DÉSIRÉ ANDRÉ

Sur les séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 12 (1883), p. 287-300
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1883_2_12__287_0>

SUR

LES SÉRIES ORDONNÉES

SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES D'UNE VARIABLE,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Le présent Mémoire comprend trois Parties :

Dans la première, nous résolvons, sur les séries ordonnées, un problème très général;

Dans la deuxième, nous faisons l'application des résultats obtenus à des exemples variés;

Dans la troisième, nous exposons les conséquences de ces mêmes résultats relativement à l'étude, à la sommation et à la classification des séries.

I. — Solution d'un problème.

1. Soient les deux séries entières

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots,$$
$$V_0 + V_1 x + V_2 x^2 + V_3 x^3 + \ldots,$$

qui sont ordonnées par rapport aux puissances croissantes de la variable x, qui sont convergentes, et qui ont pour sommes respectives $f(x)$ et $G(x)$.

On suppose que les coefficients

$$V_0,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ \ldots$$

de la seconde sont égaux aux coefficients

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots$$

de la première, multipliés par les termes de mêmes rangs

$$v_0, \; v_1, \; v_2, \; v_3, \; \ldots$$

d'une série récurrente proprement dite connue; et l'on demande d'exprimer $G(x)$ en fonction de $f(x)$.

2. Ce problème est fort général, car, en dehors des hypothèses faites sur la convergence des séries $f(x)$ et $G(x)$, rien n'y particularise ni la série primitive $f(x)$, ni la série récurrente dont les termes servent de multiplicateurs. Nous l'avons autrefois [1], par des moyens divers et plus ou moins compliqués, résolu dans trois cas très particuliers. Depuis, nous avons trouvé un moyen unique, plus simple que nos moyens anciens et pourtant plus puissant, qui nous a permis de la résoudre dans sa pleine généralité.

C'est ce procédé nouveau, avec la solution générale qui en découle, que nous allons exposer dans cette première partie du présent travail. Mais, auparavant, nous rappellerons la forme générale du facteur v_n par lequel il faut multiplier u_n pour obtenir V_n.

3. Depuis les travaux de Lagrange sur les séries récurrentes, peut-être même depuis ceux de Moivre, cette formule générale est bien connue. Si l'on considère l'équation génératrice de la série récurrente proprement dite dont v_n est le terme général; qu'on appelle r l'une quelconque des racines de cette équation génératrice, et ρ le degré de multiplicité de cette racine; qu'on représente par $\xi_r(n)$ un certain polynôme, entier en n, du degré $\rho - 1$, correspondant à la racine r; enfin, que l'on convienne d'étendre le signe $\sum$ à toutes les racines de l'équation génératrice, on a cette égalité

$$v_n = \sum \xi_r(n) r^n.$$

4. La série récurrente considérée étant, par hypothèse, bien connue, il en est de même du polynôme $\xi_r(n)$ qui correspond à la racine r,

---

[1] Mémoires *Sur la sommation des séries*, insérés dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, années 1879, 1880, 1883.

ainsi que des autres polynômes analogues. Nous supposerons ce polynôme $\xi_r(n)$ donné sous la forme

$$P_{r,0}+P_{r,1}n+P_{r,2}n^2+\ldots+P_{r,\rho-1}n^{\rho-1},$$

c'est-à-dire sous la forme ordinaire des polynômes du degré $\rho-1$. Mais nous ne le laisserons point sous cette première forme. Nous l'écrirons de cette nouvelle manière, bien mieux appropriée à l'objet de notre recherche,

$$Q_{r,0}+Q_{r,1}n+Q_{r,2}n(n-1)+\ldots+Q_{r,\rho-1}n(n-1)(n-2)\ldots(n-\rho+2).$$

