V. PUISEUX

Sur les principales inégalités du Mouvement de la Lune

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 1 (1864), p. 39-80
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1864_1_1__39_0>

SUR LES

PRINCIPALES INÉGALITÉS DU MOUVEMENT DE LA LUNE,

PAR M. V. PUISEUX,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

Je me propose de montrer comment, sans entreprendre les calculs compliqués qu'exige une théorie complète de la Lune, on peut se rendre compte assez simplement des principales circonstances du mouvement de cet astre autour de la Terre et en déterminer approximativement les inégalités les plus importantes. Le but de cet article serait atteint s'il engageait quelque lecteur à l'étude plus approfondie d'une théorie qui effraye ordinairement par son étendue et sur laquelle, malgré des progrès récents et considérables, la science n'a peut-être pas encore dit son dernier mot.

Je ferai usage, dans ce qui va suivre, de la méthode de la variation des constantes arbitraires, ainsi que Poisson l'a proposé dans son Mémoire sur le mouvement de la Lune autour de la Terre (*Mémoires de l'Institut*, Académie des Sciences, t. XIII). Les coordonnées de la Lune seront donc exprimées par les formules du mouvement elliptique; mais les six éléments qui figurent dans ces formules seront des variables dont il faudra chercher les expressions en fonction du temps.

Nommons M la masse de la Terre, m celle de la Lune, m' celle du Soleil, μ la somme $M+m$, f la constante qui exprime l'attraction mutuelle de deux unités de masse à l'unité de distance. Prenons le centre O de la Terre pour origine de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz de directions invariables : le plan Oxy sera la position qu'occupait le plan de l'écliptique à une certaine époque; les axes Ox, Oy seront placés de manière que les mouvements directs se fassent de Ox vers Oy; l'axe des z sera dirigé vers la région boréale du ciel. Nous appellerons x, y, z les coordonnées du centre de la Lune, x', y', z' celles du centre du Soleil, r et r' les distances de ces deux astres au centre de la Terre, Δ leur distance mutuelle, en sorte qu'on ait

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},\quad \Delta=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

Il sera permis, dans une première approximation, de supposer les masses de ces trois corps réunies à leurs centres de gravité respectifs : d'ailleurs, en vertu d'un théorème connu, le mouvement relatif de la Lune autour de la Terre pourra être regardé comme un mouvement absolu, à condition qu'on suppose cet astre soumis, non-seulement aux attractions de la Terre et du Soleil, mais encore à des forces accélératrices égales et contraires à celles qui résultent des actions de la Lune et du Soleil sur la Terre. La projection sur l'axe des x de l'accélération dans le mouvement cherché se compose donc des quatre termes

$$-\frac{f\mathrm{M}x}{r^3}, \quad \frac{fm'(x'-x)}{\Delta^3}, \quad -\frac{fmx}{r^3}, \quad -\frac{fm'x'}{r'^3};$$

il en résulte, en désignant le temps par t et en observant que $\mathrm{M}+m=\mu$,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{f\mu x}{r^3}-fm'\left(\frac{x'}{r'^3}-\frac{x'-x}{\Delta^3}\right).$$

Posons

$$\mathrm{R}=fm'\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}-\frac{1}{\Delta}\right);$$

R sera une fonction des six coordonnées x, y, z, x', y', z', et la dérivée partielle de cette fonction par rapport à x sera

$$\frac{d\mathrm{R}}{dx}=fm'\left(\frac{x'}{r'^3}-\frac{x'-x}{\Delta^3}\right).$$

L'équation précédente peut donc s'écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{f\mu x}{r^3}+\frac{d\mathrm{R}}{dx}=0,$$

et on trouvera pareillement

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{f\mu y}{r^3}+\frac{d\mathrm{R}}{dy}=0, \quad \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{f\mu z}{r^3}+\frac{d\mathrm{R}}{dz}=0.$$

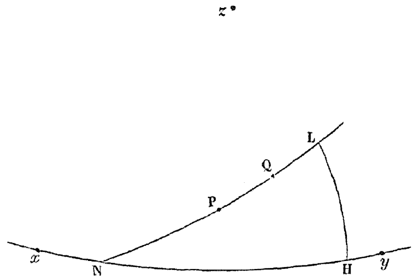
Si l'on supposait nulle la masse m' du Soleil, ces trois équations se réduiraient aux suivantes

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{f\mu x}{r^3}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{f\mu y}{r^3}=0, \quad \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{f\mu z}{r^3}=0,$$

que l'on nomme les équations du mouvement elliptique. Les équations complètes s'appellent les équations du mouvement troublé, et la quantité R reçoit le nom de fonction perturbatrice.

L'intégration des équations du mouvement elliptique fournit les valeurs de x, y, z en fonction du temps et de six constantes arbitraires. Ces six constantes, qu'on appelle encore les six éléments du mouvement elliptique de la Lune, peuvent être choisies d'une infinité de manière. Nous allons définir les éléments dont nous ferons habituellement usage.

Imaginons une surface sphérique de rayon 1 ayant pour centre le centre O de la Terre : les axes Ox, Oy, Oz la perceront en trois points x, y, z ; le plan de l'or-



bite de la Lune la coupera suivant un grand cercle NL. Les grands cercles xy, NL se rencontreront en deux points qui seront les nœuds de l'orbite de la Lune : soit N le nœud ascendant. Marquons enfin en P et en L les points où le grand cercle de l'orbite est rencontré par le rayon aboutissant au périgée lunaire et par le rayon dirigé vers la position occupée par le centre de la Lune à l'époque t.

Nous appellerons θ l'arc xN ou la longitude du nœud ascendant, φ l'angle PNy ou l'inclinaison de l'orbite, ϖ la somme des arcs xN, NP, ou ce que les astronomes appellent la longitude du périgée. Nous nommerons a le demi grand axe de l'orbite, e l'excentricité; enfin nous désignerons par ε la longitude moyenne de l'époque. Pour définir ce dernier élément, on imagine un astre fictif qui tourne d'un mouvement angulaire uniforme autour de la Terre dans un temps égal à la durée d'une révolution de la Lune, et qui passe au périgée en même temps que cet astre. A l'époque $t = 0$, le rayon dirigé vers cet astre fictif rencontre le grand cercle NL en un point Q; la somme des arcs xN, NQ mesure ce qu'on appelle la longitude moyenne de l'époque.

Nous représenterons par v la longitude de la Lune dans son orbite à l'époque t; elle est mesurée par la somme des arcs xN, NL. La différence $v - \varpi$ ou l'arc PL sera l'anomalie vraie : l'anomalie excentrique sera désignée par la lettre u. La lettre n représentera la vitesse angulaire moyenne, laquelle est égale, comme on sait, à $\sqrt{\frac{f\mu}{a^3}}$: alors la longitude moyenne, qui est ε à l'époque zéro, sera exprimée à l'époque t par $nt + \varepsilon$, et l'anomalie moyenne, que nous nommerons ζ, sera égale à $nt+\varepsilon-\varpi$. Cela posé, on aura l'ensemble des formules

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&x=r[\cos(v-\theta)\cos\theta-\sin(v-\theta)\sin\theta\cos\varphi],\\
&y=r[\cos(v-\theta)\sin\theta+\sin(v-\theta)\cos\theta\cos\varphi],\\
&z=r\sin(v-\theta)\sin\varphi,\\
&r=a(1-e\cos u),\quad \operatorname{tang}\frac{v-\varpi}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{u}{2},\\
&u-e\sin u=\zeta,\quad \zeta=nt+\varepsilon-\varpi.
\end{aligned}\right.$$

Les trois premières donnent x, y, z en fonction de r et de v; les deux suivantes déterminent r et v en fonction de u; par la sixième, u est une fonction connue de ζ, et enfin la dernière fait connaître ζ en fonction du temps. Ainsi, en vertu de ces équations, x, y, z sont des fonctions connues de t et des six éléments

$$\varphi,\ \theta,\ e,\ \varpi,\ a,\ \varepsilon.$$

Il ne faut pas perdre de vue que n n'est pas une constante distincte, mais qu'elle est liée au demi grand axe par la formule

$$n=\sqrt{\frac{f\mu}{a^3}}.$$

Au lieu de déterminer la position de la Lune à l'aide des trois coordonnées rectangulaires x, y, z, on peut faire usage d'autres variables. Abaissons du point L l'arc LH perpendiculaire sur xy; les arcs xH et LH seront ce qu'on appelle la longitude et la latitude géocentriques de la Lune; nous les désignerons respectivement par L et Λ. Les trois quantités r, L et Λ peuvent être considérées comme les trois coordonnées polaires de la Lune; mais le triangle sphérique rectangle NLH nous donne les deux équations

$$\operatorname{tang}(\mathrm{L}-\theta)=\operatorname{tang}(v-\theta)\cos\varphi,\quad \sin\Lambda=\sin(v-\theta)\sin\varphi,$$

en vertu desquelles L et Λ sont des fonctions connues de v; d'ailleurs, d'après les formules rappelées ci-dessus, r et v sont des fonctions connues de t; on peut donc dire aussi que r, L et Λ sont des fonctions connues de t.

Revenons maintenant aux équations du mouvement troublé. Nous supposerons les valeurs de x, y, z, qui y satisfont, exprimées par les mêmes formules que nous a fournies l'intégration des équations du mouvement elliptique; seulement les éléments ne seront plus des constantes, mais de nouvelles variables. Cela est évidemment permis, puisque les éléments sont au nombre de six, et que les équations auxquelles il faut satisfaire sont au nombre de trois seulement. Il y a plus, nous pouvons encore assujettir ces éléments à remplir trois conditions choisies arbitrairement; c'est ce que nous ferons en exprimant que les dérivées des coordonnées

x, y, z, par rapport au temps, conservent les mêmes formes que si les éléments étaient constants.

Les formules du mouvement elliptique ne sont plus alors que des formules de transformation servant à passer des anciennes variables x, y, z aux nouvelles φ, θ, e, ϖ, a, ε; en introduisant celles-ci dans les équations du mouvement troublé, et résolvant par rapport aux dérivées des éléments, on trouve

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\theta} + \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dR}{d\varpi}+\frac{dR}{d\varepsilon}\right),\\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\varphi},\\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR}{d\varpi} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{dR}{d\varepsilon},\\
\frac{d\varpi}{dt} &= -\frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\varphi} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR}{de},\\
\frac{da}{dt} &= -\frac{2}{na}\frac{dR}{d\varepsilon},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{dR}{da} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{dR}{de} - \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\varphi}.
\end{aligned}\right.$$

Les dérivées partielles de la fonction perturbatrice qui figurent dans les seconds membres sont prises en supposant qu'on ait remplacé dans R les coordonnées x, y, z par leurs valeurs en fonction du temps et des éléments données par les formules du mouvement elliptique. Pour le détail du calcul qui conduit à ces équations, on peut consulter soit la *Mécanique analytique*, t. II, soit un Mémoire de Poisson *Sur la variation des constantes arbitraires* (*Journal de l'École Polytechnique*, XV^e Cahier), ou encore un Mémoire de M. Binet (même recueil, XXVIII^e Cahier), ou enfin le tome I^{er} des *Annales de l'Observatoire*, par M. Le Verrier.

A une première approximation, on regardera les éléments φ, θ, e, ϖ, a, ε comme constants dans les seconds membres des équations précédentes; comme d'ailleurs les coordonnées du Soleil sont connues en fonction du temps par la théorie de cet astre, ces seconds membres deviendront des fonctions connues du temps, et en les intégrant on aura des valeurs approchées de $\varphi, \theta, \ldots$, les quantités négligées étant de l'ordre du carré de la force perturbatrice. En substituant ces premières valeurs approchées dans les mêmes seconds membres, ils deviendront de nouvelles fonctions du temps dont l'intégration fournira des valeurs plus approchées de $\varphi, \theta, \ldots$, les erreurs n'étant plus que de l'ordre du cube de la fonction perturbatrice. En continuant de cette manière, on approchera de plus en plus des valeurs des inconnues.

Mais pour rendre praticables les intégrations qu'exigent ces approximations successives, il convient de développer R en une série de sinus ou de cosinus d'arcs de la forme $i\zeta + i'\zeta'$, i et i' étant des nombres entiers positifs ou négatifs, et ζ' désignant l'anomalie moyenne du Soleil, comme ζ désigne celle de la Lune. Qu'un pareil développement soit possible, cela résulte de ce que R est, par rapport à chacune des variables ζ, ζ', une fonction périodique, ne changeant pas quand la variable augmente de 2π. Mais il faut entrer dans quelques détails sur la manière de l'effectuer.

