ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MÉRAY

Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles totales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 6 (1889), p. 355-378

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__355_0>

SUR LA CONVERGENCE

DES

DÉVELOPPEMENTS DES INTÉGRALES ORDINAIRES

D'UN

SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TOTALES,

PAR

M. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON,

avec la collaboration de

M. RIQUIER,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN.

Préliminaires.

1. Les bases sur lesquelles doit reposer, selon nous, la théorie générale des fonctions, différant essentiellement de celles qu'ont adoptées la plupart des auteurs, nous croyons utile d'énoncer tout d'abord les diverses définitions et propositions sur lesquelles nous aurons à nous appuyer.

Soient $f(x, y, \ldots)$ une fonction de variables imaginaires en nombre quelconque, et $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs particulières de ces variables : si la quantité $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ est développable en une série entière par rapport à $h, k, \ldots$ tant que les modules de ces accroissements sont respectivement inférieurs à certaines quantités positives $\delta_x, \delta_y, \ldots$, nous dirons que la fonction est *olotrope* en $x_0, y_0, \ldots$, et nous appellerons *olomètres* de la fonction relatifs à ces valeurs particulières les quantités positives dont il s'agit. Le développement entier de $f(x_0+h, y_0+k, \ldots)$ sera dit avoir lieu à partir de $x_0, y_0, \ldots$, et, par rapport à ce développement, nous nommerons valeurs initiales des variables et de la fonction les quantités $x_0, y_0, \ldots$ et $f(x_0, y_0, \ldots)$.

Nous dirons qu'une fonction $f(x, y, \ldots)$ est olotrope pour tous les systèmes de valeurs des variables indépendantes renfermés entre des limites données, si son développement en une série entière par rapport aux accroissements des variables est possible à partir de valeurs initiales arbitrairement choisies entre ces limites, et avec des olomètres ne tombant jamais au-dessous de certaines quantités positives fixes.

Toutes les fonctions dont on fait usage en Analyse sont olotropes dans les circonstances générales, et ne cessent de l'être que pour certains systèmes de valeurs particulières des variables qu'il est toujours possible d'assigner *a priori* d'après la nature spéciale de chaque fonction étudiée.

2. *$f(x, y, \ldots)$ désignant une fonction olotrope dans certaines limites, les coefficients du développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$ en une série entière par rapport à h, k, $\ldots$ sont des fonctions de x, y, $\ldots$ olotropes dans les mêmes limites que la proposée et avec les mêmes olomètres.*

3. Les coefficients des premières puissances de h, k, $\ldots$ dans le développement dont il s'agit se nomment les *dérivées premières* de $f(x, y, \ldots)$ par rapport à x, y, $\ldots$ respectivement. Ces dérivées, étant olotropes, ont des dérivées olotropes; celles-ci en ont à leur tour qui jouissent de la même propriété, et ainsi de suite indéfiniment : ce sont ces dérivées de dérivées qui constituent le système des dérivées partielles *de tous ordres* de la fonction proposée.

4. *Une dérivée d'ordre supérieur au premier est indépendante de l'ordre dans lequel on effectue les diverses dérivations partielles.*

5. *La dérivée*

$$\frac{d^{p+q+\cdots} f(x, y, \ldots)}{dx^p\, dy^q \ldots}$$

s'obtient en multipliant par $1.2\ldots p.1.2\ldots q\ldots$ le coefficient de $h^p k^q \ldots$ dans le développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$.

6. *Soient*

$f(x, y, \ldots)$ *une fonction olotrope en* $x_0, y_0, \ldots$;
$\delta_x, \delta_y, \ldots$ *les olomètres qui correspondent à ces valeurs particulières;*
$r_x, r_y, \ldots$ *des quantités positives respectivement inférieures aux olomètres;*
M *une limite supérieure du module de la fonction pour tous les systèmes de valeurs de* $x, y, \ldots$ *qui vérifient les relations*

$$\operatorname{mod}(x - x_0) = r_x, \qquad \operatorname{mod}(y - y_0) = r_y, \qquad \ldots;$$

enfin $\left[\dfrac{d^{p+q+\ldots} f(x, y, \ldots)}{dx^p\, dy^q \ldots}\right]_0$ *la valeur que prend pour* $x = x_0, y = y_0, \ldots$ *la dérivée partielle* $\dfrac{d^{p+q+\ldots} f(x, y, \ldots)}{dx^p\, dy^q \ldots}$.

Cela étant, on a la relation

$$\left[\frac{d^{p+q+\ldots} f(x, y, \ldots)}{dx^p\, dy^q \ldots}\right]_0 < \mathrm{M}\,\frac{1.2\ldots p}{r_x^p}\,\frac{1.2\ldots q}{r_y^q}\ldots$$

7. *Pour que deux fonctions de* $x, y, \ldots$, *olotropes l'une et l'autre entre des limites données, y soient identiquement égales, il faut et il suffit que, pour un seul système de valeurs particulières des variables choisi à volonté entre ces limites, les deux fonctions et leurs dérivées semblables de tous ordres prennent respectivement les mêmes valeurs.*

8. *Pour que la valeur d'une fonction, olotrope entre des limites données, dépende exclusivement des valeurs que l'on attribue à certaines des variables indépendantes, il faut et il suffit que les dérivées premières relatives aux autres variables soient toutes identiquement nulles.*

En particulier, pour que cette fonction se réduise à une constante, il faut et il suffit que les dérivées premières soient toutes identiquement nulles.

9. On appelle *composition* des fonctions l'opération qui consiste à *substituer* aux variables $u, v, \ldots$ d'une fonction donnée $f(u, v, \ldots)$ autant de fonctions données

$$(\alpha) \qquad \mathrm{U}(x, y, \ldots), \quad \mathrm{V}(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

d'autres variables $x, y, \ldots$, ce qui engendre évidemment une nouvelle fonction de ces dernières,

$$\mathrm{F}(x, y, \ldots) = f[\mathrm{U}(x, y, \ldots), \mathrm{V}(x, y, \ldots), \ldots].$$

Des dénominations spéciales caractérisent les rôles relatifs joués dans cette opération par les diverses fonctions qui y concourent : les fonctions (α) sont dites *simples*, $f(u, v, \ldots)$ se nomme la *fonction composante*, et $F(x, y, \ldots)$ la *fonction composée*.