5. Le passage de la première de ces formes à la seconde est facile, les coefficients Q s'exprimant sans peine à l'aide des coefficients P. Si l'on part, en effet, de cette remarquable formule

$$z^t=\frac{\Delta^1 0^t}{1!}z+\frac{\Delta^2 0^t}{2!}z(z-1)+\ldots+\frac{\Delta^t 0^t}{t!}z(z-1)(z-2)\ldots(z-t+1),$$

que nous avons déjà employée plusieurs fois [1], on arrive, par un calcul que nous avons développé ailleurs [2], à l'égalité

$$t!\,Q_{r,t}=\Delta^t 0^t P_{r,t}+\Delta^t 0^{t+1}P_{r,t+1}+\Delta^t 0^{t+2}P_{r,t+2}+\ldots+\Delta^t 0^{\rho-1}P_{r,\rho-1},$$

laquelle nous permettra, dans chaque cas, de calculer les coefficients Q, les seuls désormais dont nous ayons à nous occuper.

Cette égalité subsiste, d'ailleurs, pour toutes les valeurs entières et positives de t. Elle s'étend même au cas où t est égal à zéro, si l'on convient de regarder $\Delta^0 0^s$ comme égal à l'unité lorsque s est nul, et comme nul dans tous les autres cas.

6. Cela posé, il est évident que le terme général $V_n x^n$ de la série $G(x)$ est donné par l'égalité

$$V_n x^n = u_n x^n \sum \xi_r(n) r^n;$$

(1) On devrait, ce nous semble, la nommer *formule de Herschel*, en l'honneur de J.-F.-W. Herschel, à qui elle nous paraît due, et qui l'a publiée en 1820 dans son excellent Ouvrage *A collection of examples of the applications of the calculus of finite differences*.

(2) Dans notre Mémoire sur la *Sommation de certaines séries* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1879).

et, par suite, que ce terme général est la somme d'autant de parties distinctes qu'il y a de racines distinctes dans l'équation génératrice de la série récurrente considérée, ces différentes parties correspondant, d'ailleurs, à ces différentes racines.

7. Il s'ensuit que la série $G(x)$ est la somme d'un nombre égal de séries, lesquelles ont pour termes généraux respectifs les parties de $V_n x^n$ qui répondent à ces mêmes racines. Si l'on considère celle de ces séries qui correspond à la racine r, on voit immédiatement qu'elle a pour terme général l'expression

$$u_n x^n \xi_r(n) r^n,$$

et qu'elle s'écrit

$$u_0 \xi_r(0) + u_1 \xi_r(1) r x + u_2 \xi_r(2) r^2 x^2 + u_3 \xi_r(3) r^3 x^3 + \ldots.$$

8. Nous en désignerons la somme par $G_r(x)$; et, pour déterminer cette somme, nous considérerons le terme général de cette série, c'est-à-dire le produit $u_n \xi_r(n) r^n x^n$. Si l'on remplace, dans ce produit, le polynôme $\xi_r(n)$ par son expression développée (4), on trouve que ce terme général peut s'écrire

$$u_n[Q_{r,0} + Q_{r,1} n + Q_{r,2} n(n-1) + \ldots + Q_{r,\rho-1}(n-1)\ldots(n-\rho+2)] r^n x^n.$$

En effectuant la multiplication indiquée, on obtient successivement les expressions

$$Q_{r,0} u_n r^n x^n, \quad n Q_{r,1} u_n r^n x^n,$$
$$n(n-1) Q_{r,2} u_n r^n x^n, \quad \ldots, \quad n(n-1)\ldots(n-\rho+2) Q_{r,\rho-1} u_n r^n x^n;$$

et il est bien clair que $G_r(x)$ est la somme de toutes les séries dont ces dernières expressions constituent les termes généraux.

9. La série qui a pour terme général $Q_{r,0} u_n r^n x^n$ n'est autre chose que la série $f(x)$, qu'on a multipliée par $Q_{r,0}$, et où l'on a remplacé x par rx. Sa somme est donc $Q_{r,0} f(rx)$.

