Annales scientifiques de l'É.N.S.

C. Guichard

Théorie des points singuliers essentiels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 12 (1883), p. 301-394

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1883_2_12__301_0>

THÉORIE

DES

POINTS SINGULIERS ESSENTIELS,

PAR M. C. GUICHARD,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

Le théorème de Laurent qui donne le développement d'une fonction suivant les puissances positives et négatives de la variable contient le premier germe de la théorie des points singuliers essentiels. Mais c'est à M. Weierstrass que revient la gloire d'avoir introduit cette nouvelle notion dans la Science. Dans un Mémoire (¹) qui a été publié dans les *Abhandlungen* de l'Académie des Sciences de Berlin en 1876, l'illustre géomètre allemand divise les points singuliers en deux classes : d'une part les pôles, et d'autre part les points essentiellement singuliers. Il montre que le point infini d'une fonction algébrique est un pôle, que le point infini d'une fonction holomorphe ou d'une fonction méromorphe quelconque est un point essentiellement singulier. Il y a donc une grande différence entre la forme de la fonction dans le voisinage d'un point singulier et sa forme dans le voisinage d'un pôle. Dans le voisinage d'un point singulier, la fonction, ainsi que l'a fait voir M. Picard, peut prendre toutes les valeurs, sauf deux exceptions au plus (²). Dans

---

(¹) Ce Mémoire a été traduit par M. Picard dans les *Annales de l'École Normale*, année 1879.

(²) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, année 1879, et *Annales de l'École Normale*, 1880.

le voisinage d'un pôle, au contraire, la fonction est toujours infiniment grande.

Dans le Mémoire déjà cité, M. Weierstrass donne la solution complète d'une question qui avait été traitée dans quelques cas particuliers par Cauchy : la décomposition d'une fonction holomorphe en facteurs primaires ayant chacun un zéro au plus. Il résout en même temps le problème inverse : former une fonction ayant des zéros donnés; puis il démontre que toute fonction méromorphe est égale au quotient de deux fonctions holomorphes. Enfin il donne la forme générale des fonctions uniformes qui ont un nombre fini de points essentiels et un nombre quelconque de pôles. Il résulte de ces remarquables travaux que de telles fonctions peuvent être représentées soit par un produit de facteurs primaires contenant chacun ou un zéro, ou un pôle, ou un point essentiel au plus, soit par une somme de termes primaires contenant ou un pôle ou un point essentiel.

M. Mittag-Leffler, disciple de M. Weierstrass, a étendu ce dernier mode de représentation aux fonctions qui ont un nombre infini de points essentiels, il montre en même temps qu'on peut former une fonction uniforme ayant des points singuliers donnés, en nombre fini ou infini, en supposant toutefois qu'il y en ait un nombre fini dans une aire limitée (1).

Peu de temps après, M. Mittag-Leffler publiait sur les points singuliers une série de propositions (2) qui agrandissent considérablement la première conception de M. Weierstrass. Le point essentiel, tel qu'il s'est présenté au début de cette théorie, est le point infini d'une fonction méromorphe ; il peut y avoir dans le voisinage d'un tel point un nombre infini de pôles, mais il n'y a pas de points essentiels. M. Mittag-Leffler a introduit dans l'analyse des points essentiels, tels que dans leur voisinage il y ait toute une série plusieurs fois infinie de points singuliers. L'ensemble de ces points singuliers forme ce que M. Mittag-Leffler appelle les *points singuliers du premier genre*. Ces points se divisent en classes. S'il n'y a pas de points singuliers dans le voisinage du point essentiel, on a un point singulier de première classe. Si dans le voisi-

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 13 février 1882.

(2) Voir *ibid.*, 3, 10, 17 et 24 avril 1882.

nage du point considéré il y a un nombre infini de points singuliers de première classe, on a un point singulier de deuxième classe, et ainsi de suite. Mais il y a toute une série de points singuliers qui ne rentrent pas dans cette classification, et que M. Mittag-Leffler appelle des *points de deuxième genre*. Dans ces recherches délicates, le géomètre suédois a introduit la classification de M. Cantor sur les suites infinies (1).

Il restait à introduire ce nouveau genre de discontinuités dans l'étude des fonctions périodiques. En 1880, M. Picard donnait une méthode pour obtenir les fonctions doublement périodiques qui ont des points singuliers essentiels, et montrait le rôle important que jouent ces fonctions dans l'étude des équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques (2). La même question a été traitée par M. Appell, qui a donné des développements en séries qui permettent de former toutes ces fonctions (3).

Enfin la notion de point essentiel a été étendue par M. Appell aux fonctions uniformes de deux variables, liées par une équation algébrique (4).

Tous ces travaux, accomplis dans un espace de temps relativement court, prouvent surabondamment combien la conception de M. Weierstrass était féconde.

Dans ces essais, nous nous sommes proposé d'exposer la théorie générale des fonctions uniformes qui ont des points essentiels, et en particulier celle des fonctions périodiques. Nous prenons, comme point de départ de notre théorie, le théorème de Laurent; ce théorème permet de représenter une fonction par la somme de deux séries, l'une contenant les puissances positives de la variable, l'autre les puissances négatives. On peut en déduire un autre théorème qui permet de représenter, dans une certaine étendue, une fonction par le produit de deux séries, contenant l'une les puissances positives, l'autre les puissances négatives de la variable. Dans les deux cas, il y a une fonction uniforme dans tout le plan qui est égale à la série qui contient les puis-

---

(1) *Mathematischen Annalen* de Clebsch et Neumann, t. V, p. 128.
(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*
(3) *Ibid.*, avril 1882.
(4) *Ibid.*

sances négatives. Chacune de ces fonctions pourra servir à définir l'espèce du point singulier; on représente ainsi la fonction par une somme ou par un produit de deux autres; l'une de ces fonctions est holomorphe dans le voisinage du point considéré; l'autre est holomorphe à une certaine distance de ce point. Cette double façon de concevoir les points singuliers permet de généraliser le théorème de M. Weierstrass sur la décomposition d'une fonction, ayant un nombre fini de points essentiels, en facteurs primaires et de l'étendre aux fonctions les plus générales. Après avoir étudié les points singuliers dans toute leur généralité, nous prenons les points du premier genre et nous donnons leur classification; la nature de la fonction uniforme, dont le point infini représente le point singulier, servira de base à cette étude; on fait ainsi marcher de pair la classification des fonctions et celle des points singuliers.

La deuxième Partie de ce travail est consacrée à l'étude des fonctions simplement périodiques qui ont des points singuliers essentiels. Nous les obtenons d'abord sous la forme de produits ou de sommes de termes primaires, puis sous la forme de développements en série qui les représentent d'une façon plus simple.

Enfin, dans la dernière Partie, nous étudions les fonctions doublement périodiques. Tout d'abord, nous formons des fonctions intermédiaires qui jouent dans cette théorie un rôle analogue à celui que jouent les fonctions θ dans la théorie des fonctions doublement périodiques méromorphes. En employant la méthode de M. Appell, on arrive à développer ces fonctions intermédiaires en séries. Avec ces fonctions intermédiaires, on peut former des fonctions doublement périodiques; si l'on cherche les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse former une telle fonction, quand l'espèce et la position de ses points singuliers sont donnés, on arrive à généraliser un certain nombre de théorèmes sur les fonctions méromorphes doublement périodiques. La méthode de décomposition en somme généralise le théorème des résidus; la méthode de décomposition en produits généralise les théorèmes de Liouville. Enfin, pour terminer, nous étudions les produits et les sommes doublement infinis qui peuvent servir à représenter les fonctions doublement périodiques. C'est le point de vue sous lequel s'est placé M. Cayley pour arriver à la théorie des fonctions doublement périodiques méromorphes (¹). Nous étendons ainsi les résultats du géomètre anglais aux fonctions périodiques les plus générales.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE GÉNÉRALE DES FONCTIONS UNIFORMES.

---

1. *Théorème de Laurent. — Examen des différents cas qui peuvent se présenter.* — Toute fonction $\Pi(z)$, holomorphe dans l'espace annulaire compris entre deux cercles C et C′ de centre a, se développe en série contenant les puissances positives et négatives de $z-a$. C'est là le théorème de Laurent. Nous supposerons, pour simplifier l'écriture, que le centre commun des deux cercles soit l'origine. Pour les valeurs de z comprises entre C et C′, on a

$$\Pi(z) = Q(z) + P\left(\frac{1}{z}\right),$$

en prenant

$$Q(z) = \sum_0^\infty A_n z^n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{\Pi(x)\,dx}{x-z},$$

$$P\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_1^\infty \frac{B_n}{z^n} = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C} \frac{\Pi(x)\,dx}{x-z}.$$

Le cercle C′ est supposé extérieur à C. La série Q est convergente à l'intérieur de C′ et la série P à l'extérieur de C.

Si la fonction $\Pi(z)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle C′, les coefficients de la série P sont tous nuls. Réciproquement, si, dans le développement de Laurent, la série qui contient les puissances négatives de la variable disparaît, la fonction $\Pi(z)$ est holomorphe à l'intérieur de C′. Cela suppose toutefois qu'on sache à l'avance que la

---

(¹) *Journal de Liouville*, t. X, année 1845.

fonction $\Pi(z)$ est uniforme à l'intérieur de C' et n'a pas de lignes de discontinuités à l'intérieur de ce cercle. Dans ce cas, les deux fonctions $\Pi(z)$, $Q(z)$, uniformes à l'intérieur de C', coïncident entre C et C'; elles sont encore égales à l'intérieur du cercle C, d'après le théorème de Riemann. Le point $z = 0$ est alors un point ordinaire de la fonction $\Pi(z)$.

Supposons alors que le développement contienne des puissances négatives de z. Diminuons les rayons de C et de C', de façon que la fonction reste holomorphe entre ces deux cercles. Il est bien évident que, si la fonction n'a pas de ligne de discontinuités, les rayons de ces cercles C et C' peuvent devenir aussi petits que l'on veut. C'est toujours dans cette hypothèse que nous nous placerons. Il peut arriver qu'à un certain moment les puissances négatives disparaissent. L'origine est alors un point ordinaire de la fonction $\Pi(z)$.

Si les puissances négatives subsistent, quels que soient les rayons de C et de C', le point $z = 0$ est un point singulier de la fonction. Il peut alors se présenter deux cas :

1° A partir d'un certain moment, les coefficients du développement de Laurent ne changent plus quand on diminue les rayons de C et de C'. La série P correspondante est alors convergente dans tout le plan, sauf au point $z = 0$. Elle représente une fonction uniforme dans tout le plan. La différence $\Pi(z) - P\left(\frac{1}{z}\right)$ sera holomorphe à l'intérieur du cercle C'. La fonction $\Pi(z)$ n'a, à l'intérieur de C', qu'un seul point de discontinuité, le point $z = 0$. Nous dirons que l'origine est un point de première classe, et nous caractériserons ce point singulier par la fonction $P\left(\frac{1}{z}\right)$. Si cette série P contient un nombre limité de termes, le point singulier est un pôle; s'il n'en est pas ainsi, l'origine est un point essentiellement singulier.

2° En général, on ne pourra pas trouver des cercles C et C', de rayons assez petits pour que, à partir de ce moment-là, le développement de Laurent ne change plus, quand on diminue encore les rayons de ces cercles. La série P n'est pas alors convergente dans tout le plan, elle a un cercle de convergence Σ intérieur à C. Le développement de Laurent ne change pas quand C se rapproche de Σ en lui restant extérieur. Il n'en est plus de même si C et C' viennent à l'intérieur de Σ. Dans ce cas, la fonction $\Pi(z)$ a, à l'intérieur de Σ, un nombre infini de discontinuités. L'origine est alors un point singulier de classe supérieure. Nous allons montrer comment on peut le caractériser.

2. *Fonction caractéristique du point singulier dans le cas général.* — Il existe une fonction uniforme dans tout le plan $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ qui coïncide avec la série P, dans toute l'étendue où elle est convergente. Cette fonction est représentée, en dehors de C, par la série $P\left(\frac{1}{z}\right)$; à l'intérieur du cercle C, par la différence $\Pi(z) - Q(z)$; ces deux fonctions se raccordent sur le cercle C, puisque, entre C et C', elles sont égales. On peut représenter analytiquement cette fonction $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ par l'intégrale

$$P_1\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{\Pi(x) - \Pi(z)}{x - z}\,dx.$$

La différence $\Pi(z) - P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle C'. Nous appellerons $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ la fonction caractéristique du point singulier $z = 0$. Nous dirons maintenant que deux fonctions ont le point $z = 0$ comme point singulier de même espèce, quand leur différence est holomorphe dans le voisinage de l'origine. Il est bien évident que la différence des deux fonctions caractéristiques est alors holomorphe près du point zéro et réciproquement.

Si la fonction $\Pi(z)$ est uniforme dans tout le plan, il existe une fonction uniforme $Q_1(z)$ qui coïncide avec la série Q à l'intérieur de C'. C'est la fonction $\Pi(z) - P_1\left(\frac{1}{z}\right)$. On peut représenter $Q_1(z)$ par l'intégrale

$$Q_1(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{x\Pi(x) - z\Pi(z)}{x(x - z)}\,dx.$$

Remarquons enfin qu'à l'intérieur du cercle C les discontinuités de $\Pi(z)$ et de $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ sont les mêmes, et, de plus, elles sont de même espèce. Cela tient à ce que la différence de ces deux fonctions est holomorphe à l'intérieur du cercle C.

3. *Toute fonction holomorphe entre deux cercles C et C′, ayant pour centre l'origine, est égale, dans cette étendue, au produit de deux séries contenant, l'une les puissances positives, l'autre les puissances négatives de la variable.*

La fonction $\Pi(z)$, étant holomorphe entre C et C′, n'a dans cette étendue qu'un nombre limité de zéros. Soient $a, b, c, \ldots, l$ ces zéros. On peut poser

$$\Pi(z) = (z-a)(z-b)\ldots(z-l)F(z);$$

$F(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas entre C et C′. Il en résulte que la dérivée logarithmique $\frac{F'(z)}{F(z)}$ est holomorphe entre C et C′; on peut lui appliquer le théorème de Laurent

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_0^\infty \alpha_n z^n + \sum_2^\infty \frac{\beta_n}{z^n} + \frac{m}{z},$$

m étant un entier positif, négatif ou nul. Prenons l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z} \frac{F'(z)}{F(z)} dz,$$

z_0 étant un point situé entre C et C′. Les deux séries donnent une intégrale uniforme; le dernier terme donne une intégrale logarithmique. On a d'ailleurs

$$F(z) = Ke^{\int_{z_0}^{z} \frac{F'(z)}{F(z)} dz} = K\left(e^{\int_{z_0}^{z} \Sigma \alpha_n z^n dz} \times e^{\int_{z_0}^{z} \Sigma \frac{\beta_n}{z^n} dz} \times e^{\int_{z_0}^{z} \frac{m}{z} dz}\right).$$

Le premier facteur pourra se développer en série contenant les puissances positives de z; le deuxième donnera une série contenant les puissances négatives de z; enfin le dernier terme est égal, à une constante près, à z^m.

On peut donc écrire

$$\Pi(z) = z^m q(z) \times p\left(\frac{1}{z}\right).$$

La série $q(z)$, convergente à l'intérieur du cercle C′, définit une fonction uniforme à l'intérieur de ce cercle. Cette fonction ne s'annule pas à l'intérieur de C; entre C et C′, ses zéros sont les points $a, b, c, \ldots, l$.

Enfin, la série $p\left(\frac{1}{z}\right)$ définit une fonction holomorphe à l'extérieur de C qui ne s'annule pas dans cette étendue.

4. *Nouvelle manière de définir la fonction caractéristique.* — Ce théorème nous permet d'aborder la théorie des points singuliers sous un autre point de vue. On démontre, comme précédemment, que si la fonction $\Pi(z)$ est uniforme dans tout le plan, il existe une fonction $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ uniforme qui coïncide avec la série p à l'extérieur du cercle C, et une autre $q_1(z)$ qui coïncide avec la série q à l'intérieur de C'; de sorte qu'on a dans tout le plan

$$\Pi(z) = z^m q_1(z) \times p_1\left(\frac{1}{z}\right).$$

Peut-on trouver d'autres modes de décomposition de $\Pi(z)$ en facteurs? Soit

$$\Pi(z) = z^n q_2(z) \times p_2\left(\frac{1}{z}\right)$$

une nouvelle décomposition; q_2 est supposé holomorphe à l'intérieur de C' et p_2 à l'extérieur de C. On a alors la relation

$$\frac{q_2(z)}{q_1(z)} = \frac{p_1\left(\frac{1}{z}\right)}{p_2\left(\frac{1}{z}\right)} z^{n-m}.$$

Le premier membre est méromorphe à l'intérieur de C', le deuxième à l'extérieur de C; il est aussi méromorphe pour z infini. Il en résulte que $\frac{q_2(z)}{q_1(z)}$ doit être une fraction rationnelle. Cette fraction rationnelle n'a pas de pôles à l'intérieur de C; elle n'a pas de zéros à l'extérieur de ce cercle. Enfin, entre C et C', elle ne peut avoir d'autres pôles que les zéros de $q_1(z)$ entre ces deux cercles, zéros qui sont les mêmes que ceux de la fonction $\Pi(z)$.

Réciproquement, si $R(z)$ est une fraction rationnelle satisfaisant à ces conditions, on aura une nouvelle solution en posant

$$q_2(z) = q_1(z) \times R(z),$$

En effet :

1° La fonction $q_2(z)$ est holomorphe à l'intérieur de C'. Elle est d'abord holomorphe à l'intérieur de C, puisque ses deux facteurs sont holomorphes; entre C et C', elle ne peut cesser d'être holomorphe qu'aux pôles de $R(z)$; or, en ces points, $q_1(z)$ s'annule; elle reste donc holomorphe.

2° La fonction $p_2\left(\frac{1}{z}\right)$ est holomorphe à l'extérieur de C, car ses trois facteurs sont holomorphes à l'extérieur de C.

Enfin on a bien, d'après les relations ci-dessus,

$$\Pi(z) = z^n q_2(z) p_2\left(\frac{1}{z}\right).$$

Soit Σ le cercle de convergence de la série p; ce cercle n'est jamais extérieur au cercle de convergence de la série $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ (¹), qui sert à former la série p; mais il peut lui être intérieur, ainsi que nous le verrons dans quelques exemples plus tard. Quoi qu'il en soit, on pourra choisir la fonction $R(z)$, de façon qu'elle ait comme zéros les zéros de $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ compris entre C et Σ et qu'elle n'ait ni d'autres zéros ni pôles. La fonction $p_2\left(\frac{1}{z}\right)$ sera holomorphe à l'extérieur de Σ et ne s'annulera pas à l'extérieur de ce cercle. Son cercle de convergence sera aussi Σ. Cette méthode ne s'appliquerait pas si la série p était convergente dans tout le plan, car il peut y avoir dans ce cas un nombre infini de zéros à l'intérieur du cercle C.

On peut toujours supposer que, dans notre série $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$, il y ait un terme indépendant de $\frac{1}{z}$; cela revient à changer l'exposant m. Soit A_0 ce terme. On pourra diviser tous les coefficients de p par A_0 et multiplier ceux de q par A_0. On voit alors que $\Pi(z)$ peut s'écrire

$$\Pi(z) = z^n q_1(z) p_1\left(\frac{1}{z}\right).$$

La fonction p_1 est holomorphe à l'extérieur de C et représentée dans

---

(¹) La série $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ est la série $\sum_0^\infty \frac{\beta^n}{z_n}$.

cette étendue par une série de la forme

$$p\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots,$$

p_1 ne s'annulant pas à l'extérieur de C et q_1 à l'intérieur du même cercle.

On voit de plus que, dans ces conditions, la décomposition est *unique*. Dans cette manière de voir, nous définirons l'espèce de point singulier par la fonction $z^n p_1\left(\frac{1}{z}\right)$, que nous appellerons *fonction caractéristique* (¹). Il est clair, d'après cela, que deux fonctions qui ont l'origine comme point singulier de même espèce sont telles que leur quotient est holomorphe dans le voisinage de l'origine.

Nous ferons remarquer qu'il y a ici quelque chose d'arbitraire. La fonction obtenue pour définir l'espèce varie en général avec le cercle C. Mais, si l'on prend deux de ces fonctions, leur quotient sera holomorphe dans le voisinage de l'origine. Pour un autre cercle C_1, on aurait, par exemple,

$$\text{H}(z) = z^m q_2(z) p_2\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{d'où} \quad \frac{z^m p_2\left(\frac{1}{z}\right)}{z^n p_1\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{q_1(z)}{q_2(z)}.$$

Ce quotient est holomorphe à l'intérieur du plus petit des cercles C_1 et C.

Quand deux fonctions de la forme de celles que nous considérons sont telles que leur quotient est holomorphe dans le voisinage de l'origine, nous dirons que les points singuliers qu'elles représentent sont de même espèce. Avec cette extension donnée à la définition d'espèce, on voit que deux fonctions uniformes, qui ont un même point singulier de même espèce, sont telles que leur quotient est holomorphe dans le voisinage de ce point; et, réciproquement, si deux fonctions sont telles que, dans le voisinage d'un point, leur quotient est holomorphe, et non nul au point considéré, si le point est point singulier pour l'une des fonctions, il le sera aussi pour l'autre, et ces points singuliers seront de même espèce.

(¹) Cette fonction caractérise les *zéros* et les *points singuliers* situés dans C.

Enfin, nous ferons remarquer que si $\Pi(z)$ a un point singulier a à l'intérieur du cercle C, il en est de même de $z^n p_1\left(\frac{1}{z}\right)$, et que ces points singuliers sont de même espèce; $z^n p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ contient aussi tous les zéros de $\Pi(z)$ placés à l'intérieur de C.

Ces deux façons de définir l'espèce d'un point singulier, l'une, en décomposant la fonction en une somme de deux autres, l'autre, en la décomposant en un produit de deux fonctions, *ne sont pas concordantes.* Il est impossible que deux fonctions différentes aient l'origine comme point singulier essentiel de même espèce dans les deux modes de représentation. En effet, si Π et Π_1 sont ces deux fonctions, on devrait avoir à la fois

$$\Pi(z) - \Pi_1(z) = G(z),$$
$$\frac{\Pi(z)}{\Pi_1(z)} = g(z).$$

La fonction $G(z)$ ne serait pas identiquement nulle et $g(z)$ ne se réduirait pas à l'unité pour toutes les valeurs de z. Ces équations donneraient pour $\Pi(z)$ et $\Pi_1(z)$ des fonctions méromorphes dans le voisinage de l'origine. Quand il pourra y avoir ambiguïté, nous dirons que deux fonctions ont un point singulier de même espèce relativement à la décomposition en sommes ou relativement à la décomposition en produits, suivant le cas.

Si $\Pi(z)$ n'est pas uniforme dans tout le plan, notre calcul mène toujours à une fonction $z^n p_1\left(\frac{1}{z}\right)$, uniforme dans tout le plan. Si $\Pi(z)$ est uniforme à l'intérieur de C', la fonction q_1 est définie seulement à l'intérieur de C'.

5. *Modes de représentation d'une fonction dans une étendue limitée.* — Une fonction uniforme dans une aire S, de forme quelconque, mais limitée, peut se décomposer en une somme ou un produit de deux autres, la première uniforme dans tout le plan, la deuxième uniforme et holomorphe à l'intérieur de l'aire. En effet, l'intégrale

$$P(z) = -\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\Pi(x) - \Pi(z)}{x - z}\,dx$$

représente bien une fonction uniforme dans tout le plan, holomorphe à l'extérieur de S. La différence $\Pi(z) - P(z)$ représente une fonction holomorphe à l'intérieur de S. La décomposition en produits mènerait aux mêmes résultats.

En particulier, ces intégrales peuvent servir à définir l'espèce d'un point singulier; mais cette définition n'est pas plus générale que celle que nous avons donnée.