10. *Les variables indépendantes x, y, ... étant assujetties à varier entre des limites telles que le module de chacune reste fini, si les fonctions simples restent olotropes entre les limites dont il s'agit sans que jamais leurs valeurs excèdent les limites d'olotropie de la composante, la fonction composée est elle-même olotrope dans les limites où les fonctions simples sont supposées l'être.*

11. Il importe de retenir que les formules générales de la théorie des fonctions composées supposent toutes la réalisation préalable des conditions dans lesquelles le théorème précédent subsiste.

12. Si dans une composante quelconque on suppose que les diverses variables indépendantes soient remplacées, les unes par d'autres variables indépendantes données x, y, ..., les autres par certaines fonctions $u, v, \ldots$ de $x, y, \ldots$, les dernières enfin par des dérivées d'ordres quelconques de $u, v, \ldots$, cette opération engendre en définitive une fonction de x, y, ... que nous nommerons *fonction composée différentielle* de $u, v, \ldots$. L'ordre d'une fonction composée différentielle de u, v, ... par rapport à telle ou telle de ces dernières fonctions, u par exemple, est l'ordre le plus élevé des dérivées de u qui concourent à engendrer la fonction composée dont il s'agit. Ainsi, u et v désignant deux fonctions de la seule variable x,

$$f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^p u}{dx^p}, \quad v, \frac{dv}{dx}, \ldots, \frac{d^q v}{dx^q}\right)$$

est une fonction composée différentielle de u et v, d'ordre p par rapport à u, d'ordre q par rapport à v.

Il peut arriver, bien entendu, que les ordres d'une fonction composée différentielle de $u, v, \ldots$ par rapport à ces diverses fonctions soient tous nuls : en pareils cas, on la nomme souvent par opposition une *fonction composée finie* de u, v, ...

13. Comme les dérivées d'une fonction olotrope sont olotropes dans

les mêmes limites que la fonction (2) (5), il résulte du théorème général ci-dessus énoncé (10) qu'une fonction composée différentielle de u, v, ... est olotrope tant que les fonctions u, v, ... le sont elles-mêmes et que leurs valeurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, n'excèdent pas les limites d'olotropie de la composante. La fonction composée différentielle a alors des dérivées de tous ordres calculables par l'application des règles générales (11). De plus, *l'expression ainsi obtenue pour l'une quelconque de ces dérivées est indépendante de l'ordre dans lequel les diverses dérivations sont successivement exécutées;* il suffit, pour le prouver, de faire voir que, si l'on exécute deux dérivations consécutives sur une fonction composée différentielle, on peut, sans changer la formule résultante, en intervertir l'ordre : or l'application de la règle des fonctions composées permet de constater le fait immédiatement.

On notera que *toute différentiation première augmente d'une unité l'ordre d'une fonction composée différentielle de u, v, ... par rapport à l'une quelconque de ces dernières fonctions.*

Généralités.

14. Soient u, v, ... des fonctions de variables indépendantes x, y, ...; f et φ deux fonctions composées, finies ou différentielles (12), de u, v, ... : si l'égalité $f = \varphi$ est vérifiée quels que soient x, y, ... (tout au moins entre certaines limites), on dit qu'elle constitue une *relation* entre les fonctions u, v, ...

Une semblable relation étant donnée, supposons qu'on en réduise le second membre à zéro en faisant tout passer dans l'autre : suivant que le premier membre est alors une fonction composée *finie* ou *différentielle* de tels ou tels *ordres*, la relation donnée elle-même prend ces diverses appellations.

15. Quand les fonctions u, v, ... intéressées dans une relation sont olotropes (entre certaines limites), et que leurs valeurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes x, y, ..., laissent olotropes les composantes figurant dans les deux membres, les fonctions composées qui constituent les deux membres dont

il s'agit ont des dérivées de tous ordres, calculables par l'application des règles générales (13), et les dérivées semblables de ces fonctions sont comme elles identiquement égales (7).

D'une relation finie ou différentielle donnée on déduit donc une infinité d'autres, toutes différentielles, entre les mêmes fonctions, en écrivant que les dérivées semblables de ses deux membres sont identiquement égales.

La formation de ces nouvelles relations différentielles se nomme la *différentiation* de la relation donnée. Il résulte du n° 13, que l'*ordre dans lequel on effectue sur cette dernière des différentiations déterminées en nombre quelconque est sans influence sur le résultat final.*

16. Un *système d'équations finies ou différentielles* est la même chose qu'un système de relations proprement dites, à cela près que les fonctions $u, v, \ldots$ qui s'y trouvent engagées sont inconnues, et il s'agit alors de déterminer ces dernières de façon que les relations données aient lieu entre elles.

Quand toutes les équations d'un système donné ou seulement quelques-unes d'entre elles sont des équations différentielles, leurs *intégrales* ne peuvent être conçues autrement qu'olotropes, tout au moins entre certaines limites. Effectivement, puisque leurs dérivées jouent un rôle dans la question, il faut qu'elles en aient : or notre définition n'en attribue qu'aux fonctions olotropes (3).

17. On appelle système immédiat d'*équations différentielles totales* un système dont les diverses équations expriment immédiatement *toutes* les dérivées premières des fonctions inconnues en fonctions composées des variables indépendantes et des fonctions inconnues elles-mêmes. En désignant par $x, y, \ldots$ les variables indépendantes, par u, v, ... les fonctions inconnues dont il s'agit, par $U_x, V_x, \ldots, U_y, V_y, \ldots$ des composantes données, le type d'un pareil système est donc

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{du}{dx} = U_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \dfrac{dv}{dx} = V_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \ldots \\ \dfrac{du}{dy} = U_y(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \dfrac{dv}{dy} = V_y(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \ldots \end{array}\right.$$

18. Avant tout, une distinction essentielle doit être faite entre les divers groupes possibles de fonctions intégrales du système immédiat (1).

