

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE BERTHELOT

***D*-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 29, n° 2 (1996), p. 185-272

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1996_4_29_2_185_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

D-MODULES ARITHMÉTIQUES I. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS DE NIVEAU FINI

PAR PIERRE BERTHELOT

ABSTRACT. – Let p be a prime number, S a $\mathbb{Z}_{(p)}$ -scheme, $X \rightarrow S$ a smooth morphism of schemes. Using a weaker form of the classical notion of divided powers on an ideal, we construct on X an inductive system of sheaves of differential operators $\mathcal{D}_X^{(m)}$, which are locally generated by divided powers of derivations up to order p^m , and therefore have better finiteness than the usual sheaf of differential operators. On a smooth p -adic formal scheme \mathcal{X} , we also introduce the p -adic completion $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ of $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, and the sheaf $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger} = \varinjlim_m \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. We prove that the sheaves $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ and $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger} = \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger} \otimes \mathbb{Q}$ are coherent, and that theorems A and B hold for coherent modules on these rings. Finally, we construct analogous sheaves of differential operators with overconvergent singularities along a divisor, and show that overconvergent isocrystals can be viewed as coherent modules over these rings.

Introduction

Cet article est le premier d'une série consacrée au problème des six opérations de Grothendieck pour la cohomologie p -adique des variétés algébriques sur un corps k de caractéristique p .

Grâce à la cohomologie rigide ([2], [5]), on peut définir, pour tout k -schéma séparé de type fini X , des groupes de cohomologie p -adique qui généralisent d'une part la cohomologie cristalline lorsque X est propre et lisse sur k , d'autre part la cohomologie de Dwork-Monsky-Washnitzer lorsque X est affine et lisse sur k . Par contre, on ne disposait pas jusqu'ici, dans le cas p -adique, d'une catégorie de coefficients suffisamment stable par les opérations usuelles (et en particulier par image directe) pour pouvoir utiliser avec toute leur puissance les méthodes géométriques standard en cohomologie complexe ou en cohomologie ℓ -adique. Les seuls coefficients étudiés jusqu'à présent sont les isocristaux, qui constituent une extension aux variétés de caractéristique p de la notion de fibré à connexion intégrable, et ne sont donc pas stables par image directe par un morphisme quelconque, notamment par une immersion. Rappelons néanmoins que, dans certaines situations géométriques favorables comme la réduction semi-stable, l'introduction des schémas logarithmiques ([18], [25], [28], etc.) permet d'étendre les résultats dont on dispose classiquement dans le cas de morphismes propres et lisses. Par contre, dans des situations plus générales, des phénomènes spécifiques à la caractéristique p et plus difficilement accessibles par les techniques logarithmiques peuvent se produire. Par exemple, dans le cas de revêtements sauvagement ramifiés, des singularités irrégulières peuvent apparaître : les

isocristaux de Dwork, fournis par le revêtement d'Artin-Schreier ([17], [3]), en constituent un exemple. Il est alors intéressant de disposer de coefficients plus généraux.

Pour essayer de construire une catégorie de coefficients stable par les six opérations, la démarche que nous entreprenons s'inspire de la théorie algébrique des « coefficients de de Rham » en caractéristique 0. Cette théorie, dont l'existence avait été conjecturée par Grothendieck vers le milieu des années soixante (elle est notamment sous-jacente aux questions posées dans [21] sur l'algébricité de la suite spectrale de Leray – voir aussi [22, 1.5]), résulte des travaux de Deligne sur les fibrés à connexion régulière [16], et du développement de l'analyse algébrique, grâce aux travaux de Sato-Kashiwara-Kawai, Bernstein, Mebkhout, etc. La correspondance de Riemann-Hilbert, établie par Kashiwara ([26], [27]) et Mebkhout ([32], [33]), fournit le lien entre la théorie algébrique des systèmes différentiels, et la théorie topologique des faisceaux constructibles : rappelons qu'on peut associer, à toute variété algébrique lisse X sur \mathbb{C} , la catégorie dérivée bornée $D_h^b(\mathcal{D}_X)$ des complexes à cohomologie holonome ; c'est une sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée des modules à gauche sur le faisceau \mathcal{D}_X des opérateurs différentiels de X , qui vérifie les propriétés suivantes (voir [11], [34]) :