Quels que soient le nombre, la position des discontinuités de la fonction à l'intérieur de S, on pourra y tracer des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ n'empiétant pas les unes sur les autres, en nombre limité, contenant à leur intérieur toutes les discontinuités de la fonction. A chacune de ces courbes correspond une décomposition de la fonction $\Pi(z)$ en une somme de deux autres. Pour la courbe C_1, on a $\Pi(z) = P_1\left(\frac{1}{z}\right) + Q_1(z)$, P_1 étant holomorphe à l'extérieur de C_1 et Q_1 holomorphe à l'intérieur. A la courbe C_m correspond une décomposition $P_m\left(\frac{1}{z}\right) + Q_m(z)$.

Cela posé, la différence $\Pi(z) - P_1\left(\frac{1}{z}\right) - P_2\left(\frac{1}{z}\right) - \ldots - P_n\left(\frac{1}{z}\right)$ est holomorphe à l'intérieur de S. En effet, si le point z est à l'extérieur des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, chacun des termes de cette somme est holomorphe; il en est de même de la somme. Enfin, si le point est à l'intérieur de C_1, les fonctions $P_2, P_3, \ldots, P_n$ sont holomorphes en ce point. La différence $\Pi(z) - P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ est aussi holomorphe. On peut donc écrire

$$\Pi(z) = P_1\left(\frac{1}{z}\right) + P_2\left(\frac{1}{z}\right) + \ldots + P_n\left(\frac{1}{z}\right) + G(z),$$

$G(z)$ étant holomorphe à l'intérieur de S.

Si les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des cercles de centres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, les fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se développent, en dehors de ces cercles, en séries contenant les puissances de $\frac{1}{z-a_1}, \frac{1}{z-a_2}, \ldots, \frac{1}{z-a_n}$. La fonction $\Pi(z)$ se met sous la forme

$$(1) \qquad \Pi(z) = P_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + P_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \ldots + P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + G(z).$$

Cette formule donne la forme générale des fonctions uniformes à l'intérieur de S et qui ont les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pour points singuliers d'espèce $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

La décomposition en produits mène à des résultats analogues. La fonction $\Pi(z)$, uniforme à l'intérieur de S, est égale à un produit de deux facteurs $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$, $q_1(z)$; le premier $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ est uniforme dans tout le plan, holomorphe à l'extérieur de S, et de plus n'a pas de zéros en dehors de cette courbe; le second facteur $q_1(z)$ est holomorphe et n'a pas de zéros à l'intérieur de S.

Si l'on trace les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les facteurs p correspondants, on aura

$$\Pi(z) = p_1\left(\frac{1}{z}\right) \times p_2\left(\frac{1}{z}\right) \times \ldots \times p_n\left(\frac{1}{z}\right) \times g(z).$$

Les zéros de $\Pi(z)$ compris entre S et les courbes C sont précisément ceux de $g(z)$ à l'intérieur de S.

Enfin, si les courbes C sont des cercles de centre $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on pourra écrire

$$(2)\quad \Pi(z) = (z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\ldots(z-a_n)^{m_n} p_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)\ldots p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) \times g(z).$$

Les fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_n$ se développent en séries convergentes en dehors des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$ et contiennent les puissances de $\frac{1}{z-a_1}$, $\frac{1}{z-a_2}, \ldots, \frac{1}{z-a_n}$. Le terme indépendant de la variable, dans chacune de ces séries, est l'unité. Les zéros de $g(z)$, à l'intérieur de S, sont ceux de la fonction $\Pi(z)$ qui se trouvent entre les cercles et la courbe S.

Les formules (1) et (2) donnent la forme générale d'une fonction uniforme dans tout le plan, qui ont tous leurs points singuliers à l'intérieur de cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ou, ce qui revient au même, qui ont un nombre limité de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'espèces $P_1, P_2, \ldots, P_n$, relativement à la décomposition en sommes d'espèces $(z-a_1)^{m_1}p_1$, $(z-a)^{m_2}p_2, \ldots$, relativement à la décomposition en produits. Il suffira de supposer que $G(z)$, $g(z)$ sont des fonctions holomorphes dans tout le plan.

6. *Résidu d'un point singulier.* — Soit C un cercle décrit de l'origine comme centre. L'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \Pi(z)\,dz$$

varie, en général, avec le rayon du cercle C. En effet, on pourra tracer un cercle C', extérieur à C, tel qu'entre C et C' la fonction $\Pi(z)$, soit holomorphe. La valeur de l'intégrale est égale au coefficient de $\frac{1}{z}$, dans le développement de Laurent. Si l'on a un point ordinaire à l'origine, cette intégrale est nulle. Si C est suffisamment petit, sous cette condition que l'origine est un point singulier de première classe, la valeur de l'intégrale est indépendante de la position du cercle C. La valeur de cette intégrale est ce que Cauchy appelle le *résidu* de la fonction $\Pi(z)$.

Si l'origine est un point singulier de classe supérieure, il est impossible de trouver un rayon ρ assez petit pour que l'intégrale reste la même quand le rayon de C reste plus petit que ρ. On peut toujours appeler, par analogie avec ce qui précède, la valeur de cette intégrale le résidu de la fonction pour le cercle C. Il est bien évident que le résidu de la fonction $\Pi(z)$ est le même que celui de la fonction $P\left(\frac{1}{z}\right)$ qui définit son espèce, cette fonction P étant celle qui correspond au cercle C et à la décomposition en somme.

Le théorème de Cauchy s'applique évidemment aux résidus ainsi définis. Pour la fonction $\Pi(z)$ mise sous la forme (1), l'intégrale

$$2i\pi\int_S \Pi(z)\,dz$$

est égale à la somme des résidus des points singuliers.

7. *Ordre d'un point singulier. — Nombre de racines à l'intérieur d'un contour.* — Prenons toujours la fonction $\Pi(z)$ qui a un point singulier à l'origine. Le résidu de la fonction $\frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)}$, relatif à un cercle C, ayant pour centre l'origine, est un nombre entier. Ce nombre varie en général avec la position du cercle C. L'ordre de la fonction $\Pi(z)$, au

point $z = 0$, n'est pas défini. On peut toujours dire que ce résidu est l'ordre de la fonction $\Pi(z)$ dans l'aire C. Si m est l'ordre de cette fonction,

$$m = 2i\pi \int_C \frac{\Pi'(z)\,dz}{\Pi(z)},$$

m représente, dans le cas des fonctions méromorphes, la différence entre le nombre des zéros et le nombre des pôles contenus dans le cercle C. Il n'en est pas de même ici. Il y a en effet des fonctions $\Pi(z)$ qui n'ont pas de pôles dans le voisinage du point singulier $z = 0$ et qui ont dans le voisinage de ce point un nombre infini de zéros. Il est bien clair d'ailleurs que la valeur de l'intégrale m reste toujours finie.

Voyons ce que représente l'intégrale dans notre décomposition en produits. On a

$$\Pi(z) = z^n q_1(z) p_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

d'où

$$\frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)} = \frac{n}{z} + \frac{q'_1(z)}{q_1(z)} + \frac{p'_1\left(\frac{1}{z}\right)}{p_1\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

L'intégrale m se décompose en trois autres :

1° L'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{n\,dz}{z}.$$

Cette intégrale est égale à n.

2° L'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{q'_1(z)}{q_1(z)}\,dz.$$

Cette intégrale est nulle parce que la fonction $q_1(z)$ n'a pas de zéros à l'intérieur de C.

3° L'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{p'_1\left(\frac{1}{z}\right)}{p_1\left(\frac{1}{z}\right)}\,dz.$$

Pour évaluer cette intégrale, nous ferons un changement de variable. Posons

$$z = \frac{1}{t}, \quad dz = -\frac{1}{t^2}dt,$$

$$p_1\left(\frac{1}{z}\right) = p_1(t),$$

$$p'_{1z}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}p'_{1t}(t) = -t^2p'_{1t}(t).$$

L'intégrale devra être prise par rapport au cercle C_1, dont le rayon est l'inverse de celui de C. On a l'intégrale

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\frac{p'_{1t}(t)}{p_1(t)}dt.$$

La fonction $p_1(t)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle C_1, puisque $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ est holomorphe à l'extérieur de C. Enfin, cette fonction $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ ne s'annule pas à l'extérieur de C; au point infini, elle se réduit à l'unité. Il résulte de là que cette dernière intégrale est nulle. L'ordre de la fonction dans l'aire C est le même que celui de la fonction uniforme qui définit l'espèce du point singulier, cette fonction étant celle qui correspond au cercle C et à la décomposition en produits.

Cela posé, considérons une fonction uniforme $\Pi(z)$ à l'intérieur d'un contour S. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ses points singuliers, $C_1, C_1, \ldots, C_n$ les cercles correspondants. L'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S\frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)}dz$$

est entière. Elle définit l'ordre de la fonction dans l'aire S. Elle est évidemment égale à la somme des ordres des points singuliers, augmentée du nombre des zéros, diminué du nombre des pôles de la fonction $\Pi(z)$, qui sont situés entre S et les cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$. La démonstration résulte immédiatement de la forme (2) de la fonction $\Pi(z)$.

Ceci permet, par exemple, de trouver le nombre des zéros d'une fonction à l'intérieur d'un contour, quand on connaît la nature des discontinuités de la fonction à l'intérieur du contour.

8. *Théorème de M. Mittag-Leffler.* — Ce théorème est absolument général; la démonstration de M. Mittag-Leffler s'étend aux points singuliers, définis comme nous venons de le faire. Voici comment on peut l'énoncer, en se plaçant au point de vue le plus général.

Étant donnée une suite illimitée de fonctions uniformes quelconques

$$P_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \quad P_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \quad \ldots, \quad P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right), \quad \ldots,$$

qui s'annulent pour z infini, holomorphes à l'extérieur de cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ qui ont pour centre $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, on suppose que les cercles n'empiètent pas les uns sur les autres et que le module de a_n augmente indéfiniment avec n. Dans ces conditions, on peut trouver une fonction uniforme, n'ayant que des discontinuités isolées et telles que l'on ait

$$\Pi(z) = P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + Q_n(z),$$

$Q_n(z)$ étant holomorphe dans le voisinage du point a_n.

La démonstration de M. Mittag-Leffler montre qu'on peut trouver une fonction algébrique F_n dont le degré varie avec n, et telle que la somme

$$\sum\left[P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + F_n(z)\right],$$

étendue à toutes les valeurs de n, soit convergente pour toutes les valeurs de z extérieures aux cercles $C_1, C_2, \ldots C_n, \ldots$.

Si z est à l'intérieur d'un cercle C_n, on partagera cette somme en deux parties : l'une, la fonction uniforme $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$; l'autre partie est convergente et représente une fonction holomorphe dans le voisinage du point a_n.

La forme générale $\Pi(z)$ des fonctions qui jouissent de cette propriété

$$\Pi(z) = \sum\left[P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + F_n(z)\right] + G(z).$$

La fonction $\Pi(z)$ est ainsi décomposée en une somme de termes primaires contenant au plus un seul point singulier à distance finie.

9. *Théorème analogue à celui de M. Mittag-Leffler, dans le cas de la décomposition en produits.* — Il existe, pour la décomposition en produits, un théorème analogue au précédent. Voici son énoncé le plus général.

Étant donnée une suite illimitée de fonctions uniformes

$$(z-a_1)^{m_1}p_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right),\quad (z-a_2)^{m_2}p_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right),\quad \ldots,\quad (z-a_n)^{m_n}p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right),\quad \ldots.$$

Les fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ se réduisent à l'unité pour z infini, sont holomorphes à l'extérieur de $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, ayant respectivement pour centre $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Elles ne s'annulent pas à l'extérieur de ces cercles. On suppose que ces cercles n'empiètent pas les uns sur les autres et que le module de a_n augmente indéfiniment avec n.

Dans ces conditions, on peut former une fonction uniforme $\Pi(z)$, telle que l'on ait, quel que soit l'indice n,

$$\Pi(z) = (z-a_n)^{m_n}p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)q_n(z),$$

la fonction $q_n(z)$ étant holomorphe dans le voisinage de a_n, et de plus n'étant pas nulle à l'intérieur du cercle C_n.

En effet, la fonction

$$\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = \frac{D_z\left[(z-a_n)^{m_n}p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)\right]}{(z-a_n)^{m_n}p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)}$$

est holomorphe à l'extérieur du cercle C_n. Elle est représentée à l'extérieur de ce cercle par une série contenant les puissances négatives de $(z-a_n)$. Le coefficient du terme en $\frac{1}{z-a_n}$ est précisément l'entier m_n.

Cela posé, on pourra former une fonction $u(z)$, uniforme dans tout le plan, et telle que l'on ait, quel que soit l'indice n,

$$u(z) = \mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + \mathfrak{Q}_n(z).$$

$\mathfrak{Q}_n$ étant holomorphe à l'intérieur de C_n.

Soit z_0 un point ordinaire de $u(z)$; l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z} u(z)\,dz$$

représente une fonction holomorphe de z, tant que z reste dans une aire extérieure aux cercles singuliers. Quelle que soit la position du point z, pourvu qu'en ce point la fonction $u(z)$ reste finie; quel que soit le chemin suivi par la variable pour aller de z_0 à z [nous supposons, comme on le fait toujours, que la fonction $u(z)$ reste finie sur ce chemin], on pourra remplacer ce chemin par un chemin déterminé allant de z_0 à z (par exemple, la droite $z_0 z$, s'il n'y a pas de discontinuités sur cette droite) et un contour fermé passant par z_0. Cherchons la valeur de l'intégrale prise suivant ce contour. S'il n'y a pas de discontinuités à l'intérieur de ce contour, l'intégrale considérée est nulle. S'il y a un cercle C_n à l'intérieur du contour, l'intégrale cherchée est la même que celle prise suivant C_n. Cette intégrale peut se décomposer en deux : l'une, l'intégrale de $\mathfrak{Q}_n$, est nulle; celle de $\mathfrak{P}_n$ est égale à $2m_n i\pi$. Si le contour traverse C_n, on pourra diviser C_n en deux parties : l'une, Σ, contenant toutes les discontinuités de C_n qui sont à l'intérieur du contour. L'intégrale prise suivant Σ pourra encore se décomposer en deux autres : l'intégrale de $\mathfrak{Q}_n$, qui est nulle; celle de $\mathfrak{P}_n$ sera égale à un multiple entier de $2i\pi$, puisque $\mathfrak{P}_n$ est la dérivée logarithmique d'une fonction uniforme.

En un point z, l'intégrale $\int_{z_0}^{z} u(z)\,dz$ acquiert un nombre infini de valeurs qui diffèrent de multiples de $2i\pi$. Il en résulte que la fonction $\Pi(z)$

$$\Pi(z) = e^{\int_{z_0}^{z} u(z)\,dz}$$

est uniforme dans tout le plan.

Il est bien clair qu'on peut écrire

$$\Pi(z) = e^{\int_{z_0}^{z} \mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)dz} \times e^{\int_{z_0}^{z} \mathfrak{Q}_n(z)\,dz}.$$

Chacun de ces facteurs représente une fonction uniforme dans tout le plan. Le premier est égal, à un facteur constant près, à

$$(z-a_n)^{m_n} p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right).$$

La deuxième intégrale $\int_{z_0}^{z} \mathfrak{Q}_n(z)\,dz$ définit une fonction holomorphe de z quand la variable se déplace dans le cercle C_n. Il en résulte que le second facteur de $\Pi(z)$ est holomorphe dans le voisinage du point a_n et ne s'annule pas à l'intérieur de C_n.

La fonction obtenue satisfait bien aux conditions de l'énoncé. De plus, la fonction $\Pi(z)$ n'a pas de zéros à l'extérieur des cercles singuliers.

Soit $\Pi_1(z)$ une deuxième fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé; le quotient $\frac{\Pi_1(z)}{\Pi(z)}$ sera holomorphe dans tout le plan et n'a pas de zéros à l'intérieur des cercles C. Soit $g(z)$ une fonction remplissant ces conditions; il est clair que le produit $\Pi(z)g(z)$ représente une fonction cherchée. On peut poser

$$\Pi_1(z) = \Pi(z)\, g(z).$$

On a vu que la fonction $u(z)$ peut se mettre sous la forme

$$\sum \mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + F_n(z),$$

$F_n(z)$ étant un polynôme. Cette somme convergeant uniformément, on peut prendre son intégrale en faisant la somme des intégrales de tous ses termes.

Il en résulte que $\Pi(z)$ se met sous la forme

$$\Pi(z) = \prod (z-a_n)^{m_n} p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) e^{\varphi_n(z)},$$

$\varphi_n(z)$ étant un polynôme algébrique de degré variable avec n.

La fonction la plus générale $\Pi_1(z)$, parmi celles que nous cherchons, pourra s'écrire

$$\Pi_1(z) = \prod (z-a_n)^{m_n} p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) e^{\varphi_n(z)} \times g(z).$$

On pourra décomposer $g(z)$ en facteurs primaires contenant au plus un zéro. On voit alors que la fonction $\Pi_1(z)$ est décomposée en un produit de facteurs primaires contenant, soit un zéro, soit un pôle, soit un point singulier essentiel à distance finie, au plus.

10. *Formation d'une fonction ayant un nombre infini de points singuliers dans le voisinage d'un point donné.* — Soit un point d'affine b. De ce point comme centre décrivons un cercle B. Soient maintenant $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ des points situés à l'intérieur de ce cercle et tels que la limite de a_n, quand n augmente indéfiniment, soit b. On pourra de chacun de ces points comme centre décrire des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, n'empiétant pas les uns sur les autres. Soit maintenant une suite illimitée de fonctions uniformes $P_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \ldots, P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right), \ldots$, holomorphes, respectivement convergentes à l'extérieur des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$. On pourra former une fonction $\Pi(z)$, uniforme dans tout le plan, et telle que l'on ait pour toutes les valeurs de n

$$\Pi(z) = P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + Q_n(z),$$

$Q_n(z)$ étant une fonction uniforme, holomorphe à l'intérieur de C_n.

Remarquons d'abord que les cercles C ne contiennent pas le point b à leur intérieur, car ils contiendraient un nombre infini de points a.

Nous allons faire un changement de variable; en posant

$$\frac{1}{z-b} = u,$$

aux cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, dans le plan des z correspondent, dans le plan des u, des cercles $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \ldots$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ leurs centres. Les cercles Σ n'empiètent pas les uns sur les autres, et il est bien évident que le module de α_n augmente indéfiniment avec n.

A la fonction $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ correspond la fonction $P_n\left(\frac{1}{b-a_n+\frac{1}{u}}\right)$.

Cette fonction de u est holomorphe à l'extérieur du cercle Σ_n, car les points extérieurs à C_n correspondent aux points extérieurs à Σ_n. Cette fonction de u peut se décomposer en deux autres :

$$(1)\qquad P_n\left(\frac{1}{b-a_n+\dfrac{1}{u}}\right)=\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{u-\alpha_n}\right)+Q_n(u).$$

Cette fonction $\mathfrak{P}_n\left(\dfrac{1}{u-\alpha_n}\right)$ est holomorphe à l'extérieur de Σ_n et, de plus, s'annule pour u infini. $Q_n(u)$ est ici une fonction holomorphe dans tout le plan des u.

Cela posé, formons une fonction $\varphi(u)$, uniforme dans tout le plan et telle que l'on ait, quel que soit n,

$$\varphi(u)=\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{u-\alpha_n}\right)+Q_n^1(u),$$

$Q_n^1(u)$ étant holomorphe dans le cercle Σ_n.

Si maintenant on remplace, dans cette fonction, u par $\dfrac{1}{z-b}$, on obtiendra une fonction uniforme de z dans tout le plan.

Cette fonction pourra se représenter par

$$\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{\dfrac{1}{z-b}-\alpha_n}\right)+Q_n^1\left(\frac{1}{z-b}\right)$$

ou, en remplaçant $\mathfrak{P}_n$ par sa valeur tirée de (1),

$$P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-Q_n\left(\frac{1}{z-b}\right)+Q_n^1\left(\frac{1}{z-b}\right).$$

Ces deux dernières fonctions sont holomorphes à l'intérieur de C_n, parce que les fonctions correspondantes en u sont holomorphes à l'intérieur de Σ_n. La fonction ainsi obtenue satisfait bien aux conditions de l'énoncé. Cette méthode donne des solutions, qui restent finies pour z infini, car ce point correspond au point $u=0$, qui est un point ordinaire de la fonction $\varphi(u)$. Il est clair qu'on peut obtenir ainsi toutes les solutions qui jouissent de cette propriété. Or deux fonctions en u diffèrent d'une fonction holomorphe $G(u)$; les deux fonctions correspondantes en z différeront alors d'une fonction $G\left(\dfrac{1}{z-b}\right)$.

On peut obtenir des fonctions $\Pi(z)$ qui s'annulent pour z infini : il suffit de retrancher de $\Pi(z)$ sa valeur pour z infini. Ces fonctions peuvent servir à définir le point singulier $z = b$, relativement au cercle B. Il résulte de notre discussion que l'espèce d'un point singulier n'est pas déterminée quand on connaît la position et l'espèce des discontinuités de la fonction à l'intérieur du cercle singulier.

Si l'on veut avoir toutes les solutions, il suffira d'ajouter à celles-ci une fonction holomorphe quelconque.

On peut appliquer le même mode de démonstration au cas où l'on étudie la décomposition en produits. On arrivera ainsi à former une fonction qui a les points a pour points singuliers d'espèce p et qui se réduit à l'unité pour z infini. On obtiendra les autres solutions en multipliant celle-ci par une fonction holomorphe quelconque et par une fonction de la forme $G\left(\frac{1}{z-b}\right)$.

Toutes les propriétés que nous venons d'établir appartiennent à tous les points singuliers; nous allons faire une étude plus particulière des points singuliers du premier genre et donner la classification de ces points.

11. *Points singuliers de première classe.* — Nous dirons qu'un point singulier est de première classe quand la fonction $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ ou $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$, qui définit l'espèce du point singulier, est holomorphe dans tout le plan, sauf au point $z = 0$. Ces fonctions $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$, $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ varient en général avec la position du cercle C; mais si, pour une certaine valeur du rayon, ces fonctions sont holomorphes, il en sera encore de même quand le rayon sera plus petit. Cela est évident pour la fonction P, car cette fonction reste la même quand on diminue le rayon du cercle C. Il en est de même pour la fonction $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$. En effet, soient C_2 un cercle intérieur à C et $p_2\left(\frac{1}{z}\right)$ la fonction relative à ce cercle; la fonction $\Pi(z)$ peut s'écrire

$$\Pi(z) = z^n p_1\left(\frac{1}{z}\right) q_1(z) = p_2\left(\frac{1}{z}\right) \times q_2(z) \times z^m,$$

$$p_2\left(\frac{1}{z}\right) = p_1\left(\frac{1}{z}\right) \times \frac{q_1(z)}{q_2(z)} \times z^{n-m}.$$

Or $p_2\left(\frac{1}{z}\right)$ est déjà holomorphe à l'extérieur de C_2. A l'intérieur de C_2, $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ est holomorphe, par hypothèse; le quotient $\frac{q_1(z)}{q_2(z)}$ est aussi holomorphe, puisque $q_2(z)$ ne s'annule pas à l'intérieur de C_2.

Afin de préciser davantage cette définition, nous dirons que le point $z = 0$ est un point singulier de première classe, quand on peut trouver un cercle C assez petit pour que la fonction $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ ou la fonction $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ soient holomorphes dans tout le plan, sauf au point $z = 0$. On définit ainsi ces points singuliers de deux façons différentes, l'une correspondant à la décomposition en sommes, l'autre à la décomposition en produits. Nous montrerons que les deux groupes de points singuliers ainsi formés sont identiques.

Prenons d'abord la décomposition en sommes. La fonction considérée se met sous la forme

$$\Pi(z) = \Phi(z) + G\left(\frac{1}{z}\right),$$

$\Phi(z)$ étant holomorphe à l'intérieur d'un certain cercle C. On voit que la fonction $\Pi(z)$ est holomorphe à l'intérieur d'une aire quelconque, intérieure à C et ne contenant pas le point o. Réciproquement, toute fonction $\Pi(z)$ jouissant de cette propriété a l'origine comme point singulier de première classe, si toutefois l'origine est un point singulier. En effet, le théorème de Laurent montre qu'on peut diminuer le rayon du cercle C sans changer le développement; la série formée avec les puissances négatives est convergente dans tout le plan; elle est de la forme $G\left(\frac{1}{z}\right)$.