Pour les uns, tout au moins entre certaines limites, les valeurs des variables indépendantes, prises conjointement avec les valeurs correspondantes des fonctions, laissent olotropes les composantes de tous les seconds membres, et, en pareil cas, les intégrales sont dites *ordinaires*. Pour les autres, les valeurs des variables indépendantes, prises conjointement avec celles des fonctions, ne laissent jamais olotropes en même temps toutes les composantes dont il s'agit, et, en pareil cas, les intégrales sont dites *singulières*.

Les intégrales de la première sorte existent dans des cas infiniment plus étendus, et ce sont les seules qui soient susceptibles d'une théorie générale; elles vont maintenant nous occuper exclusivement.

19. Considérons une relation différentielle subsistant entre les diverses fonctions d'un groupe d'intégrales ordinaires du système total (1), et à laquelle la règle des fonctions composées soit applicable (15). Si cette relation a pour premier membre une dérivée de quelque intégrale, et qu'elle ne contienne dans son second membre, outre les variables indépendantes et les intégrales elles-mêmes, que des dérivées d'ordres inférieurs à celle qui figure dans le premier, nous dirons, pour abréger, qu'elle est *immédiate*, ainsi que l'expression fournie par elle pour la dérivée dont il s'agit.

L'*ordre* d'une relation immédiate est évidemment égal à celui de son premier membre.

Les relations immédiates jouissent de deux propriétés importantes, qu'il suffit d'énoncer pour en apercevoir l'exactitude :

1° *Toute relation déduite d'une relation immédiate par des différentiations quelconques est elle-même immédiate.*

2° *Toute relation déduite d'une relation immédiate en substituant à telles ou telles des dérivées qui figurent dans le second membre de cette dernière des expressions immédiates quelconques des dérivées en question est elle-même immédiate.*

20. Soient (ω) une relation immédiate d'ordre $k+1$; (Λ) un système de relations immédiates en nombre fini, toutes d'ordres inférieurs

à $k+1$, et fournissant une expression au moins pour chacune des dérivées des ordres 1, 2, ..., k. Des relations (Λ) extrayons un groupe (Λ') fournissant pour chacune de ces dernières une expression et une seule; dans le second membre de (ω), substituons aux dérivées dont il s'agit leurs expressions tirées de (Λ'), et répétons l'opération en faisant successivement pour le groupe (Λ') tous les choix possibles. L'ensemble des opérations que nous venons d'indiquer s'appellera, pour abréger, *remplacer dans la relation* (ω) *les dérivées des ordres* 1, 2, ..., k *par leurs expressions tirées de* (Λ).

21. Cela posé, supposons les équations du système (1) identiquement satisfaites par quelque groupe d'intégrales ordinaires, substituons ces intégrales aux fonctions inconnues correspondantes dans les équations dont il s'agit, et désignons indifféremment par (P_1) ou (Q_1) l'ensemble des relations immédiates qui résultent de cette substitution. Effectuons ensuite sur chacune de celles-ci et de toutes les manières possibles une différentiation première, et soient (P_2) le groupe des relations résultantes, (Q_2) celui qu'on obtient en remplaçant dans chacune des relations (P_2) les dérivées du premier ordre par leurs expressions tirées de (Q_1) [20] : en vertu des deux propositions énoncées au n° 19, le groupe total (P_2), (Q_2) fournit des expressions immédiates pour les diverses dérivées du second ordre. Effectuons maintenant de toutes les manières possibles une différentiation première sur les diverses relations du groupe

$$(P_2), \quad (Q_2),$$

et soient (P_3) le groupe des relations résultantes, (Q_3) celui qu'on obtient en remplaçant dans chacune des relations (P_3) les dérivées des deux premiers ordres par leurs expressions tirées de (Q_1), (Q_2); le groupe total (P_3), (Q_3) fournira de même des expressions immédiates pour les diverses dérivées du troisième ordre. Et ainsi de suite indéfiniment.

22. Dans le groupe indéfini

(2) $$(P_1), \quad (P_2), \quad (P_3), \quad \ldots,$$

nous distinguerons : 1° le sous-groupe des relations *primitives*, obtenu en adjoignant aux relations du système proposé toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations; 2° le sous-groupe des relations *intermédiaires*, composé de toutes les autres du groupe (2).

Nous nommerons *ultimes* les relations

$$(\mathrm{Q}_1),\quad (\mathrm{Q}_2),\quad (\mathrm{Q}_3),\quad \ldots, \tag{3}$$

dont les seconds membres ne contiennent aucune dérivée.

Nous affecterons enfin des dénominations correspondantes les expressions fournies par ces diverses relations pour les dérivées des intégrales ordinaires du système donné.

23. Il importe de faire à ce sujet les remarques suivantes :

1° Pour faciliter le langage, nous dirons qu'une dérivée quelconque de u, v, ... est *simple* lorsqu'elle résultera de différentiations intéressant toutes une seule et même variable indépendante; et nous dirons qu'elle est *complexe* lorsque les différentiations génératrices se rapporteront à plusieurs variables distinctes.

Il est évident que les formules primitives ne peuvent donner qu'une seule expression pour une dérivée simple, telle que $\frac{d^m u}{dx^m}$, et que cette expression s'obtiendra en exécutant $m-1$ différentiations relatives à x sur l'équation différentielle donnée

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{U}_x(x, y, \ldots; u, v, \ldots).$$

Mais, *pour une dérivée complexe, elles en fourniront autant qu'il y a de variables indépendantes intéressées dans ses différentiations génératrices.*

Effectivement, les expressions primitives de la dérivée complexe, $\frac{d^{p+q+r} u}{dx^p\, dy^q\, dz^r}$ par exemple (où p, q, r sont tous trois positifs), sont au nombre de trois, et se tireront respectivement des équations différentielles données

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{U}_x,\quad \frac{du}{dy} = \mathrm{U}_y,\quad \frac{du}{dz} = \mathrm{U}_z$$

par les différentiations correspondantes

$$\frac{d^{p+q+r-1}}{dx^{p-1}\, dy^q\, dz^r},\quad \frac{d^{p+q+r-1}}{dx^p\, dy^{q-1}\, dz^r},\quad \frac{d^{p+q+r-1}}{dx^p\, dy^q\, dz^{r-1}}.$$

2° Il n'existe pas d'expressions intermédiaires pour les dérivées du premier et du second ordre.