Observons d'abord qu'il reviendra au même pour notre but de développer R en une somme de termes de la forme $\mathrm{A}\,{}^{\sin}_{\cos}(i\zeta + i'\zeta' + \alpha)$, α désignant une somme de multiples des angles θ, ϖ, et des angles analogues θ', ϖ' relatifs à l'orbite du Soleil, tandis que A sera une fonction de a, e, φ, et des quantités analogues a', e', φ' relatives au Soleil. Pour y parvenir, nous ferons usage des développements du rayon vecteur et de l'anomalie vraie, suivant les cosinus et les sinus des multiples de l'anomalie moyenne. Si l'on pose

$$r = a(1 + \mathrm{X}), \quad v - \varpi = \zeta + \mathrm{Y},$$

on déduit aisément des formules du mouvement elliptique développées suivant les puissances de e,

$$\mathrm{X} = \frac{1}{2}e^2 - e\cos\zeta - \frac{1}{2}e^2\cos 2\zeta, \quad \mathrm{Y} = 2e\sin\zeta + \frac{5}{4}e^2\sin 2\zeta,$$

où l'on a négligé les puissances de e supérieures à la deuxième. Il est à peine nécessaire d'avertir que l'approximation devrait être poussée beaucoup plus loin, si l'on avait en vue une théorie complète du mouvement de la Lune. En désignant par des lettres accentuées tout ce qui se rapporte au Soleil, on aura pareillement

$$r' = a'(1 + \mathrm{X}'), \quad v' - \varpi' = \zeta' + \mathrm{Y}',$$
$$\mathrm{X}' = \frac{1}{2}e'^2 - e'\cos\zeta' - \frac{1}{2}e'^2\cos 2\zeta', \quad \mathrm{Y}' = 2e'\sin\zeta' + \frac{5}{4}e'^2\sin 2\zeta'.$$

Revenons maintenant à la fonction perturbatrice

$$\mathrm{R} = fm'\left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} - \frac{1}{\Delta}\right),$$

et observons que le rapport $\frac{r}{r'}$ étant une petite fraction qu'on peut regarder comme du second ordre, quand on considère e, φ, e' comme du premier ordre, on pourra développer R en une série rapidement convergente suivant les puissances de $\frac{r}{r'}$. On a, en effet,

$$\Delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = r^2 + r'^2 - 2rr's,$$

s désignant le cosinus de l'angle compris entre les rayons r et r', et par suite, en développant à l'aide de la formule du binôme,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r'}\left(1 - 2s\frac{r}{r'} + \frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{r'}\left[1 + \frac{1}{2}\left(2s\frac{r}{r'} - \frac{r^2}{r'^2}\right) + \frac{3}{8}\left(2s\frac{r}{r'} - \frac{r^2}{r'^2}\right)^2 + \frac{5}{16}\left(2s\frac{r}{r'} - \frac{r^2}{r'^2}\right)^3 + \ldots\right],\end{aligned}$$

ou bien, en négligeant les puissances de $\frac{r}{r'}$ supérieures à la troisième,

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'}\left(1 + s\frac{r}{r'} + \frac{3s^2-1}{2}\frac{r^2}{r'^2} + \frac{5s^3-3s}{2}\frac{r^3}{r'^3}\right).$$

On a d'ailleurs

$$\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3} = s\frac{r}{r'^2}:$$

il suit de là

$$R = fm'\left(-\frac{1}{r'} + \frac{1-3s^2}{2}\frac{r^2}{r'^3} + \frac{3s-5s^3}{2}\frac{r^3}{r'^4}\right).$$

Mais la fonction R n'entrant dans nos calculs que par ses dérivées partielles $\frac{dR}{d\varphi}$, $\frac{dR}{d\theta}$, etc., relatives aux éléments de la Lune, on peut y supprimer le terme $-\frac{fm'}{r'}$ qui ne contient pas ces éléments, et remplacer la formule précédente par celle-ci

$$R = fm'\left(\frac{1-3s^2}{2}\frac{r^2}{r'^3} + \frac{3s-5s^3}{2}\frac{r^3}{r'^4}\right).$$

Dans la partie $fm'\frac{1-3s^2}{2}\frac{r^2}{r'^3}$, nous conserverons les secondes puissances et les produits de e, e', φ, φ' : dans la partie $fm'\frac{3s-5s^3}{2}\frac{r^3}{r'^4}$, qui contient une fois de plus le facteur $\frac{r}{r'}$, nous négligerons absolument les excentricités et les inclinaisons.

Exprimons d'abord s au moyen des longitudes v et v' de la Lune et du Soleil dans leurs orbites respectives. On a

$$s = \frac{x}{r}\cdot\frac{x'}{r'} + \frac{y}{r}\cdot\frac{y'}{r'} + \frac{z}{r}\cdot\frac{z'}{r'}.$$

Mais en remplaçant $\sin\varphi$ par φ et $\cos\varphi$ par $1-\frac{1}{2}\varphi^2$, on déduit des formules (1)

$$\frac{x}{r}=\cos v+\frac{1}{2}\varphi^2\sin(v-\theta)\sin\theta,$$

$$\frac{y}{r}=\sin v-\frac{1}{2}\varphi^2\sin(v-\theta)\cos\theta,$$

$$\frac{z}{r}=\varphi\sin(v-\theta);$$

on a pareillement

$$\frac{x'}{r'}=\cos v'+\frac{1}{2}\varphi'^2\sin(v'-\theta')\sin\theta',$$

$$\frac{y'}{r'}=\sin v'-\frac{1}{2}\varphi'^2\sin(v'-\theta')\cos\theta',$$

$$\frac{z'}{r'}=\varphi'\sin(v'-\theta').$$

Il en résulte, en négligeant les quantités d'un degré supérieur au second en φ et φ', et remplaçant les produits de sinus et de cosinus par des sommes :

$$s=\left(1-\frac{1}{4}\varphi^2-\frac{1}{4}\varphi'^2\right)\cos(v-v')+\frac{1}{2}\varphi\varphi'\cos(v-v'-\theta+\theta')$$
$$+\frac{1}{4}\varphi^2\cos(v+v'-2\theta)+\frac{1}{4}\varphi'^2\cos(v+v'-2\theta')-\frac{1}{2}\varphi\varphi'\cos(v+v'-\theta-\theta'),$$

d'où, en élevant au carré,

$$s^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\varphi^2-\frac{1}{4}\varphi'^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\varphi^2-\frac{1}{4}\varphi'^2\right)\cos(2v-2v')+\frac{1}{2}\varphi\varphi'\cos(\theta-\theta')$$
$$+\frac{1}{2}\varphi\varphi'\cos(2v-2v'-\theta+\theta')+\frac{1}{4}\varphi^2\cos(2v-2\theta)+\frac{1}{4}\varphi'^2\cos(2v-2\theta')$$
$$+\frac{1}{4}\varphi^2\cos(2v'-2\theta)+\frac{1}{4}\varphi'^2\cos(2v'-2\theta')-\frac{1}{2}\varphi\varphi'\cos(2v-\theta-\theta')-\frac{1}{2}\varphi\varphi'\cos(2v'-\theta-\theta').$$

On a donc

$$\frac{1-3s^2}{2}\frac{r^2}{r'^3}=\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\varphi^2+\frac{3}{8}\varphi'^2\right)\frac{r^2}{r'^3}+\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\varphi^2+\frac{3}{8}\varphi'^2\right)\frac{r^2}{r'^3}\cos(2v-2v')$$
$$-\frac{3}{4}\varphi\varphi'\frac{r^2}{r'^3}\cos(\theta-\theta')-\frac{3}{4}\varphi\varphi'\frac{r^2}{r'^3}\cos(2v-2v'-\theta+\theta')$$
$$-\frac{3}{8}\varphi^2\frac{r^2}{r'^3}\cos(2v-2\theta)-\frac{3}{8}\varphi'^2\frac{r^2}{r'^3}\cos(2v-2\theta')-\frac{3}{8}\varphi^2\frac{r^2}{r'^3}\cos(2v'-2\theta)-\frac{3}{8}\varphi'^2\frac{r^2}{r'^3}\cos(2v'-2\theta')$$
$$+\frac{3}{4}\varphi\varphi'\frac{r^2}{r'^3}\cos(2v-\theta-\theta')+\frac{3}{4}\varphi\varphi'\frac{r^2}{r'^3}\cos(2v'-\theta-\theta').$$

Remplaçons maintenant r, v, r', v' par leurs valeurs en ζ et ζ' : dans les termes déjà multipliés par φ^2, φ'^2 ou $\varphi\varphi'$, il suffira de remplacer r par a, v par $\zeta+\varpi$, r' par a', v' par $\zeta'+\varpi'$; dans les autres il faudra pousser l'approximation jusqu'aux secondes dimensions de e et de e'. Or on a

$$\frac{r^2}{a^2}=(1+X)^2=1+2X+X^2=1+\frac{3}{2}e^2-2e\cos\zeta-\frac{1}{2}e^2\cos2\zeta,$$

et, en désignant par α un angle quelconque,

$$\begin{aligned}\cos(2v+\alpha)&=\cos(2\zeta+2\varpi+\alpha+2Y)\\&=\cos(2\zeta+2\varpi+\alpha)-\sin(2\zeta+2\varpi+\alpha).2Y-\cos(2\zeta+2\varpi+\alpha).2Y^2\\&=(1-4e^2)\cos(2\zeta+2\varpi+\alpha)-2e\cos(\zeta+2\varpi+\alpha)+2e\cos(3\zeta+2\varpi+\alpha)\\&\quad+\frac{3}{4}e^2\cos(2\varpi+\alpha)+\frac{13}{4}e^2\cos(4\zeta+2\varpi+\alpha),\end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{a^2}\cos(2v+\alpha)=\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\cos(2\zeta+2\varpi+\alpha)-3e\cos(\zeta+2\varpi+\alpha)\\+e\cos(3\zeta+2\varpi+\alpha)+\frac{5}{2}e^2\cos(2\varpi+\alpha)+e^2\cos(4\zeta+2\varpi+\alpha).\end{aligned}$$

En vertu de ces formules on a

$$\frac{r^2}{r'^3}=\frac{a^2}{a'^3}\left[\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\frac{a'^3}{r'^3}-2e\frac{a'^3}{r'^3}\cos\zeta-\frac{1}{2}e^2\frac{a'^3}{r'^3}\cos2\zeta\right]$$

et

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{r'^3}\cos(2v-2v')=\frac{a^2}{a'^3}\bigg[\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\frac{a'^3}{r'^3}\cos(2\zeta+2\varpi-2v')-3e\frac{a'^3}{r'^3}\cos(\zeta+2\varpi-2v')\\+e\frac{a'^3}{r'^3}\cos(3\zeta+2\varpi-2v')+\frac{5}{2}e^2\frac{a'^3}{r'^3}\cos(2\varpi-2v')+e^2\frac{a'^3}{r'^3}\cos(4\zeta+2\varpi-2v')\bigg].\end{aligned}$$

Mais on a aussi

$$\frac{a'^3}{r'^3}=(1+X')^{-3}=1-3X'+6X'^2=1+\frac{3}{2}e'^2+3e'\cos\zeta'+\frac{9}{2}e'^2\cos2\zeta';$$

et si dans la formule qui donne $\cos(2v+\alpha)$ on change α en $-\alpha$, v en v' et par suite ζ, ϖ, e en ζ', ϖ', e', on trouve

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-2v')=(1-4e'^2)\cos(\alpha-2\zeta'-2\varpi')-2e'\cos(\alpha-\zeta'-2\varpi')\\+2e'\cos(\alpha-3\zeta'-2\varpi')+\frac{3}{4}e'^2\cos(\alpha-2\varpi')+\frac{13}{4}e'^2\cos(\alpha-4\zeta'-2\varpi'):\end{aligned}$$

on conclut de là

$$\frac{a'^3}{r'^3}\cos(\alpha-2v')=\left(1-\frac{5}{2}e'^2\right)\cos(\alpha-2\zeta'-2\varpi')-\frac{1}{2}e'\cos(\alpha-\zeta'-2\varpi')$$
$$+\frac{7}{2}e'\cos(\alpha-3\zeta'-2\varpi')+\frac{17}{2}e'^2\cos(\alpha-4\zeta'-2\varpi').$$

A l'aide de ces formules on trouve

$$\frac{r^2}{r'^3}=\frac{a^2}{a'^3}\Big[1+\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}e'^2+3e'\cos\zeta'-2e\cos\zeta+\frac{9}{2}e'^2\cos2\zeta'$$
$$-3ee'\cos(\zeta-\zeta')-3ee'\cos(\zeta+\zeta')-\frac{1}{2}e^2\cos2\zeta\Big],$$

$$\frac{r^2}{r'^3}\cos(2v-2v')=\frac{a^2}{a'^3}\Big[\left(1-\frac{5}{2}e^2-\frac{5}{2}e'^2\right)\cos(2\zeta-2\zeta'+2\varpi-2\varpi')$$
$$-\frac{1}{2}e'\cos(2\zeta-\zeta'+2\varpi-2\varpi')+\frac{7}{2}e'\cos(2\zeta-3\zeta'+2\varpi-2\varpi')-3e\cos(\zeta-2\zeta'+2\varpi-2\varpi')$$
$$+e\cos(3\zeta-2\zeta'+2\varpi-2\varpi')+\frac{17}{2}e'^2\cos(2\zeta-4\zeta'+2\varpi-2\varpi')$$
$$+\frac{3}{2}ee'\cos(\zeta-\zeta'+2\varpi-2\varpi')-\frac{21}{2}ee'\cos(\zeta-3\zeta'+2\varpi-2\varpi')$$
$$-\frac{1}{2}ee'\cos(3\zeta-\zeta'+2\varpi-2\varpi')+\frac{7}{2}ee'\cos(3\zeta-3\zeta'+2\varpi-2\varpi')$$
$$+\frac{5}{2}e^2\cos(2\zeta'-2\varpi+2\varpi')+e^2\cos(4\zeta-2\zeta'+2\varpi-2\varpi')\Big].$$

Portons ces valeurs de $\frac{r^2}{r'^3}$ et de $\frac{r^2}{r'^3}\cos(2v-2v')$ dans l'expression trouvée ci-dessus de $\frac{1-3s^2}{2}\frac{r^2}{r'^3}$; en outre, dans les termes déjà multipliés par φ^2, $\varphi\varphi'$ ou φ'^2, remplaçons, comme il a été dit, r, r', v, v' par a, a', $\zeta+\varpi$, $\zeta'+\varpi'$: il viendra

$$\frac{1-3s^2}{2}\frac{r^2}{r'^3}=\frac{a^2}{a'^3}\Big[-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}e^2-\frac{3}{8}e'^2+\frac{3}{8}\varphi^2+\frac{3}{8}\varphi'^2$$
$$+\left(-\frac{3}{4}+\frac{15}{8}e^2+\frac{15}{8}e'^2+\frac{3}{8}\varphi^2+\frac{3}{8}\varphi'^2\right)\cos(2\zeta-2\zeta'+2\varpi-2\varpi')$$
$$-\frac{3}{4}e'\cos\zeta'+\frac{3}{8}e'\cos(2\zeta-\zeta'+2\varpi-2\varpi')-\frac{21}{8}e'\cos(2\zeta-3\zeta'+2\varpi-2\varpi')$$
$$+\frac{1}{2}e\cos\zeta+\frac{9}{4}e\cos(\zeta-2\zeta'+2\varpi-2\varpi')-\frac{3}{4}e\cos(3\zeta-2\zeta'+2\varpi-2\varpi')$$
$$-\frac{9}{8}e'^2\cos2\zeta'-\frac{51}{8}e'^2\cos(2\zeta-4\zeta'+2\varpi-2\varpi')+\frac{3}{4}ee'\cos(\zeta-\zeta')$$
$$+\frac{3}{4}ee'\cos(\zeta+\zeta')-\frac{9}{8}ee'\cos(\zeta-\zeta'+2\varpi-2\varpi')+\frac{63}{8}ee'\cos(\zeta-3\zeta'+2\varpi-2\varpi')$$

$$+\frac{3}{8}ee'\cos(3\zeta-\zeta'+2\varpi-2\varpi')-\frac{21}{8}ee'\cos(3\zeta-3\zeta'+2\varpi-2\varpi')+\frac{1}{8}e^2\cos2\zeta$$
$$-\frac{15}{8}e^2\cos(2\zeta'-2\varpi+2\varpi')-\frac{3}{4}e^2\cos(4\zeta-2\zeta'+2\varpi-2\varpi')-\frac{3}{4}\varphi\varphi'\cos(\theta-\theta')$$
$$-\frac{3}{4}\varphi\varphi'\cos(2\zeta-2\zeta'+2\varpi-2\varpi'-\theta+\theta')-\frac{3}{8}\varphi^2\cos(2\zeta+2\varpi-2\theta)$$
$$-\frac{3}{8}\varphi'^2\cos(2\zeta+2\varpi-2\theta')-\frac{3}{8}\varphi^2\cos(2\zeta'+2\varpi'-2\theta)-\frac{3}{8}\varphi'^2\cos(2\zeta'+2\varpi'-2\theta')$$
$$+\frac{3}{4}\varphi\varphi'\cos(2\zeta+2\varpi-\theta-\theta')+\frac{3}{4}\varphi\varphi'\cos(2\zeta'+2\varpi'-\theta-\theta')\Big].$$