Si le point $z = 0$ est un point singulier de première classe, relativement à la décomposition en produits, on a

$$\Pi(z) = z^n \varphi(z) g\left(\frac{1}{z}\right),$$

$g(z)$ représentant une fonction holomorphe dans tout le plan. La fonction $\Pi(z)$ est holomorphe dans une aire quelconque intérieure à C_1 et ne contenant pas le point o. Elle a, par conséquent, dans cette aire un nombre limité de zéros. Il n'en est pas toujours ainsi quand l'aire contient le point o à son intérieur. Il peut se faire que, dans ce cas, il y ait un nombre infini de zéros à l'intérieur de l'aire considérée; cela arrivera toutes les fois que la fonction holomorphe $g(z)$ a un nombre infini de zéros.

Réciproquement, toute fonction $\Pi(z)$ qui jouit de ces propriétés peut se mettre sous la forme indiquée. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ les zéros de $\Pi(z)$ situés à l'intérieur du cercle C, le module de a_n ayant pour limite zéro quand n croît indéfiniment.

On peut former une fonction holomorphe $f(z)$, ayant pour zéros $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$. La fonction

$$\Pi_1(z) = \frac{\Pi(z)}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$$

est holomorphe à l'intérieur de C, sauf au point $z = 0$; de plus, elle ne s'annule pas à l'intérieur du cercle C. Si $L\Pi_1(z)$ n'est pas uniforme à l'intérieur de C, on pourra trouver un nombre entier n, tel que $L\frac{\Pi_1(z)}{z^n}$ soit uniforme. Cette fonction sera, de plus, holomorphe à l'intérieur de C, sauf au point $z = 0$. Il en résulte qu'elle peut se mettre sous la forme

$$L\frac{\Pi_1(z)}{z^n} = \varphi_1(z) + \psi\left(\frac{1}{z}\right).$$

La fonction ψ est holomorphe dans tout le plan et se réduit à 0 pour z infini. La fonction $\varphi_1(z)$ est holomorphe à l'intérieur de C; à l'extérieur de ce cercle, elle n'est pas uniforme en général. Il résulte de là qu'on a

$$\Pi_1(z) = z^n e^{\varphi_1(z)} . e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)},$$

$$\Pi(z) = z^n e^{\varphi_1(z)} . e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

On peut choisir $f(z)$ de façon qu'il soit égal à 1 pour $z = 0$, $f\left(\frac{1}{z}\right)$ sera aussi égal à 1 pour z infini. Le produit $e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)} f\left(\frac{1}{z}\right)$ représente une fonction holomorphe dans tout le plan, sauf au point $z = 0$; elle ne s'annule pas au dehors de C. Elle se réduit à l'unité pour z infini. La fonction $e^{\varphi_1(z)}$ est uniforme dans tout le plan, holomorphe à l'intérieur du cercle C et ne s'annule pas dans ce cercle.

D'autre part, si l'on applique la méthode générale pour décomposer $\Pi(z)$ en facteurs relativement au cercle C, on aura

$$\Pi(z) = z^m q_1(z) p_1\left(\frac{1}{z}\right).$$

Nos deux valeurs de $\Pi(z)$ ont toutes deux la forme canonique. Donc

$$m = n, \quad q_1(z) = e^{\varphi_1(z)}, \quad p_1\left(\frac{1}{z}\right) = e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)} \times f\left(\frac{1}{z}\right).$$

La fonction $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ est donc holomorphe dans tout le plan. Il résulte de là que les deux manières de définir les points singuliers de première classe conduisent au même résultat.

Si maintenant on diminue le rayon du cercle C, il y a des zéros de la fonction $\Pi(z)$ qui vont passer à l'extérieur de ce cercle. Soit C_1 une nouvelle position du cercle C, qui laisse le point a_1 à son extérieur. Il faut trouver la nouvelle fonction $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ qui est relative à ce cercle. Pour les valeurs de z extérieures à C, on a

$$\frac{1}{z-a_1} = \frac{1}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_1^2}{z^3} + \ldots,$$

$$\frac{1}{z-a_1} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\right).$$

Multiplions la série entre parenthèses par la série qui donne le développement de $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$: la série obtenue est convergente à l'extérieur de C; elle représente dans cette étendue la fonction uniforme $\frac{z}{z-a_1}p_1\left(\frac{1}{z}\right)$, fonction qui se réduit à l'unité pour z infini. Cette fonction est holomorphe à l'extérieur de C_1, car elle reste finie au point a_1. La série que nous avons obtenue sera convergente, non seulement à l'extérieur de C, mais encore, d'après cela, jusqu'au cercle C_1 ; la fonction représentée par cette série ne s'annule pas à l'extérieur de C_1. Or on peut écrire

$$\Pi(z) = z^{n-1} q_1(z) \times (z-a_1) \times \frac{z}{z-a_1} p_1\left(\frac{1}{z}\right).$$

Elle est ramenée à la forme canonique, relative au cercle C_1.

On voit que, s'il y a un nombre infini de zéros à l'intérieur du cercle C, la fonction qui définit le point singulier de première classe changera toujours, quelque petit que soit ρ, quand le rayon de C sera plus petit que ρ.

S'il n'y a pas de zéros, la fonction $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ reste la même quand on diminue le rayon du cercle C. Toutes les fois que cette circonstance se produit, on peut affirmer qu'on a affaire à un point singulier de première classe n'ayant pas de zéros dans le voisinage du point singulier.

12. *Fonctions uniformes de première classe.* — Une fonction uniforme, qui a des points singuliers, est de première classe quand tous ses points singuliers sont de première classe. Comme cas particuliers de ces fonctions, on a les fonctions méromorphes dont tous les points singuliers sont des pôles.

Quand une fonction est uniforme dans une aire donnée et que tous ses points singuliers, situés dans cette étendue, sont de première classe, nous dirons que la fonction est de première classe dans cette aire. *Quand une fonction est de première classe dans une partie finie du plan, elle n'a dans cette étendue qu'un nombre limité de points singuliers.*

En effet, dire qu'un point a est un point singulier de première classe, c'est dire que de ce point comme centre on peut décrire un cercle de rayon assez petit pour qu'il n'y ait pas de points singuliers à son intérieur. Cela posé, supposons que l'aire considérée comprenne une infinité de points singuliers. Divisons-la en partie d'une manière quelconque. L'une de ces parties, A par exemple, contient une infinité de points singuliers. Divisons de même cette partie A en plusieurs autres. L'une au moins des divisions A_1 contient un nombre infini de points singuliers. En continuant ainsi, on forme une suite indéfinie d'aires de plus en plus petites qui contiennent toutes un nombre infini de points singuliers. On peut s'arranger de façon que toutes les dimensions de ces aires tendent vers o; ces aires ont alors pour limite un point a du plan. Il serait alors impossible de décrire de ce point a comme centre un cercle assez petit pour qu'il n'y ait pas de points singuliers à son intérieur. Le point a n'est donc pas un point singulier de première classe.

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les points singuliers dans l'aire A, la fonction peut se mettre sous l'une des deux formes

$$\Pi(z) = \varphi(z) + G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \ldots + G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right),$$

$$\Pi(z) = \varphi(z) \times (z-a_1)^{m_1} g_1\left(\frac{1}{z}\right) \times (z-a_2)^{m_2} g_2\left(\frac{1}{z}\right) \ldots \times (z-a_n)^{m_n} g_n\left(\frac{1}{z}\right).$$

Cette propriété est une généralisation d'un théorème semblable sur les fonctions méromorphes :

Toute fonction uniforme qui est de première classe sur toute la sphère a un nombre fini de points singuliers.

1° Supposons d'abord que le point O' de la sphère de Riemann (le point $z = \infty$) soit un point ordinaire de la fonction $\Pi(z)$: c'est dire que, dans le plan des $z'\left(z' = \frac{1}{z}\right)$, la fonction $\Pi\left(\frac{1}{z'}\right)$ est holomorphe dans le voisinage du point $z' = 0$. On peut tracer dans le plan des z' un cercle de rayon fini ρ, à l'intérieur duquel $\Pi\left(\frac{1}{z'}\right)$ sera holomorphe. A ce cercle correspond, sur la sphère de Riemann, un cercle C. Ce cercle partage la sphère en deux zones, l'une contenant le point O, l'autre le point O'. La fonction $\Pi(z)$ est holomorphe dans la deuxième zone; tous ses points singuliers sont situés dans la première.

A cette première zone (celle qui contient le point O) correspond, dans le plan des z, l'aire limitée par un cercle ayant pour centre l'origine. Tous les points singuliers se trouvant dans ce cercle, leur nombre est limité.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les points singuliers de la fonction; $G_1, G_2, \ldots, G_n$ les fonctions caractéristiques de ces points singuliers, relativement à la décomposition en sommes. La différence

$$\Pi(z) - G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) - G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) - \ldots - G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

est holomorphe sur toute la sphère, et, par suite, c'est une constante. Cette constante est égale à la valeur de la fonction $\Pi(z)$ pour z infini. On a donc, dans ce cas,

$$\Pi(z) = A + G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \ldots + G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right).$$

Si $(z-a_1)^{m_1} g_1\left(\frac{1}{z}\right)$, $(z-a_2)^{m_2} g_2\left(\frac{1}{z}\right)$, ..., $(z-a_n)^{m_n} g_n\left(\frac{1}{z}\right)$ définissent l'espèce des points singuliers a_1, a_2, ..., a_n relativement à la décomposition en produits, le quotient

$$\frac{\Pi(z)}{(z-a_1)^{m_1} g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) \times (z-a_2)^{m_2} g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) \times \ldots \times (z-a_n)^{m_n} \times g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)}$$

est alors holomorphe dans tout le plan. Au point $z=\infty$, la fonction représentée par ce quotient a un pôle ou un zéro; on le voit immédiatement en considérant la forme de ce quotient. Il résulte de ces deux propriétés que le quotient est une fonction rationnelle de z. On a donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi(z) = f(z) \times (z-a_1)^{m_1} g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) & \\ \times (z-a_2)^{m_2} g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) \times \ldots \times (z-a_n)^{m_n} g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right). & \end{aligned} \right.$$

On peut encore mettre $\Pi(z)$ sous la forme suivante, en appelant $R(z)$ une fonction rationnelle :

$$(2) \quad \Pi(z) = R(z) \times g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) \times g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) \times \ldots \times g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right).$$

On voit tout de suite, sous cette forme, que la somme des ordres de la fonction $\Pi(z)$ sur toute la sphère est nulle.

Quand on prend la fonction $\Pi(z)$ sous la forme (1), $f(z)$ ne doit pas avoir de zéros à l'intérieur des cercles singuliers.

2° Le point O' de la sphère est un point singulier de première classe.

La fonction $\Pi\left(\frac{1}{z'}\right)$ ayant le point $z'=0$ comme point singulier de première classe, on aura

$$\Pi\left(\frac{1}{z'}\right) = G\left(\frac{1}{z'}\right) + Q(z').$$

La fonction $G\left(\frac{1}{z'}\right)$ est holomorphe dans tout le plan, sauf au point $z'=0$, et la fonction $Q(z')$ est holomorphe dans le voisinage de $z'=0$.

Cette égalité donne, dans le plan des z,

$$\Pi(z) = G(z) + Q\left(\frac{1}{z}\right).$$

La fonction $Q\left(\frac{1}{z}\right)$ est de première classe comme la fonction $\Pi(z)$; elle est holomorphe pour z infini, et, par suite, le nombre de ses points singuliers est limité. Il en est de même pour la fonction $\Pi(z)$. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les points singuliers de la fonction $\Pi(z)$, $G_1, G_2, \ldots, G_n$ l'espèce de ces points singuliers, on aura, en désignant par $G(z)$, une fonction holomorphe,

$$\Pi(z) = G(z) + G_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right) + G_2\left(\frac{1}{z - a_2}\right) + \ldots + G_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right).$$

Si l'on décompose en produits, la fonction $\Pi\left(\frac{1}{z'}\right)$ peut s'écrire

$$\Pi\left(\frac{1}{z'}\right) = z'^n g\left(\frac{1}{z'}\right) q(z');$$

d'où

$$\Pi(z) = z^{-n} g(z) q\left(\frac{1}{z}\right).$$

La fonction $q\left(\frac{1}{z}\right)$ est de première classe, elle reste finie pour z infini. Si l'on se reporte au développement précédent, on pourra écrire

$$\Pi(z) = z^n g(z) \times (z - a_1)^{m_1} g_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right) \times \ldots \times (z - a_n)^{m_n} g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right).$$

13. *Points singuliers de deuxième classe.* — Toute fonction uniforme de première classe qui a un nombre infini de points singuliers est telle que son point O′ n'est ni un point ordinaire, ni un point singulier de première classe. Nous avons affaire à une nouvelle espèce de points singuliers, que nous appellerons *points singuliers de deuxième classe.*

En général, le point a sera un point singulier de deuxième classe, quand les fonctions $P\left(\frac{1}{z-a}\right)$, $p\left(\frac{1}{z-a}\right)$, qui servent à définir l'espèce de point singulier, sont telles que les fonctions $P(z - a)$, $p(z - a)$ soient des fonctions uniformes de première classe, ayant un nombre infini de points singuliers. Cela fait évidemment deux façons de définir ces points singuliers; nous allons montrer qu'elles conduisent au même résultat.

Enfin on peut remarquer que les fonctions P et p dépendent du cercle singulier. La définition qu'on doit donner des points de deuxième classe ne doit pas en dépendre. C'est ce qui a lieu ici. Prenons la décomposition en sommes. La fonction $\Pi(z)$ peut se mettre sous la forme (le point $z = 0$ étant le point singulier),

$$\Pi(z) = P\left(\frac{1}{z}\right) + Q(z),$$

$Q(z)$ étant holomorphe à l'intérieur du cercle C de rayon ρ. La fonction $P(z)$ ayant un nombre infini de points singuliers, il y en a un nombre infini dont le module est plus grand que $\frac{1}{\rho}$. Il en résulte que la fonction $P\left(\frac{1}{z}\right)$ a un nombre infini de points singuliers à l'intérieur du cercle C. Il en est de même de la fonction $\Pi(z)$. C'est une propriété qui distingue cette classe de la précédente. De plus, si l'on prend une aire quelconque à l'intérieur de C ne contenant pas le point O, il n'y aura à l'intérieur de cette aire qu'un nombre limité de points singuliers. A l'intérieur de cette aire, la fonction est de première classe. En effet, à cette aire correspond, dans le plan des $z'\left(z' = \frac{1}{z}\right)$, une aire limitée; la fonction $P(z')$ a, par conséquent, dans cette étendue, un nombre fini de points singuliers.

Ces propriétés sont caractéristiques du point singulier de deuxième classe. En effet, supposons que la fonction $\Pi(z)$ jouisse de ces propriétés à l'intérieur du cercle C. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ses points singuliers, tels que la limite du module de a_n pour n infini soit zéro. Soient $G_1, G_2, \ldots, G_n$ les fonctions holomorphes qui définissent l'espèce de ces points singuliers.

Si l'on pose $z = \frac{1}{u}$, la fonction $G_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$ devient une fonction de u qui peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{G}_n\left(\frac{1}{u - \alpha_n}\right) + Q_n(u),$$

$\mathcal{G}_n$ étant une fonction holomorphe de u, sauf au point α_n, $\alpha_n = \frac{1}{a_n}$.

On pourra former une fonction uniforme $\mathfrak{P}(u)$, ayant pour points singuliers d'espèce $\mathcal{G}_n$ les points α_n. Cette fonction de u est une fonction de première classe qui a un nombre infini de points singuliers. Or nous savons déjà que la différence

$$\Pi(z) - \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

admet le point $z = 0$ comme point singulier de première classe, si cette différence n'est pas holomorphe. De sorte que l'on peut trouver une fonction G, telle que

$$\Pi(z) - \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) - G\left(\frac{1}{z}\right)$$

soit holomorphe à l'intérieur du cercle C. Il résulte de là que la fonction $P\left(\frac{1}{z}\right)$, qui définit l'espèce du point singulier relativement au cercle C, est égale à $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) + G\left(\frac{1}{z}\right)$. La fonction $\mathfrak{P}(z) + G(z)$ représente bien une fonction uniforme de première classe, ayant un nombre infini de points singuliers.

Cela posé, si nous prenons un cercle C_1 intérieur à C, la fonction $\Pi(z)$ jouira encore des propriétés caractéristiques du point singulier de deuxième classe à l'intérieur du cercle C_1. La fonction $P\left(\frac{1}{z}\right)$, qui définit le point singulier, ne sera peut-être pas la même que précédemment, mais $P(z)$ sera toujours une fonction uniforme de première classe ayant un nombre infini de points singuliers.

Si l'on étudiait la décomposition en produits, on arriverait aux mêmes propriétés caractéristiques du point singulier de deuxième classe; les deux méthodes donnent donc le même résultat.

Tous ces résultats permettent de préciser davantage la définition du point singulier de deuxième classe. Le point $z = 0$ est un point singulier de deuxième classe de la fonction $\Pi(z)$, quand on peut trouver un cercle C de rayon assez petit pour que la fonction $P\left(\frac{1}{z}\right)$, ou la fonction $p\left(\frac{1}{z}\right)$, qui définit l'espèce du point singulier par rapport à ce cercle, soit telle que $P(z)$ ou $p(z)$ représente une fonction uniforme de première classe ayant un nombre infini de points singuliers.

Il y a un cas particulier intéressant à examiner. C'est celui où la fonction $P\left(\frac{1}{z}\right)$ est de la forme $\frac{G\left(\frac{1}{z}\right)}{G_1\left(\frac{1}{z}\right)}$. Dans ce cas, tous les points singuliers de première classe qui se trouvent à l'intérieur du cercle C sont des pôles. Réciproquement, s'il en est ainsi, la fonction $P(z)$ est méromorphe. En effet, la fonction $\mathfrak{P}(u)$ est, dans ce cas particulier, une fonction méromorphe de u. Ce point singulier de deuxième classe peut s'appeler un *point singulier polaire*.

Quelle est la forme de la fonction $p\left(\frac{1}{z}\right)$ dans ce cas? Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les pôles de la fonction $\Pi(z)$ à l'intérieur du cercle C. On peut former une fonction $g_1(z)$ holomorphe dans tout le plan, se réduisant à l'unité pour $z = 0$ et s'annulant aux points $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$.

Le produit

$$\Pi(z) \times g_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

est holomorphe à l'intérieur du cercle C, sauf pour $z = 0$, qui sera alors un point de première classe pour ce produit. On aura donc

$$\Pi(z) \times g_1\left(\frac{1}{z}\right) = z^n g\left(\frac{1}{z}\right) \times q(z),$$

$$\Pi(z) = z^n q(z) \frac{g\left(\frac{1}{z}\right)}{g_1\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Cette forme montre que la fonction $\Pi(z)$ peut avoir un nombre infini de zéros à l'intérieur du cercle C. Si l'on prend à l'intérieur de ce cercle une aire limitée ne contenant pas le point O, il n'y aura à l'intérieur de cette aire qu'un nombre fini de zéros. Il n'en est pas toujours ainsi pour les autres points singuliers de deuxième classe. En effet, soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les points singuliers de première classe, $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ les cercles singuliers correspondants. Les rayons de ces cercles ont évidemment pour limite zéro. Au cercle Σ_n correspond une décomposition de la fonction $\Pi(z)$ de la forme

$$\Pi(z) = (z - a_n)^{m_n} g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) q_n(z).$$

La fonction g_n peut avoir à l'intérieur du cercle Σ_n un nombre infini de zéros qui sont ceux de la fonction $g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$. Dans une aire qui ne contient aucun des points a, il y a un nombre limité de zéros.

14. *Fonctions uniformes de deuxième classe.* — Une fonction uniforme est de deuxième classe quand elle n'a que des points singuliers de première et de deuxième classe. Elle est de deuxième classe dans une certaine étendue quand elle jouit de ces propriétés dans cette étendue.

Quand un point est de deuxième classe, on peut, de ce point comme centre, décrire un cercle assez petit pour qu'il n'y ait pas de points de deuxième classe à l'intérieur de ce cercle, sauf, bien entendu, le centre du cercle. Il en résulte immédiatement que :

Toute fonction uniforme de deuxième classe à l'intérieur d'une aire A *a, à l'intérieur de cette aire, un nombre limité de points singuliers de deuxième classe.*

Si l'on prend une aire ne contenant aucun point de deuxième classe, la fonction considérée est de première classe dans cette étendue, et, par suite, le nombre de ses points singuliers de première classe est limité dans cette étendue. Enfin, on démontre, comme pour les fonctions de première classe, que :

Toute fonction uniforme, qui est de deuxième classe sur toute la sphère, n'a qu'un nombre limité de points singuliers de deuxième classe.

Si le point O' de la sphère est un point ordinaire, le nombre des points singuliers de première classe est limité, abstraction faite de ceux qui sont attachés aux points de deuxième classe. Le nombre des zéros de la fonction, en dehors des cercles singuliers, est aussi limité.

Si le point O' est un point singulier de première classe, le nombre des points singuliers de première classe est encore limité, mais le nombre de zéros peut être infini.

15. *Points singuliers de troisième classe.* — Le point infini d'une fonction uniforme de deuxième classe définit une nouvelle espèce de discontinuité que nous appellerons un *point singulier de troisième classe*. On voit alors que le point a sera un point singulier de troisième classe, si les fonctions $\mathrm{P}\left(\frac{1}{z-a}\right)$, $p\left(\frac{1}{z-a}\right)$, qui définissent l'espèce du point singulier par rapport à un cercle C, sont telles, que $\mathrm{P}(z-a)$, $p(z-a)$ soient des fonctions de deuxième classe ayant un nombre infini de points singuliers. Les propriétés caractéristiques de ce point singulier, c'est qu'à l'intérieur du cercle C, décrit du point singulier comme centre, la fonction a un nombre infini de points de deuxième classe; enfin, dans une aire quelconque située à l'intérieur de ce cercle et ne contenant pas le centre du cercle, la fonction est de deuxième classe; elle a par conséquent un nombre limité de points de deuxième classe dans cette étendue.

Quand le point singulier est de troisième classe, ces conditions sont satisfaites. Il faut démontrer la réciproque. Plaçons-nous dans le cas de la décomposition en sommes. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les points singuliers de deuxième classe de la fonction à l'intérieur du cercle C; $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ les cercles correspondants; $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$ les fonctions qui définissent l'espèce de ces points singuliers. On peut, d'après notre théorie générale, former une fonction $\mathfrak{L}\left(\frac{1}{z}\right)$, holomorphe à l'extérieur de C et qui ait pour points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'espèces $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$. La différence $\Pi(z) - \mathfrak{L}\left(\frac{1}{z}\right)$, n'ayant que des points singuliers de première classe à l'intérieur du cercle, peut se mettre sous la forme

$$\Pi(z) - \mathfrak{L}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{P}'\left(\frac{1}{z}\right) + \mathrm{Q}(z),$$

P' étant une fonction qui définit un point singulier de deuxième classe au plus.

Cela posé, notre fonction $\mathfrak{L}(z)$ admet comme point singulier les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_n = \frac{1}{a_n}$; ces points seront des points singuliers de deuxième classe. En effet, la fonction $\mathfrak{L}\left(\frac{1}{z}\right)$ a un nombre infini de points singuliers dans le voisinage de a_n; il en est de même de la fonction $\mathfrak{P}(z)$ dans le voisinage du point α_n. Si l'on trace une aire voisine de a_n, mais ne contenant pas ce point, la fonction $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ est de première classe dans cette aire. A cette aire en correspond une autre, voisine de α_n et ne contenant pas ce point. La fonction $\mathfrak{P}(z)$ sera de première classe dans cette aire. Le point α_n est donc bien un point de deuxième classe. Remarquons maintenant que la fonction $\Pi(z)$ peut s'écrire

$$\Pi(z) = P\left(\frac{1}{z}\right) + Q(z).$$

Comme cette décomposition en sommes de la fonction $\Pi(z)$ est unique, on a

$$P\left(\frac{1}{z}\right) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) + P'\left(\frac{1}{z}\right),$$
$$P(z) = \mathfrak{P}(z) + P'(z).$$

La fonction $P'(z)$ étant de première classe au plus, on voit que $P(z)$ est bien une fonction de deuxième classe, ayant un nombre infini de points singuliers de deuxième classe. La décomposition en produits mènerait aux mêmes propriétés caractéristiques. Les deux façons de définir ces points conduisent au même résultat. Enfin, dans ces définitions, le cercle C ne joue aucun rôle, pourvu qu'on le suppose suffisamment petit.