La série qui a pour terme général $n Q_{r,1} u_n r^n x^n$ n'est autre chose que la série $f'(x)$ qu'on a multipliée par $Q_{r,1} x$, et où l'on a remplacé ensuite x par rx. Sa somme est donc $Q_{r,1} rx f'(rx)$, cette notation $f'(x)$ représentant, suivant l'usage, la dérivée première de $f(x)$.

De même, si l'on convient de représenter par $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{\text{IV}}(x)$, ...

les dérivées seconde, troisième, quatrième, ... de la fonction $f(x)$, les séries qui ont pour termes généraux

$$n(n-1)Q_{r,2}u_n r^n x^n,\ n(n-1)(n-2)Q_{r,3}u_n r^n x^n,$$
$$n(n-1)(n-2)(n-3)Q_{r,4}u_n r^n x^n,\ \ldots,$$

ont pour sommes respectives

$$Q_{r,2}r^2x^2f''(rx),\ Q_{r,3}r^3x^3f'''(rx),\ Q_{r,4}r^4x^4f^{\text{IV}}(rx),\ \ldots.$$

10. Ces résultats, joints à ce que nous avons dit plus haut (7), nous conduisent finalement à cette égalité

$$G_r(x) = Q_{r,0}f(rx) + Q_{r,1}rxf'(rx) + \ldots + Q_{r,\rho-1}r^{\rho-1}x^{\rho-1}f^{(\rho-1)}(rx).$$

Or, si l'on étend, comme précédemment, le $\sum$ ci-dessous à toutes les racines de l'équation génératrice de la série récurrente considérée, on a identiquement

$$G(x) = \sum G_r(x).$$

Donc, la détermination de $G(x)$ est complète, et le problème que nous nous étions proposé est résolu dans sa pleine généralité.

11. Cette solution repose sur l'emploi que nous avons fait, d'abord de la série de Herschel, ensuite des dérivées successives de la fonction $f(x)$. Elle nous paraît tout à fait nouvelle. Nous l'avons exposée, pour la première fois, dans une courte Note, présentée à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 21 mars 1881.

II. — Applications.

12. Considérons, comme premier exemple, la série

$$G(x) = 1^p x + 2^p x^2 + 3^p x^3 + 4^p x^4 + \ldots,$$

qu'on obtient en multipliant les termes de la progression géométrique, supposée décroissante,

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots,$$

par les termes de mêmes rangs de la suite

$$1^p + 2^p + 3^p + 4^p + \ldots,$$

laquelle est une série récurrente proprement dite, parce qu'on y suppose l'exposant p entier et supérieur à zéro.

Le terme général v_n de cette série récurrente est n^p; il peut s'écrire $n^p 1^p$; et, sous cette forme, il nous montre que l'équation génératrice de cette série récurrente est

$$(x-1)^{p+1}=0.$$

Il s'ensuit que cette équation génératrice n'a qu'une seule racine, la racine 1, et que le polynôme correspondant $\xi_1(n)$ se réduit à n^p. Si donc on se reporte à ce qui précède (4), on voit que l'on a

$$P_{1,0}=P_{1,1}=P_{1,2}=\ldots=P_{1,p-1}=0,$$
$$P_{1,p}=1,$$

et par suite, à l'aide des formules déjà données (5),

$$Q_{1,t}=\frac{1}{t!}\Delta^t 0^p.$$

Comme l'équation génératrice n'a qu'une seule racine, la racine 1, la somme cherchée $G(x)$ se confond avec $G_1(x)$. Or, d'après ce qu'on a vu (10),

$$G_1(x)=Q_{1,0}f(x)+Q_{1,1}\,xf'(x)+Q_{1,2}\,x^2f''(x)+\ldots+Q_{1,p}\,x^pf^{(p)}(x).$$

Donc, si l'on remplace $G_1(x)$ par $G(x)$, et les coefficients Q par l'expression qu'on vient de leur trouver, on peut écrire

$$G(x)=\frac{\Delta^0 0^p}{0!}f(x)+\frac{\Delta^1 0^p}{1!}xf'(x)+\frac{\Delta^2 0^p}{2!}x^2f''(x)+\cdots+\frac{\Delta^p 0^p}{p!}x^pf^{(p)}(x).$$