Nous avons encore à calculer l'expression $\frac{3s-5s^3}{2}\frac{r^3}{r'^4}$, mais en y négligeant les excentricités et les inclinaisons; nous y remplacerons donc r par a, r' par a' et s par $\cos(\zeta-\zeta'+\varpi-\varpi')$. Il viendra ainsi

$$\frac{3s-5s^3}{2}\frac{r^3}{r'^4}=\frac{a^3}{a'^4}\left[-\frac{3}{8}\cos(\zeta-\zeta'+\varpi-\varpi')-\frac{5}{8}\cos(3\zeta-3\zeta'+3\varpi-3\varpi)\right].$$

La somme des seconds membres des deux dernières égalités, multipliée par fm', composera la valeur de R. Pour simplifier un peu l'écriture, nous représenterons par l et l' les longitudes moyennes de la Lune et du Soleil, en sorte qu'on ait

$$l=\zeta+\varpi=nt+\varepsilon,\qquad l'=\zeta'+\varpi'=n't+\varepsilon';$$

nous observerons d'ailleurs que dans le mouvement apparent du Soleil autour de la Terre, on a

$$f(m'+\mathrm{M})=n'^2a'^3,$$

ou, en négligeant M à côté de m' qui est plus de trois cent mille fois plus grande,

$$fm'=n'^2a'^3.$$

Nous aurons ainsi

$$\mathrm{R}=n'^2a^2\Big[-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}e^2-\frac{3}{8}e'^2+\frac{3}{8}\varphi^2+\frac{3}{8}\varphi'^2$$
$$+\left(-\frac{3}{4}+\frac{15}{8}e^2+\frac{15}{8}e'^2+\frac{3}{8}\varphi^2+\frac{3}{8}\varphi'^2\right)\cos(2l-2l')-\frac{3}{4}e'\cos(l'-\varpi')$$
$$+\frac{3}{8}e'\cos(2l-l'-\varpi')-\frac{21}{8}e'\cos(2l-3l'+\varpi')+\frac{1}{2}e\cos(l-\varpi)$$
$$+\frac{9}{4}e\cos(l-2l'+\varpi)-\frac{3}{4}e\cos(3l-2l'-\varpi)-\frac{9}{8}e'^2\cos(2l'-2\varpi')$$
$$-\frac{51}{8}e'^2\cos(2l-4l'+2\varpi')+\frac{3}{4}ee'\cos(l-l'-\varpi+\varpi')+\frac{3}{4}ee'\cos(l+l'-\varpi-\varpi')$$
$$-\frac{9}{8}ee'\cos(l-l'+\varpi-\varpi')+\frac{63}{8}ee'\cos(l-3l'+\varpi+\varpi')+\frac{3}{8}ee'\cos(3l-l'-\varpi-\varpi')$$

$$-\frac{21}{8}ee'\cos(3l-3l'-\varpi+\varpi')+\frac{1}{8}e^2\cos(2l-2\varpi)-\frac{15}{8}e^2\cos(2l'-2\varpi)$$
$$-\frac{3}{4}e^2\cos(4l-2l'-2\varpi)-\frac{3}{4}\varphi\varphi'\cos(\theta-\theta')-\frac{3}{4}\varphi\varphi'\cos(2l-2l'-\theta+\theta')$$
$$-\frac{3}{8}\varphi^2\cos(2l-2\theta)-\frac{3}{8}\varphi'^2\cos(2l-2\theta')-\frac{3}{8}\varphi^2\cos(2l'-2\theta)$$
$$-\frac{3}{8}\varphi'^2\cos(2l'-2\theta')+\frac{3}{4}\varphi\varphi'\cos(2l-\theta-\theta')+\frac{3}{4}\varphi\varphi'\cos(2l'-\theta-\theta')$$
$$\left.-\frac{3}{8}\frac{a}{a'}\cos(l-l')-\frac{5}{8}\frac{a}{a'}\cos(3l-3l')\right].$$

La partie principale de R est de l'ordre du produit n'^2a^2; d'un autre côté, les composantes de la force qui produit le mouvement elliptique sont les dérivées partielles par rapport à x, y, z de la fonction $Q=\frac{f\mu}{r}$, et celle-ci est de l'ordre de la quantité $\frac{f\mu}{a}=n^2a^2$. Le rapport de R à Q est donc de l'ordre de la fraction $\frac{n'^2}{n^2}$.

Nous regarderons $\frac{n'}{n}$, e, e', φ, dont les valeurs approchées sont respectivement $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{11}$, comme de petites quantités du premier ordre; quant à l'inclinaison φ', elle est actuellement extrêmement petite, et lors même qu'on voudrait embrasser un très-grand nombre de siècles, elle resterait toujours une petite quantité du premier ordre, attendu qu'elle ne dépassera jamais la limite 5 degrés ou $\frac{1}{11}$. On voit donc que si l'on regarde Q comme étant de l'ordre zéro, la fonction perturbatrice R est du second ordre, et que, dans le développement donné ci-dessus de cette fonction, les termes négligés sont au moins du cinquième ordre.

La lettre l est employée pour désigner l'angle $nt+\varepsilon$, où $n=\sqrt{\frac{f\mu}{a^3}}$. Si donc $A\cos(il+\alpha)$ représente un terme de R dans l'argument (*) duquel l'angle l soit multiplié par un nombre entier i différent de zéro, A étant d'ailleurs une fonction de a, e, φ, a', e', φ', et α une somme de multiples des angles ϖ, θ, l', ϖ', θ', la partie correspondante de la dérivée partielle $\frac{dR}{da}$ sera

$$\frac{dA}{da}\cos(il+\alpha)-i\frac{dn}{da}t.A\sin(il+\alpha).$$

Si maintenant on se reporte aux formules (2), on voit que $\frac{d\varepsilon}{dt}$, renfermant le terme $\frac{2}{na}\frac{dR}{da}$, contiendra, après la substitution de R, des termes où le temps figu-

(*) On entend par argument d'un terme l'angle placé sous le signe *sinus* ou *cosinus*.

rera comme facteur hors du signe sinus, et qui, par conséquent, malgré la petitesse de la fonction perturbatrice, cesseront d'être petits, quand le temps atteindra une valeur considérable.

On sait qu'on évite cet inconvénient par un changement de variable. Désignons, en effet, par $\left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right)$ la dérivée partielle de R prise par rapport à a sans faire varier l'angle l, en sorte qu'on ait

$$\frac{d\mathrm{R}}{da} = \left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right) + \frac{d\mathrm{R}}{dl}\frac{dl}{da};$$

$\frac{d\mathrm{R}}{dl}$ est la même chose que $\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}$, et par conséquent est égale à $-\frac{na}{2}\frac{da}{dt}$; $\frac{dl}{da}$ est égale à $\frac{dn}{da}t$; il en résulte

$$\frac{d\mathrm{R}}{da} = \left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right) - \frac{na}{2}t\frac{dn}{da}\frac{da}{dt} = \left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right) - \frac{na}{2}t\frac{dn}{dt}.$$

Portons cette valeur dans l'expression de $\frac{d\varepsilon}{dt}$, et il viendra

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{na}\left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right) - t\frac{dn}{dt} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{d\mathrm{R}}{de} - \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi},$$

ou bien

$$\frac{d\varepsilon + t\,dn}{dt} = \frac{2}{na}\left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{d\mathrm{R}}{de} - \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi}.$$

Si donc nous posons

$$d\varepsilon + t\,dn = d(\varepsilon),$$

on voit que la dérivée de la nouvelle variable (ε) sera donnée par une formule toute pareille à celle qui donnait $\frac{d\varepsilon}{dt}$; seulement $\frac{d\mathrm{R}}{da}$ y sera remplacée par $\left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right)$, et le temps ne figurera plus hors des signes sinus et cosinus. De l'équation

$$d\varepsilon + t\,dn = d(\varepsilon)$$

on conclut

$$(\varepsilon) = \varepsilon + \int t\,dn = \varepsilon + nt - \int n\,dt,$$

ou bien

$$nt + \varepsilon = \int n\,dt + (\varepsilon),$$

où nous supposerons l'intégrale $\int n\,dt$ prise à partir de $t=0$. Le changement de variable que nous venons d'effectuer revient donc, en supprimant des parenthèses désormais inutiles, à remplacer, dans les formules du mouvement elliptique, $nt+\varepsilon$ par $\int ndt+\varepsilon$, et à regarder, dans les formules (2), $\frac{d\mathrm{R}}{da}$ comme la dérivée partielle de R prise sans faire varier a dans les arguments.

Observons que les valeurs de x, y, z, r, v, u, en fonction de ζ ou de l, restent les mêmes qu'avant le changement de variable, mais qu'on a actuellement

$$l=\int ndt+\varepsilon, \quad \zeta=\int ndt+\varepsilon-\varpi.$$

Il nous faut maintenant, par l'intégration approchée des équations (2), déterminer les principales inégalités du mouvement de la Lune. Dans cette recherche, nous ferons d'abord abstraction des termes de R dont les arguments contiennent les angles l et l', ou au moins l'un d'entre eux; en effet, l'angle l augmentant de 2π dans l'espace d'un mois, et l'angle l' dans l'espace d'une année, chacun des termes dont il s'agit repasse sensiblement par les mêmes valeurs après une période comparable au mois ou à l'année, de façon que les valeurs qu'il acquiert pendant la seconde moitié de cette période soient à peu près égales et de signes contraires à celles qu'il a eues dans la première moitié. Il en est de même des dérivées partielles d'un pareil terme prises par rapport aux éléments elliptiques; lors donc qu'on intégrera les formules (2), les intégrales des parties de $d\varphi$, $d\theta, \ldots$, correspondantes au terme considéré, se réduiront à peu près à zéro, quand on embrassera un intervalle de temps multiple de la période. D'après cela, si l'on fait abstraction des inégalités à périodes comparables au mois ou à l'année, et qu'on veuille seulement chercher les variations progressives des éléments, on voit qu'on pourra les déterminer approximativement en substituant, dans les seconds membres des formules (2), la valeur de R réduite aux termes dont les arguments ne contiennent pas l et l'.

La fonction perturbatrice ainsi réduite est

$$\mathrm{R}=n'^2a^2\left[-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}e^2-\frac{3}{8}e'^2+\frac{3}{8}\varphi^2+\frac{3}{8}\varphi'^2-\frac{3}{4}\varphi\varphi'\cos(\theta-\theta')\right],$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi}=n'^2a^2\left[\frac{3}{4}\varphi-\frac{3}{4}\varphi'\cos(\theta-\theta')\right], \quad \frac{d\mathrm{R}}{d\theta}=\frac{3}{4}n'^2a^2\varphi\varphi'\sin(\theta-\theta'),$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{de}=-\frac{3}{4}n'^2a^2e, \quad \frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}=0,$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{da}=n'^2a\left[-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}e'^2+\frac{3}{4}\varphi^2+\frac{3}{4}\varphi'^2-\frac{3}{2}\varphi\varphi'\cos(\theta-\theta')\right], \quad \frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}=0.$$

La première des équations (2) se réduit à

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\theta},$$

et comme nous ne conservons dans $\frac{dR}{d\theta}$ que la partie de l'ordre le moins élevé, il convient de faire la même chose dans le facteur $\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}$, c'est-à-dire de le remplacer par $\frac{1}{na^2\varphi}$; il vient ainsi, en mettant pour $\frac{dR}{d\theta}$ sa valeur,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\varphi'\sin(\theta-\theta').$$

On trouvera de même

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{n'^2}{n}\left[-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\frac{\varphi'}{\varphi}\cos(\theta-\theta')\right],$$

$$\frac{de}{dt} = 0, \quad \frac{d\varpi}{dt} = \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\,(*), \quad \frac{da}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{n'^2}{n}\left[-1-\frac{9}{8}e^2-\frac{3}{2}e'^2+\frac{9}{8}\varphi^2+\frac{3}{2}\varphi'^2-\frac{21}{8}\varphi\varphi'\cos(\theta-\theta')\right].$$

L'équation $\frac{da}{dt} = 0$ montre qu'au degré d'approximation dont nous nous contentons en ce moment, a et e sont des constantes; il en est donc de même de n qui est liée avec a par la relation $n = \sqrt{\frac{f\mu}{a^3}}$. On a de plus, en regardant comme constante la vitesse angulaire n' du Soleil, qui n'est affectée que d'inégalités périodiques très-petites,

$$\varpi = \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}t + \text{const.}$$

Le périgée lunaire aurait donc un mouvement direct dont la vitesse serait $\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}$; le rapport de cette vitesse à la vitesse angulaire du Soleil est $\frac{3}{4}\frac{n'}{n}$, ou environ $\frac{1}{18}$;

(*) Cette valeur de $\frac{d\varpi}{dt}$ provient uniquement de la partie

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR}{de};$$

l'autre partie

$$-\frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\varphi}$$

est d'un ordre plus élevé de deux unités, c'est-à-dire de l'ordre des quantités négligées dans la première partie : on a dû par conséquent la négliger entièrement.

la durée d'une révolution du périgée serait par suite d'environ 18 ans. Mais on sait que cette révolution s'accomplit en 9 ans environ, et qu'ainsi la vitesse véritable du périgée est à peu près double de celle qu'on vient d'obtenir; l'approximation actuelle est donc ici tout à fait insuffisante.

Cherchons maintenant φ et θ; si l'on faisait abstraction du déplacement de l'écliptique, on aurait $\varphi' = 0$, et par suite

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}.$$

L'inclinaison de l'orbite lunaire serait donc constante aussi bien que l'excentricité; de plus, le nœud ascendant rétrograderait avec une vitesse angulaire égale et de signe contraire à celle qu'on a trouvée tout à l'heure pour le périgée. Mais pour le nœud le résultat est beaucoup plus approché que pour le périgée, puisque la durée véritable d'une révolution du nœud est, comme on sait, de 18 ans $\frac{2}{3}$.