Cherchons la distribution des points de première classe à l'intérieur du cercle C. Si l'on trace une aire quelconque contenant l'un au moins des points a, il y aura à l'intérieur de cette aire un nombre infini de points singuliers; il en sera de même, *a fortiori*, si l'on trace une aire contenant le point O, car dans cette aire il y a une infinité de points a. Si, au contraire, on trace une aire ne contenant aucun des points a, la fonction n'aura à l'intérieur de cette aire qu'un nombre limité de points singuliers, car dans cette étendue la fonction $\Pi(z)$ est de première classe. Cette disposition est la même que celle des zéros dans le cas des points singuliers de deuxième classe.

Réciproquement, on peut former une fonction uniforme ayant des discontinuités de première classe d'espèce donnée, ces points singuliers étant disposés comme ceux que nous venons d'examiner. Des points a, comme centre, on pourra décrire des cercles $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma^n$ qui n'empiètent pas les uns sur les autres. On pourra trouver une fonction $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$, nulle pour z infini, holomorphe à l'extérieur de Σ_n, et ayant pour points singuliers de l'espèce donnée ceux de nos points qui sont à l'intérieur de Σ_n. Cette fonction P_n définit un point singulier a_n de deuxième classe. On peut maintenant former une fonction $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$, holomorphe à l'extérieur de C et ayant les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ comme points singuliers d'espèces $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Cette fonction $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ définit un point singulier du troisième ordre.

A l'extérieur des cercles $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, il peut rester un nombre infini de points de première classe; mais ces points restants sont tels, d'après nos hypothèses, que dans une aire limitée ne contenant pas le point O il y en ait un nombre fini. On pourra donc former une fonction $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right)$ holomorphe à l'extérieur de C, ayant pour discontinuités tous ces points singuliers. Cette fonction $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right)$ définit un point singulier de deuxième classe au plus.

Cela posé, remarquons que la fonction P_n n'est pas complètement définie par l'ensemble de ses discontinuités à l'intérieur du cercle Σ_n. On obtiendra toutes ces fonctions en ajoutant à l'une d'elles une fonction de la forme $G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$. Pour avoir la solution la plus générale de notre problème, il faudra ajouter à la fonction que nous avons obtenue une fonction ayant pour points singuliers d'espèce $G_1, G_2, \ldots, G_n$ les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, c'est-à-dire une fonction dont le point $z = 0$ est un point de deuxième classe.

L'ensemble des points singuliers de première classe ne définit pas complètement un point singulier de troisième classe; elle le définit à un point singulier de deuxième classe près.

Si l'on considère la décomposition en produits, le résultat n'est pas tout à fait le même. On peut d'abord former une fonction $p\left(\frac{1}{z}\right)$ ayant tous les points donnés comme points singuliers de première classe d'espèce donnée, et qui, de plus, n'aura pas de zéros en dehors des cercles singuliers. On obtiendra toutes les autres solutions en multipliant cette fonction par une autre $f(z)$, qui a l'origine comme point singulier de deuxième classe, les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des points singuliers de première classe, cette fonction $f(z)$ ne s'annulant pas à l'intérieur des cercles singuliers.

Enfin, si dans la fonction $P\left(\frac{1}{z-a}\right)$, qui définit un point singulier a du troisième ordre, on remplace z par $\frac{1}{u}$, on obtient une fonction de u qui a le point $\alpha = \frac{1}{a}$ comme point singulier du troisième ordre. En effet : 1° la fonction de z a, dans le voisinage du point a, un nombre infini de points de deuxième classe; il en est de même de la fonction de u dans le voisinage de α; 2° si l'on trace une aire dans le voisinage du point a ne contenant pas ce point (on suppose cette aire assez petite pour qu'elle ne contienne pas le point $z = 0$), il y correspond dans le plan des u une aire voisine de α et ne contenant pas le point α. Dans la première aire, la fonction de z est de deuxième classe; il en est de même de la fonction u dans la deuxième. Ces deux propriétés démontrent bien que le point α est un point singulier de troisième classe.

16. *Classification des points singuliers.* — Après avoir défini les points singuliers de troisième classe, on peut définir les fonctions uniformes de troisième classe. Une telle fonction, qui a un nombre infini de points de troisième classe, ne peut être ni holomorphe, ni de première, ni de deuxième, ni de troisième classe pour z infini. Le point infini de cette fonction est un point singulier de nouvelle espèce, que nous appellerons un *point singulier de quatrième classe*. On définira ensuite les fonctions uniformes de quatrième classe; le point infini d'une telle fonction est de cinquième classe. En continuant ainsi, on arrivera à classer de proche en proche les fonctions uniformes et les points singuliers. Il suffira de suivre la même marche que celle que nous avons suivie pour les fonctions et les points singuliers de première et de deuxième classe. Supposons, en effet, qu'on ait défini ainsi les fonctions de $(n-1)^{\text{ième}}$ classe et les points singuliers de $n^{\text{ième}}$ classe.

Si le point $z = 0$ est un point singulier de $n^{\text{ième}}$ classe, on pourra tracer un cercle C, du point O comme centre, à l'intérieur duquel la fonction $\Pi(z)$ jouit des deux propriétés suivantes : 1° la fonction $\Pi(z)$ a, à l'intérieur du cercle C, un nombre infini de $(n-1)^{\text{ième}}$ classe; 2° la fonction $\Pi(z)$ est de classe $n-1$ dans une aire quelconque, intérieure à C et ne contenant pas le point O. Ces propriétés subsistent évidemment si l'on diminue le rayon du cercle C. Enfin elles sont caractéristiques, c'est-à-dire que, si elles existent, le point zéro est un point singulier de classe n, soit que l'on considère la décomposition en sommes, soit que l'on considère la décomposition en produits. Nous supposons ceci démontré.

Cela posé, si dans la fonction $P_n\left(\frac{1}{z-a}\right)$, qui définit l'espèce d'un point singulier a de classe n, on remplace z par $\frac{1}{u}$, on obtient une fonction de u qui a pour point singulier de classe n le point $\alpha = \frac{1}{a}$. Le théorème est supposé démontré pour les points singuliers de classe $n-1$. En effet, dans le voisinage du point a, la fonction de z a un nombre infini de points de classe $n-1$; il en est donc de même de la fonction de u dans le voisinage de α. Si l'on trace une aire voisine de a ne contenant pas ce point et assez petite pour ne pas contenir le point O, il y correspond dans le plan des u une aire voisine de α et ne contenant pas ce point. Dans cette aire, la fonction de u sera de classe $(n-1)$. Le point α est bien, d'après cela, un point singulier d'ordre n.

Une fonction est de classe n quand ses points singuliers sont de classes $1, 2, \ldots, n$. Dire qu'une fonction a un point singulier de classe n, c'est dire que, de ce point comme centre, on peut décrire un cercle de rayon assez petit pour que dans ce cercle il n'y ait que des points singuliers de classe $1, 2, \ldots, n-1$. Il en résulte immédiatement :

Toute fonction de classe n, dans une étendue limitée, a dans cette étendue un nombre limité de points singuliers de classe n.

Si une fonction est de classe n sur toute la sphère, le nombre de ses points singuliers de classe n est limité.

En effet, si le point infini est un point ordinaire de la fonction $\Pi(z)$, tous les points singuliers de cette fonction se trouvent à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre. Le nombre des points de classe n est donc limité.

S'il n'en est pas ainsi, le point infini est un point singulier de classe $1, 2, \ldots, n$. On pourra ramener ce cas au précédent, en ajoutant à la fonction $\Pi(z)$ une fonction uniforme de classe $(n-1)$ au plus, ce qui ne change pas le nombre des points singuliers de classe n.

Si une fonction de classe n a un nombre infini de points de classe n, son point infini est un point singulier d'une nouvelle espèce, que nous appellerons un *point singulier de classe* $(n+1)$. Le point a sera un point de classe $(n+1)$ si la fonction $P\left(\frac{1}{z-a}\right)$ ou $p\left(\frac{1}{z-a}\right)$, qui sert à définir l'espèce du point singulier, est telle que $P(z-a)$ ou $p(z-a)$ soit une fonction de classe n ayant un nombre infini de points singuliers de classe n. Comme précédemment, il y a là deux définitions différentes. Prenons celle qui correspond à la décomposition en sommes et supposons le point singulier placé à l'origine. Soit C le cercle par rapport auquel on définit l'espèce du point singulier. A l'intérieur de ce cercle, la fonction $\Pi(z)$ jouit des deux propriétés suivantes : 1° elle a un nombre infini de points de classe n; 2° elle est de classe n, dans une aire quelconque intérieure à C et ne contenant pas le point O. Elle a, par conséquent, dans cette aire un nombre limité de points singuliers de classe n. Réciproquement, si ces propriétés existent, le point $z=0$ est un point singulier d'ordre $(n+1)$. En effet, soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ les points singuliers d'ordre n de la fonction à l'intérieur du cercle C. De ces points comme centre décrivons des cercles $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \ldots$, qui n'empiètent pas les uns sur les autres. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les fonctions qui définissent l'espèce de ces points singuliers. On peut, d'après la théorie générale, former une fonction uniforme $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ holomorphe à l'extérieur de C et ayant pour points singuliers d'espèce $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$. La fonction $\mathfrak{P}(u)$ a pour points singuliers de classe n les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_n$ étant égal à $\frac{1}{a_n}$. C'est une fonction de classe n ayant un nombre infini de points singuliers de cette classe.

La différence $\Pi(z) - \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ n'a plus de points singuliers de classe n. L'origine est pour cette fonction un point singulier de classe n, au plus. En appelant $P'(z)$ une fonction de classe $n-1$ au plus, on aura

$$\Pi(z) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) + P'\left(\frac{1}{z}\right) + Q(z).$$

La fonction $P\left(\frac{1}{z}\right)$, qui définit l'espèce du point singulier $z=0$ par rapport au cercle C, est égale à $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) + P'\left(\frac{1}{z}\right)$. L'origine est donc bien un point singulier de classe n.

La décomposition en produits conduirait aux mêmes propriétés caractéristiques. Les deux définitions sont donc équivalentes; enfin, le cercle C ne joue aucun rôle : il suffit de le supposer suffisamment petit.

Après avoir tracé les cercles $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, qui entourent les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il ne reste dans le cercle C, à l'extérieur de ces cercles, que des points singuliers de classe $(n-1)$ au plus. Soient $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ces points singuliers : on pourra les entourer de cercles n'empiétant pas les uns sur les autres et n'empiétant pas sur les cercles Σ; en continuant ainsi, on formera n suites infinies au plus; si l'on se donne la position et l'espèce de ces points singuliers de diverses classes, on pourra former une fonction $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ qui ait ces discontinuités, et cette fonction n'est pas complètement déterminée; on pourra y ajouter une fonction de la forme $G\left(\frac{1}{z}\right)$. Dans le cas de la décomposition en produits, on peut former d'abord une fonction $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ qui ait toutes ces discontinuités et qui ne s'annule pas à l'extérieur du cercle singulier. On obtiendra les autres solutions en multipliant celle-ci par une fonction $g\left(\frac{1}{z}\right)$, qui ne s'annule pas à l'intérieur des cercles singuliers.

La classification des points singuliers et des fonctions est complètement faite; nous allons donner quelques propriétés de cette classification, entre autres la distribution des zéros et des points de première classe dans le voisinage d'un point singulier de classe n. Il nous faut, pour cela, rappeler quelques propriétés de la théorie des suites infinies.

17. *Suites infinies.* — Supposons que, dans une aire limitée, on ait un nombre infini de points isolés, c'est-à-dire ne formant pas une ligne continue. On dit qu'un point a, situé dans cette aire, est un point limite de cette suite de points quand il y en a un nombre infini dans le voisinage du point a. Si l'on trace une aire contenant le point a, il y aura toujours dans cette aire, quelque petite qu'elle soit, un

nombre infini de points. Si, dans une aire limitée, il y a un nombre infini de points, cette suite a au moins un point limite.

Cela posé, considérons tous les points limites de notre suite. Si leur nombre est limité, la suite que nous considérons est simplement infinie. La suite des points singuliers de première classe dans le voisinage d'un point de deuxième est un exemple de suite simplement infinie qui a un seul point limite; il en est de même de la suite des zéros d'une fonction dans le voisinage d'un point singulier de première classe.

Si le nombre des points limites est infini, ces points forment une nouvelle suite infinie. Nous désignerons, avec M. Mittag-Lefler, par P la suite considérée, par P_1 la suite formée avec les points limites de P. Si l'on trace une aire ne contenant aucun point de P_1, cette aire contient un nombre limité de points de la suite P. En effet, s'il en était autrement, il y aurait un point limite de P dans cette aire. Prenons un point limite de P_1; une aire quelconque contenant ce point a un nombre infini de points de la suite P_1, et *a fortiori* un nombre infini de points de la suite P. Ce point limite de P_1 est dit un point limite de deuxième ordre de P; si le nombre des points limites du deuxième ordre est limité, on dit que la suite P est doublement infinie ou qu'elle est de classe 2.

Si le nombre des points limites du deuxième ordre est infini, ces points limites forment une nouvelle suite P_2; en prenant les points limites de cette suite, on a une nouvelle série de points P_3. Si cette série a un nombre limité de points, on dit que la suite P est de classe 3. En continuant ainsi, on formera des séries $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Si l'on peut trouver un nombre n tel que la suite P_n ait un nombre limité de termes, on dit que la suite P est de classe n [1].

Il peut se faire que toutes les suites obtenues aient un nombre infini de points : on dit alors que la suite P est du deuxième genre. Dans le cas contraire, elle est du premier genre.

18. *Distribution des points singuliers de première classe dans le voisinage d'un point singulier de classe* $(n+1)$. — Les points singuliers de

---

(1) *Voir,* à ce sujet, les recherches de M. Cantor sur les *ensembles de points*, dont une traduction française va être publiée dans les *Acta mathematica*.

première classe d'une fonction $\Pi(z)$ qui a un point singulier d'ordre $n+1$ forment dans le voisinage de ce point une suite de classe n qui a comme point limite d'ordre n le point singulier d'ordre $n+1$. Réciproquement, si les points singuliers de première classe d'une fonction forment une suite de classe n, le point limite de cette suite est un point singulier d'ordre $(n+1)$. Le théorème est démontré pour les points singuliers de première, deuxième et troisième classe; on peut le supposer démontré pour les points de classe n.

Cela posé, soit $z=0$ un point singulier d'ordre $(n+1)$; de l'origine comme centre, on peut décrire un cercle C tel qu'il n'y ait à l'intérieur de ce cercle que des points de classe $1, 2, \ldots, n$. Il y a à l'intérieur de ce cercle une suite infinie P de points singuliers de première classe. Formons les suites $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, qui se déduisent de celle-ci. Aucune de ces suites ne peut avoir un nombre limité de termes, car s'il en était ainsi, le point $z=0$ ne serait pas de classe $(n+1)$. Les points de la suite P_{n-1} sont des points singuliers d'ordre n de la fonction $\Pi(z)$; or on sait que ces points forment une suite simplement infinie qui a pour point limite le point $z=0$. La série P_n se réduit donc au seul point $z=0$, ce qui démontre la première partie du théorème.

Réciproquement, soit $z=0$ un point limite d'ordre n. De ce point comme centre, on peut décrire un cercle C, qui contienne ce seul point limite d'ordre n. La suite des points limites d'ordre $(n-1)$ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est une suite simplement infinie qui a pour limite $z=0$. Autour de ces points décrivons des cercles $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, qui n'empiètent pas les uns sur les autres. Quelle que soit l'espèce des points singuliers de première classe qui se trouvent à l'intérieur de ces cercles, on pourra, par hypothèse, trouver des fonctions uniformes $P_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \ldots$, holomorphes à l'extérieur de ces cercles et ayant respectivement, pour points singuliers de première classe de l'espèce donnée, les points qui se trouvent dans l'intérieur des cercles Σ. Ces fonctions définissent des points singuliers d'ordre n. A l'intérieur de C, mais en dehors des cercles Σ, il peut rester une suite infinie de points singuliers P'; cette suite est au plus de classe $(n-1)$. On pourra former une fonction ayant pour points singuliers les points de P'; le point $z=0$ sera un point d'ordre n au plus pour cette fonction, et elle n'aura pas de points singuliers d'ordre n à l'intérieur de C. Il résulte bien de là que toute fonction qui a cette suite de points singuliers de première classe a le point $z = 0$ comme point d'ordre $n+1$.

Prenons maintenant deux fonctions qui toutes deux ont cette suite comme points singuliers de première classe et de même espèce. Leur différence admet le point $z = 0$ comme point singulier de classe n au plus. Le théorème est démontré pour les points de deuxième classe; or nos deux fonctions ont toutes deux comme points de deuxième classe les points limites de premier ordre qui forment la suite P_1. En ces points, la différence des deux fonctions admet un point singulier de première classe au plus; en tout autre point, cette différence est holomorphe. La suite P_1 est d'ordre $n-1$; le théorème est démontré.

Les points singuliers d'ordre $(n-m)$ de la fonction $\Pi(z)$ appartiennent à la suite P_{n-m-1}, qui est de classe $m+1$. Si l'on se donne cette suite de points singuliers et l'espèce de ces points, on pourra former une fonction ayant tous les points de cette suite pour points singuliers de l'espèce donnée. En effet, soient b un de ces points, B le cercle singulier, $P\left(\frac{1}{z-b}\right)$ la fonction qui définit l'espèce de ce point singulier. Quand P est donné, on a, par cela même, l'espèce et la position des discontinuités de première classe qui se trouvent dans le cercle B. Cela posé, l'ensemble des points de première classe qui se trouvent dans les cercles B forme une suite d'ordre n. On peut donc, d'après le théorème précédent, former une fonction $\Pi(z)$ qui admette tous les points de cette suite d'ordre n comme points de première classe, l'espèce étant la même que pour les fonctions P. La différence $P\left(\frac{1}{z-b}\right) - \Pi(z)$ n'est pas forcément holomorphe dans le voisinage du point b; mais ce point est d'ordre $n-m-1$ au plus pour cette différence. On a donc ramené le problème au cas où l'ordre du point singulier est diminué d'une unité, comme il est possible dans le cas où les points b sont de première classe : le théorème est démontré.

Prenons deux fonctions qui ont tous ces points singuliers b d'espèce P. Leur différence est holomorphe dans le voisinage du point b. Si maintenant c est l'un des points limites de la suite b, c'est-à-dire si c appartient à la suite P_{n-m}, ce point c sera pour nos deux fonctions un point singulier d'ordre $n-m+1$; la différence de ces deux fonctions a au point c un point singulier de première classe au plus. Il en résulte que la différence de ces deux fonctions a le point $z = 0$ comme point singulier d'ordre $(m+1)$ au plus.

Revenons à notre suite P de points singuliers; après avoir enlevé de cette suite tous les points qui sont dans les cercles B, il reste une suite P′ d'ordre $n - m - 1$ au plus; à cette suite correspond un point singulier d'ordre $n - m$ au plus, le point $z = 0$. Au lieu de définir ce point par l'ensemble de ces discontinuités de première classe, on peut grouper à part tous les points singuliers d'ordre $n - m - m'$. Si l'on forme deux fonctions admettant ces seuls points singuliers, leur différence aura l'origine comme point singulier de classe m' au plus. On pourra continuer ces groupements jusqu'à ce qu'on ait pris tous les points singuliers.

En faisant la somme des fonctions que l'on obtient ainsi, on a une fonction qui a tous les points de la suite P comme points de première classe. Les fonctions ainsi obtenues ne sont pas les plus générales; deux d'entre elles sont telles que leur différence admet le point $z = 0$ comme point singulier d'ordre q au plus, q étant le plus grand des nombres $m + 1$, m', m'', ...

12. *Distribution des zéros dans le voisinage d'un point singulier d'ordre* $(n+1)$. — Pour étudier cette distribution, nous supposerons l'espèce du point singulier définie relativement à la décomposition en produits. Supposons que, de tous les points de la suite P comme centres, on ait décrit des cercles assez petits pour que chacun d'eux ne contienne qu'un seul point singulier, ce qui est toujours possible, puisque ces points ne forment pas une ligne continue. Soient a un point de la suite P, A le cercle correspondant et g la fonction qui définit l'espèce du point singulier. On sait que l'on a

$$\Pi(z) = (z-a)^n\, g\left(\frac{1}{z-a}\right) q(z).$$

Les zéros de la fonction $\Pi(z)$ dans le cercle A sont bien déterminés; ils forment en général, dans ce cercle, une suite simplement infinie qui a pour limite a. Les zéros de la fonction $\Pi(z)$ qui se trouvent dans les cercles singuliers sont fixés à l'avance; mais la fonction peut avoir des zéros à l'extérieur de ces cercles. Parmi toutes les fonctions $\Pi(z)$ que l'on peut former quand on se donne les points de première classe et leur espèce, il y en a qui n'ont pas de zéros à l'extérieur de leurs cercles singuliers. On ne considère, bien entendu, que les valeurs de z qui sont comprises à l'intérieur du cercle C, décrit de l'origine comme centre. Il suffit évidemment de supposer le théorème démontré pour les points singuliers d'ordre n.

Cela posé, soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les points singuliers d'ordre n de la fonction à l'intérieur du cercle C. Entourons-les de cercles $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \ldots$; dans chacun de ces cercles il y a un nombre infini de points singuliers, qui eux-mêmes sont entourés de cercles singuliers. On peut, par hypothèse, choisir les fonctions

$$(z-a_1)^{m_1} p_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \quad (z-a_2)^{m_2} p_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \quad \ldots$$

de telle façon qu'elles n'aient pas de zéros en dehors des cercles singuliers; on sait maintenant qu'on peut former une fonction $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$, holomorphe à l'extérieur de C et ayant tous ces points singuliers. Si cette fonction a des zéros en dehors des cercles Σ, ces points forment au plus une suite simplement infinie ayant pour limite o. En effet, si l'on trace une aire quelconque ne contenant pas le point o, on peut diviser cette aire en plusieurs parties, les unes intérieures aux cercles Σ, les autres extérieures. Dans les premières parties, il n'y a pas de points de la suite considérée; dans chacune des deuxièmes parties, la fonction $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ est holomorphe; le nombre de points de la suite dans chacune de ces parties est limité; il y a aussi un nombre fini de parties, puisque l'aire considérée contient un nombre limité de points a. Cette suite étant simplement infinie, on peut trouver une fonction $G\left(\frac{1}{z}\right)$ qui admet tous ces zéros. Le quotient $\dfrac{\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)}{G\left(\frac{1}{z}\right)}$ satisfait encore à la question et n'a plus de zéros extérieurs aux cercles Σ. Soit $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right)$ ce quotient; ses zéros à l'intérieur des cercles Σ sont les mêmes que ceux des fonctions p qui définissent l'espèce des points singuliers. On forme donc ainsi une fonction $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right)$ qui a tous les points de première classe intérieurs à Σ et qui ne s'annule pas en dehors de leurs cercles singuliers.

Les autres points de la suite P définissent un point de classe n. On pourra, par hypothèse, former une fonction $\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{z}\right)$ qui ait tous ces points de première classe et qui ne s'annule pas en dehors de leurs cercles singuliers. La fonction $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right)\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{z}\right)$ satisfait aux conditions demandées. Soit $\Pi_1(z)$ cette fonction. Prenons maintenant l'une quelconque des fonctions $\Pi(z)$.

On voit facilement que, dans le cas où le point $z=0$ est un point singulier du deuxième ordre, le quotient $\frac{\Pi(z)}{\Pi_1(z)}$ a, en général et au plus, un point singulier $z=0$ de premier ordre; ce quotient ne s'annule pas à l'intérieur des cercles singuliers.