a) Pour X variable, $D_h^b(\mathcal{D}_X)$ est stable par les quatre opérations de base de la théorie des \mathcal{D}_X -modules : dualité interne, produit tensoriel externe, image directe ordinaire, image inverse exceptionnelle ;

b) Si $D_c^b(\mathbb{C}_X)$ désigne la catégorie dérivée bornée des complexes de \mathbb{C} -espaces vectoriels à cohomologie constructible sur l'espace analytique X^{an} associé à X , il existe un foncteur $DR : D_h^b(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_c^b(\mathbb{C}_X)$, et une sous-catégorie pleine $D_{hr}^b(\mathcal{D}_X)$ de $D_h^b(\mathcal{D}_X)$, la catégorie dérivée bornée des complexes à cohomologie holonome régulière, tels que la restriction de DR à $D_{hr}^b(\mathcal{D}_X)$ soit une équivalence de catégories, et commute aux quatre foncteurs précédents.

Rappelons de plus que les six opérations cohomologiques de Grothendieck sur $D_c^b(\mathbb{C}_X)$ (à savoir \otimes , $\mathcal{H}om$, f^* , f_* , $f^!$, $f_!$) peuvent être reconstruites à partir des quatre foncteurs précédents (voir [34, II 9.3.1]).

Soient maintenant k un corps parfait de caractéristique p , $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k , et X une variété lisse sur k . La méthode que nous commençons à développer ici consiste à supposer dans un premier temps X relevable en un schéma formel \mathcal{X} lisse sur W , et à construire sur \mathcal{X} une famille de faisceaux d'anneaux d'opérateurs différentiels $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, ayant pour limite inductive un faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ qui opère naturellement sur divers $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules liés à la construction de la cohomologie rigide de X . L'idée de base consiste à remplacer le faisceau des opérateurs différentiels usuels $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$, engendré par la famille de tous les opérateurs de la forme $\partial_i^{p^j}/p^{j!}$, où les ∂_i sont les dérivées partielles par rapport à un système de coordonnées locales, par une famille de faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ engendrés par un nombre fini de tels opérateurs ; un exemple classique en cohomologie cristalline en est le faisceau engendré par les seules dérivations, noté ici $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(0)}$, dont l'action équivaut à la donnée d'une connexion intégrable.

Il est alors frappant de constater que la description du faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ obtenu par complétion et passage à la limite inductive à partir des faisceaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ fait apparaître les conditions de convergence de Monsky-Washnitzer. Il semble donc naturel d'espérer que les propriétés

de finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer – et, plus généralement, de la cohomologie rigide – proviennent de propriétés de finitude sur le faisceau $\mathcal{D}_{X, \mathbb{Q}}^\dagger := \mathcal{D}_X^\dagger \otimes \mathbb{Q}$, de même que la finitude de la cohomologie de de Rham d’une variété X sur un corps de caractéristique 0 résulte de la préservation de l’holonomie par les opérations cohomologiques sur les \mathcal{D}_X -modules. On peut en tous cas montrer que $\mathcal{D}_{X, \mathbb{Q}}^\dagger$ est un faisceau d’anneaux cohérent (quoique non noëthérien), et définir pour les $\mathcal{D}_{X, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules à gauche cohérents (éventuellement munis d’une action de Frobenius) des opérations cohomologiques et une notion d’holonomie prolongeant celles dont on dispose pour les \mathcal{D}_X -modules holonomes en caractéristique 0. On peut alors raisonnablement conjecturer que, pour X propre et lisse, la catégorie dérivée $D_h^b(\mathcal{D}_{X, \mathbb{Q}}^\dagger)$ est stable pour ces opérations. De plus, la catégorie $D_h^b(\mathcal{D}_{X, \mathbb{Q}}^\dagger)$ et les opérations cohomologiques correspondantes ne dépendent, à isomorphisme canonique près, que de la réduction modulo p des schémas considérés, et on espère pouvoir étendre leur définition au cas d’un k -schéma de type fini arbitraire par plongement dans un schéma propre et lisse.