Ayons égard à présent au déplacement de l'écliptique; nous aurons à intégrer les deux équations simultanées

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\varphi' \sin(\theta - \theta'), \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\left[-1 + \frac{\varphi'}{\varphi}\cos(\theta - \theta')\right],$$

dans lesquelles φ' et θ' sont des fonctions du temps données par la théorie du Soleil. Posons

$$\varphi \sin\theta = p, \quad \varphi\cos\theta = q, \quad \varphi' \sin\theta' = p', \quad \varphi'\cos\theta' = q',$$

d'où

$$\frac{dp}{dt} = \sin\theta\frac{d\varphi}{dt} + \varphi\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dq}{dt} = \cos\theta\frac{d\varphi}{dt} - \varphi\sin\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Si dans ces dernières formules on substitue les valeurs de $\frac{d\varphi}{dt}$ et de $\frac{d\theta}{dt}$, et qu'on fasse, pour abréger, $\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} = h$, il viendra

$$\frac{dp}{dt} + hq = hq', \quad \frac{dq}{dt} - hp = -hp'.$$

Lorsqu'on néglige les seconds membres, les intégrales de ces équations sont

$$p = \mathrm{A}\sin ht + \mathrm{B}\cos ht, \quad q = -\mathrm{A}\cos ht + \mathrm{B}\sin ht,$$

A et B étant des constantes arbitraires. Ces valeurs conviendront encore aux équations avec seconds membres, à condition qu'on y regarde A et B comme des variables, et ces nouvelles variables devront vérifier les deux équations

$$\frac{d\mathrm{A}}{dt}\sin ht + \frac{d\mathrm{B}}{dt}\cos ht = hq', \quad -\frac{d\mathrm{A}}{dt}\cos ht + \frac{d\mathrm{B}}{dt}\sin ht = -hp';$$

d'où

$$\frac{dA}{dt} = hq' \sin ht + hp' \cos ht, \quad \frac{dB}{dt} = hq' \cos ht - hp' \sin ht,$$

et par conséquent

$$A = A_0 + h\int q' \sin ht\, dt + h\int p' \cos ht\, dt,$$

$$B = B_0 + h\int q' \cos ht\, dt - h\int p' \sin ht\, dt.$$

On a, en intégrant par partie,

$$h\int p' \cos ht\, dt = p' \sin ht - \int \frac{dp'}{dt} \sin ht\, dt;$$

mais p' varie avec une telle lenteur, que l'intégrale du second membre est négligeable; nous prendrons donc

$$h\int p' \cos ht\, dt = p' \sin ht,$$

et de même

$$h\int p' \sin ht\, dt = -p' \cos ht, \quad h\int q' \cos ht\, dt = q' \sin ht, \quad h\int q' \sin ht\, dt = -q' \cos ht.$$

Il s'ensuivra

$$A = A_0 + p' \sin ht - q' \cos ht, \quad B = B_0 + p' \cos ht + q' \sin ht,$$

et par conséquent

$$p = A_0 \sin ht + B_0 \cos ht + p', \quad q = -A_0 \cos ht + B_0 \sin ht + q'.$$

Prenons pour plan des xy le plan de l'écliptique à l'époque $t = 0$, de sorte que pour $t = 0$ on ait $p' = 0$, $q' = 0$; nommons d'ailleurs φ_0 et θ_0 les valeurs de φ et de θ à la même époque, en sorte que $\varphi_0 \sin\theta_0$ et $\varphi_0 \cos\theta_0$ soient les valeurs initiales de p et de q. En faisant $t = 0$ dans les équations précédentes, on trouvera

$$B_0 = \varphi_0 \sin\theta_0, \quad A_0 = -\varphi_0 \cos\theta_0.$$

Il en résultera

$$p = \varphi_0 \sin(\theta_0 - ht) + p', \quad q = \varphi_0 \cos(\theta_0 - ht) + q',$$

ou bien

$$\varphi \sin\theta = \varphi_0 \sin(\theta_0 - ht) + \varphi' \sin\theta', \quad \varphi \cos\theta = \varphi_0 \cos(\theta_0 - ht) + \varphi' \cos\theta'.$$

On déduit de là

$$\varphi \cos(\theta - \theta_0 + ht) = \varphi_0 + \varphi' \cos(\theta' - \theta_0 + ht);$$

le second membre ne pourra pas s'annuler, car la théorie des inégalités séculaires des planètes montre que φ' ne dépassera pas la limite $4°51'$, tandis que φ_0 est égale à $5°48'$ environ. Ainsi le cosinus de l'angle $\theta-\theta_0+ht$ ne deviendra jamais nul; mais cet angle est égal à zéro pour $t=0$; donc il restera toujours compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que la longitude du nœud θ ne fera qu'osciller de part et d'autre de la valeur moyenne θ_0-ht, sans jamais s'en écarter de 90 degrés. La quantité $h=\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}$ est donc la vitesse angulaire *moyenne* de la rétrogradation du nœud.

Des valeurs de $\varphi\sin\theta$, $\varphi\cos\theta$, on conclut encore

$$\varphi^2=\varphi_0^2+2\varphi_0\varphi'\cos(\theta'-\theta_0+ht)+\varphi'^2.$$

On voit que l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan fixe Oxy ne reste pas constante; mais il est aisé de reconnaître que l'inclinaison de cette même orbite sur l'écliptique mobile est sensiblement invariable. En effet, nommons I cette dernière inclinaison; le plan des xy, le plan de l'écliptique mobile et celui de l'orbite de la Lune déterminent sur la sphère décrite du point O comme centre un triangle sphérique dont un côté est égal à $\theta-\theta'$, l'angle opposé étant I, et les angles adjacents étant égaux à φ' et à $\pi-\varphi$. On a donc

$$\cos I=\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi'\cos(\theta-\theta'),$$

ou, en négligeant les quatrièmes puissances des petits angles I, φ, φ',

$$\begin{aligned}I^2&=\varphi^2+\varphi'^2-2\varphi\varphi'\cos(\theta-\theta')=(\varphi\sin\theta-\varphi'\sin\theta')^2+(\varphi\cos\theta-\varphi'\cos\theta')^2\\&=(p-p')^2+(q-q')^2.\end{aligned}$$

Mais on a trouvé

$$p-p'=\varphi_0\sin(\theta_0-ht),\quad q-q'=\varphi_0\cos(\theta_0-ht);$$

il en résulte

$$I^2=\varphi_0^2,$$

par où l'on voit que I conserve la valeur constante φ_0. Ainsi, tandis que l'écliptique se déplace dans la suite des siècles par l'action des planètes, le plan de l'orbite de la Lune se déplace en même temps, de façon qu'abstraction faite des inégalités périodiques, l'inclinaison mutuelle de ces deux plans reste invariable.

Il nous reste à intégrer la valeur de $d\varepsilon$. Si l'on négligeait l'action perturbatrice des planètes sur la Terre, on pourrait supposer $\varphi'=0$, et e' serait une constante. On aurait donc

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{n'^2}{n}\left(1+\frac{9}{8}e^2+\frac{3}{2}e'^2-\frac{9}{8}\varphi^2\right);$$

d'où il suivrait, le second membre étant constant,

$$\varepsilon = \text{const} - \frac{n'^2}{n}\left(1 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{9}{8}\varphi^2\right)t.$$

La longitude moyenne de la Lune serait donc égale à $Nt +$ constante, en faisant

$$N = n - \frac{n'^2}{n}\left(1 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{9}{8}\varphi^2\right).$$

La quantité N serait alors la vitesse angulaire moyenne de la Lune, et cette vitesse angulaire serait constante.

Mais, par suite de l'action des planètes, les éléments du mouvement du Soleil varient : si nous faisons abstraction des inégalités périodiques, nous pourrons encore regarder n' comme une constante; mais e', φ', θ' seront affectées d'inégalités séculaires, et la vitesse angulaire moyenne de la Lune, savoir

$$N = n + \frac{d\varepsilon}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{9}{8}\varphi^2 - \frac{3}{2}\varphi'^2 + \frac{21}{8}\varphi\varphi'\cos(\theta - \theta')\right],$$

ne sera plus constante. Mettons dans cette expression pour φ et θ leurs valeurs obtenues ci-dessus : on a trouvé

$$\varphi\sin\theta = \varphi_0\sin(\theta_0 - ht) + \varphi'\sin\theta, \qquad \varphi\cos\theta = \varphi_0\cos(\theta_0 - ht) + \varphi'\cos\theta';$$

il en résulte

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 + \varphi'_2 + 2\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0 - ht - \theta'), \qquad \varphi\cos(\theta - \theta') = \varphi\cos(\theta_0 - ht - \theta') + \varphi',$$

et par conséquent

$$N = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{9}{8}\varphi_0^2 + \frac{3}{8}\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0 - ht - \theta')\right].$$

A la partie

$$n - \frac{n'^2}{n}\left(1 + \frac{9}{8}e^2 - \frac{9}{8}\varphi_0^2\right),$$

qui est constante, répond, dans la longitude moyenne de la Lune, une partie proportionnelle au temps : considérons ensuite le terme

$$-\frac{3}{8}\frac{n'^2}{n}\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0 - ht - \theta');$$

on peut l'intégrer, sans erreur sensible, comme si φ' et θ' étaient des constantes, et il en résulte dans la longitude moyenne de la Lune la partie

$$\frac{3}{8}\frac{n'^2}{nh}\varphi_0\varphi'\sin(\theta_0 - ht - \theta'),$$

ou, en ayant égard à la valeur de h,

$$\frac{1}{2}\varphi_0\varphi'\sin(\theta_0 - ht - \theta').$$

La quantité $\frac{1}{2}\varphi_0\varphi'$ va actuellement en croissant (*); mais elle est extrêmement petite, et dans 25 siècles elle n'atteindra pas 1 minute; le terme dont il s'agit peut donc être négligé.

Il reste à considérer la partie

$$-\frac{3}{2}\frac{n'^2}{n}e'^2$$

de N : l'excentricité e' de l'orbite terrestre va actuellement en diminuant; par conséquent N va en augmentant et le mouvement angulaire de la Lune va en s'accélérant. Mais lorsque l'excentricité e', après avoir atteint un minimum, deviendra croissante, ce qui arrivera dans 240 siècles ou environ, N ira en diminuant et le mouvement angulaire de la Lune se ralentira de plus en plus.

Si l'on se borne aux époques distantes de 25 siècles au plus de l'époque actuelle, on peut regarder e' comme variant proportionnellement au temps et poser

$$e' = e'_0 + \alpha t,$$

d'où, en négligeant le terme en t^2,

$$e'^2 = e'^2_0 + 2\alpha e'_0 t.$$

La partie de N que nous considérons devient alors

$$-\frac{3}{2}\frac{n'^2}{n}e'^2_0 - 3\frac{n'^2}{n}\alpha e'_0 t$$

et il en résulte dans la longitude moyenne de la Lune, outre un terme proportionnel au temps, la partie

$$-\frac{3}{2}\frac{n'^2}{n}\alpha e'_0 t^2$$

qui croît proportionnellement au carré du temps. Lorsqu'on prend l'année julienne

(*) On a, en se bornant à la deuxième puissance du temps,

$$\varphi' = 0'',479t - 0'',000\,0032t^2,$$

où t désigne le temps exprimé en années juliennes et compté à partir du 1er janvier 1850. (*Annales de l'Observatoire*, t. II.)

pour unité de temps, on a

$$\alpha = -0,0000004339 \quad (\textit{Annales de l'Observatoire}, \text{ t. II});$$

il en résulte, pour un siècle,

$$\alpha t = -0,00004339;$$

pour le même intervalle de temps on a sensiblement

$$n' t = 2\pi \times 100,$$

ou, en secondes,

$$129\,600\,000''.$$

Prenant d'ailleurs pour e'_0 la valeur 0,01677 de e' en 1850 et faisant

$$\frac{n'}{n} = 0,07439,$$

on trouve

$$-\frac{3}{2}\frac{n'^2}{n}\alpha e'_0 t^2 = +10'',52:$$

par conséquent, pour un nombre S de siècles à partir de 1850, le terme proportionnel au carré du temps dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune sera $+10'',52\,S^2$. Les approximations ultérieures modifient notablement la valeur du coefficient de S^2; mais ce qui vient d'être dit suffit pour faire comprendre comment les variations de l'excentricité de l'orbite terrestre peuvent influer sur la durée de la révolution sidérale de la Lune.

Les observations nous font connaître la valeur actuelle T_0 de cette durée et par suite la valeur $N_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ de N à l'époque $t = 0$; mais par ce qui précède on a

$$N_0 = n - \frac{n'^2}{n}\left(1 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e_0'^2 - \frac{9}{8}\varphi_0^2\right):$$

telle est l'équation qui, au degré d'approximation dont nous nous contentons jusqu'ici, fournit la valeur de n et par suite celle du rapport $\frac{n'}{n}$ dont on a fait usage tout à l'heure.

Ainsi, en résumant ce qui précède, nous trouvons que le demi grand axe et l'excentricité restent constants, que l'inclinaison de l'orbite sur un plan fixe est variable, mais que l'inclinaison de cette orbite sur l'écliptique mobile reste constante, que le périgée a un mouvement direct pour lequel cette première approximation nous donne une vitesse trop faible de moitié, que le nœud a un mouvement rétrograde dont notre calcul détermine assez exactement la vitesse, que la vitesse angulaire moyenne de la Lune augmente ou diminue selon que l'excentricité de l'orbite terrestre diminue ou augmente, et qu'en conséquence, en se limitant à 25 ou 30 siècles avant ou après l'époque actuelle, on peut considérer la longitude moyenne de la Lune comme se composant d'une partie qui croît proportionnellement au temps et d'un petit terme proportionnel au carré du temps.

Nous allons maintenant compléter ou rectifier ces résultats en conservant dans la fonction perturbatrice non plus seulement les termes dont les arguments sont indépendants de l et de l', mais encore ceux qui contiennent l' sans contenir l. De cette manière nous ne laisserons de côté que des termes dont la période est comparable au mois. Toutefois, dans ce qui va suivre, nous n'aurons plus égard au déplacement de l'écliptique et aux variations de l'excentricité de l'orbite terrestre, les effets dus à ces deux causes ayant été suffisamment indiqués pour notre objet.