Revenons au cas du point singulier d'ordre $(n+1)$. Soit b un point limite de la série P; au point b, le quotient $\frac{\Pi(z)}{\Pi_1(z)}$ admet, en général et au plus, un point singulier de premier ordre : il en résulte que le quotient $\frac{\Pi(z)}{\Pi_1(z)}$ a le point $z=0$ comme point singulier d'ordre n. La fonction qui définit ce point singulier par rapport au cercle C ne s'annule pas à l'intérieur des cercles singuliers. On voit que le théorème n'est pas tout à fait analogue au théorème correspondant dans la décomposition en sommes.

Si tous les points de première classe étaient définis par des fonctions de la forme $e^{g\left(\frac{1}{z}\right)}$, on pourrait former une fonction ayant un point singulier d'ordre $(n+1)$ et ne s'annulant pas dans le voisinage de ce point.

Tous ces exemples montrent combien est variable la disposition des zéros dans le voisinage d'un point singulier d'ordre $(n+1)$. Dans tous les cas, la suite des zéros d'une fonction dans le voisinage d'un point d'ordre $n+1$ forme une suite de classe $(n+1)$ au plus, et le point singulier est dans ce cas le point limite de cette suite.

En effet, les points limites de la suite des zéros ne peuvent être que des points singuliers de première classe au moins, ces derniers points formant une suite d'ordre n. Il en résulte que la suite des zéros est d'ordre $n+1$ au plus. Réciproquement, si l'on a une suite Q de zéros, d'ordre $n+1$, toute fonction qui s'annule en ces points a comme points singuliers de classe $(n+1)$ au moins tous les points limites d'ordre $(n+1)$ de cette suite; parmi toutes ces fonctions, il y en a qui ont ces points limites comme points singuliers d'ordre $n+1$.

Le théorème est démontré pour les suites de première classe : il suffit de démontrer que, s'il est vrai pour une suite d'ordre n, il est encore vrai pour une suite d'ordre $n+1$. En effet, soit $z=0$ un point limite d'ordre $n+1$. De ce point comme centre on peut décrire un cercle C qui ne contienne aucun autre point limite d'ordre $(n+1)$. Nous considérerons seulement la suite des points qui se trouvent dans le cercle C. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ les points limites d'ordre n qui forment une suite simplement infinie. De ces points comme centre décrivons des cercles $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ qui n'empiètent pas les uns sur les autres. On peut alors trouver des fonctions

$$(z-a_1)^{m_1} p_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \quad (z-a_2)^{m_2} p_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \quad \ldots,$$

holomorphes à l'extérieur de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ et qui aient respéctivement pour zéros les points de la suite qui se trouvent dans ces cercles, ces fonctions définissant des points singuliers d'ordre n. On pourra alors former une fonction $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ qui admette ces points $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ comme points singuliers d'espèces

$$(z-a_1)^{m_1} p_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \quad (z-a_2)^{m_2} p_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \quad \ldots$$

et qui, de plus, ne s'annule pas en dehors des cercles Σ. Les points de la suite extérieurs aux cercles Σ forment une deuxième suite d'ordre n au plus. On pourra former une fonction $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right)$ ayant les zéros de cette deuxième suite et le point $z=0$ comme point singulier d'ordre n. Le produit $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right)$ est l'une des fonctions demandées. On obtiendra les autres en multipliant celle-ci par une fonction uniforme n'ayant pas de zéros à l'intérieur de C, ce qui permet d'augmenter, autant qu'on le veut, l'ordre du point singulier $z=0$.

20. *Fonctions uniformes et points singuliers du deuxième genre.* — Tous les points singuliers ou, ce qui revient au même, toutes les fonctions uniformes rentrent-elles dans cette classification? Il est facile de se convaincre qu'il n'en est pas ainsi. On peut en effet former, d'après le théorème de M. Mittag-Lefler, une fonction ayant les points singuliers $1, 2, \ldots, n, \ldots$ d'espèces $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots, P_n\left(\frac{1}{z-n}\right)$ définissant un point singulier de classe n. Cette fonction ne rentre pas dans notre classification : on dit alors que c'est une fonction du deuxième genre. Le point infini d'une telle fonction ne peut pas être un point ordinaire; car, s'il en était ainsi, tous les points singuliers se trouveraient dans un cercle décrit de l'origine comme centre. Ce n'est pas non plus un point singulier de classe m; car, s'il en était ainsi, tous les points singuliers dont le module est très grand seraient de classes inférieures à m. On a donc une nouvelle espèce de discontinuité, que M. Mittag-Lefler appelle un point singulier du deuxième genre.

Si le point $z=0$ est un point singulier du deuxième genre, il y a dans le voisinage de ce point un nombre infini de discontinuités de la fonction. L'ensemble des discontinuités de première classe ne peut former qu'une suite du deuxième genre; car, s'il en était autrement, on aurait un point singulier du premier genre. Les points limites de cette suite, qui sont des points de deuxième classe, forment encore une suite du deuxième genre. Il en est de même de tous les points de classe limitée qui se trouvent dans le voisinage du point considéré.

Parmi toutes les fonctions du deuxième genre, il y a lieu de grouper à part toutes celles qui restent de premier genre sur tout le plan, qui n'ont qu'un seul point de deuxième genre, le point infini. Elles jouent un rôle analogue à celui que jouent les fonctions holomorphes dans la théorie des points de premier genre. Leur point infini sera appelé, par analogie avec la théorie des points de premier genre, point de première classe. Il jouit de cette propriété que, dans son voisinage, il n'y a que des points de premier genre. Nous appellerons de même fonction de première classe une fonction qui n'a que des discontinuités de premier genre, et parmi celle du deuxième genre des discontinuités de première classe. Elle jouit de propriétés analogues à celles des fonctions de première classe dans les points de premier genre.

1° *Toute fonction de première classe dans une étendue limitée a un nombre fini de points de première classe dans cette étendue.*

En effet, d'un point de première classe comme centre on peut décrire un cercle de rayon assez petit pour qu'il n'y ait pas de points de deuxième genre à l'intérieur de ce cercle.

2° *Toute fonction de première classe sur toute la sphère a un nombre limité de points de première classe.*

En effet, la marche que nous avons suivie pour démontrer les théorèmes analogues à celui-ci montre immédiatement que la fonction est égale à une somme de deux autres. La première étant de premier genre sur tout le plan et n'ayant qu'un seul point singulier de deuxième genre, le point est infini; la deuxième fonction sera holomorphe pour z infini, tous ses points singuliers se trouveront dans une aire limitée décrite de l'origine comme centre.

Enfin, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignent une suite de points singuliers, tels que le module de a_n augmente indéfiniment avec n, si $P_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right)$ sont des fonctions uniformes représentant des points singuliers de première classe, on pourra former, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler, une fonction uniforme dans tout le plan et ayant les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ comme points singuliers d'espèces $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$. On arrive au même résultat en prenant la décomposition en produits.

Le point infini d'une telle fonction définira un point singulier de deuxième classe. Il y a dans le voisinage d'un tel point une suite simplement infinie de points de première classe. Réciproquement, si l'on se donne une telle suite de points de première classe et l'espèce de ces points, on pourra former une infinité de fonctions ayant pour points de première classe et d'espèce donnée les points de cette suite. Deux fonctions qui jouissent de ces propriétés sont telles que leur différence admet l'origine comme point singulier de première classe au plus.

Si l'on se place dans le cas de la décomposition en produits, on arrive à des résultats analogues.

On voit comment on peut classer ces points singuliers et ces fonctions.

Cette classification ne comprend pas tous les points singuliers et toutes les fonctions. Si l'on forme, en effet, une fonction uniforme ayant le point 1 comme point singulier de classe 1, le point 2 comme point singulier de classe 2, le point n comme point de classe n, ..., le point infini d'une telle fonction est un point singulier d'une espèce nouvelle.

Nous donnerons spécialement le nom de points singuliers de deuxième genre, de fonctions de deuxième genre à ceux que nous venons de classer.

21. *Fonctions et points singuliers du troisième genre.* — La fonction que nous venons d'examiner est du deuxième genre dans tout le plan. En faisant le même raisonnement que précédemment, on voit que le point infini de cette fonction n'est ni un point ordinaire, ni un point de premier genre, ni un point de deuxième genre. Nous l'appellerons un point de troisième genre, et nous dirons que c'est un point de première classe dans ce genre. Dans le voisinage d'un point singulier de première classe, la fonction est de deuxième genre.

On peut ainsi classer les fonctions et les points singuliers du troisième genre. Il est clair qu'en continuant ainsi on arrive à former une suite illimitée de genres, tous divisés en classes.

22. *Fonctions et points singuliers de deuxième famille.* — Tous les points singuliers et toutes les fonctions uniformes rentrent-ils dans cette classification? Il est facile de se convaincre qu'il n'en est pas ainsi. On peut, en effet, former une fonction qui admet le point 1 comme point singulier de premier genre, de classe d'ailleurs quelconque; le point n comme point singulier de genre n de classe quelconque aussi. Le point infini d'une telle fonction ne peut pas être un point ordinaire, car on sait que, dans ce cas, tous les points singuliers se trouvent dans une aire limitée, ce qui est ici impossible. Si le point infini était un point de genre n, la fonction $\Pi(z)$ considérée serait égale à une fonction de genre n sur tout le plan, augmentée d'une fonction holomorphe pour z infini. En effet, si l'on pose $z = \frac{1}{z'}$, la fonc-

tion $\Pi\left(\frac{1}{z'}\right)$ peut s'écrire

$$\Pi\left(\frac{1}{z'}\right)=P\left(\frac{1}{z'}\right)+Q(z'),$$

$P\left(\frac{1}{z'}\right)$ définissant un point singulier de genre n, et $Q(z')$ étant holomorphe dans le voisinage de $z'=0$. On a alors

$$\Pi(z)=P(z)+Q\left(\frac{1}{z}\right).$$

$P(z)$ n'a pas de points singuliers dont le genre dépasse n; enfin les points singuliers de $Q\left(\frac{1}{z}\right)$ se trouvent dans une aire limitée.

Le point infini de cette fonction est donc un point singulier d'une nouvelle espèce. Nous dirons qu'il appartient à la deuxième famille.

La première famille de points singuliers et de fonctions comprend tous ceux que nous avons partagés en classes et en genres. La deuxième famille pourra elle-même se diviser en classes et en genres.

On pourra former une suite illimitée de familles; on n'aura pas encore formé toutes les fonctions et tous les points singuliers possibles. On peut continuer ainsi indéfiniment.

Le cadre de ce travail ne nous permet pas d'étudier les propriétés des genres et des familles; c'est un point sur lequel nous nous proposons de revenir plus tard.

23. *Considérations générales sur la classification des points singuliers.* — Quel est le principe même de cette classification des points singuliers et des fonctions? Cela revient, en somme, à considérer toute une série de fonctions uniformes, les fonctions holomorphes, comme fonctions de classe zéro. Le point infini de ces fonctions est un point singulier de première classe; si l'on forme, à l'aide du théorème de M. Mittag-Leffler ou du théorème analogue pour la décomposition en produits une fonction ayant un nombre infini de points de cette espèce, cette fonction sera de première classe et son point infini de deuxième. A l'aide d'un nombre limité d'opérations analogues, on forme les fonctions et les points singuliers de premier genre. Pour définir les fonctions de deuxième genre, on forme des fonctions de

premier genre, telle que la classe de leurs points singuliers augmente indéfiniment avec le module de ces points. Les points infinis de ces fonctions définissent les points singuliers de première classe dans le deuxième genre. Partant de là, on arrive à établir la classification des points de deuxième genre, puis à former successivement les divers genres, les familles, etc.

Il se pose alors une question. Ne pourrait-on pas choisir arbitrairement un groupe de fonctions uniformes qu'on appellerait *fonctions de classe zéro?* Les points infinis de ces fonctions seraient appelés points singuliers de première classe; on effectuerait enfin la même série d'opérations que celles que nous avons faites en partant des fonctions holomorphes. Nous nous contentons de poser la question pour le moment; nous essayerons plus tard de montrer comment il faut choisir ces fonctions pour que la classe, le genre, la famille, etc., d'un point singulier ou d'une fonction soient parfaitement déterminés.

DEUXIÈME PARTIE.

FONCTIONS SIMPLEMENT PÉRIODIQUES.

---

1. *Préliminaires.* — Une fonction qui a pour période ω et le point a comme point singulier a pour points singuliers de même espèce tous les points dont l'affixe est $(a + n\omega)$. Nous représenterons tous ces points par le symbole (a). Nous supposerons d'abord qu'il n'y ait qu'une seule ligne de points singuliers, la ligne (O). On peut traiter la question à deux points de vue, soit en considérant la décomposition en sommes, soit en considérant la décomposition en produits.

2. Décomposition en sommes. — *Représentation de la fonction à l'aide d'une série.* — Soit

$$P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

une fonction uniforme dans tout le plan, holomorphe à l'extérieur d'un cercle C, décrit de l'origine comme centre avec un rayon ρ. Décrivons des cercles des points $n\omega$, comme centre, avec le rayon ρ. Formons la somme

$$(1) \qquad \mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)+\sum_{1}^{m}\mathrm{P}\left(\frac{1}{z-r\omega}\right)+\sum_{1}^{n}\mathrm{P}\left(\frac{1}{z+s\omega}\right).$$

Voyons ce qui arrive quand m et n croissent indéfiniment.

Pour des valeurs de r assez grandes, on a

$$\operatorname{mod}\left(\frac{\mathrm{A}_1}{z-r\omega}+\frac{\mathrm{A}_1}{r\omega}\right)<\operatorname{mod}\frac{\mathrm{B}}{r^2\omega^2}<\frac{k}{r^2},$$

$$\operatorname{mod}\left[\mathrm{P}\left(\frac{1}{z-r\omega}\right)-\frac{\mathrm{A}_1}{z-r\omega}\right]<\operatorname{mod}\frac{\mathrm{B}'}{(z-r\omega)^2}<\frac{k'}{r^2},$$

k et k' étant des constantes. Il en résulte que, pour ces valeurs de r,

$$\operatorname{mod}\left[\mathrm{P}\left(\frac{1}{z-r\omega}\right)+\frac{\mathrm{A}_1}{r\omega}\right)\right]<\frac{\mathrm{M}}{r^2}.$$

On démontrerait de même

$$\operatorname{mod}\left[\mathrm{P}\left(\frac{1}{z-s\omega}\right)-\frac{\mathrm{A}_1}{s\omega}\right]<\frac{\mathrm{M}'}{s^2}.$$

Il en résulte que la somme

$$(2) \quad \mathrm{E}(z)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)+\lim\sum_{1}^{m}\left[\mathrm{P}\left(\frac{1}{z-r\omega}\right)+\frac{\mathrm{A}_1}{r\omega}\right]+\lim\sum_{1}^{n}\left[\mathrm{P}\left(\frac{1}{z+s\omega}\right)-\frac{\mathrm{A}_1}{s\omega}\right]$$

converge uniformément; elle représente à la limite une fonction uniforme qui a pour points singuliers d'espèce P tous les points $n\omega$. Cette fonction $\mathrm{E}(z)$ a d'ailleurs pour période ω, car on a

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(z+\omega)-\mathrm{E}(z)=-\lim&\left[\mathrm{P}\left(\frac{1}{z-m\omega}\right)+\frac{\mathrm{A}_1}{m\omega}\right]\\&+\lim\left\{\mathrm{P}\left(\frac{1}{z+(n+1)\omega}\right)+\frac{\mathrm{A}_1}{(n+1)\omega}\right\}.\end{aligned}$$

Cette limite est nulle. En comparant (1) et (2), on voit que (1) ne peut être convergent que si $\frac{m}{n}$ a une limite. La valeur de (1) est alors

$$\mathrm{E}(z) + \frac{\mathrm{A}_1}{\omega} \log \lim \frac{m}{n}.$$

3. *Développement de la fonction* E(z) *en série contenant* $\cot \frac{\pi z}{\omega}$ *et ses dérivées.* — La fonction définie par la série (2) peut se mettre sous la forme d'une série double :

$$\begin{array}{cccc}
\mathrm{A}_1\left(\frac{1}{z-2\omega}+\frac{1}{2\omega}\right), & \mathrm{A}_2\left(\frac{1}{z-2\omega}\right)^2, & \mathrm{A}_3\left(\frac{1}{z-2\omega}\right)^2, & \ldots, \\
\mathrm{A}_1\left(\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}\right), & \mathrm{A}_2\left(\frac{1}{z-\omega}\right)^2, & \mathrm{A}_3\left(\frac{1}{z-\omega}\right)^3, & \ldots, \\
\frac{\mathrm{A}_1}{z}, & \frac{\mathrm{A}_2}{z^2}, & \frac{\mathrm{A}_3}{z^3}, & \ldots, \\
\mathrm{A}_1\left(\frac{1}{z+\omega}-\frac{1}{\omega}\right), & \mathrm{A}_2\left(\frac{1}{z+\omega}\right)^2, & \mathrm{A}_3\left(\frac{1}{z+\omega}\right)^3, & \ldots, \\
\mathrm{A}_1\left(\frac{1}{z+2\omega}-\frac{1}{2\omega}\right), & \mathrm{A}_2\left(\frac{1}{z+2\omega}\right)^2, & \mathrm{A}_3\left(\frac{1}{z+2\omega}\right)^3, & \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots
\end{array}$$

La formule (2) montre que cette suite doublement infinie converge uniformément quand on groupe les termes par lignes horizontales. On ne change pas cette somme en groupant les termes dans un ordre quelconque. Faisons la somme des termes qui se trouvent dans une même colonne verticale. La somme des termes de la première colonne est $\mathrm{A}_1 \frac{\pi}{\omega} \cot \frac{\pi z}{\omega}$; la somme des termes de la deuxième colonne est $-\mathrm{A}_2 \frac{\pi}{\omega} \mathrm{D}_z \cot \frac{\pi z}{\omega}$; celle des termes de la colonne de rang n est

$$\frac{\pi}{\omega} \mathrm{A}_n (-1)^{n-1} \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \mathrm{D}_z^{n-1} \cot \frac{\pi z}{\omega}.$$

Il en résulte que la fonction E(z) peut s'écrire

$$\mathrm{E}(z) = \frac{\pi}{\omega}\left(\mathrm{A}_1 \cot \frac{\pi z}{\omega} - \mathrm{A}_2 \mathrm{D}_z \cot \frac{\pi z}{\omega} + \frac{\mathrm{A}_3}{1.2} \mathrm{D}_z^2 \cot \frac{\pi z}{\omega} + \cdots\right),$$

série qui est convergente à l'extérieur des cercles C.

On obtiendra les autres fonctions définies par la formule (1) en ajoutant une constante à cette série.

La fonction $E(z)$ s'exprime aussi en fonction uniforme de l'exponentielle $y = e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}$. Remplaçons, en effet, z par $\frac{\omega}{2i\pi} Ly$. A une valeur de y correspondent une infinité de valeurs de z de la forme $z + n\omega$; et, par suite, il y correspond une seule valeur de la fonction $E(z)$. Cette fonction uniforme de y ne peut avoir que deux points singuliers à distance finie, les points 0 et 1. Le point 0 est un point singulier de première classe. Le point 1, au contraire, est en général de classe supérieure. Il est entouré de points singuliers qui se trouvent à l'intérieur d'une courbe Σ, qui correspond aux cercles C. Cette courbe Σ ne contient pas l'origine. En appelant $\Pi(y)$ la fonction obtenue, on aura

$$\Pi(y) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{y-1}\right) + G(y) + G_1\left(\frac{1}{y}\right).$$

$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{y-1}\right)$ ne diffère de $E(z)$ que par une fonction holomorphe de z, qui a pour période ω. Cette fonction est une des solutions de notre problème. $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{y-1}\right)$ est de la forme

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{y-1}\right) = \frac{B_1}{y-1} + \frac{B_2}{(y-1)^2} + \cdots.$$

On calcule facilement les coefficients B à l'aide des coefficients A.

4. *Cas de la décomposition en produits. — Représentation de la fonction à l'aide d'un produit infini.* — Soit $z^q p\left(\frac{1}{z}\right)$ la fonction qui définit l'espèce de point singulier. Décrivons des points $n\omega$ comme centre les cercles singuliers qui, comme nous l'avons toujours supposé, n'empiètent pas les uns sur les autres. Supposons qu'à l'extérieur du cercle décrit de l'origine on ait

$$p\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots.$$

Cela posé, considérons le produit

$$(1)\qquad z^q p\left(\frac{1}{z}\right) \times \prod_1^m \left[\left(1 - \frac{z}{r\omega}\right)^q p\left(\frac{1}{z - r\omega}\right)\right] \times \prod_1^n \left[\left(1 + \frac{z}{s\omega}\right)^q p\left(\frac{1}{z + s\omega}\right)\right].$$

Formons le produit

$$p\left(\frac{1}{z-r\omega}\right)\times\left(1-\frac{a_1}{z-r\omega}\right)=1+\frac{b_2}{(z-r\omega)^2}+\frac{b_3}{(z-r\omega)^3}+\cdots=1+\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z-r\omega}\right).$$

Pour des valeurs de r assez grandes, le module de $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z-r\omega}\right)$ est plus petit que $\frac{M}{r^2}$, M étant une constante. Il en résulte que le produit

$$\prod_1^\infty\left[p\left(\frac{1}{z-r\omega}\right)\times\left(1-\frac{a_1}{z-r\omega}\right)\right]$$

converge uniformément; il en est évidemment de même du produit

$$\prod_1^\infty\left[p\left(\frac{1}{z+s\omega}\right)\times\left(1-\frac{a_1}{z+s\omega}\right)\right].$$

D'autre part, on a

$$1-\frac{a_1}{z-r\omega}=1+\frac{a_1}{r\omega}+\frac{b_2}{r^2\omega^2}+\cdots,$$

les coefficients b étant des polynômes entiers en z. Le produit

$$\left(1-\frac{a_1}{z-r\omega}\right)e^{-\frac{a_1}{r\omega}}$$

se met sous la forme, pour des valeurs de r assez grandes,

$$1+\frac{B_2}{r^2\omega^2}+\frac{B_3}{r^3\omega^3}+\cdots.$$

Il en résulte que le produit

$$\prod_1^\infty\left[\left(1-\frac{a_1}{z-r\omega}\right)e^{-\frac{a_1}{r\omega}}\right]$$

converge uniformément.

Enfin M. Hermite a montré (*Calcul différentiel* de Lacroix) qu'il en est de même du produit

$$\prod_1^\infty\left[\left(1-\frac{z}{r\omega}\right)e^{\frac{z}{r\omega}}\right].$$

En modifiant un peu le produit (1), on arrive à former un produit qui converge uniformément :

$$(2)\quad E(z) = z^q p\left(\frac{1}{z}\right) \times \lim \prod_{-n}^{+m} \left[\left(1 - \frac{z}{r\omega}\right)^q \times p\left(\frac{1}{z - r\omega}\right) \times e^{+\frac{a_1}{r\omega} + \frac{qz}{r\omega}}\right].$$

Cette limite est une fonction uniforme de z, qui a comme points singuliers d'espèce $z^q p\left(\frac{1}{z}\right)$ tous les points $n\omega$.

En comparant (1) et (2), on voit tout de suite que (1) sera convergent si le rapport $\frac{m}{n}$ tend vers une limite. En désignant cette limite par le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$, la valeur du produit (1) sera

$$E(z) \times e^{-\left(\frac{a_1}{\omega} + \frac{qz}{\omega}\right) \sum_{-n}^{+m} \frac{1}{r}}.$$

Or $\sum_{-n}^{+m} \frac{1}{r}$ a pour limite $\log\left(\frac{m}{n}\right)$.

Le produit 1 sera donc égal à

$$\left(\frac{m}{n}\right) \times E(z) \times e^{-\left(\frac{a_1}{\omega} + \frac{qz}{\omega}\right)}.$$

Si, dans le produit (1), on remplace z par $z + \omega$, l'expression est multipliée par

$$\lim \frac{p\left[\frac{1}{z + (n+1)\omega}\right]}{p\left(\frac{1}{z - m\omega}\right)} \times \left[\frac{z + (n+1)\omega}{z - m\omega}\right]^q.$$

Elle se reproduit, à un facteur constant près, quand on y remplace z par $z + \omega$; en multipliant cette fonction par e^{az}, a étant convenablement choisi, on obtiendra une fonction périodique. Il faut remarquer, de plus, que cette fonction ne s'annule pas à l'extérieur des cercles C.