Dans le premier ordre, les relations primitives, comme les relations ultimes, coïncident avec les équations du système donné.

Dans le second ordre, le nombre des expressions ultimes d'une dérivée quelconque est précisément égal au nombre de ses expressions primitives, c'est-à-dire à 1 *ou à* 2, *suivant que cette dérivée est simple ou complexe.*

Dans les ordres supérieurs au second, il serait facile de montrer que toute dérivée simple n'admet qu'une seule expression ultime; on voit d'ailleurs immédiatement que, pour les dérivées complexes, la multiplicité des expressions ultimes est plus grande encore que pour les expressions primitives. Nous n'avons aucun intérêt à en faire le dénombrement exact.

3° *Toute expression primitive, intermédiaire ou ultime est entière par rapport aux composantes*

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{lll} U_x, & V_x, & \ldots; \\ U_y, & V_y, & \ldots; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}\right.$$

et à leurs dérivées partielles, comme aussi (lorsqu'il y a lieu) par rapport aux dérivées partielles des intégrales u, v, ...

4° *Les variables $x, y, \ldots$, les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres étant considérées pour un instant comme autant de variables indépendantes distinctes, pour que les formules primitives et intermédiaires soient vérifiées par des valeurs particulières données des variables dont il s'agit, il faut et il suffit que les formules ultimes le soient.*

Les groupes (2) *et* (3) *sont ainsi équivalents l'un à l'autre.*

24. *Quand le système* (1) *possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, toutes olotropes en $x_0, y_0, \ldots$, les développements de ces intégrales par la formule de Taylor, à partir de $x_0, y_0, \ldots$, peuvent être reconstruits dès que l'on connaît seulement leurs valeurs initiales $u_0, v_0, \ldots$.* [On suppose, bien entendu, que les valeurs particulières $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$, prises conjointement, n'excèdent pas les limites d'olotropie des composantes (4).]

Comme les seconds membres des relations ultimes contiennent seulement $x, y, \ldots; u, v, \ldots$, et qu'on doit avoir

$$u = u_0, \qquad v = v_0, \qquad \ldots$$

pour

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad \ldots,$$

cette dernière hypothèse numérique les transforme tous en des quantités connues. On obtient ainsi les valeurs correspondantes des premiers membres de toutes ces relations, c'est-à-dire les valeurs initiales de toutes les dérivées des intégrales ordinaires dont l'existence est admise. Or ces valeurs initiales, prises avec celles des intégrales elles-mêmes que l'on connaissait auparavant et divisées par les facteurs numériques connus, donnent précisément les coefficients des développements cherchés.

Les formules primitives et intermédiaires pourraient aussi bien être employées à la reconstruction de ces développements. Il suffirait d'y poser toujours $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$, de les écrire par ordres croissants et de les résoudre successivement par rapport aux valeurs initiales des dérivées des intégrales.

Quant à la multiplicité des expressions que les formules primitives, intermédiaires et ultimes peuvent fournir pour une même dérivée, il n'y a pas à s'en préoccuper : on pourra bien, à cause d'elle, obtenir de plusieurs manières les valeurs de certains coefficients des développements; mais, pour chaque coefficient, ces valeurs seront de toute nécessité numériquement égales les unes aux autres, parce que les diverses expressions d'une même dérivée sont données par des formules qui toutes sont des conséquences nécessaires de l'existence supposée des intégrales, et qui, par suite, ne peuvent manquer de s'accorder entre elles.

Existence des intégrales ordinaires dans le cas de passivité.

25. Les calculs indéfinis indiqués au numéro précédent permettent de reconstruire les développements d'un groupe d'intégrales ordinaires du système proposé (1), lorsqu'on sait d'avance que ces inté-

grales existent et qu'on connaît seulement leurs valeurs initiales

$$(5) \qquad u_0, \quad v_0, \quad \ldots$$

correspondant aux valeurs initiales

$$(6) \qquad x_0, \quad y_0, \quad \ldots$$

des variables indépendantes. Mais ces calculs permettraient aussi de trouver par la méthode des coefficients indéterminés tous les groupes d'intégrales ordinaires qui peuvent exister, alors même qu'on ne connaîtrait rien sur eux. Pour cela, il suffirait en effet de prendre arbitrairement, dans les limites où les composantes (4) restent à la fois olotropes, les quantités (5), (6) servant de base à ces calculs; de construire ensuite les mêmes séries entières en $x - x_0$, $y - y_0$, ... que si l'on avait la certitude d'aboutir à des intégrales; enfin, de sommer ces séries quand elles admettent quelque système de rayons de convergence tous différents de zéro, et d'examiner si leurs sommes satisfont effectivement aux équations différentielles proposées. Rien d'ailleurs ne pourrait entraver le calcul des coefficients des développements, puisque les valeurs (5), (6) sont comprises dans les limites d'olotropie des composantes (4), et que les relations ultimes ont pour seconds membres des expressions entières par rapport à ces composantes et à leurs dérivées partielles.

En procédant de la sorte pour toutes les combinaisons de valeurs des quantités (5), (6) qui tombent dans les limites d'olotropie des composantes (4), on ne pourra manquer de découvrir les développements de toutes les intégrales ordinaires du système proposé.

26. Nous avons constaté au n° 23 (1°, 2°) que les formules primitives, intermédiaires et ultimes (et en particulier les formules ultimes) peuvent donner plusieurs expressions pour une même dérivée; puis au n° 24 que cette multiplicité n'a pas d'inconvénient quand il s'agit simplement de reconstituer les développements d'intégrales ordinaires dont l'existence est certaine. Mais, lorsqu'on opère, comme au numéro précédent, sur des valeurs des quantités (5), (6), prises au hasard dans les limites d'olotropie des composantes (4), on conçoit qu'il puisse en être autrement et que ces valeurs diverses obtenues

pour un même coefficient soient inégales. L'existence d'intégrales ordinaires satisfaisant aux conditions initiales résultant des données (5), (6) devient alors impossible; car les formules primitives, intermédiaires et ultimes, devraient toutes s'accorder si de pareilles intégrales existaient, et fournir pour chaque coefficient du développement une seule et unique valeur.