Supposant donc $\varphi' = 0$ et supprimant dans R tous les termes dont l'argument dépend de l, nous aurons

$$\begin{aligned} R = n'^2 a^2 \Big[& -\frac{1}{4} - \frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{8}\varphi^2 - \frac{3}{4}e'\cos(l' - \varpi') - \frac{9}{8}e'^2\cos(2l' - 2\varpi') \\ & - \frac{15}{8}e^2\cos(2l' - 2\varpi) - \frac{3}{8}\varphi^2\cos(2l' - 2\theta)\Big], \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{3}{4}n'^2a^2\varphi[1 - \cos(2l' - 2\theta)], \quad \frac{dR}{d\theta} = -\frac{3}{4}n'^2a^2\varphi^2\sin(2l' - 2\theta),$$

$$\frac{dR}{de} = -\frac{3}{4}n'^2a^2e[1 + 5\cos(2l' - 2\varpi)], \quad \frac{dR}{d\varpi} = -\frac{15}{4}n'^2a^2e^2\sin(2l' - 2\varpi),$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{da} = n'^2 a \Big[& -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}e'^2 + \frac{3}{4}\varphi^2 - \frac{3}{2}e'\cos(l' - \varpi') - \frac{9}{4}e'^2\cos(2l' - 2\varpi') \\ & - \frac{15}{4}e^2\cos(2l' - 2\varpi) - \frac{3}{4}\varphi^2\cos(2l' - 2\theta)\Big], \quad \frac{dR}{d\varepsilon} = 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuivra, au degré d'approximation que comporte cette valeur de R,

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\varphi\sin(2l' - 2\theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}[1 - \cos(2l' - 2\theta)],$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{15}{4}\frac{n'^2}{n}e\sin(2l' - 2\varpi), \quad \frac{d\varpi}{dt} = \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}[1 + 5\cos(2l' - 2\varpi)],$$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{n'^2}{n}\Big[& -1 - \frac{9}{8}e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + \frac{9}{8}\varphi^2 - 3e'\cos(l' - \varpi') - \frac{9}{2}e'^2\cos(2l' - 2\varpi') \\ & - \frac{45}{8}e^2\cos(2l' - 2\varpi) - \frac{9}{8}\varphi^2\cos(2l' - 2\theta)\Big]. \end{aligned}$$

On voit d'abord que a et par suite n sont encore des constantes. Ensuite l'équation

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}[1 - \cos(2l' - 2\theta)],$$

ne contenant avec le temps que la seule inconnue θ, pourra s'intégrer séparément. Négligeant les petites inégalités du mouvement du Soleil, nous regarderons l'angle l' comme une quantité qui croît proportionnellement au temps et dont la dérivée est la constante n' : si donc nous posons

$$l' - \theta = u,$$

nous aurons

$$\frac{du}{dt} = n' - \frac{d\theta}{dt} = n' + \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} - \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\cos 2u,$$

ou bien, en faisant $\frac{n'}{n} = \nu$,

$$\frac{du}{n'\left(1 + \frac{3}{4}\nu\right)dt} = 1 - \frac{\frac{3}{4}\nu}{1 + \frac{3}{4}\nu}\cos 2u.$$

Considérons généralement l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \alpha\cos 2y,$$

dans laquelle α désigne un nombre compris entre $+1$ et -1: on en déduit

$$dx = \frac{dy}{1 + \alpha\cos 2y} = \frac{dy}{(1+\alpha)\cos^2 y + (1-\alpha)\sin^2 y} = \frac{d\,\text{tang}\,y}{1 + \alpha + (1-\alpha)\,\text{tang}^2 y},$$

d'où, en intégrant et appelant c une constante arbitraire,

$$x + c = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,\text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\,\text{tang}\,y\right),$$

ou bien

$$\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\,\text{tang}\,y = \text{tang}\left[\sqrt{1-\alpha^2}(x+c)\right], \quad \text{tang}\,y = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\,\text{tang}\left[\sqrt{1-\alpha^2}(x+c)\right].$$

On voit que les arcs y et $\sqrt{1-\alpha^2}\,(x+c)$ passent ensemble par les mêmes multiples de $\frac{\pi}{2}$, et qu'ainsi la différence $y - \sqrt{1-\alpha^2}\,(x+c)$ reste toujours comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; elle est de plus une fonction périodique de l'angle $\sqrt{1-\alpha^2}\,(x+c)$, ne changeant pas quand cet angle augmente de π. Cette dernière conclusion va résulter encore plus évidemment d'une autre forme sous laquelle nous allons présenter la relation entre x et y.

Faisons

$$\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}=\eta, \quad \sqrt{1-\alpha^2}(x+c)=z;$$

l'équation précédente deviendra

$$\operatorname{tang} y=\eta \operatorname{tang} z,$$

et on pourra l'écrire

$$\frac{E^{y\sqrt{-1}}-E^{-y\sqrt{-1}}}{E^{y\sqrt{-1}}+E^{-y\sqrt{-1}}}=\eta\,\frac{E^{z\sqrt{-1}}-E^{-z\sqrt{-1}}}{E^{z\sqrt{-1}}+E^{-z\sqrt{-1}}},$$

E désignant la base des logarithmes népériens : on tire de là

$$E^{2y\sqrt{-1}}=E^{2z\sqrt{-1}}\,\frac{1-\frac{\eta-1}{\eta+1}E^{-2z\sqrt{-1}}}{1-\frac{\eta-1}{\eta+1}E^{2z\sqrt{-1}}};$$

d'où, en prenant les logarithmes des deux membres et développant en séries ceux des binômes $1-\frac{\eta-1}{\eta+1}E^{-2z\sqrt{-1}}$, $1-\frac{\eta-1}{\eta+1}E^{2z\sqrt{-1}}$,

$$\begin{aligned}2y\sqrt{-1}=2z\sqrt{-1}&-\frac{\eta-1}{\eta+1}E^{-2z\sqrt{-1}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^2E^{-4z\sqrt{-1}}-\frac{1}{3}\left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^3E^{-6z\sqrt{-1}}-\dots\\&+\frac{\eta-1}{\eta+1}E^{2z\sqrt{-1}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^3E^{4z\sqrt{-1}}+\frac{1}{3}\left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^3E^{6z\sqrt{-1}}+\dots,\end{aligned}$$

ou, en divisant par $2\sqrt{-1}$,

$$y=z+\left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)\sin 2z+\frac{1}{2}\left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^2\sin 4z+\frac{1}{3}\left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^3\sin 6z+\dots,$$

ou bien encore

$$y=z+\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}\sin 2z+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2\sin 4z+\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^3\sin 6z+\dots.$$

Pour appliquer cela à l'équation différentielle entre u et t obtenue ci-dessus, il suffit de faire

$$y=u, \quad x=n'\left(1+\frac{3}{4}\nu\right)t, \quad \alpha=-\frac{\frac{3}{4}\nu}{1+\frac{3}{4}\nu},$$

d'où

$$\sqrt{1-\alpha^2}=\frac{\sqrt{1+\frac{3}{2}\nu}}{1+\frac{3}{4}\nu}.$$

Si donc nous posons, pour abréger,

$$n'\sqrt{1+\frac{3}{2}\nu}\,(t+C)=\lambda,\quad \frac{\frac{3}{4}\nu}{1+\frac{3}{4}\nu}=\beta,$$

C désignant une constante, nous aurons

$$\operatorname{tang} u=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{2}\nu}}\operatorname{tang}\lambda,$$

$$u=\lambda-\frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}}\sin 2\lambda+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2\sin 4\lambda-\frac{1}{3}\left(\frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}}\right)^3\sin 6\lambda+\ldots,$$

et par conséquent

$$\theta=l'-\lambda+\frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}}\sin 2\lambda-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2\sin 4\lambda+\frac{1}{3}\left(\frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}}\right)^3\sin 6\lambda-\ldots.$$

Cette formule nous montre que la longitude du nœud se compose : 1° d'une partie $\theta_m=l'-\lambda$ qui varie proportionnellement au temps, et qu'on appelle la longitude moyenne du nœud; 2° d'une suite de termes périodiques. On a

$$\lambda=l'-\theta_m;$$

ainsi λ est la distance angulaire moyenne du nœud au Soleil, et par conséquent les inégalités périodiques dont θ est affectée, d'après la formule précédente, sont proportionnelles aux sinus des multiples pairs de cette distance moyenne; leurs périodes sont respectivement la moitié, le quart, le sixième, etc., de la durée d'une révolution synodique du nœud (347 jours environ).

La vitesse angulaire moyenne du nœud est le coefficient de t dans θ_m, c'est-à-dire

$$-n'\left(\sqrt{1+\frac{3}{2}\nu}-1\right);$$

cette valeur est encore plus approchée que la valeur $-\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}$ obtenue ci-dessus.

Cherchons maintenant la valeur de φ : les équations

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\varphi\sin(2l'-2\theta)=-\frac{3}{4}n'\nu\varphi\sin 2u,\quad \frac{du}{dt}=n'\left(1+\frac{3}{4}\nu\right)-\frac{3}{4}n'\nu\cos 2u,$$

nous donnent, en éliminant dt,

$$\frac{d\varphi}{\varphi}=-\frac{\frac{3}{4}\nu\sin 2u\,du}{1+\frac{3}{4}\nu-\frac{3}{4}\nu\cos 2u},$$

d'où, en intégrant et appelant G une constante,

$$\varphi = \frac{G}{\sqrt{1+\frac{3}{4}\nu - \frac{3}{4}\nu\cos 2u}}.$$

Mais de l'équation

$$\operatorname{tang} u = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{2}\nu}} \operatorname{tang}\lambda$$

on déduit aisément

$$\cos 2u = \frac{\frac{3}{4}\nu + \left(1+\frac{3}{4}\nu\right)\cos 2\lambda}{1+\frac{3}{4}\nu + \frac{3}{4}\nu\cos 2\lambda},$$

$$1+\frac{3}{4}\nu - \frac{3}{4}\nu\cos 2u = \frac{1+\frac{3}{2}\nu}{1+\frac{3}{4}\nu + \frac{3}{4}\nu\cos 2\lambda}.$$

Si donc on désigne par g la constante $\frac{G}{\sqrt{1+\frac{3}{2}\nu}}$, on a

$$\varphi = g\sqrt{1+\frac{3}{4}\nu + \frac{3}{4}\nu\cos 2\lambda}.$$

On peut développer $\sqrt{1+\frac{3}{4}\nu + \frac{3}{4}\nu\cos 2\lambda}$ sous la forme

$$A^{(0)} + A^{(1)}\cos 2\lambda + A^{(2)}\cos 4\lambda + A^{(3)}\cos 6\lambda + \ldots,$$

et écrire

$$\varphi = gA^{(0)} + gA^{(1)}\cos 2\lambda + gA^{(2)}\cos 4\lambda + \ldots,$$

par où l'on voit que l'inclinaison φ se compose d'une partie moyenne constante $gA^{(0)}$ et d'une suite de termes périodiques proportionnels aux cosinus des multiples pairs de la distance moyenne du nœud au Soleil.

La longitude du périgée est déterminée par l'équation

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}[1+5\cos(2l'-2\varpi)] = \frac{3}{4}n'\nu[1+5\cos(2l'-2\varpi)].$$

Posons

$$l' - \varpi = u_1;$$

il viendra

$$\frac{du_1}{dt} = n' - \frac{d\varpi}{dt} = n'\left(1-\frac{3}{4}\nu\right) - \frac{15}{4}n'\nu\cos 2u_1$$

ou bien

$$\frac{du_1}{n'\left(1-\frac{3}{4}\nu\right)dt}=1-\frac{\frac{15}{4}\nu}{1-\frac{3}{4}\nu}\cos 2u_1.$$

Cette équation se déduit encore de la formule

$$\frac{dy}{dx}=1+\alpha\cos 2y,$$

en y remplaçant y par u_1, x par $n'\left(1-\frac{3}{4}\nu\right)t$, et α par $-\frac{\frac{15}{4}\nu}{1-\frac{3}{4}\nu}$, d'où

$$\sqrt{1-\alpha^2}=\frac{\sqrt{(1+3\nu)\left(1-\frac{9}{2}\nu\right)}}{1-\frac{3}{4}\nu}.$$

Si donc on fait, pour abréger,

$$n'\sqrt{(1+3\nu)\left(1-\frac{9}{2}\nu\right)}(t+C_1)=\lambda_1,\quad \frac{\frac{15}{4}\nu}{1-\frac{3}{4}\nu}=\beta_1,$$

C_1 désignant une constante, on aura

$$\operatorname{tang} u_1=\sqrt{\frac{1-\frac{9}{2}\nu}{1+3\nu}}\operatorname{tang}\lambda_1,$$

$$u_1=\lambda_1-\frac{\beta_1}{1+\sqrt{1-\beta_1^2}}\sin 2\lambda_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1}{1+\sqrt{1-\beta_1^2}}\right)^2\sin 4\lambda_1-\frac{1}{3}\left(\frac{\beta_1}{1+\sqrt{1-\beta_1^2}}\right)^3\sin 6\lambda_1+\ldots,$$

et par conséquent

$$\varpi=l'-\lambda_1+\frac{\beta_1}{1+\sqrt{1-\beta_1^2}}\sin 2\lambda_1-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1}{1+\sqrt{1-\beta_1^2}}\right)^2\sin 4\lambda_1+\frac{1}{3}\left(\frac{\beta_1}{1+\sqrt{1-\beta_1^2}}\right)^3\sin 6\lambda_1-\ldots.$$

On voit que la longitude du périgée se compose : 1° d'une partie $\varpi_m=l'-\lambda_1$ qui varie proportionnellement au temps, et qu'on appelle la longitude moyenne du périgée; 2° d'une suite d'inégalités périodiques. On a

$$\lambda_1=l'-\varpi_m;$$

ainsi λ_1 est la distance angulaire moyenne du périgée lunaire au Soleil, et par conséquent les inégalités périodiques dont ϖ est affectée sont proportionnelles aux sinus des multiples pairs de cette distance moyenne; leurs périodes sont respectivement la moitié, le quart, le sixième, etc., de la durée d'une révolution synodique du périgée (412 jours environ).

La vitesse angulaire moyenne du périgée est le coefficient de t dans ϖ_m, c'est-à-dire

$$n'\left[1-\sqrt{(1+3\nu)\left(1-\frac{9}{2}\nu\right)}\right]=n'\left(1-\sqrt{1-\frac{3}{2}\nu-\frac{27}{2}\nu^2}\right);$$

elle est positive comme la valeur $+\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}$ obtenue ci-dessus; mais elle est à peu près le double de celle-ci et approche beaucoup plus de la valeur véritable.