Si l'on veut avoir toutes les solutions, il suffira de multiplier cette fonction par une fonction holomorphe arbitraire ayant la période ω. Si, de plus, on voulait avoir des fonctions n'ayant pas de zéros à l'extérieur des cercles C, il faudrait multiplier par une fonction holomorphe périodique n'ayant pas de zéros. Une telle fonction est de la forme

$$e^{G(z)+\frac{2ni\pi z}{\omega}},$$

$G(z)$ admettant la période ω.

5. *Expression de ces fonctions à l'aide de l'exponentielle* $e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}$. — Nous savons déjà que si, dans ces fonctions, on remplace la variable z par la variable y, qui lui est liée par l'équation $y = e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}$, la fonction $\Pi(y)$ ainsi obtenue est uniforme et n'a que deux points singuliers, le point $y = 1$ et le point $y = 0$, qui est de première classe. Cette fonction peut alors se mettre sous la forme

$$\Pi(y) = (y-1)^n \psi\left(\frac{1}{y-1}\right) Q(y).$$

Si l'on remplace y par sa valeur dans $Q(y)$, on obtiendra une fonction holomorphe périodique. Il en résulte que $(y-1)^n \psi\left(\frac{1}{y-1}\right)$ est une des solutions que nous cherchons.

Il nous suffit de constater l'existence de cette fonction $(y-1)^n\psi\left(\frac{1}{y-1}\right)$.

Les solutions que nous cherchons se représentent plus facilement à l'aide de la fonction $\cot\frac{\pi z}{\omega}$ et de ses dérivées.

Plaçons-nous dans le cas où l'ordre du point singulier est nul. Posons

$$\frac{D_z p\left(\frac{1}{z}\right)}{p\left(\frac{1}{z}\right)} = +\frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \cdots.$$

Formons la fonction $E_1(z)$ qui, dans le cas de la décomposition en sommes, correspond au point singulier $\frac{D_z p\left(\frac{1}{z}\right)}{p\left(\frac{1}{z}\right)}$. On aura

$$E_1(z) = \left(-A_2 D_z \cot\frac{\pi z}{\omega} + \frac{A_3}{1.2} D_z^2 \cot\frac{\pi z}{\omega} - \ldots\right).$$

La théorie générale nous apprend que la fonction

$$e^{\int_{z_0}^{z} E_1(z)\,dz}$$

est uniforme et a pour points singuliers d'espèce $p\left(\frac{1}{z}\right)$ tous les points $n\omega$. Cette fonction peut s'écrire

$$e^{\frac{\pi}{\omega}\left(-A_2 \cot\frac{\pi z}{\omega} + \frac{A_3}{1.2} D_z \cot\frac{\pi z}{\omega} - \frac{A_4}{1.2.3} D_z^2 \cot\frac{\pi z}{\omega} + \ldots\right)}.$$

Cette fonction admet évidemment pour période ω. C'est donc une des solutions de notre problème.

Dans le cas où l'ordre du point singulier n'est pas nul, on multipliera la fonction précédente par $e^{\frac{2ni\pi z}{\omega}}$, n étant l'ordre du point singulier.

Si dans la fonction $E(z)$ on remplace z par $-a+z'$, la fonction obtenue $E_1(z')$ aura pour point singulier d'espèce P ou d'espèce $z''p\left(\frac{1}{z}\right)$ tous les points (a). Elle a aussi pour période ω. On sait donc former, soit dans le cas de la décomposition en sommes, soit dans le cas de la décomposition en produits, les fonctions périodiques qui ont pour points singuliers d'espèce donnée les points (a). Voyons comment on peut les représenter à l'aide de l'exponentielle $e^{\frac{2i\pi z'}{\omega}}$. Posons

$$y' = e^{\frac{2i\pi z'}{\omega}},$$

d'où

$$y = e^{-\frac{2i\pi a}{\omega}} + e^{\frac{2i\pi z'}{\omega}} = \frac{y'}{y_1},$$

y_1 étant égal à $e^{\frac{2i\pi a}{\omega}}$.

Il suffira donc de remplacer dans les fonctions $\Phi\left(\frac{1}{y-1}\right)$, $\psi\left(\frac{1}{y-1}\right)$, y par $\frac{y'}{y_1}$. Les nouvelles fonctions en y' ont le seul point singulier essentiel y_1. Cela posé, proposons-nous de former une fonction uniforme ayant pour période ω et pour points singuliers d'espèce donnée les points (a_1), (a_2), ..., (a_n), ...

Nous supposons comme toujours que les cercles singuliers n'empiètent pas les uns sur les autres. Nous nous placerons dans le cas où les points $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont tels qu'il y en ait un nombre limité dans une aire finie; autrement dit, les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forment une suite simplement infinie dont le point $z = \infty$ est le point limite. Les autres cas se ramènent à celui-ci, d'après les principes généraux de la théorie des points singuliers.

La question peut se traiter à deux points de vue, soit en décomposant en sommes, soit en décomposant en produits. Le mode de raisonnement est d'ailleurs le même. Prenons la décomposition en sommes. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ les fonctions qui définissent l'espèce des points singuliers. Formons les fonctions $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n, \ldots$ qui leur correspondent. Aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ correspondent pour y des valeurs $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$. Ces valeurs se partagent en deux groupes : celles dont le module est plus grand qu'un nombre donné ρ, d'ailleurs quelconque. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ ce premier groupe; il forme en général et au plus une suite simplement infinie dont le point infini est le point limite; soient alors $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$ les fonctions $\mathfrak{P}$ correspondantes; les courbes singulières qui correspondent aux cercles singuliers n'empiètent pas les unes sur les autres. On pourra former une fonction $F(y)$ ayant les points singuliers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ d'espèce $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$.

Prenons le deuxième groupe : soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les valeurs de ce groupe; elles forment une suite simplement infinie ayant pour limite zéro. Soient $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ les fonctions $\mathfrak{P}$ correspondant à ces points. On pourra former une fonction $F_1(y)$ ayant les points $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ comme points d'espèce $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$.

Il est clair que, si dans $F(y) + F_1(y)$ on remplace y par $e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}$, on aura une des fonctions demandées.

On obtiendra toutes les autres en ajoutant à celles-ci des fonctions holomorphes de z ayant pour période ω.

Il est bon de faire remarquer que, dans le cas de la décomposition en produits, on peut former les fonctions en y, de façon qu'elles ne s'annulent pas en dehors des courbes singulières, et, par conséquent, la fonction en z ne s'annule pas en dehors des cercles singuliers.

TROISIÈME PARTIE.

FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

1. *Préliminaires.* — Nous formerons d'abord des fonctions intermédiaires, qui jouent dans cette théorie un rôle analogue à celui que jouent les fonctions θ dans la théorie des fonctions doublement périodiques méromorphes. Ces fonctions intermédiaires n'ont qu'un seul point singulier dans chaque parallélogramme élémentaire; en les combinant, on arrive aux fonctions doublement périodiques. Nous appellerons ω et ω' les périodes; nous supposerons que, dans le rapport $\frac{\omega' i}{\omega}$, la partie réelle soit négative. Enfin nous examinerons successivement le cas de la décomposition en sommes et le cas de la décomposition en produits.

2. Décomposition en sommes. — *Formation d'une fonction intermédiaire ayant pour points singuliers d'espèce donnée tous les sommets des parallélogrammes des périodes.* — Soit $P\left(\frac{1}{z}\right)$ la fonction caractéristique du point singulier; cette fonction est représentée, dans la partie du plan où elle est holomorphe, par la série

$$P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots.$$

On peut alors former une fonction uniforme ayant pour période ω et pour points singuliers tous les sommets des parallélogrammes formés avec les périodes, en prenant l'origine comme sommet. Soit $F(z)$ l'une de ces fonctions; la différence $F(z+\omega') - F(z)$ est holomorphe : elle a pour période ω. On aura alors

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & F(z+\omega') - F(z) = \varphi(z), \\ & \varphi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_n e^{\frac{2 n i \pi z}{\omega}}. \end{aligned} \right.$$

Nous allons simplifier la relation (1) en cherchant à former une fonction holomorphe qui satisfasse à la même relation

$$(2) \qquad G(z+\omega')-G(z)=\varphi(z);$$

nous assujettirons la fonction cherchée à avoir pour période ω. Posons

$$G(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{2ni\pi z}{\omega}};$$

en remplaçant z par $z+\omega'$,

$$G(z+\omega')=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{2ni\pi\omega'}{\omega}} e^{\frac{2ni\pi z}{\omega}},$$

d'où

$$G(z+\omega')-G(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n\left(e^{\frac{2ni\pi\omega'}{\omega}}-1\right) e^{\frac{2ni\pi z}{\omega}}.$$

Dans le développement de cette différence, il n'y a pas de termes indépendants de l'exponentielle. Le problème ne sera donc possible que si le coefficient B_0 est nul. Laissons de côté ce coefficient; pour identifier, il faudra poser

$$C_n\left(e^{\frac{2ni\pi\omega'}{\omega}}-1\right)=B_n.$$

Ces équations permettent de calculer les coefficients C; il reste à montrer que la série formée avec ces coefficients est convergente.

Soient q le point dont l'affixe est $e^{\frac{2i\pi\omega'}{\omega}}$, ρ le module de cette quantité; on a $\rho<1$. Marquons les points dont l'affixe est q^n, n prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Ces points se trouvent sur des cercles dont le rayon est ρ^n.

Cela posé, la distance du point q^n au point 1 est le module de

$$e^{\frac{2ni\pi\omega'}{\omega}}-1.$$

Cette longueur ne tend jamais vers zéro, car les points q^n ne sont jamais entre les deux cercles dont les rayons sont ρ et $\frac{1}{\rho}$, cercles qui comprennent le point 1. On peut donc trouver une quantité δ telle que l'on ait

$$\operatorname{mod}\left(e^{\frac{2ni\pi\omega'}{\omega}} - 1\right) > \delta$$

et, par suite,

$$\operatorname{mod} C_n < \operatorname{mod} B_n \times \frac{1}{\delta}.$$

On pourra donc trouver une fonction holomorphe $G(z)$ ayant pour période ω et telle que l'on ait

$$(3) \qquad G(z+\omega') - G(z) = \varphi(z) - B_0.$$

Formons maintenant la fonction $\Pi(z) = F(z) - G(z)$. En vertu des relations (1) et (3), elle satisfait aux deux relations

$$(4) \qquad \begin{cases} \Pi(z+\omega) = \Pi(z), \\ \Pi(z+\omega') = \Pi(z) + B_0. \end{cases}$$

La fonction $F(z)$, qui nous a conduit à cette formule, jouit d'une certaine indétermination; il y a une infinité de fonctions ayant pour période ω et pour points singuliers d'espèce $P\left(\frac{1}{z}\right)$ les sommets du parallélogramme $\omega\omega'$. On aurait pu faire le calcul en partant d'une autre fonction; on arriverait à une fonction $\Pi_1(z)$, satisfaisant à des relations de la forme (4)

$$(4') \qquad \begin{cases} \Pi_1(z+\omega) = \Pi_1(z), \\ \Pi_1(z+\omega') = \Pi_1(z) + \beta_0. \end{cases}$$

La différence $\Pi_1(z) - \Pi(z) = H(z)$ est holomorphe, car $\Pi(z)$ et $\Pi_1(z)$ ont les mêmes points singuliers de même espèce. On aura alors

$$\begin{gathered} H(z+\omega) = H(z), \\ H(z+\omega') = H(z) + \beta_0 - B_0. \end{gathered}$$

Ces relations exigent que β_0 soit égal à B_0 et que $H(z)$ soit une constante. Ainsi ce nombre B_0, qui s'introduit dans nos calculs, ne dépend que de l'espèce du point singulier et des périodes. Toutes les fonctions $\Pi(z)$ ne diffèrent que par une constante.

La fonction $\Pi(z-\alpha)$ satisfait aux mêmes relations que la fonction $\Pi(z)$. Il résulte de là qu'il est impossible de former une fonction doublement périodique n'ayant qu'un seul point singulier dans chaque parallélogramme, à moins que $B_0 = 0$.

3. Développement de la fonction $\Pi(z)$. — Pour former la fonction $\Pi(z)$, nous allons employer une méthode qui a été donnée par M. Appell (*Comptes rendus*, 3 avril 1882).

Prenons la fonction $\zeta(z)$ de M. Hermite. Elle satisfait aux deux relations

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z),$$
$$\zeta(z+\omega') = -\frac{2i\pi}{\omega} + \zeta(z).$$

La fonction $\Pi_1(z) = \Pi(z) + \frac{\omega}{2i\pi} B_0\, \zeta(z)$ admet comme période ω, ω'; elle a pour points singuliers d'espèce $P\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\omega}{2i\pi} B_0 \frac{1}{z}$ tous les sommets du parallélogramme ω, ω'. Traçons le cercle singulier du point $z = 0$ et un parallélogramme z_0, $z_0 + \omega$, $z_0 + \omega'$, $z_0 + \omega + \omega'$ qui ne coupe pas le cercle singulier. Soit t un point pris dans ce parallélogramme en dehors du cercle singulier. Entourons ce point d'un petit cercle (t).

Si l'on considère l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int \Pi_1(z)\, \zeta(z-t)\, dt,$$

l'intégrale prise suivant le parallélogramme est égale à la somme des intégrales prises le long des cercles (o) et (t).

L'intégrale prise le long du parallélogramme est une constante H indépendante de t.

La valeur de l'intégrale prise suivant le cercle (t) est égale à $\Pi_1(t)$. Enfin, pour les valeurs de z situées dans le voisinage du cercle o, la fonction $\Pi_1(z)$ se développe en série de Laurent; la partie qui contient les puissances négatives de z est

$$\left(A_1 + \frac{\omega}{2i\pi} B_0\right)\frac{1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \cdots.$$

$\zeta(z-t)$ se développe en série contenant les puissances positives de z, série convergente pour toutes les valeurs de z dont le module est moindre que le plus petit des modules de $t + m\omega + n\omega'$ et, par conséquent, convergente sur le cercle o :

$$\zeta(z-t) = -\zeta(t) + \frac{z}{1}\zeta'(t) - \frac{z^2}{1.2}\zeta''(t) + \ldots.$$

L'intégrale prise le long du cercle est

$$-\left(A_1 + \frac{\omega}{2i\pi}B_0\right)\zeta(t) + A_2\zeta'(t) - \frac{A_3}{1.2}\zeta''(t) + \ldots.$$

On aura donc

$$\Pi_1(t) = H + \left(A_1 + \frac{\omega}{2i\pi}B_0\right)\zeta(t) - A_2\zeta'(t) + \ldots.$$

La fonction $\Pi_1(t)$ étant doublement périodique, on doit avoir

$$A_1 + \frac{\omega}{2i\pi}B_0 = 0, \quad B_0 = -\frac{2i\pi}{\omega}A_1.$$

On voit que B_0 est proportionnel au résidu du point singulier. En tenant compte de cette relation et en supprimant la constante H, on peut définir la fonction $\Pi(z)$ par la série

$$\Pi(z) = A_1\zeta(z) - A_2\zeta'(z) + \ldots + \frac{(-1)^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}A_p\,\zeta_{p-1}(z) + \ldots.$$

Il résulte de notre analyse qu'il y aura fonction uniforme de z dans tout le plan qui coïncide avec cette série. Cela est évident dans le cas où le point singulier est de première classe, car alors le cercle o est aussi petit que l'on veut : le point t peut se rapprocher indéfiniment du point $z = 0$.

4. Formation des fonctions doublement périodiques. — On peut essayer maintenant de former une fonction doublement périodique ayant les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pour points singuliers d'espèce $P_1, P_2, \ldots, P_n$. On suppose toujours que les cercles singuliers n'empiètent pas les uns sur les autres. Soient $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ les fonctions Π qui correspondent aux fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les résidus de ces fonctions. Posons

$$F(z) = \Pi_1(z-\alpha_1) + \Pi_2(z-\alpha_2) + \ldots + \Pi_n(z-\alpha_n).$$

Cette fonction $F(z)$ satisfait aux deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} F(z+\omega) &= F(z), \\ F(z+\omega') &= F(z) - \frac{2i\pi}{\omega}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n). \end{aligned}$$

Si la somme des résidus est nulle, la fonction $F(z)$ est doublement périodique. S'il n'en est pas ainsi, il est impossible de former une fonction doublement périodique dans ces conditions. En effet, s'il y en avait une, la différence $F_1(z) - F(z)$ entre cette fonction et la fonction $F(z)$ serait holomorphe. Soit $G(z)$ cette différence; on aurait alors

$$\begin{aligned} G(z+\omega) &= G(z), \\ G(z+\omega') &= \frac{2i\pi}{\omega}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) + G(z), \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Pour qu'on puisse former une fonction doublement périodique, ayant des points singuliers donnés, il faut et il suffit que la somme des résidus de ces points singuliers soit nulle.

Si cette condition est satisfaite, on obtiendra toutes les solutions en ajoutant une constante à $F(z)$.

Enfin, si l'on remplace les fonctions Π par leur développement, on pourra mettre en fonctions sous la forme

$$H + \sum_1^n A_{1,m}\,\zeta(z-\alpha_m) - \sum_1^n A_{2,m}\,\zeta'(z-\alpha_m) + \frac{1}{1.2}\sum_1^n A_{3,m}\,\zeta''(z-\alpha_m) + \ldots.$$

Remarquons que nous n'avons fait aucune hypothèse sur l'espèce des points singuliers; ces formules renferment donc l'expression la plus générale des fonctions doublement périodiques.

5. Développement en produits. — *Formation des fonctions intermédiaires.* — Soit $z^m p\left(\frac{1}{z}\right)$ la fonction caractéristique du point singulier. Traçons le parallélogramme des périodes, décrivons de chaque sommet les cercles singuliers, qui, comme toujours, ne doivent pas empiéter les uns sur les autres. On peut former une fonction uniforme $f(z)$ ayant

pour période ω, ayant tous ces points singuliers d'espèce $z^m p\left(\frac{1}{z}\right)$ et enfin ne s'annulant pas en dehors des cercles singuliers.

Cela posé, le quotient $\frac{f(z+\omega')}{f(z)}$ est holomorphe, n'a pas de zéros dans toute l'étendue du plan et a pour période ω. On peut poser

$$(1)\qquad \begin{cases} f(z+\omega) = f(z), \\ f(z+\omega') = f(z) \times e^{\frac{2ni\pi z}{\omega} + g(z)}, \end{cases}$$

n étant un entier positif ou négatif; $g(z)$ une fonction holomorphe qui a pour période ω. On peut développer $g(z)$ suivant les puissances positives et négatives de l'exponentielle $e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}$. Soit $\frac{2i\pi}{\omega}a$ le terme indépendant de la variable. On sait qu'on peut trouver une fonction holomorphe $h(z)$ telle que l'on ait

$$(2)\qquad \begin{cases} h(z+\omega) = h(z), \\ h(z+\omega') = h(z) + g(z) - \frac{2i\pi}{\omega}a. \end{cases}$$

L'exponentielle $e^{h(z)}$ a pour période ω et se multiplie par $e^{g(z)-\frac{2i\pi}{\omega}a}$ quand on y remplace z par $z+\omega'$. Formons la fonction

$$\Pi(z) = \frac{f(z)}{e^{h(z)}}.$$

Cette fonction, qui a tous les sommets du parallélogramme comme points singuliers d'espèce $z^m p\left(\frac{1}{z}\right)$, ne s'annule pas en dehors des cercles singuliers. Enfin elle satisfait aux relations

$$(3)\qquad \begin{cases} \Pi(z+\omega) = \Pi(z), \\ \Pi(z+\omega') = \Pi(z) \times e^{\frac{2i\pi}{\omega}(nz+a)}. \end{cases}$$

La fonction f, qui est le point de départ de notre calcul, n'est pas complètement déterminée; on pourrait partir d'une autre fonction f_1, on arriverait à une fonction analogue à $\Pi(z)$, jouissant de propriétés exprimées par des équations de la forme (3). Reste à voir si n et a varient. Établissons d'abord un lemme préliminaire.

Pour qu'une fonction holomorphe $\varphi(z)$, n'ayant pas de zéros, puisse satisfaire aux relations

$$(4)\qquad \begin{cases} \varphi(z+\omega) = \varphi(z), \\ \varphi(z+\omega') = \varphi(z) \times e^{\frac{2i\pi}{\omega}(nz+a)}, \end{cases}$$

il faut et il suffit que l'on ait $n = 0$ et $a = p\omega + q\omega'$. p et q sont des entiers positifs ou négatifs.

D'abord, ces conditions sont suffisantes, car dans le cas où elles sont remplies, la fonction $e^{\frac{2i\pi qz}{\omega}}$ satisfait aux relations (4).

Elles sont maintenant nécessaires; en effet, n est nul, puisqu'il est égal à la somme des ordres de la fonction $\varphi(z)$ dans le parallélogramme ω, ω'. Cela posé, formons la fonction

$$\psi(z) = \frac{\theta_1(z-a)}{\theta_1(z)}.$$

Cette fonction satisfait aux deux relations

$$\psi(z+\omega) = \psi(z),$$
$$\psi(z+\omega') = \psi(z)\, e^{\frac{2i\pi}{\omega}a}.$$

Le quotient $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ est doublement périodique; si a n'est pas l'un des sommets du parallélogramme ω, ω', cette fonction est méromorphe, elle n'a qu'un seul pôle dans chaque parallélogramme, ce qui est impossible.

Supposons maintenant qu'en partant d'une fonction f_1 on arrive à une fonction $\Pi_1(z)$ satisfaisant aux deux relations

$$\Pi_1(z+\omega) = \Pi_1(z),$$
$$\Pi_1(z+\omega') = \Pi_1(z)\, e^{\frac{2i\pi}{\omega}(2n'z+a')}.$$

Le quotient $\frac{\Pi_1(z)}{\Pi(z)}$, qui est holomorphe, n'a pas de zéros. Soit $\varphi(z)$ ce quotient. Il satisfait aux deux relations

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z),$$
$$\varphi(z+\omega') = \varphi(z) \times e^{\frac{2i\pi}{\omega}[(n'-n)z+a'-a]},$$

ce qui exige que l'on ait $n = n'$ et $a' = a + p\omega + q\omega'$. $\Pi_1(z)$ sera lié à $\Pi(z)$ par la relation

$$\Pi_1(z) = C e^{\frac{2i\pi q z}{\omega}} \Pi(z).$$

Il est bien clair que toute fonction de cette forme pourra être prise comme fonction intermédiaire.

Nous allons maintenant former l'une de ces fonctions $\Pi(z)$. Toutes les autres seront formées par cela même.

6. *Développement de* $\Pi(z)$ *en série.* — Plaçons-nous d'abord dans le cas où l'ordre des points singuliers est nul. La fonction uniforme qui définit l'espèce du point singulier est de la forme $p\left(\frac{1}{z}\right)$. Elle peut être représentée en dehors du cercle singulier C par la série

$$p\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots.$$

La fonction $\dfrac{p'\left(\frac{1}{z}\right)}{p\left(\frac{1}{z}\right)}$ est uniforme dans tout le plan, holomorphe à l'extérieur de C. On peut la développer en série contenant les puissances négatives de z. Le coefficient du terme en $\frac{1}{z}$ est nul.

$$\frac{p'\left(\frac{1}{z}\right)}{p\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \cdots.$$

Il est facile d'obtenir les coefficients A en fonction des coefficients a_i; on a, par exemple, $A_2 = - a_1, \ldots$.

Formons la fonction $\Pi(z)$ de la décomposition en sommes, qui correspond au point singulier d'espèce $\dfrac{p'\left(\frac{1}{z}\right)}{p\left(\frac{1}{z}\right)}$. Cette fonction est ici doublement périodique. On a

$$\Pi(z) = - A_2 \zeta'(z) + \frac{A_3}{1.2} \zeta''(z) + \ldots + \frac{(-1)^{p-1} A_p}{1.2\ldots(p-1)} \zeta_{p-1}(z) + \cdots.$$

L'intégrale $\int_{z_0}^{z} \Pi(z)\,dz$ est holomorphe dans la partie du plan extérieure aux cercles C. Elle est égale, à une constante près, à

$$-A_2\zeta(z) + \frac{A_3}{1.2}\zeta'(z) + \ldots + \frac{(-1)^{p-1}A_p}{1.2\ldots(p-1)}\zeta_{p-2}(z) + \ldots.$$

Cette constante dépend de la valeur initiale z_0 et du chemin qu'a suivi la variable z.