C'est l'expression de $G(x)$. On la peut modifier en remarquant que l'on a

$$f(x)=\frac{x}{1-x},$$
$$f'(x)=\frac{1!}{(1-x)^2},$$
$$f''(x)=\frac{2!}{(1-x)^3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(p)}(x)=\frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

Si l'on se rappelle alors (5) que $\Delta^1 o^p$ est nul, cette expression devient

$$G(x) = \Delta^1 o^p \frac{x}{(1-x)^2} + \Delta^2 o^p \frac{x^2}{(1-x)^3} + \cdots + \Delta^p o^p \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

Telle est la somme de la série considérée. Cette somme a été calculée déjà par M. Catalan, dans son remarquable Mémoire *Sur une suite de polynômes entiers et sur quelques intégrales définies* (1).

Dans le cas particulier où l'exposant p est égal à 2, la série considérée se réduit à

$$1^2 x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + 4^2 x^4 + \ldots,$$

et sa somme est donnée par l'expression

$$\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

c'est-à-dire par l'expression

$$\frac{(1+x)x}{(1-x)^3},$$

qui avait été, antérieurement, indiquée par Schlömilch (2).

13. Prenons, pour second exemple, la série

$$G(x) = \xi(0) + \frac{\xi(1)}{1!} x + \frac{\xi(2)}{2!} x^2 + \frac{\xi(3)}{3!} x^3 + \ldots,$$

dont le terme général est $\frac{\xi(n)}{n!} x^n$, et dans laquelle $\xi(n)$ représente un polynôme entier en n et du degré $\rho - 1$.

Il est clair qu'on obtient cette série en multipliant terme à terme les deux suites

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

$$\xi(0) + \xi(1) + \xi(2) + \xi(3) + \ldots,$$

dont la première constitue le développement de e^x, et dont la seconde

---

(1) Présenté le 15 décembre 1880 à la classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique.

(2) *Exercices*, p. 201.

est une série récurrente proprement dite admettant, pour équation génératrice, l'équation

$$(x-1)^\rho = 0.$$

Si nous posons

$$\xi(n) = P_0 + P_1 n + P_2 n^2 + \ldots + P_{\rho-1} n^{\rho-1}$$

et (5) en même temps

$$t!\,Q_t = \Delta^t 0^t P_t + \Delta^t 0^{t+1} P_{t+1} + \Delta^t 0^{t+2} P_{t+2} + \ldots + \Delta^t 0^{\rho-1} P_{\rho-1},$$

nous trouvons (10), en remarquant que toutes les dérivées de e^x sont égales à e^x,

$$G(x) = Q_0 e^x + Q_1 x e^x + Q_2 x^2 e^x + \ldots + Q_{\rho-1} x^{\rho-1} e^x.$$

Cela étant, représentons par $\chi(x)$ le polynôme

$$Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2 + \ldots + Q_{\rho-1} x^{\rho-1},$$

qui ne diffère du polynôme $\xi(n)$ que par la substitution de la variable x à la variable n et des coefficients Q aux coefficients P correspondants; nous arrivons à cette formule définitive

$$G(x) = \chi(x)\, e^x,$$

et la présente question est tout à fait résolue.

Cette question n'est d'ailleurs que la généralisation du cas particulier où le polynôme $\xi(n)$ se réduit au seul terme Pn^p. Ce cas particulier a été traité, il n'y a pas longtemps, par M. Catalan et ses collaborateurs [1], et, antérieurement, par J.-F.-W. Herschel.