Pour trouver e, reprenons les deux équations

$$\frac{de}{dt}=-\frac{15}{4}\frac{n'^2}{n}e\sin(2l'-2\varpi)=-\frac{15}{4}n'\nu e\sin 2u_1,\quad \frac{du_1}{dt}=n'\left(1-\frac{3}{4}\nu\right)-\frac{15}{4}n'\nu\cos 2u_1;$$

elles nous donnent, par l'élimination de dt,

$$\frac{de}{e}=-\frac{\frac{15}{4}\nu\sin 2u_1\,du_1}{1-\frac{3}{4}\nu-\frac{15}{4}\nu\cos 2u_1},$$

d'où, en intégrant et appelant G_1 une constante,

$$e=\frac{G_1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\nu-\frac{15}{4}\nu\cos 2u_1}}.$$

Mais de l'équation

$$\tang u_1=\sqrt{\frac{1-\frac{9}{2}\nu}{1+3\nu}}\tang\lambda_1$$

on déduit aisément

$$\cos 2u_1=\frac{\frac{15}{4}\nu+\left(1-\frac{3}{4}\nu\right)\cos 2\lambda_1}{1-\frac{3}{4}\nu+\frac{15}{4}\nu\cos 2\lambda_1},\quad 1-\frac{3}{4}\nu-\frac{15}{4}\nu\cos 2u_1=\frac{1-\frac{3}{2}\nu-\frac{27}{2}\nu^2}{1-\frac{3}{4}\nu+\frac{15}{4}\nu\cos 2\lambda_1}.$$

Si donc on désigne par g_1 la constante $\dfrac{G_1}{\sqrt{1-\frac{3}{2}\nu-\frac{27}{2}\nu^2}}$, on a

$$e=g_1\sqrt{1-\frac{3}{4}\nu+\frac{15}{4}\nu\cos 2\lambda_1}.$$

On peut développer

$$\sqrt{1-\frac{3}{4}\nu+\frac{15}{4}\nu\cos 2\lambda_1}$$

sous la forme

$$B^{(0)} + B^{(1)}\cos 2\lambda_1 + B^{(2)}\cos 4\lambda_1 + B^{(3)}\cos 6\lambda_1 + \ldots,$$

et écrire

$$e = g_1 B^{(0)} + g_1 B^{(1)}\cos 2\lambda_1 + g_1 B^{(2)}\cos 4\lambda_1 + g_1 B^{(3)}\cos 6\lambda_1 + \ldots,$$

par où l'on voit que l'excentricité e se compose d'une partie moyenne constante et d'une suite de termes périodiques proportionnels aux cosinus des multiples pairs de la distance moyenne du périgée lunaire au Soleil.

Nous avons encore à chercher la valeur de ε : les éléments du mouvement du Soleil étant regardés comme constants, il suffit, pour avoir $\frac{d\varepsilon}{dt}$ en fonction du temps, de remplacer, dans l'expression de cette dérivée, φ, θ, e, ϖ par les valeurs qu'on vient d'obtenir. On a trouvé

$$\varphi^2 = g^2\left(1 + \frac{3}{4}\nu + \frac{3}{4}\nu\cos 2\lambda\right), \quad e^2 = g_1^2\left(1 - \frac{3}{4}\nu + \frac{15}{4}\nu\cos 2\lambda_1\right),$$

$$\cos(2l' - 2\theta) = \cos 2u = \frac{\frac{3}{4}\nu + \left(1 + \frac{3}{4}\nu\right)\cos 2\lambda}{1 + \frac{3}{4}\nu + \frac{3}{4}\nu\cos 2\lambda},$$

$$\cos(2l' - 2\varpi) = \cos 2u_1 = \frac{\frac{15}{4}\nu + \left(1 - \frac{3}{4}\right)\nu\cos 2\lambda_1}{1 - \frac{3}{4}\nu + \frac{15}{4}\nu\cos 2\lambda_1},$$

et, par conséquent,

$$\varphi^2\cos(2l' - 2\theta) = g^2\left[\frac{3}{4}\nu + \left(1 + \frac{3}{4}\nu\right)\cos 2\lambda\right],$$

$$e^2\cos(2l' - 2\varpi) = g_1^2\left[\frac{15}{4}\nu + \left(1 - \frac{3}{4}\nu\right)\cos 2\lambda_1\right].$$

Ces valeurs étant substituées dans l'expression de $\frac{d\varepsilon}{dt}$, il viendra

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = n'\nu\left[-1 - \frac{3}{2}e'^2 + \frac{9}{8}g^2 - \frac{9}{8}(1 + 18\nu)g_1^2 - 3e'\cos(l' - \varpi') - \frac{9}{2}e'^2\cos(2l' - 2\varpi') - \frac{9}{8}g^2\cos 2\lambda - \frac{45}{8}g_1^2\cos 2\lambda_1\right],$$

où l', λ, λ_1 sont des angles qui varient proportionnellement au temps, tandis que les autres lettres désignent des constantes. En ajoutant à n la partie non périodique, on obtient la vitesse angulaire moyenne de la Lune, telle que l'observation doit la donner : si donc on désigne cette vitesse par N, on aura l'équation

$$N = n - n'\nu\left[1 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{9}{8}g^2 + \frac{9}{8}(1 + 18\nu)g_1^2\right],$$

dans laquelle on se rappelle que ν désigne le rapport $\frac{n'}{n}$, et qui servira à déterminer la quantité n que l'observation ne donne pas directement.

La longitude moyenne l s'obtiendra en ajoutant à nt l'intégrale de $d\varepsilon$: on aura donc, en traitant toujours e' comme une constante,

$$l = \mathrm{N}t + \text{const} - 3\nu e' \sin(l' - \varpi') - \frac{9}{4}\nu e'^2 \sin(2l' - 2\varpi')$$
$$- \frac{9}{16}\frac{\nu}{\sqrt{1+\frac{3}{2}\nu}} g^2 \sin 2\lambda - \frac{45}{16}\frac{\nu}{\sqrt{(1+3\nu)\left(1-\frac{9}{2}\nu\right)}} g_1^2 \sin 2\lambda_1.$$

On voit que l se compose d'une partie $\mathrm{N}t$ + constante, qui varie proportionnellement au temps, et de quatre termes périodiques : le premier, qu'on peut écrire $-3\nu e' \sin\zeta'$, a pour argument l'anomalie moyenne du Soleil; il en résulte dans la longitude de la Lune comptée sur l'écliptique une inégalité ayant l'année pour période et qu'on appelle l'*équation annuelle;* le second terme, qu'on peut écrire $-\frac{9}{4}\nu e'^2 \sin 2\zeta'$, répond à une inégalité environ quatre-vingts fois moindre et ayant pour période une demi-année. Les deux autres représentent des inégalités ayant respectivement pour périodes la moitié de la révolution synodique du nœud, et la moitié de la révolution synodique du périgée.

On a intégré $d\varepsilon$ comme si e' était constante; pour avoir égard aux variations de cette quantité, il suffira, comme on l'a déjà dit et dans les limites de temps déjà indiquées ci-dessus, de calculer N en prenant pour e' sa valeur initiale e'_0, et d'ajouter à l un terme proportionnel au carré du temps pour lequel une première approximation nous a donné la valeur $-\frac{3}{2}\frac{n'^2}{n}\alpha e'_0 t^2$, α désignant le coefficient de t dans l'expression de e' : car dans l'intégration des termes périodiques de $d\varepsilon$ qui renferment e' en facteur, on peut, sans erreur sensible, traiter e' comme une constante.

L'analyse précédente nous a fait connaître, au moins d'une manière approchée, les principales inégalités séculaires ou à longues périodes des éléments elliptiques de la Lune. Mais il n'est pas moins nécessaire, si l'on veut se faire une idée du mouvement de cet astre, de rechercher les plus considérables parmi les inégalités à courtes périodes, c'est-à-dire ayant des périodes d'une durée comparable à celle d'une révolution de la Lune. Alors il faudra rétablir dans la fonction perturbatrice les termes dont les arguments dépendent de l et dont nous avions d'abord fait abstraction; puis, après avoir substitué cette fonction dans les seconds membres des formules (2), on pourra suivre, pour les intégrer, la marche que nous allons expliquer.

Nous savons, par ce qui précède, que les éléments θ, ϖ, ε renferment des termes proportionnels au temps qui les font croître ou décroître indéfiniment, tandis que φ, e, a, et par suite n, ne font qu'osciller entre certaines limites. D'après cela, au lieu de supposer tous les éléments constants à la première approximation, nous admettrons d'avance que θ, ϖ, ε contiennent des parties proportionnelles au temps : nous poserons donc

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi, \quad e = e_0 + \delta e, \quad a = a_0 + \delta a, \quad n = n_0 + \delta n,$$

φ_0, e_0, a_0, n_0 étant des constantes dont les deux dernières sont liées par l'équation $n_0^2 a_0^3 = f\mu$, et

$$\theta = \theta_0 + \delta\theta, \quad \varpi = \varpi_0 + \delta\varpi, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon,$$

où θ_0, ϖ_0, ε_0 désignent des constantes augmentées respectivement de quantités ht, jt, kt proportionnelles à t : quant à $\delta\varphi$, δe, δa, δn, $\delta\theta$, $\delta\varpi$, $\delta\varepsilon$, ce sont de petites quantités de l'ordre de la fonction perturbatrice. Nous substituerons ces valeurs dans les formules (2) : les premiers membres deviendront

$$\frac{d\delta\varphi}{dt}, \quad h + \frac{d\delta\theta}{dt}, \quad \frac{d\delta e}{dt}, \quad j + \frac{d\delta\varpi}{dt}, \quad \frac{d\delta a}{dt}, \quad h + \frac{d\delta\varepsilon}{dt};$$

dans les seconds membres, nous négligerons d'abord $\delta\varphi$, $\delta\theta$, ..., de sorte que les arguments des termes périodiques seront des sommes de multiples des angles

$$n_0 t + \varepsilon_0, \quad \varpi_0, \quad \theta_0, \quad l', \quad \varpi', \quad \theta'.$$

Nous intégrerons les valeurs ainsi formées de $d\delta\varphi$, $d\delta\theta$, ..., en ayant soin de supprimer dans les valeurs de $\delta\theta$, $\delta\varpi$, $\delta\varepsilon$ les termes proportionnels au temps, attendu qu'on peut les supposer compris dans θ_0, ϖ_0, ε_0, et nous obtiendrons ainsi les quantités $\delta\varphi$, $\delta\theta$, ..., telles qu'elles résultent de la première approximation, la valeur correspondante de δn se déduisant de l'équation $n^2 a^3 = f\mu$, qui donne

$$\delta n = -\frac{3n}{2a}\delta a.$$

Représentons par $\delta_1\varphi$, $\delta_1\theta$, ..., les valeurs qu'on vient d'obtenir, et posons

$$\varphi = \varphi_0 + \delta_1\varphi + \delta_2\varphi, \quad \theta = \theta_0 + \delta_1\theta + \delta_2\theta, \ldots,$$

$\delta_2\varphi$, $\delta_2\theta$, ..., étant de l'ordre du carré de la fonction perturbatrice; substituons dans les équations (2) en négligeant dans les seconds membres $\delta_2\varphi$, $\delta_2\theta$, ...; développons ces seconds membres suivant les puissances de $\delta_1\varphi$, $\delta_1\theta$, ..., en ne conservant que les premières puissances : les parties indépendantes de $\delta_1\varphi$, $\delta_1\theta$, ..., détruiront précisément les termes $\frac{d\delta_1\varphi}{dt}$, $\frac{d\delta_1\theta}{dt}$, ..., des premiers membres, et si dans les autres parties nous remplaçons les produits de sinus ou de cosinus par des sommes, nous aurons $\frac{d\delta_2\varphi}{dt}, \frac{d\delta_2\theta}{dt}, \ldots$, exprimés par des sommes de termes dont les arguments seront encore formés par la combinaison des angles

$$n_0 t + \varepsilon_0, \quad \varpi_0, \quad \theta_0, \quad l', \quad \varpi', \quad \theta'.$$

Nous intégrerons les valeurs ainsi obtenues de $d\delta_2\varphi$, $d\delta_2\theta, \ldots$, en ayant soin de supprimer dans $\delta_2\theta$, $\delta_2\varpi$, $\delta_2\varepsilon$ les termes proportionnels au temps : nous trouverons de cette manière les valeurs de $\delta_2\varphi$, $\delta_2\theta, \ldots$, telles que les fournit la deuxième approximation.

Nous poserons alors

$$\varphi = \varphi_0 + \delta_1\varphi + \delta_2\varphi + \delta_3\varphi, \quad \theta = \theta_0 + \delta_1\theta + \delta_2\theta + \delta_3\theta \ldots;$$

puis nous procéderons de la même manière à l'approximation suivante, et ainsi de suite.

Ayant poussé le calcul jusqu'à la détermination de $\delta_p\varphi$, $\delta_p\theta, \ldots$, nous égalerons à zéro les termes proportionnels au temps que la dernière intégration introduirait dans $\delta_p\theta$, $\delta_p\varpi$, $\delta_p\varepsilon$, et nous aurons trois équations dont la résolution fera connaître les quantités h, j, k restées jusque-là indéterminées.

Telle est, en supprimant quelques détails, la méthode proposée par Poisson dans le Mémoire sur le mouvement de la Lune déjà cité précédemment. Quand on aura obtenu de cette manière les expressions des six éléments φ, θ, e, ϖ, a, ε, et par suite de n en fonction du temps, il restera à les substituer dans les formules du mouvement elliptique. Toutefois, avant de faire cette substitution, il conviendra de développer en séries de quantités périodiques les valeurs des coordonnées fournies par la théorie du mouvement elliptique; on substituera ensuite dans les formules ainsi développées les valeurs $\varphi_0 + \delta_1\varphi + \delta_2\varphi + \ldots$, $\theta_0 + \delta_1\theta + \delta_2\theta + \ldots$, des éléments; on développera de nouveau suivant les puissances et les produits de $\delta_1\varphi$, $\delta_2\varphi, \ldots$, $\delta_1\theta$, $\delta_2\theta, \ldots$; on remplacera les produits de sinus et de cosinus par des sommes, et alors les parties périodiques des coordonnées se trouveront exprimées par des termes de la forme $\mathrm{A}\cos\alpha$, α étant une somme de multiples des angles déjà énumérés, $n_0 t + \varepsilon_0$, θ_0, ϖ_0, l', θ', ϖ' : chaque terme de ce genre pourra aisément être réduit en Tables, et à l'aide des diverses Tables ainsi construites, on pourra calculer le lieu de la Lune à une époque quelconque.