Cette série est forcément convergente pour les valeurs de z extérieures aux cercles C; mais il peut se faire qu'elle ne représente pas une fonction uniforme dans tout le plan.

Quoi qu'il en soit, il résulte de notre théorie générale que l'exponentielle

$$e^{-A_2\zeta(z) + \frac{A_3}{1.2}\zeta'(z) + \ldots + \frac{(-1)^{p-1}A_p}{1.2\ldots(p-1)}\zeta_{p-2}(z) + \ldots},$$

qui représente une fonction de z holomorphe à l'extérieur des cercles C, est telle qu'il existe une fonction uniforme dans tout le plan qui coïncide avec elle en dehors des cercles C.

Cette fonction uniforme admet pour période ω, elle est multipliée par $e^{+\frac{2i\pi}{\omega}A_2}$ quand on y remplace z par $z+\omega'$. C'est cette fonction que nous prendrons comme fonction intermédiaire $\Pi(z)$.

On voit que, dans ce cas, l'entier n est nul et a est égal et de signe contraire au coefficient de $\frac{1}{z}$ dans $p\left(\frac{1}{z}\right)$.

Avant de passer au cas où l'ordre du point singulier est quelconque, nous ferons remarquer que les zéros de la fonction sont appelés à jouer un rôle dans cette théorie. C'est là un des avantages de la décomposition en produits sur la décomposition en sommes. Nous avons déjà remarqué que, même dans la théorie générale des points singuliers et des fonctions, la méthode de décomposition en produits donnait des renseignements sur le nombre des zéros d'une fonction dans une aire limitée. Dans la théorie des fonctions doublement périodiques, les résultats seront encore plus caractéristiques; afin d'énoncer ces résultats sous une forme générale, nous appellerons ordre de la fonction en un point l'ordre du zéro ou du point singulier. Nous prendrons, dans le cas d'un zéro, comme analogie avec ce qui précède,

$$\Pi(z) = e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \theta_1(z).$$

Cette fonction satisfait aux deux relations

$$\begin{aligned}
&\Pi(z+\omega) = \Pi(z),\\
&\Pi(z+\omega') = -\Pi(z)\, e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega'-\omega')} = \Pi(z)\, e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega)}.
\end{aligned}$$

Elle est bien de la même forme que celle que nous avons trouvée dans le cas des points singuliers; il faut supposer ici $n = -1$, $a = -\frac{\omega}{2}$.

Dans le cas où le point singulier est un pôle simple, nous prendrons pour fonction $\Pi(z)$ la fonction $e^{-\frac{\pi i z}{\omega}} \theta_1^{-1}(z)$; elle satisfait encore aux relations de la forme (3), dans lesquelles on suppose $n = 1$, $a = \frac{\omega}{2}, \dots$

Si l'on avait un zéro d'ordre m, on prendrait comme fonction $\Pi(z)$ la fonction $e^{\frac{m i \pi z}{\omega}} \theta_1^m(z)$. Elle a pour zéros d'ordre m tous les sommets du parallélogramme et satisfait aux relations des fonctions $\Pi(z)$.

Enfin, pour avoir la fonction $\Pi(z)$, qui correspond à un point singulier d'espèce $z^m p\left(\frac{1}{z}\right)$, nous ferons le produit des deux fonctions qui correspondent à z^m et à $p\left(\frac{1}{z}\right)$. Si donc on a

$$p\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots,$$

$$\frac{p'\left(\frac{1}{z}\right)}{p\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \dots.$$

Ces séries sont uniformes et convergent à l'extérieur du cercle C. On devra poser

$$\Pi(z) = e^{\frac{m i \pi z}{\omega}} \theta_1^m(z)\, e^{-A_2\zeta(z) + \frac{A_3}{1.2}\zeta'(z) + \dots + \frac{(-1)^{p-1} A_p}{1.2.(p-1)}\zeta_p(z) + \dots}.$$

Cette fonction $\Pi(z)$ satisfait aux deux relations

$$\begin{aligned}
&\Pi(z+\omega) = \Pi(z),\\
&\Pi(z+\omega') = \Pi(z) \times e^{-\frac{2 i \pi}{\omega}\left(m z + \frac{m}{2}\omega + a_1\right)}.
\end{aligned}$$

Le nombre n, que nous avions trouvé précédemment, est égal à $-m$.

Le nombre a est égal à $-\frac{m}{2}\omega - a_1$.

Ce nombre a_1, nous l'appellerons le reste du point singulier.

On voit d'ailleurs que la fonction $\Pi(z)$ a pour points singuliers d'espèce $z^m p\left(\frac{1}{z}\right)$ tous les sommets du parallélogramme ω, ω'; de plus, elle ne s'annule pas en dehors des cercles singuliers.

7. *Formation des fonctions doublement périodiques.* — La fonction $\Pi_1(z) = \Pi(z-\alpha)$ a pour points singuliers d'espèce $z^m p\left(\frac{1}{z}\right)$ tous les points $\alpha + m\omega + m'\omega'$. On voit facilement qu'elle satisfait aux deux relations

$$\Pi_1(z+\omega) = \Pi_1(z),$$
$$\Pi_1(z+\omega') = \Pi_1(z) \times e^{-\frac{2i\pi}{\omega}\left(mz - m\alpha + \frac{m\omega}{2} + a_1\right)}.$$

Cela posé, on peut se proposer une fonction doublement périodique, ayant pour points singuliers $z^{m_1}p_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right)$, $z^{m_2}p_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right)$, $\ldots$, $z^{m_n}p_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right)$, les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ du parallélogramme (ω, ω'). On suppose, comme précédemment, que les cercles singuliers correspondant à ces points n'empiètent pas les uns sur les autres. Enfin, un certain nombre des fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_n$ peuvent se réduire à l'unité lorsque les points singuliers correspondants sont des pôles ou des zéros. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les restes des points singuliers. Formons les fonctions $\Pi_1(z), \Pi_2(z), \ldots, \Pi_n(z)$, qui correspondent aux fonctions uniformes $z^{m_1}p_1\left(\frac{1}{z}\right)$, $z^{m_2}p_2\left(\frac{1}{z}\right)$, $\ldots$, $z^{m_n}p_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

Si maintenant on forme le produit

$$P(z) = \Pi_1(z-\alpha_1) \times \Pi_2(z-\alpha_2) \times \ldots \times \Pi_n(z-\alpha_n),$$

on obtient une fonction uniforme $P(z)$ qui a pour points singuliers les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ d'espèce $z^{m_1}p_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right)$, $z^{m_2}p_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right)$, $\ldots$,

$z^{m_n} p_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right)$. Elle satisfait aux deux relations

$$\begin{aligned}
&P(z+\omega) = P(z),\\
&P(z+\omega') = P(z)\times e^{-\frac{2i\pi}{\omega}\left(\sum_1^n m_r z - \sum_1^n m_r \alpha_r + \frac{\omega}{2}\sum_1^n m_r + \sum_1^n a_r\right)}.
\end{aligned}$$

S'il existe une fonction uniforme doublement périodique $F(z)$, satisfaisant aux conditions de l'énoncé, le quotient $\frac{P(z)}{F(z)} = \varphi(z)$ est holomorphe; il n'a pas de zéros dans toute l'étendue du plan. Il vérifie les deux relations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\varphi(z+\omega) = \varphi(z),\\
&\varphi(z+\omega') = \varphi(z)\times e^{-\frac{2i\pi}{\omega}\left(z\sum_1^n m_r - \sum_1^n m_r \alpha_r + \frac{\omega}{2}\sum_1^n m_r + \sum_1^n a_r\right)}.
\end{aligned}\right.$$

Réciproquement, si l'on peut trouver une fonction holomorphe $\varphi(z)$ n'ayant pas de zéros et satisfaisant aux relations (1), on obtiendra une fonction doublement périodique, en prenant le quotient $\frac{P(z)}{\varphi(z)}$.

Or, pour que l'on puisse satisfaire aux relations (1), il faut que l'on ait

$$\sum_1^n m_r = 0, \quad \sum_1^n m_r \alpha_r = \frac{\omega}{2}\sum_1^n m_r + \sum_1^n a_r + p\omega + q\omega'.$$

On arrive donc aux deux conditions suivantes qui sont nécessaires et suffisantes :

$$(2)\qquad \sum_1^n m_r = 0,$$

$$(3)\qquad \sum_1^n m_r \alpha_r = \sum_1^n a_r + p\omega + q\omega'.$$

Pour que l'on puisse former une fonction doublement périodique, ayant dans le parallélogramme des points singuliers d'espèce donnée, il faut et il suffit que :

1° *La somme des ordres, tant des zéros que des points singuliers, soit nulle;*

2° *La somme des produits de l'ordre des points singuliers ou du zéro, par l'affixe de ce point, ne diffère de la somme des restes que de multiples des périodes.*

On voit tout de suite que ces résultats sont la généralisation de deux beaux théorèmes sur les fonctions méromorphes doublement périodiques. Si en effet tous les points singuliers sont des zéros ou des pôles, le premier théorème montre que le nombre des zéros est égal au nombre des pôles. Enfin, dans ce cas, tous les restes sont nuls, de sorte que la somme des pôles ne diffère de la somme des zéros que par des multiples des périodes. La formule (3) contient donc la généralisation des théorèmes de Liouville.

Il est facile d'obtenir la forme générale de ces fonctions doublement périodiques. Si les conditions (2) et (3) sont satisfaites, les relations (1) donnent

$$\varphi(z) = C e^{\frac{2i\pi q z}{\omega}},$$

d'où

$$F(z) = K e^{-\frac{2i\pi q z}{\omega}} \Pi_1(z-\alpha_1) \times \Pi_2(z-\alpha_2) \times \ldots \times \Pi_n(z-\alpha_n).$$

On arrive ainsi à l'expression la plus générale des fonctions doublement périodiques. Il est très facile d'obtenir l'expression de ces fonctions à l'aide de $\zeta(z)$, $\zeta'(z)$, ... Il suffit de remplacer les fonctions Π par leurs valeurs.

On peut voir *a priori* que, dans toute fonction doublement périodique, la somme des ordres doit être nulle. En effet, l'intégrale

$$\int \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz,$$

prise le long du parallélogramme, est égale à la somme des ordres de la fonction $F(z)$ à l'intérieur de ce parallélogramme; d'autre part, si $F(z)$ admet pour période ω et ω', cette intégrale est nulle.

8. *Former une fonction qui augmente de quantités constantes quand on y remplace z par $z+\omega$ ou par $z+\omega'$.*

Il s'agit de déterminer une fonction $F(z)$ qui satisfasse aux relations

$$(1)\qquad \begin{cases} F(z+\omega) = F(z) + A, \\ F(z+\omega') = F(z) + B. \end{cases}$$

Il convient d'étudier ces fonctions en se plaçant au point de vue de la décomposition en sommes. Si, en effet, cette fonction a un point singulier α dans le premier parallélogramme, elle a pour points singuliers de même espèce, relativement à la décomposition en sommes, tous les points homologues de α dans les autres parallélogrammes. Nous allons chercher, si l'on peut former une fonction $F(z)$, satisfaisant aux relations (1) et ayant pour points singuliers d'espèces $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de chaque parallélogramme.

Tout d'abord on peut transformer les équations (1). Posons

$$F_1(z) = F(z) - \frac{A}{\omega} z.$$

On aura

$$(2) \qquad \begin{cases} F_1(z+\omega) = F_1(z), \\ F_1(z+\omega') = F_1(z) + B - \dfrac{A}{\omega}\omega'. \end{cases}$$

Cela posé, soient $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ les fonctions Π qui correspondent aux fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_n$, et $R_1, R_2, \ldots, R_n$ les résidus des points singuliers. Posons

$$\psi(z) = \Pi_1(z-\alpha)_1 + \Pi_2(z-\alpha_2) + \ldots + \Pi_n(z-\alpha_n).$$

Cette fonction $\psi(z)$ satisfait aux relations

$$(3) \qquad \begin{cases} \psi(z+\omega) = \psi(z), \\ \psi(z+\omega') = \psi(z) - \dfrac{2i\pi}{\omega}(R_1 + R_2 + \ldots + R_n). \end{cases}$$

Les fonctions $F_1(z)$, $\psi(z)$ ayant les mêmes points singuliers de même espèce sont telles que leur différence est holomorphe. Soit $G(z)$ cette différence, on a

$$\begin{aligned} &G(z+\omega) = G(z) \\ &G(z+\omega') = G(z) + B - \frac{A\omega'}{\omega} + \frac{2i\pi}{\omega}(R_1 + R_2 + \ldots + R_n), \end{aligned}$$

ce qui exige que l'on ait

$$(4) \qquad B\omega - A\omega' = -2i\pi(R_1 + R_2 + \ldots + R_n).$$

Il résulte d'ailleurs de la marche de notre démonstration que cette condition est suffisante. Si cette relation (4) est vérifiée, $G(z)$ se réduit à une constante. On a alors pour $F(z)$

$$(5) \qquad F(z) = \frac{A}{\omega} z + \psi(z) + H,$$

H étant une constante arbitraire.

La condition (4) et la forme générale (5) ne sont pas symétriques par rapport aux lettres A et B et aux périodes ω, ω'. Cela tient à ce que dans notre calcul on suppose que, dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, le coefficient de i soit positif. On aurait pu choisir comme périodes $-\omega'$ et ω, $-\omega'$ jouant le rôle de ω, et ω celui de ω'. Les relations (1) auraient pu s'écrire

$$(1)' \qquad \begin{cases} F(z - \omega') = F(z) - B, \\ F(z + \omega) = F(z) + A. \end{cases}$$

La condition de possibilité s'écrirait alors

$$(4)' \qquad A(-\omega') - (-B)\omega = -2i\pi(R_1 + R_2 + \ldots + R_n),$$

ce qui n'est autre chose que la relation (4).

Enfin l'on obtient, pour forme générale de la fonction $F(z)$,

$$(5)' \qquad F(z) = \frac{B}{\omega'} z + \psi_1(z) + H_1.$$

$\psi_1(z)$ est la fonction analogue à ψ formée avec les périodes $-\omega'$ et ω. Cela vient à remplacer dans les fonctions $\Pi(z)$ les fonctions θ par les fonctions ϑ. En tenant compte des relations qui existent entre ces deux groupes de fonctions, on voit aisément que la forme (5)' et la forme (5) sont les mêmes.

Enfin, la position des points singuliers ne joue aucun rôle.

9. *Fonctions doublement périodiques de deuxième espèce.* — Ce sont des fonctions qui sont multipliées par un facteur constant, quand on y remplace z par $z + \omega$, ou par $z + \omega'$. Soit $f(z)$ une telle fonction, on a

$$(1) \qquad \begin{cases} f(z + \omega) = f(z) \times A = f(z)e^a, \\ f(z + \omega') = f(z) \times B = f(z) \times e^b. \end{cases}$$

Il y a avantage à étudier les points singuliers de ces fonctions dans la décomposition en produits. En effet, si le point α du parallélogramme ω, ω' est un point singulier, tous les points homologues des autres parallélogrammes sont des points singuliers de même espèce, relativement à la décomposition en produits.

Cherchons si l'on peut former une fonction $f(z)$ satisfaisant aux relations (1) et ayant pour points singuliers d'espèces $(z-\alpha_1)^{m_1}p_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right)$, $(z-\alpha_2)^{m_2}p_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right)$, ..., $(z-\alpha_n)^{m_n}p^n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right)$ les points α_1, α_2, ..., α_n de chaque parallélogramme. Il peut y avoir parmi ces points singuliers des pôles et des zéros; les fonctions p correspondantes se réduisent à l'unité.

Tout d'abord on peut ramener le problème (1) à un autre plus simple. Posons

$$f_1(z) = f(z) \times e^{-\frac{a}{\omega}z}.$$

On aura alors

$$(2)\qquad \begin{cases} f_1(z+\omega) = f_1(z), \\ f_1(z+\omega') = f_1(z) \times e^{b-\frac{a\omega'}{\omega}}. \end{cases}$$

Cela posé, formons les fonctions Π_1, Π_2, ..., Π_n qui correspondent aux fonctions uniformes $z^{m_1}p_1\left(\frac{1}{z}\right)$, $z^{m_2}p_2\left(\frac{1}{2}\right)$, ..., $z^{m_n}p^n\left(\frac{1}{z}\right)$. Soit

$$P(z) = \Pi_1(z-\alpha_1) \times \Pi_2(z-\alpha_2) \times \ldots \times \Pi_n(z-\alpha_n).$$

On a alors les deux relations

$$P(z+\omega) = P(z),$$
$$P(z+\omega') = P(z) \times e^{-\frac{2i\pi}{\omega}\left(\sum_1^n m_r z - \sum_1^n m_r \alpha_r + \frac{\omega}{2}\sum_1^n m_r + \sum_1^n \alpha_r\right)}.$$

S'il existe une fonction $f_1(z)$, satisfaisant aux relations (2) et ayant pour points singuliers de l'espèce donnée les points α, le quotient $\frac{f(z)}{P(z)} = \varphi(z)$ sera holomorphe, n'aura pas de zéros. Enfin il vérifie les relations

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z),$$
$$\varphi(z+\omega') = \varphi(z) e^{\frac{2i\pi}{\omega}\left(\frac{b\omega - a\omega'}{2i\pi} + \sum_1^n m_r z - \sum_1^n m_r \alpha_r + \frac{\omega}{2}\sum_1^n m_r - \sum_1^n \alpha_r\right)}.$$

Ce qui exige que l'on ait

$$\Sigma m_r = 0,$$
$$\Sigma m_r \alpha_r = \Sigma a_r + \frac{b\omega - a\omega'}{2i\pi} + p\omega + q\omega'.$$

On voit tout de suite que ces conditions sont suffisantes. Remarquons que les conditions sont encore vérifiées quand on augmente a, b de multiples de $2i\pi$. Cela revient à changer les nombres entiers p et q.

On voit que $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = \mathrm{C}e^{\frac{2i\pi}{\omega}\left(q - \frac{a}{2i\pi}\right)z} \times \mathrm{P}(z).$$

10. *Étude des sommes doublement infinies* $\Sigma\Sigma\mathrm{P}\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right)$. — La marche que nous avons suivie pour arriver aux fonctions doublement périodiques diffère de celle qui nous a conduit aux fonctions simplement périodiques. Nous avons défini ces dernières fonctions à l'aide de sommes et de produits infinis. Pour les fonctions doublement périodiques, au contraire, nous avons pris pour points de départ les résultats de la théorie des fonctions simplement périodiques.

On peut arriver directement aux fonctions doublement périodiques à l'aide des sommes et des produits doublement infinis $\Sigma\Sigma\mathrm{P}\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right)$, $\prod\prod p\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right)$. C'est à ce point de vue que s'est placé M. Cayley (*Journal de Liouville*, t. X) pour arriver à la théorie des fonctions doublement périodiques méromorphes.

Étudions d'abord les sommes doublement infinies; traçons les parallélogrammes qui ont pour sommets les points $m\omega + n\omega'$; puis des sommets de ces parallélogrammes décrivons les cercles singuliers qui correspondent aux fonctions $\mathrm{P}\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right)$; soit enfin φ une courbe quelconque, qu'on fait varier de façon à l'étendre à l'infini dans tous les sens; considérons la somme

$$\sum_{\varphi} \mathrm{P}\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right),$$

dans laquelle on donne à m et à n toutes les valeurs correspondant aux points situés à l'intérieur de φ. En général, cette somme n'est pas convergente quand φ s'étend à l'infini dans tous les sens; si elle est convergente, sa somme dépend en général de la loi de variation de φ.

Prenons d'abord le cas où la série qui définit $P\left(\frac{1}{z}\right)$ ne contient pas de termes en $\frac{1}{z}$ et en $\frac{1}{z^2}$. On a alors

$$P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{A_3}{z^3} + \frac{A_4}{z^4} + \ldots = \frac{A_3}{z^3}\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\right).$$

Quelle que soit la quantité positive α, on peut trouver un nombre R assez grand pour que, sous la condition $\operatorname{mod} z > R$, le module de la parenthèse soit moindre que $1 + \alpha$. Pour ces valeurs de z, on a

$$\operatorname{mod} P\left(\frac{1}{z}\right) < (1 + \alpha) \operatorname{mod} \frac{A_3}{z^3}.$$

Cela posé, quelle que soit la valeur de z, on pourra décrire de ce point z comme centre un cercle de rayon R; pour les valeurs de m et n correspondant aux points extérieurs à ce cercle, on aura

$$\operatorname{mod} P\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right) < (1 + \alpha) \operatorname{mod} \frac{A_3}{(z - m\omega - n\omega')^3}.$$

D'un autre côté, pour les valeurs de m et n extérieures au cercle décrit de l'origine comme centre avec $\operatorname{mod} z$ comme rayon, on a

$$\frac{1}{z - m\omega - n\omega'} = -\frac{1}{m\omega + n\omega'} - \frac{z}{(m\omega + n\omega')^2} - \frac{z^2}{(m\omega + n\omega')^3} + \ldots.$$

Quel que soit le nombre positif β, on peut trouver un autre nombre positif γ, tel que, sous la condition

$$\operatorname{mod} \frac{1}{m\omega + n\omega'} < \gamma,$$

on ait

$$\operatorname{mod} \frac{1}{z - m\omega - n\omega'} < (1 + \beta) \operatorname{mod} \frac{1}{m\omega + n\omega'}$$

ou

$$\operatorname{mod} \left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right)^3 < (1 + \beta)^3 \operatorname{mod} \frac{1}{(m\omega + n\omega')^3}.$$

Quel que soit z, on pourra donc tracer un cercle de rayon R′, ayant pour centre l'origine, tel que la relation précédente soit vérifiée pour les valeurs de m et n correspondant aux points extérieurs à ce cercle.

Il résulte de là qu'on pourra trouver une courbe fermée U telle que, pour les valeurs de m et n extérieures à cette courbe, on ait

$$\operatorname{mod} P\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right) < A \operatorname{mod} \frac{1}{(m\omega + n\omega')^3}.$$

Cela posé, quand φ sera assez grand, on pourra décomposer Σ_φ en deux parties, l'une comprenant les termes à l'intérieur de U, qui sont en nombre limité : cette somme représente une fonction uniforme de z; une deuxième partie, formée avec les termes extérieurs à U : les termes de cette partie ont leurs modules plus petits que ceux de la somme à termes positifs

$$\sum_\varphi \operatorname{mod} \frac{A}{(m\omega + n\omega')^3}.$$

Cette dernière somme, dont on exclut la combinaison $m = 0$, $n = 0$, est convergente. Il en résulte que la deuxième partie de notre somme est convergente; elle converge uniformément pour les valeurs de z voisines de celles que nous considérons; elle représente, dans cette étendue, une fonction holomorphe de z.

Le point z est dans la courbe U; il peut se trouver à l'extérieur des cercles singuliers; la première partie de notre somme est holomorphe en ce point. Enfin, si le point z est à l'intérieur du cercle singulier C_{rs}, qui a pour centre $r\omega + s\omega'$, la première partie de notre somme comprend la fonction $P\left(\frac{1}{z - r\omega - s\omega'}\right)$ et une somme d'autres fonctions, toutes holomorphes au point z. Donc :

Quand φ s'étend à l'infini dans tous les sens, la somme Σ_φ a pour limite une fonction uniforme de z, ayant pour points singuliers d'espèce P tous les sommets du parallélogramme ω, ω'.

La série des modules étant convergente, il en résulte que la limite est indépendante de la forme de φ.

D'après cela, on peut montrer tout de suite que cette limite est une fonction ayant pour période ω et ω'. En effet, soit $E(z)$ cette limite.