27. Une égalité numérique constante entre toutes les valeurs initiales fournies par les formules *ultimes* pour une même dérivée quelconque d'une intégrale hypothétique est donc une condition absolument nécessaire à l'existence d'un groupe d'intégrales ordinaires répondant aux données initiales choisies. Elle peut résulter de deux causes entièrement différentes :

Soit d'*un choix convenable des valeurs numériques des quantités* (5), (6) *relativement à la nature particulière des composantes* (4), choix qui, *s'il est possible,* fait naître l'égalité en question pour ces données initiales sans l'assurer pour d'autres;

Soit d'*une corrélation mutuelle spéciale entre les composantes* (4), *en vertu de laquelle l'égalité dont il s'agit subsiste indépendamment de toute précaution dans le choix des valeurs numériques des données initiales* (5), (6).

Dans ce dernier cas, qui est de beaucoup le plus intéressant, les intégrales ordinaires existent toujours, comme nous allons incessamment le constater, et elles jouissent de propriétés générales très remarquables dont l'étude constitue la partie la plus importante de la théorie des équations différentielles. Pour caractériser la corrélation mutuelle ci-dessus spécifiée entre les composantes (4), nous dirons que le système (1) est *passif*.

Pour un système non passif, l'existence d'intégrales ordinaires est essentiellement subordonnée à la possibilité d'un choix convenable des données initiales (5), (6) et, par suite, essentiellement précaire. Nous donnerons à ces intégrales, quand par hasard il y en a, le nom d'*exceptionnelles*.

Le système proposé (1) est évidemment passif ou non, suivant que les expressions ultimes de chaque dérivée d'une intégrale hypothétique sont toutes égales identiquement, ou bien qu'il y a inégalité entre elles même une fois seulement; car les valeurs initiales à attribuer à ces dérivées sont précisément ces expressions dans lesquelles on a simplement substitué $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$ à $x, y, \ldots, u, v, \ldots$.

La distinction s'opère aisément à l'aide du théorème suivant :

28. *Pour que le système* (1) *soit passif, il faut et il suffit que, en considérant $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ comme autant de variables indépendantes distinctes, l'égalité identique ait lieu entre les expressions ultimes de chaque dérivée complexe du second ordre des diverses intégrales hypothétiques.*

La nécessité de la condition posée résulte immédiatement de la remarque finale du numéro précédent, qui s'applique en particulier aux dérivées complexes du second ordre. Nous prouverons qu'elle est suffisante en raisonnant comme il suit.

Toute expression ultime d'une dérivée de l'ordre $k+1$ s'obtient en différentiant k fois l'une des équations (1), et remplaçant après quelques-unes de ces différentiations, en particulier après la dernière, toutes les dérivées qui figurent dans le second membre par telles ou telles de leurs expressions ultimes. Cela posé :

I. *Si l'égalité identique entre les diverses expressions ultimes de chaque dérivée a lieu jusqu'à l'ordre $k \geqq 1$ inclusivement, toutes les expressions ultimes d'une dérivée déterminée d'ordre $k+1$ obtenues en effectuant sur une même équation du système proposé l'opération ci-dessus indiquée, sont identiquement égales entre elles, de quelque manière que cette opération soit conduite.*

1° En premier lieu, si l'on n'opère de substitutions qu'après avoir exécuté la dernière différentiation, la relation ultime à laquelle on est conduit est toujours la même; car la formule primitive résultant des seules différentiations est indépendante de l'ordre dans lequel on les exécute (15), et pour chacune des dérivées que l'on en doit finalement éliminer les diverses expressions ultimes sont par hypothèse identiques.

2° Si l'on ne change pas l'ordre relatif des k différentiations, le résultat de l'opération ci-dessus indiquée est indépendant de toutes les autres conditions dans lesquelles on l'effectue.

Supposons, en effet, que les k différentiations soient exécutées dans un ordre déterminé, certaines d'entre elles étant suivies de substitutions déterminées; soient x celle des variables indépendantes par rapport à laquelle la dernière doit avoir lieu, et

$$\delta_k = f(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \delta, \ldots) \tag{7}$$

la relation sur laquelle on a à l'exécuter; dans cette relation, δ_k désigne une dérivée déterminée d'ordre k, et $\delta, \ldots$ les diverses dérivées des ordres $1, 2, \ldots, k-1$. Chacune des dérivées

$$\delta, \quad \ldots, \quad \frac{d\delta}{dx}, \quad \ldots,$$

étant d'ordre au plus égal à k, ne possède par hypothèse qu'une seule expression ultime, et si l'on désigne par

$$\Delta(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \quad \ldots, \quad \Delta_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \quad \ldots$$

les expressions ultimes des dérivées dont il s'agit, il en résulte en particulier les identités

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta_x = \dfrac{d\Delta}{dx} + \dfrac{d\Delta}{du}\mathrm{U}_x + \dfrac{d\Delta}{dv}\mathrm{V}_x + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{8}$$

En différentiant par rapport à x la relation (7), éliminant les dérivées du second membre et tenant compte des identités (8), nous aurons successivement :

$$\frac{d\delta_k}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx} + \ldots + \frac{df}{d\delta}\frac{d\delta}{dx} + \ldots,$$

$$\frac{d\delta_k}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{du}\mathrm{U}_x + \frac{df}{dv}\mathrm{V}_x + \ldots + \frac{df}{d\Delta}\Delta_x + \ldots,$$

$$\frac{d\delta_k}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{du}\mathrm{U}_x + \frac{df}{dv}\mathrm{V}_x + \ldots + \frac{df}{d\Delta}\left[\frac{d\Delta}{dx} + \frac{d\Delta}{du}\mathrm{U}_x + \frac{d\Delta}{dv}\mathrm{V}_x + \ldots\right] + \ldots \tag{9}$$