Adoptant pour coordonnées, suivant l'usage des astronomes, le rayon vecteur r de la Lune, sa longitude L comptée sur l'écliptique et sa latitude Λ, nous allons développer en séries de quantités périodiques les expressions de ces variables que fournit la théorie du mouvement elliptique, mais en négligeant les termes de trois dimensions ou plus relativement aux excentricités et aux inclinaisons. Puis, comme exemple de la méthode qui vient d'être expliquée, nous chercherons, en nous bornant à la première approximation, quelques-unes des inégalités les plus importantes de la longitude.

On a déjà rappelé ci-dessus (p. 44) la valeur de r développée en série suivant les cosinus des multiples de l'anomalie moyenne, valeur qu'on peut écrire

$$r = a\left[1 + \frac{1}{2}e^2 - e\cos(l - \varpi) - \frac{1}{2}e^2\cos(2l - 2\varpi)\right].$$

La longitude L est donnée par l'équation

$$\operatorname{tang}(\mathrm{L} - \theta) = \cos\varphi \operatorname{tang}(v - \theta);$$

mais on a vu ci-dessus que l'équation

$$\operatorname{tang} y = \eta \operatorname{tang} z$$

peut se mettre sous la forme

$$y = z + \frac{\eta - 1}{\eta + 1}\sin 2z + \frac{1}{2}\left(\frac{\eta - 1}{\eta + 1}\right)^2 \sin 2z + \ldots;$$

on a donc

$$\mathrm{L} - \theta = v - \theta - \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}\sin(2v - 2\theta) + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}\right)^2 \sin(4v - 4\theta) - \ldots,$$

ou bien, en négligeant la quatrième puissance de φ,

$$\mathrm{L} = v - \frac{1}{4}\varphi^2 \sin(2v - 2\theta).$$

Mais on a, en négligeant le cube de e,

$$v = \zeta + \varpi + 2e\sin\zeta + \frac{5}{4}e^2\sin 2\zeta = l + 2e\sin(l - \varpi) + \frac{5}{4}e^2\sin(2l - 2\varpi);$$

donc

$$\mathrm{L} = l + 2e\sin(l - \varpi) + \frac{5}{4}e^2\sin(2l - 2\varpi) - \frac{1}{4}\varphi^2\sin(2l - 2\theta).$$

Enfin de la formule

$$\sin\Lambda = \sin\varphi\sin(v - \theta),$$

on conclura

$$\Lambda = \varphi\sin(l - \theta) + e\varphi\sin(2l - \varpi - \theta) - e\varphi\sin(\varpi - \theta).$$

Lorsque, par l'intégration des différentielles des éléments, on aura obtenu ceux-ci sous la forme

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi, \quad \theta = \theta_0 + \delta\theta, \ldots,$$

il faudra substituer ces valeurs dans les seconds membres des formules précédentes et les développer suivant les puissances de $\delta\varphi$, $\delta\theta$, ... Puisque nous voulons ici nous borner à la première approximation, il nous suffira de conserver les premières puissances de $\delta\varphi$, $\delta\theta$, ... Si d'ailleurs nous faisons, pour abréger,

$$l_0 = n_0 t + \varepsilon_0, \quad \delta l = \int \delta n\, dt + \delta\varepsilon,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} r = {} & a_0\left[1 + \frac{1}{2}e_0^2 - e_0\cos(l_0 - \varpi_0) - \frac{1}{2}e_0^2\cos(2l_0 - 2\varpi_0)\right] \\ & + \delta a\left[1 + \frac{1}{2}e_0^2 - e_0\cos(l_0 - \varpi_0) - \frac{1}{2}e_0^2\cos(2l_0 - 2\varpi_0)\right] \\ & + a_0\delta e\,[e_0 - \cos(l_0 - \varpi_0) - e_0\cos(2l_0 - 2\varpi_0)] \\ & + a_0(\delta l - \delta\varpi)\,[e_0\sin(l_0 - \varpi_0) + e_0^2\sin(2l_0 - 2\varpi_0)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{L} = {} & l_0 + 2e_0\sin(l_0 - \varpi_0) + \frac{5}{4}e_0^2\sin(2l_0 - 2\varpi_0) - \frac{1}{4}\varphi_0^2\sin(2l_0 - 2\theta_0) \\ & + \delta l\left[1 + 2e_0\cos(l_0 - \varpi_0) + \frac{5}{2}e_0^2\cos(2l_0 - 2\varpi_0) - \frac{1}{2}\varphi_0^2\cos(2l_0 - 2\theta_0)\right] \\ & + \delta e\left[2\sin(l_0 - \varpi_0) + \frac{5}{2}e_0\sin(2l_0 - 2\varpi_0)\right] - \delta\varphi\,\frac{1}{2}\varphi_0\sin(2l_0 - 2\theta_0) \\ & + \delta\varpi\left[-2e_0\cos(l_0 - \varpi_0) - \frac{5}{2}e_0^2\cos(2l_0 - 2\varpi_0)\right] + \delta\theta\,\frac{1}{2}\varphi_0^2\cos(2l_0 - 2\theta_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda = {} & \varphi_0\sin(l_0 - \theta_0) + e_0\varphi_0\sin(2l_0 - \varpi_0 - \theta_0) - e_0\varphi_0\sin(\varpi_0 - \theta_0) \\ & + \delta l\,[\varphi_0\cos(l_0 - \theta_0) + 2e_0\varphi_0\cos(2l_0 - \varpi_0 - \theta_0)] \\ & + \delta e\,[\varphi_0\sin(2l_0 - \varpi_0 - \theta_0) - \varphi_0\sin(\varpi_0 - \theta_0)] \\ & + \delta\varphi\,[\sin(l_0 - \theta_0) + e_0\sin(2l_0 - \varpi_0 - \theta_0) - e_0\sin(\varpi_0 - \theta_0)] \\ & + \delta\varpi\,[-e_0\varphi_0\cos(2l_0 - \varpi_0 - \theta_0) - e_0\varphi_0\cos(\varpi_0 - \theta_0)] \\ & + \delta\theta\,[-\varphi_0\cos(l_0 - \theta_0) - e_0\varphi_0\cos(2l_0 - \varpi_0 - \theta_0) + e_0\varphi_0\cos(\varpi_0 - \theta_0)]. \end{aligned}$$

Ces formules établies, proposons-nous, comme première application, de trouver ce que l'action perturbatrice du Soleil ajoute au terme principal de l'*équation du centre*, c'est-à-dire à la partie de la longitude qui dépend de l'argument $\zeta_0 = l_0 - \varpi_0$. Pour cela nous allons chercher les termes d'argument $l_0 - \varpi_0$ qui résultent de la substitution des valeurs de δl, δe, ..., dans l'expression précédente de L; ils renfermeront, comme on va le voir, e en facteur, et nous y négligerons les puissances de e supérieures à la première.

Pour les calculer, considérons séparément dans L les quatre parties

$$L_1 = \delta l,$$
$$L_2 = \delta l . 2 e_0 \cos(l_0 - \varpi_0) + \delta e . 2 \sin(l_0 - \varpi_0) - \delta\varpi . 2 e_0 \cos(l_0 - \varpi_0),$$
$$L_3 = \quad \delta l . \frac{5}{2} e_0^2 \cos(2 l_0 - 2\varpi_0) + \delta e . \frac{5}{2} e_0 \sin(2 l_0 - 2\varpi_0) - \delta\varpi . \frac{5}{2} e_0^2 \cos(2 l_0 - 2\varpi_0),$$
$$L_4 = -\delta l . \frac{1}{2} \varphi_0^2 \cos(2 l_0 - 2\theta_0) - \delta\varphi . \frac{1}{2} \varphi_0 \sin(2 l_0 - 2\theta_0) + \delta\theta . \frac{1}{2} \varphi_0^2 \cos(2 l_0 - 2\theta_0),$$

et occupons-nous d'abord de la première. On a

$$\delta l = \int \delta n \, dt + \delta\varepsilon;$$

il faut donc chercher les parties de δn et $\delta\varepsilon$ qui dépendent de l'argument $l_0 - \varpi_0$. Ces parties ne peuvent provenir, à la première approximation, que du terme de R dont l'argument est $l - \varpi$; réduisons donc la valeur de R donnée page 49 à ce terme, et faisons

$$R = \frac{1}{2} n'^2 a^2 e \cos(l - \varpi);$$

nous aurons, en vertu de la relation $n^2 a^3 = f\mu$,

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3n}{2a}\frac{da}{dt} = \frac{3}{a^2}\frac{dR}{d\varepsilon} = -\frac{3}{2} n'^2 e \sin(l - \varpi),$$

et aussi

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{na}\frac{dR}{da} - \frac{e}{2na^2}\frac{dR}{de} = \frac{7}{4}\frac{n'^2}{n} e \cos(l - \varpi).$$

Intégrons les valeurs de dn et de $d\varepsilon$, en y négligeant les inégalités des éléments, c'est-à-dire en y remplaçant n, e, ϖ, l par n_0, e_0, ϖ_0, l_0; comme le coefficient de t dans $l_0 - \varpi_0$ est $n_0 + k - j$, il nous viendra

$$\delta n = \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n_0 + k - j} e_0 \cos(l_0 - \varpi_0), \quad \delta\varepsilon = \frac{7}{4}\frac{n'^2}{n_0(n_0 + k - j)} e_0 \sin(l_0 - \varpi_0),$$

et par conséquent

$$\int \delta n \, dt = \frac{3}{2}\frac{n'^2}{(n_0 + k - j)^2} e_0 \sin(l_0 - \varpi_0).$$

La partie de L_1 qui dépend de l'argument $l_0 - \varpi_0$ est donc

$$\text{(A)} \qquad \left[\frac{3}{2}\frac{n'^2}{(n_0 + k - j)^2} + \frac{7}{4}\frac{n'^2}{n_0(n_0 + k - j)}\right] e_0 \sin(l_0 - \varpi_0).$$

Passons à L_2 : les parties de de, δl, δe, $\delta\varpi$, qu'il y faut substituer, doivent avoir des arguments tels, que, combinés par addition ou soustraction avec $l_0 - \varpi_0$, ils produisent cet argument lui-même; ces arguments ne peuvent donc être que zéro et $2l_0 - 2\varpi_0$. D'après cela nous devons faire

$$R = n'^2 a^2 \left[-\frac{1}{4} - \frac{3}{8} e^2 - \frac{3}{8} e'^2 + \frac{3}{8} \varphi^2 + \frac{3}{8} \varphi'^2 + \frac{1}{8} e^2 \cos(2l - 2\varpi) \right].$$

Mais dans L_2, le terme en δl contient le facteur e_0; nous pouvons donc, dans le calcul de δl, réduire R à la partie $-\frac{1}{4} n'^2 a^2$, ce qui nous donne

$$\frac{dn}{dt} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{n'^2}{n};$$

il en résulte $\delta n = 0$; de plus, en intégrant la valeur de $d\varepsilon$, on ne trouverait qu'un terme proportionnel au temps déjà compris dans ε_0; nous avons donc aussi $\delta\varepsilon = 0$, et par conséquent $\delta l = 0$.

Nous avons ensuite

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{na^2 e} \frac{dR}{d\varpi} = \frac{1}{4} \frac{n'^2}{n} e \sin(2l - 2\varpi);$$

d'où, en intégrant,

$$\delta e = -\frac{1}{8} \frac{n'^2}{n_0(n_0 + k - j)} e_0 \cos(2l_0 - 2\varpi_0)$$

et

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{1}{na^2 e} \frac{dR}{de} = -\frac{1}{4} \frac{n'^2}{n} \cos(2l - 2\varpi);$$

d'où

$$\delta\varpi = -\frac{1}{8} \frac{n'^2}{n_0(n_0 + k - j)} \sin(2l_0 - 2\varpi_0).$$

A l'aide de ces valeurs de δl, δe, $\delta\varpi$, nous trouverons que la partie de L_2, qui dépend de l'argument $l_0 - \varpi_0$, est

$$+\frac{1}{4} \frac{n'^2}{n_0(n_0 + k - j)} e_0 \sin(l_0 - \varpi_0). \tag{B}$$

Dans L_3, les parties de δl, δe, $\delta\varpi$, qu'il faudra substituer, devront avoir pour argument $l_0 - \varpi_0$ ou $3l_0 - 3\varpi_0$; mais la fonction R ne renferme pas de termes d'argument $3l - 3\varpi$, quand on la borne, comme nous l'avons fait page 49, aux termes du quatrième ordre; ainsi, il n'y a à chercher dans δl, δe, $\delta\varpi$ que les parties dépendantes de $l_0 - \varpi_0$. Nous prendrons donc, comme pour L_1,

$$R = \frac{1}{2} n'^2 a^2 e \cos(l - \varpi).$$

La valeur correspondante de δl ne contenant pas e_0 en dénominateur, et devant être multipliée par e_0^2, nous pouvons la supposer nulle. Nous avons ensuite

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{na^2e}\frac{dR}{d\varpi} = \frac{1}{2}\frac{n'^2}{n}\sin(l-\varpi), \quad \frac{d\varpi}{dt} = -\frac{1}{na^2e}\frac{dR}{de} = -\frac{1}{2}\frac{n'^2}{n}\frac{1}{e}\cos(l-\varpi),$$

d'où, en intégrant,

$$\delta e = -\frac{1}{2}\frac{n'^2}{n_0(n_0+k-j)}\cos(l_0-\varpi_0), \quad \delta\varpi = -\frac{1}{2}\frac{n'^2}{n_0(n_0+k-j)}\frac{1}{e_0}\sin(l_0-\varpi_0).$$

Substituant dans L_3, nous obtenons, pour la partie de cette quantité qui dépend de l'argument $l_0-\varpi_0$ la valeur suivante :

$$\text{(C)} \qquad -\frac{5}{4}\frac{n'^2}{n_0(n_0+k-j)}e_0\sin(l_0-\varpi_0).$$

Enfin, pour avoir dans L_4 la partie qui dépend de $l_0-\varpi_0$, il faudrait y substituer les parties de δl, $\delta\varphi$, $\delta\theta$ qui dépendent des arguments

$$l_0+\varpi_0-2\theta_0, \quad 3l_0-\varpi_0-2\theta_0.$$

Mais la fonction R de la page 49 ne renferme aucun terme en $l+\varpi-2\theta$ ni en $3l-\varpi-2\theta$: L_4 ne nous donne donc aucun terme dépendant de $l_0-\varpi_0$.