Posons

$$E_\varphi(z) = \sum_\varphi P\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right).$$

En changeant z en $z + \omega$,

$$E_\varphi(z+\omega) = \sum_\varphi P\left[\frac{1}{z-(m-1)\omega - n\omega'}\right] = \sum_{\varphi_1} P\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right),$$

la courbe φ_1 se déduisant de la courbe φ, en diminuant toutes ses affixes de ω. Or les limites de Σ_φ, Σ_{φ_1}, ... sont les mêmes. On prouve de même qu'elle a pour période ω'. La fonction à laquelle nous arrivons ainsi ne diffère donc de la fonction $\Pi(z)$, correspondant à $P\left(\frac{1}{z}\right)$, que par une constante. Nous déterminerons plus loin la valeur de cette constante.

Passons maintenant au cas où $P\left(\frac{1}{z}\right)$ contient des termes en $\frac{1}{z}$ et $\frac{1}{z^2}$. A l'extérieur du cercle C, on a alors

$$P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \cdots = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + P_1\left(\frac{1}{z}\right).$$

La série $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ est aussi uniforme et holomorphe à l'extérieur du cercle C. On a évidemment, quel que soit φ,

$$\sum_\varphi P\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right) = A_1 \sum_\varphi \frac{1}{z - m\omega - n\omega'}$$
$$+ A_2 \sum_\varphi \frac{1}{(z - m\omega - n\omega')^2} + \sum_\varphi P_1\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right).$$

Quand φ s'étend à l'infini dans tous les sens, la troisième somme est convergente; elle représente une fonction doublement périodique, et sa limite est indépendante de la forme de la courbe φ. Il nous reste à étudier les deux premières sommes. Or, quand le module de $m\omega + n\omega'$ est suffisamment grand, on a

$$\frac{1}{z - m\omega - n\omega'} = -\frac{1}{m\omega + n\omega'} - \frac{z}{(m\omega + n\omega')^2} - \frac{z^2}{(m\omega + n\omega')^3} - \cdots.$$

En répétant le même raisonnement que précédemment, on voit alors que la somme

$$\lim \sum_{\varphi} \left[\frac{1}{z - m\omega - n\omega'} + \frac{1}{m\omega + n\omega'} + \frac{z}{(m\omega + n\omega')^2} \right],$$

dans laquelle on supprime la combinaison $m = 0$, $n = 0$, est convergente.

Elle définit une fonction méromorphe de z ayant pour pôles tous les sommets des parallélogrammes, sauf l'origine.

Enfin, quand le module de $m\omega + n\omega'$ est assez grand, on a

$$\frac{1}{(z - m\omega - n\omega')^2} = \frac{1}{(m\omega + n\omega')^2} + \frac{2z}{(m\omega + n\omega')^3} + \frac{3z^2}{(m\omega + n\omega')^4} + \cdots.$$

On en conclut alors que la somme

$$\sum_{\varphi} \left[\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'} \right)^2 - \left(\frac{1}{m\omega + n\omega'} \right)^2 \right]$$

a une limite quand φ s'étend à l'infini dans tous les sens, limite qui est d'ailleurs indépendante de la forme de la courbe φ. Elle représente une fonction uniforme de z, ayant pour pôles doubles tous les sommets des parallélogrammes, sauf l'origine, car on doit supprimer dans cette somme la combinaison $m = 0$, $n = 0$.

Cela posé, on aura

$$\begin{aligned} &\sum_{\varphi} P\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'} \right) \\ &\quad = P\left(\frac{1}{z} \right) + \sum_{\varphi} \left[P\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'} \right) + \frac{A_1}{m\omega + n\omega'} + \frac{A_1 z - A_2}{(m\omega + n\omega')^2} \right] \\ &\qquad - A_1 \sum_{\varphi} \frac{1}{m\omega + n\omega'} - (A_1 z - A_2) \sum_{\varphi} \frac{1}{(m\omega + n\omega')^2}. \end{aligned}$$

Dans les sommes qui sont dans le deuxième membre, on exclut la combinaison $m = 0$, $n = 0$. La première de ces sommes tend vers une limite, qui est indépendante de la forme de φ. Elle représente une fonction uniforme de z, ayant pour points singuliers d'espèce P tous les sommets des parallélogrammes, sauf l'origine. Il n'en est pas de même des deux autres sommes. En général, elles n'ont pas de limite; il en est de même, par conséquent, du premier membre; pour que cette dernière somme représente à la limite une fonction uniforme de z, il faut et il suffit que les deux sommes

$$\sum_{\varphi} \frac{1}{m\omega + n\omega'}, \tag{1}$$

$$\sum_{\varphi} \left(\frac{1}{m\omega + n\omega'}\right)^2 \tag{2}$$

soient convergentes.

Cela aura lieu, en particulier, si l'on prend pour courbe φ des courbes ayant pour centre l'origine.

L'étude de ces deux sommes a été faite par M. Cayley. Soient, en général, φ et φ_1 deux courbes pour lesquelles ces sommes sont convergentes. Soient α, α_1 et β, β_1 les limites de ces sommes,

$$\alpha = \lim \sum_{\varphi} \frac{1}{m\omega + n\omega'}, \quad \beta = \lim \sum_{\varphi} \frac{1}{(m\omega + n\omega')^2};$$

$$\alpha_1 = \lim \sum_{\varphi_1} \frac{1}{m\omega + n\omega'}, \quad \beta_1 = \lim \sum_{\varphi_1} \frac{1}{(m\omega + n\omega')^2}.$$

En général, α et α_1 sont différents. Il en est de même de β et de β_1. On a

$$\alpha - \alpha_1 = \lim \sum_{(\varphi - \varphi_1)} \frac{1}{m\omega + n\omega'}, \quad \beta - \beta_1 = \lim \sum_{\varphi_1} \frac{1}{(m\omega + n\omega')^2}.$$

Les sommations étant étendues aux valeurs de m et n comprises entre les deux courbes, on prendra avec le signe $+$ les termes extérieurs à φ_1 et intérieurs à φ, et avec le signe $-$ les termes intérieurs à φ_1 et extérieurs à φ. On sait qu'à la limite on peut remplacer ces sommes par les limites d'intégrales doubles :

$$\iint_{(\varphi - \varphi_1)} \frac{dm\,dn}{m\omega + n\omega'}, \quad \iint_{\varphi - \varphi_1} \frac{dm\,dn}{(m\omega + n\omega')^2},$$

ce qui permettra de calculer ces différences $\alpha - \alpha_1$, $\beta - \beta_1$ dans quelques cas particuliers.

On voit, d'après cela, que, en choisissant convenablement φ, $\sum_{\varphi} \mathrm{P}\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right)$ représente une fonction uniforme; si $\mathrm{F}(z)$ est l'une de ces fonctions, toutes les autres, qui correspondent à des courbes φ_1 différentes, se mettent sous la forme

$$F(z) + \lambda A_1 + \mu(A_1 z - A_2),$$

λ étant égal à $\alpha - \alpha_1$ et μ à $\beta - \beta_1$.

Enfin, on peut ramener l'étude de $\sum_\varphi P\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right)$ à celle d'une intégrale définie. Si l'on forme, en effet, la fonction $\Pi(z)$, correspondant à $P\left(\frac{1}{z}\right)$, l'intégrale

$$(1) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_\varphi \frac{\Pi(z)\,dz}{z - t}$$

est égale, pour les valeurs de t comprises à l'intérieur de φ, à

$$\Pi(t) - \sum_\varphi P\left(\frac{1}{t - m\omega - n\omega'}\right).$$

Notre somme aura une limite toutes les fois qu'il en sera de même de l'intégrale. On voit, en particulier, que, quelle que soit la courbe φ, si la fonction $P\left(\frac{1}{z}\right)$ n'a pas de termes en $\frac{1}{z}$, en $\frac{1}{z^2}$, l'intégrale a pour limite une constante.

Il suffira donc que les deux intégrales

$$(2) \qquad \int_\varphi \frac{\zeta(z)}{z - t}\,dz,$$

$$(3) \qquad \int_\varphi \frac{\zeta'(z)}{z - t}\,dz$$

aient une limite. Cela aura lieu, en particulier, si l'on prend comme courbe φ le parallélogramme dont les côtés sont parallèles à ω, ω'; ces parallèles étant menées par les points $\pm\left(\frac{\omega'}{2} + m\omega'\right)$, $\pm\left(\frac{\omega}{2} + n\omega\right)$. On aura alors

$$\sum_\varphi = \sum_{-m}^{+m}\sum_{-n}^{+n} P\left(\frac{1}{z - r\omega - s\omega'}\right).$$

Nous ferons croître φ ainsi; m restant fixe, on augmentera n indéfiniment. Puis ensuite on fera croître m.

Dans ce cas, les intégrales (2) et (3) ont des limites indépendantes de t. Il en est de même de l'intégrale (1). En appelant $-$ H cette limite, on aura

$$\Pi(z) = \mathrm{H} + \lim \sum_{-m}^{+m} \sum_{-n}^{+n} \mathrm{P}\left(\frac{1}{z - r\omega - s\omega'}\right).$$

On fait d'abord croître n indéfiniment, puis ensuite m.

La forme générale des fonctions qu'on peut obtenir à l'aide de ces sommes est

$$\psi(z) = \mathrm{A} + \mathrm{B}z + \Pi(z).$$

Quand on y remplace z par $z+\omega$ ou par $z+\omega'$, la fonction augmente de quantités constantes. On a en effet

$$\begin{aligned} \psi(z+\omega) &= \psi(z) + \mathrm{B}\omega, \\ \psi(z+\omega') &= \psi(z) + \mathrm{B}\omega' - \mathrm{A}_1 \frac{2i\pi}{\omega}. \end{aligned}$$

Soit φ la courbe correspondante à ψ; on sait que $\psi(z+\omega)$ est la limite de la somme correspondant à une courbe φ_1, obtenue en diminuant les affixes de ω. Or il résulte de ce qui a été dit précédemment que si l'on a

$$\lambda = \lim \sum_{(\varphi-\varphi_1)} \frac{1}{m\omega + n\omega'}, \quad \mu = \lim \sum_{(\varphi-\varphi_1)} \frac{1}{(m\omega+n\omega')^2};$$

on aura

$$\psi(z+\omega) = \psi(z) + \lambda \mathrm{A}_1 + \mu(\mathrm{A}_1 z - \mathrm{A}_2);$$

d'où l'on conclut

$$\mu = 0, \quad \lambda = \frac{\mathrm{B}\omega}{\mathrm{A}_1}.$$

Enfin, si l'on appelle φ_2 la courbe déduite de φ en diminuant ses affixes de ω', et λ_1, μ_1 les quantités analogues à λ et μ, on aura

$$\mu_1 = 0, \quad \lambda_1 = -\frac{2i\pi}{\omega} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}_1}\omega'.$$

Si la courbe φ est celle qui donne la fonction $\Pi(z)$, on aura

$$\lambda_1 = -\frac{2i\pi}{\omega}.$$

11. *Étude des produits doublement infinis*

$$\Pi\Pi\left[\left(1-\frac{z}{m\omega+n\omega'}\right)^q p\left(\frac{1}{z-m\omega-n\omega'}\right)\right].$$

— Prenons d'abord le cas où l'ordre du point singulier est nul. Traçons les parallélogrammes qui ont pour sommets $m\omega+n\omega'$; de ces points comme centres décrivons les cercles singuliers. La fonction $p\left(\frac{1}{z}\right)$ qui définit l'espèce du point singulier, est égale, à l'extérieur du cercle C, à la série

$$p\left(\frac{1}{z}\right)=1+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots+\frac{a_n}{z^n}+\ldots.$$

On aura alors

$$p\left(\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{a_1}{z}\right)=1-\frac{a_1^2-a_2}{z^2}+\frac{a_3-a_2a_1}{z^3}+\ldots,$$

$$p\left(\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{a_1}{z}\right)\left(1-\frac{a_2-a_1^2}{z^2}\right)=1+\frac{b_3}{z^3}+\frac{b_4}{z^4}+\ldots=p_1\left(\frac{1}{z}\right).$$

La série $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ est convergente à l'extérieur du cercle C; elle définit une fonction uniforme dans tout le plan. Elle ne contient pas de termes en $\frac{1}{z}$ et en $\frac{1}{z^2}$; il en résulte que la somme

$$\sum_\varphi\left[p_1\left(\frac{1}{z-m\omega-n\omega'}\right)-1\right]$$

est convergente, quel que soit φ, et il en est de même de la somme des modules; on sait alors que le produit

$$\Pi_\varphi p_1\left(\frac{1}{z-m\omega-n\omega'}\right)$$

est convergent, qu'il en est de même du produit des modules; par suite, la limite de ce produit est indépendante de la forme de φ; enfin ce produit représente une fonction uniforme de z, ayant pour périodes ω et ω'.

Or on a évidemment

$$\prod_{\varphi} p\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right) = \frac{\prod_{\varphi} p_1\left(\frac{1}{z - m\omega - n\omega'}\right)}{\prod_{\varphi}\left(1 - \frac{a_1}{z - m\omega - n\omega'}\right)\prod_{\varphi}\left[1 - \frac{a_2 - a_1^2}{(z - m\omega - n\omega')^2}\right]}.$$

Il reste à étudier les deux produits qui sont au dénominateur.

Or, quel que soit z, on peut tracer une courbe U telle que, pour les valeurs de m et n extérieures à cette courbe, on ait

$$\begin{aligned} &\mathrm{L}\left(1 - \frac{a_1}{z - m\omega - n\omega'}\right) \\ &= -\frac{a_1}{z - m\omega - n\omega'} - \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{(z - m\omega - n\omega')^2} - \frac{1}{3}\frac{a_1^3}{(z - m\omega - n\omega')^3} - \ldots \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{L}\left[1 - \frac{a_2 - a_1^2}{(z - m\omega - n\omega')^2}\right] = -\frac{a_2 - a_1^2}{(z - m\omega - n\omega')^2} - \frac{1}{2}\frac{(a_2 - a_1^2)^2}{(z - m\omega - n\omega')^4} - \ldots.$$

On pourra prendre une courbe U′ fermée, assez grande pour que, le point (m, n) étant extérieur à cette courbe, on ait

$$\frac{1}{z - m\omega - n\omega'} = -\frac{1}{m\omega + n\omega'} + \frac{z}{(m\omega + n\omega')^2} - \frac{z^2}{(m\omega + n\omega')^3} + \ldots$$

et

$$\frac{1}{(z - m\omega - n\omega')^2} = \frac{1}{(m\omega + n\omega')^2} + \frac{2z}{(m\omega + n\omega')^3} + \frac{3z^2}{(m\omega + n\omega')^4} + \ldots;$$

on pourra alors trouver une courbe R fermée, assez grande pour que l'on ait, pour tous les points extérieurs à R,

$$\operatorname{mod}\left[\mathrm{L}\left(1 - \frac{a_1}{z - m\omega - n\omega'}\right) - \frac{a_1}{m\omega + n\omega'} + \frac{(a_1 z + \frac{1}{2}a_1^2)}{(m\omega + n\omega')^2}\right] < \operatorname{mod}\frac{\mathrm{A}}{(m\omega + n\omega')^3}$$

(A étant une constante convenablement choisie et le logarithme étant celui qui est défini par le développement en série donné plus haut), et que l'on ait en même temps

$$\operatorname{mod}\left\{\mathrm{L}\left[1 - \frac{a_2 - a_1^2}{(z - m\omega - n\omega')^2}\right] + \frac{a_2 - a_1^2}{(m\omega + n\omega')^2}\right\} < \operatorname{mod}\frac{\mathrm{B}}{(m\omega + n\omega')^3}.$$

Il résulte de là que les deux produits

$$\prod_{\varphi}\left[\left(1-\frac{a_1}{z-m\omega-n\omega'}\right)\times e^{-\frac{a_1}{m\omega+n\omega'}}\times e^{\frac{a_1 z+\frac{1}{2}a_1^2}{(m\omega+n\omega')^2}}\right],$$

$$\prod_{\varphi}\left\{1-\left[\frac{a_2-a_1^2}{(z-m\omega-n\omega')^2}\right]\times e^{+\frac{a_2-a_1^2}{(m\omega+n\omega')^2}}\right\},$$

dans lesquels on exclut la combinaison $m=0$, $n=0$, représentent des fonctions uniformes de z.

Cela posé, le produit $\prod_{\varphi} p\left(\frac{1}{z-m\omega-n\omega'}\right)$ peut s'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\prod_{\varphi} p\left(\frac{1}{z-m\omega-n\omega'}\right)\\ &\quad=p\left(\frac{1}{z}\right)\times\prod_{\varphi}\left[p\left(\frac{1}{z-m\omega-n\omega'}\right)\times e^{+\frac{a_1}{m\omega+n\omega'}}\times e^{-\frac{a_1 z-\frac{1}{2}a_1^2+a_2}{(m\omega+n\omega')^2}}\right]\\ &\qquad\times\prod_{\varphi} e^{-\frac{a_1}{m\omega+n\omega'}}\times\prod_{\varphi} e^{+\frac{a_1 z-\frac{1}{2}a_1^2+a_2}{(m\omega+n\omega')^2}}.\end{aligned}\right.$$

Dans les produits qui sont au deuxième membre, on doit supprimer la combinaison $m=0$, $n=0$.

Le premier de ces produits représente, d'après ce qui a été dit, une fonction uniforme de z dans tout le plan. En effet, on peut décomposer ce produit en deux autres, l'un correspondant aux facteurs extérieurs à R; à la limite, ce produit partiel représente une fonction holomorphe dans le voisinage du point z que nous avons choisi; cette fonction n'est pas nulle au point considéré; cela tient à ce que, dans cette étendue, son logarithme est holomorphe. On aura un deuxième produit partiel, correspondant aux facteurs situés à l'intérieur de R. Ce produit représente bien une fonction uniforme; si le point z est en dehors des cercles singuliers, ce produit est holomorphe et différent de 0. Si le point z est à l'intérieur d'un cercle singulier, la fonction aura un point singulier d'espèce p.

Au point de vue de la convergence du produit, il n'est pas nécessaire de supposer que la fonction $p\left(\frac{1}{z}\right)$ ne s'annule pas en dehors du cercle singulier.

Pour que notre produit soit convergent, il faut que les deux derniers produits qui sont dans le deuxième membre soient convergents. Il faut et il suffit que les deux sommes

$$\sum_{\varphi} \frac{1}{m\omega + n\omega'}, \quad \sum_{\varphi} \frac{1}{(m\omega + n\omega')^2}$$

soient convergentes.

Soit $F(z)$ la valeur du produit correspondant à une courbe φ; cherchons la valeur de ce produit correspondant à une courbe φ_1, pour laquelle les deux séries ci-dessus sont convergentes. En posant, comme précédemment,

$$\lambda = \lim \sum_{\varphi - \varphi_1} \frac{1}{m\omega + n\omega'}, \quad \mu = \lim \sum_{\varphi - \varphi_1} \frac{1}{(m\omega + n\omega')^2},$$

on obtient, en vertu de l'équation (1),

$$F(z) \times e^{\lambda a_1 - \mu\left(a_1 z - \frac{1}{2} a_1^2 + a_2\right)}.$$

Qu'arrive-t-il si, dans ces fonctions, on remplace z par $z + \omega$ ou par $z + \omega'$? Prenons d'abord un nombre limité de facteurs correspondant à une courbe φ. Si, dans ce produit, on remplace z par $z + \omega$, cela revient à prendre le produit des facteurs précédents, correspondant à une courbe φ_1, déduite de φ en diminuant les affixes de ω. Passons maintenant à la limite. La quantité que nous avons appelée μ dans le cas où φ et φ_1 sont quelconques est nulle ici. En appelant $f(z)$ la fonction que nous considérons, elle satisfera aux relations

$$f(z + \omega) = f(z)\, e^{\lambda a_1},$$
$$f(z + \omega') = f(z)\, e^{\lambda_1 a_1},$$

dans lesquelles on fait

$$\lambda = \lim \sum_{\varphi - \varphi_1} \frac{1}{m\omega + n\omega'}, \quad \lambda_1 = \lim \sum_{\varphi - \varphi_2} \frac{1}{m\omega + n\omega'},$$

φ_2 étant la courbe déduite de φ en diminuant ses affixes de ω'.

On obtient donc ainsi des fonctions doublement périodiques de deuxième espèce.

Prenons, en particulier, comme courbe φ le parallélogramme dont les côtés, parallèles aux directions ω, ω', passent par les points $\pm\left(\frac{\omega'}{2}+m\omega'\right)$ et $\pm\left(\frac{\omega}{2}+n\omega\right)$. On sait que, dans ce cas, $\lambda=0$ et $\lambda_1=-\frac{2i\pi}{\omega}$. La fonction obtenue jouit des deux propriétés suivantes :

$$f(z+\omega)=f(z),$$
$$f(z+\omega')=f(z)\,e^{-\frac{2i\pi}{\omega}a_1}.$$

C'est donc, à un facteur constant près, la fonction que nous avons appelée $\Pi(z)$.

On a donc

$$\Pi(z)=\lim \mathrm{H}\times\prod_{-n}^{+n}\prod_{-m}^{+m}p\left(\frac{1}{z-r\omega-s\omega'}\right);$$

on fera d'abord croître n indéfiniment, puis ensuite on fera croître m.

Toutes les fonctions qu'on obtient ainsi sont de la forme

$$\mathrm{F}(z)=\Pi(z)\times e^{\mathrm{A}z+\mathrm{B}}.$$

Prenons le cas où l'ordre du point singulier n'est pas nul. Soit $z^q p\left(\frac{1}{z}\right)$ la fonction qui définit l'espèce du point singulier. Formons le produit

$$\prod_\varphi\left[p\left(\frac{1}{z-m\omega-n\omega'}\right)\left(1-\frac{z}{m\omega+n\omega'}\right)^q\right].$$

Il peut se décomposer en deux autres : d'une part,

$$\prod_\varphi p\left(\frac{1}{z-m\omega-n\omega}\right),$$

que nous venons d'étudier, et le produit

$$z^q\times\prod_\varphi\left(1-\frac{z}{m\omega+n\omega'}\right)^q. \tag{1}$$

On arrive tout de suite à former un produit uniformément convergent en prenant le produit

$$z^q \prod\left[\left(1-\frac{z}{m\omega+n\omega'}\right)^q e^{\frac{qz}{m\omega+n\omega'}+\frac{1}{2}\frac{qz^2}{(m\omega+n\omega')^2}}\right].$$

Il en résulte que, si l'on prend deux courbes φ et φ_1 pour lesquelles le produit (1) est convergent, si f et f_1 sont les limites,

$$f_1(z)=f(z)\,e^{\lambda qz+\frac{1}{2}q\mu z^2}.$$

En particulier, on obtiendra, à un facteur constant près, $\theta_1^q(z)$, en prenant comme courbe φ le parallélogramme qui passe par les points $\pm\left(\frac{\omega}{2}+n\omega\right)$, $\pm\left(\frac{\omega'}{2}+m\omega'\right)$; on fera d'abord croître m indéfiniment, puis n. On obtient ainsi, à un facteur exponentiel près, la fonction $\Pi(z)$, qui correspond au zéro z^q.

En combinant ces résultats avec ceux que nous avons obtenus précédemment, on a tout ce qu'il faut pour étudier le produit

$$(2)\qquad \prod_\varphi\left[p\left(\frac{1}{z-m\omega-n\omega'}\right)\left(1-\frac{1}{m\omega+n\omega'}\right)^q\right].$$

Ce produit sera convergent si les deux sommes

$$\sum_\varphi\frac{1}{m\omega+n\omega'},\quad \sum_\varphi\frac{1}{(m\omega+n\omega')^2}$$

sont convergentes. Les diverses valeurs que peut prendre ce produit sont représentées par la formule générale

$$F(z)=\Pi(z)\,e^{\alpha z^2+\beta z+\gamma},$$

$\Pi(z)$ étant la fonction intermédiaire qui correspond à la fonction $z^q p\left(\frac{1}{z}\right)$; α, β, γ des constantes qui dépendent de φ.

L'étude des sommes et des produits doublement infinis nous a permis de former les fonctions intermédiaires et d'établir leurs principales propriétés. Il en résulte que cette méthode suffit à elle seule pour arriver à la théorie complète des fonctions doublement périodiques. Elle permet de représenter toutes ces fonctions par des sommes ou par des produits doublement infinis. Enfin elle établit un lien entre les fonctions doublement périodiques et celles qui augmentent de quantités constantes ou celles qui sont multipliées par des facteurs constants, quand on y remplace z par $z + \omega$ ou par $z + \omega'$.