{1}{C(a-b)(a-c)}\left(\frac{a-\alpha}{\alpha}\right)^{-m_1}\left(\frac{a-\alpha'}{\alpha'}\right)^{-m_2}(a-\beta)^{1-n_1}(a-\beta')^{1-n_2},\\ q&=\frac{1}{C'(b-a)(b-c)}\left(\frac{b-\alpha}{\alpha}\right)^{-m_1}\left(\frac{b-\alpha'}{\alpha'}\right)^{-m_2}(b-\beta)^{1-n_1}(b-\beta')^{1-n_2},\\ r&=\frac{1}{C''(c-a)(c-a)}\left(\frac{c-\alpha}{\alpha}\right)^{-m_1}\left(\frac{c-\alpha'}{\alpha'}\right)^{-m_2}(c-\beta)^{1-n_1}(c-\beta')^{1-n_2}.\end{aligned}\right.$$

On peut ici appliquer la formule (3) et écrire l'équation différentielle des lignes asymptotiques. On est ainsi conduit au résultat très simple que voici :

Toutes les fois que les exposants seront liés par la relation

$$(8)\quad m_1+n_1+m_2+n_2=1,$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques sera

$$(9) \qquad \frac{d\beta^2}{(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)} = \frac{d\beta'^2}{(\beta'-a)(\beta'-b)(\beta'-c)},$$

et par conséquent ces lignes seront définies par une relation algébrique, dont la forme est bien connue, entre β et β'.

Les exposants dans le cas de la surface des ondes satisfaisant à la relation (8), le résultat précédent comprend celui que l'on connaît relativement à cette surface.

L'intégration de l'équation (9) conduit au théorème suivant, qui remplace tous les calculs :

Considérons chacun des complexes de Chasles, qui sont formés des droites coupant les trois plans coordonnés et le plan de l'infini en quatre points de rapport anharmonique constant. Le lieu des points de la surface où le cône du complexe est tangent à cette surface est une ligne asymptotique.

Quand on fera varier la valeur du rapport anharmonique constant, on aura une infinité de complexes qui donneront toutes les lignes asymptotiques.

Il m'a paru intéressant de chercher toutes les surfaces jouissant de la propriété exprimée par le théorème précédent. On trouve d'abord les surfaces tétraédrales de Lamé qui sont définies par l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1.$$

Leurs lignes asymptotiques ont été déjà déterminées par M. Lie, et elles jouissent de cette propriété particulière que les tangentes à chacune d'elles appartiennent toutes à un même complexe de Chasles (qui varie quand on passe d'une ligne à l'autre).

Les autres surfaces satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$(10) \qquad xyz(rt-s^2) + pq(z-px-qy) = 0$$

que l'on peut interpréter comme il suit.

Désignons par N_x, N_y, N_z les portions de la normale à la surface comprises entre le pied M de cette normale et les plans coordonnés. Soient R, R′ les rayons de courbure principaux et P la distance de l'origine O au plan tangent en M. L'équation (10) est équivalente à la relation

$$RR' = \frac{N_x N_y N_z}{P},$$

qui donne la courbure totale et s'applique en particulier à la surface des ondes.

La formule suivante, tout aussi simple, mais convenant seulement à cette dernière surface, fait connaître la somme des rayons de courbure. On a

$$R + R' = N_x + N_y + N_z - \frac{\overline{OM}^2}{P}.$$

III.

Les lignes de courbure de la surface des ondes ont été l'objet de différentes recherches à la suite d'une Note insérée en 1858 par M. Bertrand dans les *Comptes rendus* (t. XLVII, p. 817). Un géomètre avait annoncé que la courbe de contact de la développable circonscrite à la surface et à une sphère concentrique est une ligne de courbure. M. Bertrand démontre deux théorèmes élégants qui mettent en évidence l'inexactitude de cette proposition. Depuis, un très habile géomètre, M. Combescure, est revenu sur ce sujet dans les *Annales de Tortolini* (t. II, p. 278; 1859) et il a donné, entre autres résultats, l'équation différentielle des lignes de courbure. Une courte Note de M. Brioschi, placée à la suite du travail précédent, contient une transformation intéressante de cette équation.

J'ai été conduit à m'occuper des lignes de courbure de la surface des ondes en étudiant la forme des lignes de courbure d'une surface quelconque dans le voisinage d'un ombilic. Cette intéressante question a déjà été l'objet des recherches de M. Cayley (*Philosophical Magazine*, t. XXVI, 4e série, p. 373, 441).

Les lignes de courbure, dans le voisinage d'un ombilic, ne ressemblent nullement à un cercle, et leur forme est très variable. Si l'on désigne par A, B, C, α, β, γ six paramètres dépendant de la forme de la surface dans le voisinage de l'ombilic, les lignes de courbure sont définies par les formules suivantes

$$(1)\quad \begin{cases} x = K(p-\alpha)^A(p-\beta)^B(p-\gamma)^C[p^2 - 1 - (\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta + \gamma)p], \\ y = K(p-\alpha)^A(p-\beta)^B(p-\gamma)^C[\alpha\beta\gamma(1-p^2) - (1 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)p], \end{cases}$$

où x, y désignent les coordonnées rectangulaires de la projection du point sur le plan tangent; p est un paramètre variable et K la constante arbitraire qui varie quand on passe d'une ligne de courbure à l'autre.