En réunissant les quantités (A), (B) et (C), nous aurons donc, au degré d'approximation adopté, tout ce que l'action perturbatrice du Soleil ajoute au terme principal de l'équation du centre, savoir

$$\left[\frac{3}{2}\frac{n'^2}{(n_0+k-j)^2}+\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n_0(n_0+k-j)}\right]e_0\sin(l_0-\varpi_0).$$

En négligeant les rapports $\frac{k}{n_0}$, $\frac{j}{n_0}$ qui sont du second ordre, nous aurons, pour la même quantité, l'expression plus simple, mais moins exacte,

$$\frac{9}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}e\sin(l_0-\varpi_0).$$

Comme seconde application, nous chercherons encore la partie de la longitude de la Lune qui a pour argument $l_0-2l'+\varpi_0$, c'est-à-dire le double de la distance angulaire moyenne du Soleil à la Lune moins l'anomalie moyenne de la Lune : cette inégalité est ce qu'on nomme l'*évection*.

Considérons d'abord la portion $L_1=\delta l$ de L : les termes d'argument $l_0-2l'+\varpi_0$ ne peuvent y résulter, à la première approximation, que du terme de R ayant pour argument $l - 2l' + \varpi$; faisons donc

$$R = \frac{9}{4} n'^2 a^2 e \cos(l - 2l' + \varpi).$$

Il en résultera

$$\frac{dn}{dt} = \frac{3}{a^2}\frac{dR}{d\varepsilon} = -\frac{27}{4} n'^2 e \sin(l - 2l' + \varpi),$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{na}\frac{dR}{da} - \frac{e}{2na^2}\frac{dR}{de} = \frac{63}{8}\frac{n'^2}{n} e \cos(l - 2l' + \varpi),$$

et par conséquent

$$\delta n = \frac{27}{4}\frac{n'^2}{n_0 - 2n' + j + k} e_0 \cos(l_0 - 2l' + \varpi_0),$$

$$\delta\varepsilon = \frac{63}{8}\frac{n'^2}{n_0(n_0 - 2n' + j + k)} e_0 \sin(l_0 - 2l' + \varpi_0),$$

$$\int \delta n\, dt = \frac{27}{4}\frac{n'^2}{(n_0 - 2n' + j + k)^2} e_0 \sin(l_0 - 2l' + \varpi_0).$$

Nous concluons de là que la partie de L_1 qui dépend de l'argument $l_0 - 2l' + \varpi_0$ est

$$\text{(D)} \qquad \left[\frac{27}{4}\frac{n'^2}{(n_0 - 2n' + j + k)^2} + \frac{63}{8}\frac{n'^2}{n_0(n_0 - 2n' + j + k)}\right] e_0 \sin(l_0 - 2l' + \varpi_0).$$

Les termes de δl, δe, $\delta\varpi$ qu'il faudra substituer dans L_2 devant avoir pour argument $2l_0 - 2l'$ ou $2l' - 2\varpi_0$, faisons maintenant

$$R = n'^2 a^2 \left[\left(-\frac{3}{4} + \frac{15}{8}e^2 + \frac{15}{8}e'^2 + \frac{3}{8}\varphi^2 + \frac{3}{8}\varphi'^2\right)\cos(2l - 2l') - \frac{15}{8} e^2 \cos(2l' - 2\varpi)\right].$$

A cause du facteur e qui multiplie δl dans L_2, nous pouvons dans le calcul de δl réduire R au seul terme

$$-\frac{3}{4} n'^2 a^2 \cos(2l - 2l'):$$

il en résulte

$$\frac{dn}{dt} = \frac{9}{2} n'^2 \sin(2l - 2l'), \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = -3\frac{n'^2}{n}\cos(2l - 2l'),$$

$$\delta n = -\frac{9}{4}\frac{n'^2}{n_0 - n' + k}\cos(2l_0 - 2l'), \qquad \delta\varepsilon = -\frac{3}{2}\frac{n'^2}{n_0(n_0 - n' + k)}\sin(2l_0 - 2l'),$$

$$\int \delta n\, dt = -\frac{9}{8}\frac{n'^2}{(n_0 - n' + k)^2}\sin(2l_0 - 2l'),$$

$$\delta l = \int \delta n\, dt + \delta\varepsilon = \left[-\frac{9}{8}\frac{n'^2}{(n_0 - n' + k)^2} - \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n_0(n_0 - n' + k)}\right]\sin(2l_0 - 2l').$$

Nous aurons ensuite

$$\frac{de}{dt}=\frac{1}{na^2e}\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}+\frac{e}{2na^2}\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}=-\frac{15}{4}\frac{n'^2}{n}e\sin(2l'-2\varpi)+\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}e\sin(2l-2l'),$$

$$\frac{d\varpi}{dt}=-\frac{1}{na^2e}\frac{d\mathrm{R}}{de}=-\frac{15}{4}\frac{n'^2}{n}\cos(2l-2l')+\frac{15}{4}\frac{n'^2}{n}\cos(2l'-2\varpi),$$

d'où

$$\delta e=-\frac{3}{8}\frac{n'^2}{n_0(n_0-n'+k)}e_0\cos(2l_0-2l')+\frac{15}{8}\frac{n'^2}{n_0(n'-j)}e_0\cos(2l'-2\varpi_0),$$

$$\delta\varpi=-\frac{15}{8}\frac{n'^2}{n_0(n_0-n'+k)}\sin(2l_0-2l')+\frac{15}{8}\frac{n'^2}{n_0(n'-j)}\sin(2l'-2\varpi_0).$$

A l'aide de ces valeurs de δl, δe, $\delta\varpi$, nous trouverons que la partie de L_2 qui dépend de l'argument $l_0-2l'+\varpi_0$ est

$$\text{(E)}\qquad \left[-\frac{9}{8}\frac{n'^2}{(n_0-n'+k)^2}+\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n_0(n_0-n'+k)}+\frac{15}{4}\frac{n'^2}{n_0(n'-j)}\right]e_0\sin(l_0-2l'+\varpi_0).$$

Les termes de δl, δe, $\delta\varpi$ qu'il faudra employer dans L_3 devront dépendre de l'un des arguments $3l_0-2l'-\varpi_0$, $l_0+2l'-3\varpi_0$; pour les obtenir, on devra réduire R aux termes en $3l-2l'-\varpi$ et en $l+2l'-3\varpi$; mais il n'y a pas de terme de ce dernier argument dans la valeur de R de la page 49. Nous ferons donc

$$\mathrm{R}=-\frac{3}{4}n'^2a^2e\cos(3l-2l'-\varpi).$$

Nous pouvons d'ailleurs négliger dans L_3 le terme en δl à cause du facteur e_0^2 qui s'y trouve; cherchons δe et $\delta\varpi$. Nous avons

$$\frac{de}{dt}=\frac{1}{na^2e}\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}=-\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\sin(3l-2l'-\varpi),$$

$$\frac{d\varpi}{dt}=-\frac{1}{na^2e}\frac{d\mathrm{R}}{de}=\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\frac{1}{e}\cos(3l-2l'-\varpi);$$

il s'ensuit

$$\delta e=\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n_0(3n_0-2n'-j+3k)}\cos(3l_0-2l'-\varpi_0),$$

$$\delta\varpi=\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n_0(3n_0-2n'-j+3k)}\frac{1}{e_0}\sin(3l_0-2l'-\varpi_0).$$

A l'aide de ces valeurs, nous trouverons, pour la partie de L_3 qui dépend de l'argument $l_0-2l'+\varpi_0$, l'expression

$$\text{(F)}\qquad -\frac{15}{8}\frac{n'^2}{n_0(3n_0-2n'-j+3k)}e_0\sin(l_0-2l'+\varpi_0).$$

Enfin L_4 ne nous fournit rien; car il faudrait y substituer les parties de δl, $\delta\varphi$, $\delta\theta$ qui dépendent des arguments

$$3l_0-2l'+\varpi_0-2\theta_0,\quad l_0+2l'-\varpi_0-2\theta_0,$$

et la fonction R de la page 49, ne contenant pas de termes en $3l-2l'+\varpi-2\theta$ ou en $l+2l'-\varpi-2\theta$, ne peut rien nous donner de semblable.

Nous obtiendrons donc l'expression approchée de l'évection en réunissant les trois quantités (D), (E), (F), ce qui donne

$$\left[\frac{27}{4}\frac{n'^2}{(n_0-2n'+j+k)^2}+\frac{63}{8}\frac{n'^2}{n_0(n_0-2n'+j+k)}-\frac{9}{8}\frac{n'^2}{(n_0-n'+k)^2}+\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n_0(n_0-n'+k)}\right.$$
$$\left.+\frac{15}{4}\frac{n'^2}{n_0(n'-j)}-\frac{15}{8}\frac{n'^2}{n_0(3n_0-2n'-j+3k)}\right]e_0\sin(l_0-2l'+\varpi_0),$$

formule où le coefficient du sinus n'est pas en erreur de la vingtième partie de sa valeur.

La longitude de la Lune est encore affectée d'une inégalité considérable qu'on nomme la *variation* et qui a pour argument $2l_0-2l'$, c'est-à-dire la valeur moyenne du double de la distance angulaire du Soleil à la Lune. Nous terminerons par la détermination approchée de cette inégalité.

Comme ci-dessus, considérons successivement les parties L_1, L_2, L_3, L_4 de L. Pour obtenir dans L_1 l'argument $2l_0-2l'$, il faut prendre dans R le terme d'argument $2l-2l'$; faisons donc

$$R=n'^2a^2\left(-\frac{3}{4}+\frac{15}{8}e^2+\frac{15}{8}e'^2+\frac{3}{8}\varphi^2+\frac{3}{8}\varphi'^2\right)\cos(2l-2l').$$

Il s'ensuivra, en ne conservant dans les seconds membres que les parties de l'ordre le moins élevé,

$$\frac{dn}{dt}=\frac{9}{2}n'^2\sin(2l-2l'),\qquad \frac{d\varepsilon}{dt}=-3\frac{n'^2}{n}\cos(2l-2l'):$$

de là

$$\delta n=-\frac{9}{4}\frac{n'^2}{n_0-n'+k}\cos(2l_0-2l'),\qquad \delta\varepsilon=-\frac{3}{2}\frac{n'^2}{n_0(n_0-n'+k)}\sin(2l_0-2l'),$$
$$\int\delta n\,dt=-\frac{9}{8}\frac{n'^2}{(n_0-n'+k)^2}\sin(2l_0-2l').$$

La partie de L_1 dépendante de l'argument $2l_0-2l'$ est donc

$$\text{(G)}\qquad \left[-\frac{9}{8}\frac{n'^2}{(n_0-n'+k)^2}-\frac{3}{2}\frac{n'^2}{n_0(n_0-n'+k)}\right]\sin(2l_0-2l').$$

Dans L_2, il faudra que δl, δe, $\delta\varpi$ aient l'un des arguments $3l_0-2l'-\varpi_0$,

$l_0 - 2l' + \varpi_0$; faisons donc

$$\mathrm{R} = \frac{9}{4} n'^2 a^2 e \cos(l - 2l' + \varpi) - \frac{3}{4} n'^2 a^2 e \cos(3l - 2l' - \varpi).$$

La valeur correspondante de δl contiendrait le facteur e_0, et comme dans L_2 elle est multipliée par e_0, il en résulterait des termes en e_0^2 que nous négligeons. Quant à δe et à $\delta\varpi$, nous les tirerons des formules

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{na^2 e}\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi} = -\frac{9}{4}\frac{n'^2}{n}\sin(l - 2l' + \varpi) - \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\sin(3l - 2l' - \varpi),$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{1}{na^2 e}\frac{d\mathrm{R}}{de} = -\frac{9}{4}\frac{n'^2}{n}\frac{1}{e}\cos(l - 2l' + \varpi) + \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\frac{1}{e}\cos(3l - 2l' - \varpi):$$

nous trouvons ainsi

$$\delta e = \frac{9}{4}\frac{n'^2}{n_0(n_0 - 2n' + j + k)}\cos(l_0 - 2l' + \varpi_0) + \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n_0(3n_0 - 2n' - j + 3k)}\cos(3l_0 - 2l' - \varpi_0),$$

$$\delta\varpi = -\frac{9}{4}\frac{n'^2}{n_0(n_0 - 2n' + j + k)}\frac{1}{e_0}\sin(l_0 - 2l' + \varpi_0) + \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n_0(3n_0 - 2n' - j + 3k)}\frac{1}{e_0}\sin(3l_0 - 2l' - \varpi_0),$$

et nous concluons de là que la partie de L_2 dépendante de l'argument $2l_0 - 2l'$ est

$$(\mathrm{H}) \qquad \left[\frac{9}{2}\frac{n'^2}{n_0(n_0 - 2n' + j + k)} - \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n_0(3n_0 - 2n' - j + 3k)}\right]\sin(2l_0 - 2l').$$

Dans L_3, il faudrait employer les parties de δl, δe, $\delta\varpi$ ayant pour argument $4l_0 - 2l' - 2\varpi_0$, ou $2l' - 2\varpi_0$, et ces parties proviendraient des termes de R ayant pour arguments $4l - 2l' - 2\varpi$ et $2l' - 2\varpi$. Mais ces termes de R contenant le facteur e^2, les parties correspondantes de L_3 renfermeraient le facteur e_0^2; nous devons donc les négliger.

On reconnaîtrait d'une manière toute semblable que les parties de L_4 qui dépendent de l'argument $2l_0 - 2l'$ renferment le facteur φ_0^2 et doivent en conséquence être négligées. Nous obtiendrons donc l'expression approchée de la variation en ajoutant les deux quantités (G) et (H); il nous vient ainsi pour cette inégalité la formule

$$\left[-\frac{9}{8}\frac{n'^2}{(n_0 - n' + k)^2} - \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n_0(n_0 - n' + k)} + \frac{9}{2}\frac{n'^2}{n_0(n_0 - 2n' + j + k)} \right.$$
$$\left. - \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n_0(3n_0 - 2n' - j + 3k)}\right]\sin(2l_0 - 2l'),$$

où, comme pour l'évection, l'erreur du coefficient n'est guère que la vingtième partie de sa valeur.

Je ne pousserai pas plus loin cette analyse, nécessairement très-incomplète, des principales circonstances du mouvement de la Lune : les calculs qui précèdent nous en ont expliqué les perturbations les plus considérables et nous ont fourni de ces perturbations une évaluation approchée; le but que je m'étais proposé se trouve donc atteint. Le lecteur désireux d'approfondir ce sujet pourra consulter, soit la *Mécanique céleste* et le Mémoire de Poisson déjà cité à la page 39, soit les travaux des auteurs qui, comme MM. Plana, Hansen, Delaunay, se sont proposé de déterminer théoriquement le mouvement de la Lune avec une précision au moins égale à celle des observations astronomiques.