En éliminant de la relation (7) les dérivées $\delta, \ldots$, différentiant par rapport à x et remplaçant finalement les dérivées du premier ordre par leurs valeurs tirées des équations proposées, il viendra :

$$\delta_k = f(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \Delta, \ldots),$$

$$\frac{d\delta_k}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx} + \ldots + \frac{df}{d\Delta}\left[\frac{d\Delta}{dx} + \frac{d\Delta}{du}\frac{du}{dx} + \frac{d\Delta}{dv}\frac{dv}{dx} + \ldots\right] + \ldots,$$

$$\frac{d\delta_k}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{du}\mathrm{U}_x + \frac{df}{dv}\mathrm{V}_x + \ldots + \frac{df}{d\Delta}\left[\frac{d\Delta}{dx} + \frac{d\Delta}{du}\mathrm{U}_x + \frac{d\Delta}{dv}\mathrm{V}_x + \ldots\right] + \ldots,$$

relation identique à (9).

Ainsi l'on peut, sans changer le résultat, remplacer dans le second membre de (7) toutes les dérivées par leurs expressions ultimes, ce qui donnera une expression ultime de δ_k, effectuer seulement alors la dernière différentiation et remplacer finalement les dérivées du premier ordre par leurs valeurs U_x, V_x, ... Si l'on observe maintenant que la dérivée δ_k, étant d'ordre k, n'est susceptible que d'une seule expression ultime, le point qui nous occupe se trouve entièrement démontré.

3° Considérons deux quelconques des expressions ultimes dont il s'agit actuellement de constater l'identité, et qui se déduisent, comme nous l'avons expliqué, par différentiations et substitutions, d'une même équation du système (1). Si, sans changer de part ni d'autre l'ordre relatif des différentiations, on n'opère de substitutions qu'après la dernière d'entre elles, on tombe sur deux expressions ultimes respectivement identiques aux deux précédentes (2°), et l'on sait d'ailleurs (1°) qu'en procédant ainsi le résultat est indépendant de l'ordre des différentiations.

II. *Si l'égalité identique entre les diverses expressions ultimes de chaque dérivée a lieu jusqu'à l'ordre $k \geqq 2$ inclusivement, les deux expressions ultimes d'une même dérivée d'ordre $k+1$, déduites de deux équations distinctes du système proposé par l'opération indiquée plus haut, sont nécessairement identiques.*

Supposons, par exemple, que les deux équations dont il s'agit soient

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{U}_x, \qquad \frac{du}{dy} = \mathrm{U}_y. \tag{10}$$

L'une des différentiations à exécuter sur la première est nécessairement relative à y, l'une des différentiations à exécuter sur la seconde nécessairement relative à x, et toutes celles qui restent se rapportent aux mêmes variables de part et d'autre. Or, les expressions ultimes de chaque dérivée étant identiques jusques et y compris l'ordre k, on peut, d'après ce qui précède (I), opérer les calculs dans l'ordre suivant sur chacune des équations (10) : 1° effectuer d'abord la différentiation relative à y, s'il s'agit de la première, relative à x s'il s'agit de la seconde, et remplacer les dérivées du premier ordre par leurs valeurs tirées des équations proposées ; 2° exécuter ensuite les $k-1$ différentiations restantes, et remplacer finalement par leurs expressions ultimes les dérivées qui figurent alors dans les seconds membres. En vertu de l'hypothèse, les expressions ultimes obtenues par la première partie de l'opération sont identiques : dès lors, en effectuant sur elles $k-1$ différentiations semblables par la règle des fonctions composées et substituant finalement à chaque dérivée une même expression ultime, on obtiendra de part et d'autre des résultats identiques.

III. Pour le second ordre, l'égalité identique entre les diverses expressions ultimes d'une même dérivée a lieu d'elle-même si cette dérivée est simple, et résulte de l'hypothèse si cette dérivée est complexe. On en conclura, par l'application répétée des propositions ci-dessus énoncées (I, II), que cette égalité identique a encore lieu dans le troisième ordre, puis dans le quatrième, et ainsi de suite indéfiniment.

29. Les conditions de passivité du système (1) se formeront donc en égalant identiquement les deux expressions ultimes de chacune des dérivées complexes secondes des diverses intégrales hypothétiques. Si le système implique g fonctions inconnues de h variables indépendantes, le nombre des dérivées complexes secondes de chaque fonction inconnue est égal à celui des combinaisons 2 à 2 de toutes les variables, c'est-à-dire à $\frac{h(h-1)}{2}$. Celui des conditions de passivité, égal au nombre total de ces dérivées complexes, a donc pour expression $g\frac{h(h-1)}{2}$.

30. Une particularité essentielle à noter est que *le système* (1) *est*

passif sans condition aucune dans le cas d'une seule variable indépendante.

Effectivement, le choix de l'équation à différentier pour obtenir une dérivée déterminée n'a plus alors rien d'arbitraire, et le point à démontrer résulte immédiatement de l'alinéa I du n° 28.

31. *De quelque manière que les données initiales* (5), (6) *aient été prises dans les limites d'olotropie des composantes* (4), *les développements des intégrales hypothétiques du système* (1) *supposé passif ont des rayons de convergence tous différents de zéro, et leurs sommes en constituent effectivement des intégrales.*

I. Étant donnée une fonction $f(x, y, \ldots, u, v, \ldots)$ des variables x, y, ..., u, v, ..., si une seconde fonction $\varphi(x, y, \ldots, u, v, \ldots)$ des mêmes variables est telle que, pour les valeurs particulières $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$, sa valeur et celles de toutes ses dérivées soient réelles, positives et supérieures aux modules des valeurs correspondantes de $f(x, y, \ldots, u, v, \ldots)$ et de ses dérivées semblables, la fonction φ sera dite *majorante* de f par rapport aux valeurs particulières considérées.