Le résultat précédent, sur lequel j'aurai sans doute l'occasion de revenir pour le compléter, fournit un moyen de reconnaître si les lignes de courbure d'une surface peuvent être algébriques. Une condition nécessaire est que les nombres A, B, C, relatifs à chaque ombilic, soient commensurables. Si cette condition n'est pas remplie pour un seul ombilic, on pourra affirmer que les lignes de courbure ne sont pas algébriques.

En appliquant ce critérium à la surface des ondes qui était tout indiquée pour cet ordre de recherches, je reconnus que, dans ce cas et pour tous les ombilics, A, B, C sont commensurables. Dans le voisinage de chaque ombilic les lignes de courbure sont semblables à des courbes algébriques du dixième ordre. J'ai été ainsi conduit à de nouvelles études qui ont été communiquées en 1878 au Congrès de l'Association française.

Conservons les variables α, β, α', β' déjà définies et posons, pour abréger,

$$f(\alpha) = (\alpha - a)(\alpha - b)(\alpha - c);$$

l'équation différentielle des lignes de courbure, déjà donnée par M. Combescure, sera

$$(2)\quad f(\alpha)\,d\beta^2 + f(\beta)\,d\alpha^2 - d\alpha\,d\beta\left\{2f(\alpha) + (\beta - \alpha)\left[f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{\alpha}\right]\right\} = 0.$$

Cette équation conserverait absolument la même forme si, au lieu de l'écrire avec les variables α, β, on employait α', β'. Je vais montrer qu'on peut l'intégrer *toutes les fois que la fonction du troisième degré* $f(x)$ *se réduit à un polynôme du deuxième degré*.

Pour cela, je remarque que, si l'on pose, pour abréger,

$$\varphi(x) = x f(x),$$

et si l'on substitue à β la variable $v = \alpha(\beta - \alpha)$, l'équation (2) deviendra

$$\varphi(\alpha)\frac{dv^2}{d\alpha^2} - \varphi'(\alpha) v \frac{dv}{d\alpha} + v\varphi(\alpha) + \frac{v^2}{2}\varphi''(\alpha) + \frac{v^3 \varphi^{\text{IV}}(\alpha)}{6} = 0. \tag{3}$$

Si $f(x)$ est du second degré et par conséquent $\varphi(x)$ du troisième, le dernier terme de l'équation précédente disparaîtra. Je suppose que dans $\varphi(x)$ le coefficient de la troisième puissance ait été ramené à l'unité et je pose

$$w = \frac{\varphi(\alpha)}{v}.$$

L'équation en w sera

$$\varphi(\alpha)\frac{dw^2}{d\alpha^2} - \varphi'(\alpha) w \frac{dw}{d\alpha} + w^3 + \frac{w^2}{2}\varphi''(\alpha) = 0. \tag{4}$$

On peut l'écrire

$$\varphi\left(\alpha - w\frac{d\alpha}{dw}\right) + w^3 \frac{d\alpha^2}{dw^2}\left(\frac{d\alpha}{dw} + 1\right) = 0,$$

et si l'on effectue le changement de variables bien connu, défini par les formules

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha - w\frac{d\alpha}{dw} = y, \qquad && -w = \frac{dy}{dp}, \\ &\frac{d\alpha}{dw} = p, && \alpha = y - p\frac{dy}{dp}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

l'équation devient

$$\varphi(y) - p^2(p+1)\frac{dy^3}{dp^3} = 0.$$

On n'a plus qu'à séparer les variables et à intégrer, ce qui donne

$$\int \frac{dp}{p^{\frac{2}{3}}(1+p)^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{dy}{[\varphi(y)]^{\frac{1}{3}}}.$$

Ce premier résultat, relatif au cas où $f(x)$ est du second degré, prouve déjà que les *lignes de courbure de la surface des ondes ne peuvent être des courbes algébriques d'un degré déterminé*. S'il n'interdit pas d'espérer que l'intégrale de l'équation plus générale (2) pourra être obtenue, il montre du moins que cette intégrale ne pourrait être exprimée que d'une manière assez compliquée. Enfin il a des applications géométriques que je signalerai en terminant.

La surface des ondes est l'apsidale d'un certain ellipsoïde (E). Supposons que cet ellipsoïde devienne un cylindre, l'un de ses axes grandissant indéfiniment. La surface des ondes se transformera en une surface dont les lignes de courbure seront déterminées par l'équation que nous venons d'intégrer.

Lorsque deux des axes de l'ellipsoïde tendent à devenir égaux, l'une des nappes de la surface des ondes se rapproche d'une sphère; si les trois axes a, b, c tendent vers une valeur commune r par des formules telles que les suivantes :

$$a = r + \varepsilon a', \qquad b = r + \varepsilon b', \qquad c = r + \varepsilon c',$$

où a', b', c' sont des quantités fixes, les deux nappes de la surface se rapprochent de la sphère de rayon r. Dans l'un et l'autre cas, les lignes de courbure tendent vers des positions limites, et leur équation différentielle se ramène à celle que nous avons intégrée.

On peut donc considérer comme connues les lignes de courbure de toutes les surfaces des ondes qui se présentent en Physique et qui sont, comme on le sait, peu différentes de la sphère.

FIN DU TOME VI DE LA III^e SÉRIE.