Quoi qu'il en soit, si, dans la série $G(x)$, qui est convergente pour toute valeur de x, on remplace x par un nombre commensurable α, on a

$$G(\alpha) = \chi(\alpha)\, e^\alpha.$$

Or, si les coefficients P de $\xi(n)$ sont commensurables, il en est de même des coefficients Q de $\chi(x)$. Donc, dans cette hypothèse que les

---

[1] *Nouvelle Correspondance mathématique*, année 1878.

coefficients P sont commensurables, la somme $G(\alpha)$ de la série

$$\xi(0)+\frac{\xi(1)}{1!}\alpha+\frac{\xi(2)}{2!}\alpha^2+\frac{\xi(3)}{3!}\alpha^3+\ldots$$

est égale au nombre e^α, multiplié par un nombre commensurable : elle ne contient qu'une seule incommensurable, qui est e^α.

Pour faire une application numérique de ces résultats, prenons le cas très particulier où

$$\xi(n)=1+n+n^2.$$

Alors

$$P_0=1,\quad P_1=1,\quad P_2=1,$$
$$Q_0=1,\quad Q_1=2,\quad Q_2=1;$$

et il s'ensuit

$$\chi(x)=1+2x+x^2=(1+x)^2.$$

Nous avons donc

$$1+\frac{1+1+1^2}{1!}x+\frac{1+2+2^2}{2!}x^2+\frac{1+3+3^2}{3!}x^3+\ldots=(1+x)^2e^x;$$

et, si nous remplaçons x par l'unité,

$$1+\frac{1+1+1^2}{1!}+\frac{1+2+2^2}{2!}+\frac{1+3+3^2}{3!}+\ldots=4e.$$

14. Prenons, pour troisième exemple, la série

$$G(x)=1+x\cos^2\omega+x^2\cos^2 2\omega+x^3\cos^2 3\omega+\ldots,$$

qui est convergente pour toutes les valeurs de x inférieures à l'unité.

Cette série peut être regardée comme le résultat de la multiplication, termes à termes, des trois séries

$$\begin{array}{llllll} 1+x & +x^2 & +x^3 & +x^4 & +\ldots, \\ 1+\cos\omega & +\cos 2\omega & +\cos 3\omega & +\cos 4\omega & +\ldots, \\ 1+\cos\omega & +\cos 2\omega & +\cos 3\omega & +\cos 4\omega & +\ldots. \end{array}$$

Considérons d'abord la série obtenue par la multiplication, termes à termes, des deux premières de ces séries. Elle peut s'écrire

$$1+x\cos\omega+x^2\cos 2\omega+x^3\cos 3\omega+x^4\cos 4\omega+\ldots.$$

Or $\cos n\omega$ est le terme général d'une série récurrente admettant l'équation génératrice

$$z^2 - 2z\cos\omega + 1 = 0,$$

et, par suite, on a identiquement

$$\cos n\omega = \tfrac{1}{2}e^{ni\omega} + \tfrac{1}{2}e^{-ni\omega},$$

la lettre i représentant, comme d'ordinaire, le symbole $\sqrt{-1}$.

Donc la somme $H(x)$ de la série

$$1 + x\cos\omega + x^2\cos 2\omega + x^3\cos 3\omega + x^4\cos 4\omega + \ldots$$

est donnée par la formule

$$H(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - e^{i\omega}x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - e^{-i\omega}x},$$

c'est-à-dire

$$H(x) = \frac{1 - x\cos\omega}{1 - 2x\cos\omega + x^2}.$$

Mais, de l'expression

$$\cos n\omega = \tfrac{1}{2}e^{ni\omega} + \tfrac{1}{2}e^{-ni\omega},$$

nous déduisons, d'après les résultats (10) qui précèdent,

$$G(x) = \tfrac{1}{2}H(e^{i\omega}x) + \tfrac{1}{2}H(e^{-i\omega}x).$$

Donc

$$G(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1 - e^{2i\omega}x} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1 - e^{-2i\omega}x},$$

c'est-à-dire, tous calculs effectués,

$$G(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1 - x\cos 2\omega}{1 - 2x\cos 2\omega + x^2}.$$

On arriverait, par la même méthode, à un résultat analogue, pour la somme de la série

$$x\sin^2\omega + x^2\sin^2 2\omega + x^3\sin^2 3\omega + x^4\sin^2 4\omega + \ldots.$$