D'après cela, les points suivants sont évidents :

Relativement à des valeurs particulières données :

Si φ est une majorante de f, toute dérivée de φ est une majorante pour la dérivée semblable de f;

Une expression entière et à coefficients réels par rapport à plusieurs fonctions telles que f et à quelques-unes de leurs dérivées d'ordres quelconques a pour majorante l'expression qu'on obtient en remplaçant dans la proposée tous les coefficients négatifs par des coefficients positifs, et les fonctions f avec leurs dérivées par leurs majorantes et les dérivées semblables de celles-ci.

II. *Si l'on désigne par r une première quantité positive inférieure à tous les olomètres des composantes* (4) *qui se rapportent aux valeurs particulières* (5), (6) *; par α une deuxième quelconque ; par μ une troisième supérieure à tous les modules que les fonctions* (4) *peuvent acquérir à l'intérieur et sur les circonférences des cercles de rayons r décrits respectivement des points $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$ comme centres dans les divers plans ser-*

vant à la notation graphique des variables $x, y, \ldots, u, v, \ldots$; *si l'on pose enfin*

$$M = \alpha + \mu,$$

$$(x - x_0) + (y - y_0) + \ldots + (u - u_0) + (v - v_0) + \ldots = s,$$

$$\Omega(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = -\alpha + \frac{M}{1 - \frac{s}{r}},$$

la fonction Ω *est majorante pour l'une quelconque des fonctions* (4) *relativement aux valeurs* (5), (6).

Faisons suivre en effet de l'indice zéro les notations des diverses fonctions à considérer et de leurs dérivées pour désigner leurs valeurs particulières en $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$. Il vient immédiatement, en appelant W l'une quelconque des fonctions (4),

$$[\Omega]_0 = M - \alpha = \mu > \operatorname{mod}[W]_0,$$

puis

$$\left[\frac{d^{p+q+\cdots}\Omega}{dx^p dy^q \cdots}\right]_0 = M \frac{1.2\ldots p}{r^p} \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}{r^q}\cdots,$$

quantité positive qui, en vertu du n° 6, surpasse évidemment

$$\operatorname{mod}\left[\frac{d^{p+q+\cdots}W}{dx^p dy^q \cdots}\right]_0.$$

III. *g désignant toujours le nombre des fonctions inconnues* $u, v, \ldots$, *si l'on prend, comme nous le ferons désormais,* $\alpha = \frac{1}{g}$, *la fonction*

$$(11) \qquad 1.3.5\ldots(2k-3)\left(\frac{g}{r}\right)^{k-1} \frac{M^k}{\left(1 - \frac{s}{r}\right)^{2k-1}},$$

où l'entier k est supposé plus grand que 1, *est majorante, relativement aux valeurs* (5), (6), *pour l'expression ultime de chaque dérivée d'ordre k des intégrales hypothétiques du système* (1).

L'expression ultime de $\frac{d^2 u}{dx^2}$,

$$\frac{dU_x}{dx} + \frac{dU_x}{du} U_x + \frac{dU_x}{dv} V_x + \ldots,$$

a pour majorante (I), (II)

$$\frac{d\Omega}{dx}+\frac{d\Omega}{du}\Omega+\frac{d\Omega}{dv}\Omega+\ldots=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{M}}{\left(1-\frac{s}{r}\right)^2}\left[1-g\alpha+\frac{g\mathrm{M}}{1-\frac{s}{r}}\right]=1\,\frac{g}{r}\,\frac{\mathrm{M}^2}{\left(1-\frac{s}{r}\right)^3}.$$

Et l'on retrouvera la même majorante pour les expressions ultimes de $\frac{d^2u}{dx\,dy}, \frac{d^2u}{dy^2}, \ldots, \frac{d^2v}{dx^2}, \frac{d^2v}{dx\,dy}, \ldots$, parce que la majorante Ω est symétrique par rapport à $x, y, \ldots, u, v\ldots$, et qu'elle est commune à tous les seconds membres (4).

Comme on peut passer des expressions ultimes des dérivées de $u, v, \ldots$ d'un ordre quelconque à celles des dérivées de l'ordre suivant en les différentiant une fois de toutes les manières possibles et en éliminant les dérivées du premier ordre, on trouvera de même une majorante commune aux expressions ultimes des dérivées du troisième ordre en différentiant une fois par rapport à s la majorante trouvée ci-dessus pour le second ordre et multipliant encore le résultat par le facteur

$$1-g\alpha+\frac{g\mathrm{M}}{1-\frac{s}{r}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{g\mathrm{M}}{1-\frac{s}{r}}.$$

Il vient ainsi

$$1.3.\left(\frac{g}{r}\right)^2\frac{\mathrm{M}^3}{\left(1-\frac{s}{r}\right)^5}.$$

On aura de même, pour le quatrième ordre,

$$1.3.5.\left(\frac{g}{r}\right)^3\frac{\mathrm{M}^4}{\left(1-\frac{s}{r}\right)^7},$$

et ainsi de suite jusqu'à l'expression (11) dont la généralité est évidente.

IV. *Si $\xi, \eta, \ldots$ désignent les modules des différences $x-x_0, y-y_0, \ldots$, et si la somme $p+q+\ldots$ est positive, le terme en $(x-x_0)^p(y-y_0)^q\ldots$ dans le développement d'une intégrale hypothétique quelconque a un* *module inférieur à*

$$(12)\qquad \frac{r}{g}\,\frac{1.2.3\ldots(p+q+\ldots)}{1.2\ldots p.1.2\ldots q\ldots}\left(\frac{2gM}{r}\right)^{p+q+\ldots}\xi^p\eta^q\ldots.$$

Considérons en effet la dérivée d'ordres partiels p, q, ... d'une intégrale hypothétique quelconque, et désignons par $A_{p,q,\ldots}$ la valeur que prend son expression ultime pour

$$(13)\qquad x=x_0,\qquad y=y_0,\qquad \ldots,\qquad u=u_0,\qquad v=v_0,\qquad \ldots;$$

le terme considéré est alors

$$A_{p,q,\ldots}\frac{(x-x_0)^p}{1.2\ldots p}\,\frac{(y-y_0)^q}{1.2\ldots q}\ldots.$$

Si $p+q+\ldots=1$, on a, d'après la définition de M,

$$\operatorname{mod} A_{p,q,\ldots}<M$$

et, à plus forte raison,

$$\operatorname{mod} A_{p,q,\ldots}<2M.$$

Si $p+q+\ldots>1$, on trouve, d'après la définition des majorantes, en faisant $k=p+q+\ldots$ dans la fonction (11) et en y opérant les substitutions (13),

$$\begin{aligned}\operatorname{mod} A_{p,q}&<\frac{r}{g}\cdot 1.3.5\ldots[2(p+q+\ldots)-3]\left(\frac{gM}{r}\right)^{p+q+\ldots},\\ &<\frac{r}{g}\cdot 2.4.6\ldots[2(p+q+\ldots)]\left(\frac{gM}{r}\right)^{p+q+\ldots},\\ &<\frac{r}{g}\cdot 1.2.3\ldots(p+q+\ldots)\left(\frac{2gM}{r}\right)^{p+q+\ldots}.\end{aligned}$$

V. *Le développement d'une intégrale hypothétique quelconque a des rayons de convergence au moins égaux à la quantité positive*

$$\frac{r}{2ghM},$$

h désignant toujours le nombre des variables indépendantes du système (1).

Effectivement, l'expression (12) est le terme général du développement de

$$(14)\qquad \frac{r}{g}\left[1-\frac{2gM}{r}(\xi+\eta+\ldots)\right]^{-1}$$

en une série entière par rapport à ξ, η, ... Or, en faisant abstraction du facteur constant $\frac{r}{g}$, cette série provient de la substitution de la somme

$$(15)\qquad \frac{2gM}{r}\xi+\frac{2gM}{r}\eta+\ldots$$

à la variable X dans la série entière

$$(16)\qquad 1+X+X^2+\ldots.$$

Pour sa convergence, il suffit que la somme (15), qui se confond avec celle des modules de ses diverses parties, soit inférieure à 1, rayon de convergence de la série entière (16). Il suffit, en particulier, que l'on ait

$$\xi<\frac{r}{2ghM},\qquad \eta<\frac{r}{2ghM},\qquad \ldots.$$

Ainsi donc, si ces inégalités ont lieu, les modules des termes du développement de l'expression (14) forment une série convergente; à plus forte raison (IV), si les modules des différences $x-x_0$, $y-y_0$, ... sont tous inférieurs à $\frac{r}{2ghM}$, le développement d'une intégrale hypothétique quelconque est convergent.

VI. *Les sommes des développements des intégrales hypothétiques vérifient identiquement les équations proposées.*

Effectivement, si l'on donne à x, y, ... des valeurs suffisamment voisines de x_0, y_0, ..., la substitution à u, v, ... des sommes dont il s'agit transforme les deux membres de toutes les équations différentielles en des fonctions olotropes de x, y, ... D'autre part, les valeurs initiales des dérivées des développements, prises conjointement avec les valeurs initiales u_0, v_0, ... des développements eux-mêmes et les valeurs initiales x_0, y_0, ... des variables indépendantes, vérifient les formules ultimes et, par suite (23, 4°), les formules primitives. Donc les fonctions de x, y, ... qui, après la substitution, figurent dans les deux membres d'une équation différentielle quelconque, sont égales, ainsi que leurs dérivées semblables de tous ordres, pour $x = x_0$, $y = y_0$, ..., et, par suite (7), sont identiquement égales entre elles.

32. Supposons que les seconds membres des équations (1) soient olotropes entre certaines limites, et que, r désignant une quantité positive inférieure à tous leurs olomètres, on puisse assigner une autre quantité positive μ supérieure à tous les modules que peuvent acquérir ces seconds membres à l'intérieur et sur les circonférences des cercles de rayons r ayant pour centres les valeurs (5), (6), arbitrairement choisies entre les limites données [c'est ce qui arrivera par exemple dans le cas très fréquent où les variables x, y, ..., u, v, ... des composantes (4) restent toutes finies entre ces limites]. Posons ensuite, comme tout à l'heure,

$$M = \frac{1}{g} + \mu,$$

et appelons u, v, ... les intégrales ordinaires définies par les données initiales (5), (6). Cela étant :

1° *Les rayons de convergence des développements des intégrales u, v, ... ne tombent jamais au-dessous de la quantité positive $\frac{r}{2ghM}$, de quelque façon que l'on choisisse les données initiales* (5), (6) *entre les limites dont nous venons de parler.*

Il suffit, pour s'en convaincre, d'examiner avec la plus légère attention la démonstration du numéro précédent.

2° *Un nombre positif α étant donné, on peut assigner un nombre positif β, indépendant du choix des données initiales* (5), (6) *entre les mêmes limites, et tel que les différences $u - u_0$, $v - v_0$, ... aient toutes des modules inférieurs à α lorsque les différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... ont toutes des modules inférieurs à β.*

Désignons, en effet, par ξ, η, ..., comme au numéro précédent, les modules des différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... Si, dans le développement de la quantité (14), on supprime le terme indépendant de ξ,

η, ..., la somme est une quantité positive évidemment supérieure (31, IV) aux modules des différences $u - u_0$, $v - v_0$, ... Or, en vertu de la continuité des séries entières, on peut, un nombre positif α étant donné, assigner un deuxième nombre positif β tel que, pour toutes les valeurs de ξ, η, ... choisies au-dessous de ce dernier, la série privée de terme constant que nous considérons ait une somme inférieure à α. A plus forte raison, les modules des différences $u - u_0$, $v - v_0$, ... tomberont alors au-dessous de α.

33. L'existence des intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données se trouve ainsi établie dans l'hypothèse d'un système passif; mais, comme nous l'établirons dans un Mémoire ultérieur, ces intégrales existent encore dans l'hypothèse d'une simple concordance *numérique* entre les valeurs initiales de certaines des expressions ultimes.

Dans l'un et l'autre cas, d'ailleurs, le groupe des intégrales dont il s'agit est *unique*, car chaque formule ultime assigne une valeur unique au coefficient qu'elle sert à calculer.