Par la même méthode encore, on pourrait calculer, pour toute valeur entière et positive de p, la somme de chacune des séries

$$1 + x\cos^p\omega + x^2\cos^p 2\omega + x^3\cos^p 3\omega + x^4\cos^p 4\omega + \ldots,$$
$$x\sin^p\omega + x^2\sin^p 2\omega + x^3\sin^p 3\omega + x^4\sin^p 4\omega + \ldots.$$

15. Ce dernier exemple nous présente un cas particulier des séries qu'on obtient en multipliant, termes à termes, un nombre n de séries, n étant supérieur à 2. Si l'on connaît la somme d'une quelconque de ces séries, et si les $n-1$ autres sont des séries récurrentes proprement dites connues, l'application de notre méthode, répétée autant de fois qu'il est nécessaire, nous donne la somme de la série considérée.

On peut remarquer, d'ailleurs, que les $n-1$ séries récurrentes par les termes desquelles nous multiplions sont tout à fait quelconques. Il se peut faire, ou qu'elles soient toutes différentes, ou que certaines soient identiques, ou que toutes soient identiques. Dans ce dernier cas, chaque terme de la série donnée est multiplié par la puissance $n^{\text{ième}}$ du terme correspondant de la série récurrente considérée.

On peut remarquer aussi, quel que soit le nombre $n-1$ des séries récurrentes données, qu'on a le moyen de n'appliquer qu'une seule fois notre procédé de sommation. En multipliant, en effet, termes à termes, toutes ces séries récurrentes, on obtient une série récurrente unique dont l'équation génératrice peut facilement être formée.

16. Pour faire une dernière application de nos résultats, proposons-nous, connaissant la somme $f(x)$ de la série

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots,$$

de trouver la somme de la série

$$u_k x^k + u_{k+p} x^{k+p} + u_{k+2p} x^{k+2p} + \ldots,$$

qu'on obtient en prenant, dans la précédente, les termes de p en p.

On sait, depuis longtemps, résoudre cette question à l'aide des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité. On peut, en s'appuyant uniquement sur nos résultats, retrouver la solution connue. Pour le montrer, nous allons considérer le cas particulier où l'on a à la fois $k = 0$ et $p = 3$; mais on verra bien que notre méthode s'étend à tous les autres cas.

Soit donc

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots$$

la série donnée, qui a pour somme $f(x)$, et soit

$$u_0 + u_3 x^3 + u_6 x^6 + u_9 x^9 + \ldots$$

la série dont on veut déterminer la somme $G(x)$.

Il est clair qu'on obtient cette dernière en multipliant les termes de la précédente par les termes correspondants de la série

$$1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ \ldots,$$

qui est une série récurrente admettant, pour équation génératrice, l'équation binôme

$$x^3 - 1 = 0.$$

Les trois racines de cette équation sont, comme on sait,

$$1,\quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Si nous désignons, suivant l'usage, les deux dernières par j et j^2, le terme général v_n de notre série récurrente sera donné par l'égalité

$$v_n = \tfrac{1}{3}(1 + j^n + j^{2n}),$$

et, d'après ce qui précède (**10**), nous aurons

$$G(x) = \tfrac{1}{3}f(x) + \tfrac{1}{3}f(jx) + \tfrac{1}{3}f(j^2x).$$

C'est justement l'expression qu'on eût obtenue par l'autre méthode. Celle-ci rentre donc, comme cas particulier, dans le problème qui fait l'objet du présent travail.

III. — Conséquences.

17. La solution que nous avons donnée (**10**) de notre problème général nous fournit évidemment le moyen de sommer une infinité de séries. Dès que nous connaissons, en effet, la somme $f(x)$ d'une série, nous pouvons écrire, grâce à notre formule générale (**10**), la somme $G(x)$ de chacune des séries obtenues en multipliant les termes de la série $f(x)$ par les termes correspondants d'une série récurrente proprement dite. Ces séries récurrentes proprement dites étant en nombre infini, nous sommons ainsi une infinité de séries.

Nous savons, par exemple, que les séries

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

ont pour sommes respectives

$$\frac{1}{1-x}, \quad e^x, \quad \mathrm{L}\frac{1}{1-x}.$$

Donc, quelle que soit la série récurrente proprement dite

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots,$$

nous savons sommer toutes les séries, en nombre infini, qui se peuvent écrire

$$v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + v_3 x^3 + v_4 x^4 + \ldots,$$

$$v_0 + \frac{v_1 x}{1!} + \frac{v_2 x^2}{2!} + \frac{v_3 x^3}{3!} + \frac{v_4 x^4}{4!} + \ldots,$$

$$\frac{v_1 x}{1} + \frac{v_2 x^2}{2} + \frac{v_3 x^3}{3} + \frac{v_4 x^4}{4} + \ldots.$$

18. Mais les conséquences de la solution de notre problème ne s'arrêtent point à la sommation de certaines séries. Elles nous permettent de classer les séries en espèces. Soit, en effet, la série convergente quelconque

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots,$$

dont nous représentons la somme, connue ou inconnue, par $f(x)$. La solution de notre problème général nous permet, quelle que soit la série récurrente proprement dite

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

de sommer toutes les séries convergentes de la forme

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 x + u_2 v_2 x^2 + u_3 v_3 x^3 + \ldots,$$

à l'aide simplement de la fonction $f(x)$ et de ses dérivées.

Donc toutes les séries de cette dernière forme, bien qu'en nombre infini, constituent une espèce particulière de séries, les sommes de ces séries s'exprimant toutes à l'aide de cette seule fonction $f(x)$ et de ses dérivées.

Quelle que soit la fonction $f(x)$, l'espèce existe. Si $f(x)$ est connue, on peut sommer toutes les séries de l'espèce. Si $f(x)$ est inconnue, on ne les peut sommer, il est vrai, mais on ramène la sommation d'elles toutes à celle d'une série unique, qui est la série

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots.$$

19. On voit par là quelle simplification apporte, dans l'étude des séries, la solution de notre problème. Ramenant l'étude de toutes les séries, en nombre infini, contenues dans chaque espèce à celle d'une série unique, elle ramène l'étude générale des séries à celle d'un nombre, relativement très petit, de séries particulières. Elle constitue ainsi, dans la théorie générale des séries, une véritable méthode de réduction.

20. Tous ces avantages proviennent de ce seul fait, savoir que la somme de la série

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 x + u_2 v_2 x^2 + u_3 v_3 x^3 + \dots$$

s'exprime à l'aide simplement de la somme $f(x)$ de la série

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \dots$$

et des dérivées de cette somme. Si l'on convient de dire que des fonctions qui s'expriment rationnellement à l'aide de $f(x)$ et de ses dérivées sont de même nature que $f(x)$, et, par conséquent, sont toutes entre elles de même nature, on peut dire que, quand on multiplie les termes d'une série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, par les termes de mêmes rangs d'une série récurrente proprement dite, la nature de la première série n'est nullement altérée.

21. Les séries dont le terme général a la forme $u_n v_n x^n$, le facteur v_n étant le terme général d'une série récurrente proprement dite, se présentent constamment dans l'Analyse. Telles sont les séries qui donnent les sinus et cosinus des divers ordres; les séries qu'on rencontre dans les développements, suivant les puissances ascendantes de la variable, soit des fonctions elliptiques, soit des fonctions de M. Weierstrass; et, plus généralement, toutes les séries que fournissent les équations différentielles linéaires, d'ordre quelconque, dont l'équation dérivée est une équation régulière.

Toutes les fois qu'on rencontrera une série de cette sorte, il suffira, pour en étudier la nature et en déterminer la somme, d'en regarder le terme général comme égal simplement à $u_n x^n$: le facteur v_n pourra être négligé.