Les premiers résultats dans cette direction ont été annoncés dans [4], où nous avons aussi montré comment, lorsque X est propre sur k , la cohomologie rigide d’un ouvert Y de X peut être calculée comme cohomologie de de Rham d’un complexe de $\mathcal{D}_{X, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules. Dans le présent article, consacré à la construction et aux propriétés de cohérence des anneaux d’opérateurs différentiels considérés, nous donnons la démonstration complète de ces résultats, en les généralisant au cas des opérateurs à singularités surconvergentes le long d’un diviseur. La définition et les propriétés des opérations cohomologiques sur les $\mathcal{D}_{X, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules, ainsi que leur caractère intrinsèque par rapport à X , seront l’objet des articles suivants.

La construction des faisceaux d’opérateurs $\mathcal{D}_X^{(m)}$, qui s’applique à tout schéma lisse sur une base où les entiers premiers à un nombre premier p donné sont inversibles, repose de manière essentielle sur un affaiblissement de la notion d’idéal à puissances divisées : pour un entier m fixé, et un idéal I donné, on requiert seulement de pouvoir définir les puissances divisées des éléments x^{p^m} , avec $x \in I$ (cf. 1.3.1 pour une définition en forme de cette structure, que nous appellerons *PD-structure partielle de niveau m sur I*). La première partie de cet article est consacrée à l’étude de cette notion, qui redonne la notion usuelle pour $m = 0$; pour la commodité des références ultérieures, nous y avons regroupé des définitions et résultats dont certains ne seront utilisés que dans les articles suivants. Mentionnons ici qu’une telle structure permet encore de définir pour tout $k \geq 1$ des applications de *puissances divisées partielles* de I dans I , notées $x \mapsto x^{\{k\}}$, qui satisfont des relations analogues aux relations habituelles entre puissances divisées, voir 1.3.5 ; en particulier, elles vérifient les relations $q! x^{\{k\}} = x^k$, avec $k = p^m q + r$, $0 \leq r < p^m$. Partant d’un idéal I arbitraire, on dispose encore d’une construction universelle fournissant une « enveloppe à puissances divisées partielles de niveau m » de I . Appliquée à l’idéal d’augmentation d’une algèbre de polynômes $A[t]$, elle définit une *algèbre de polynômes à puissances divisées partielles* de niveau m , qui est un A -module libre ayant pour base les « monômes » $t^{\{k\}}$.

Signalons au passage que l’idéal maximal d’un anneau de valuation discrète d’inégales caractéristiques peut toujours être muni d’une PD-structure partielle de niveau m si m est assez grand. On peut alors utiliser les PD-structures partielles pour construire des variantes

« de niveau m » du site cristallin usuel, qui permettent dans certains cas d'obtenir des résultats lorsque la base est un anneau de valuation discrète de ramification arbitraire : par exemple, on peut de la sorte donner une démonstration du théorème de comparaison (à isogénie près) entre cohomologie cristalline de X et cohomologie de de Rham de \mathcal{X} identique à celle dont on dispose pour $e \leq p - 1$, et ne faisant donc pas appel à l'action du Frobenius comme dans [10]. De même, combinant ces techniques avec les résultats de la dernière partie du présent article, il est possible de donner une construction de nature cristalline de la cohomologie rigide. Ces questions ne seront pas abordées ici, mais nous y reviendrons dans un article ultérieur.

Suivant la méthode utilisée par Grothendieck dans [EGA IV], nous définissons dans la deuxième partie les faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ en dualisant les enveloppes à puissances divisées partielles nilpotentes $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ de l'idéal de la diagonale. Le résultat essentiel 1.5.3, qui étend aux enveloppes à puissances divisées de certains idéaux réguliers la description donnée plus haut pour une algèbre de polynômes, fournit le théorème de structure des faisceaux $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ grâce auquel on peut décrire explicitement les faisceaux d'opérateurs différentiels obtenus. On montre ainsi que les $\mathcal{D}_X^{(m)}$ sont engendrés par les opérateurs de la forme $\partial_i^{p^j}/p^j!$, avec $j \leq m$. Par exemple, si \mathcal{V} est un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0, p)$, de corps des fractions K et si $X = \mathbb{A}_{\mathcal{V}}^1$ est la droite affine sur \mathcal{V} , on dispose d'homomorphismes injectifs

$$\Gamma(\mathbb{A}_{\mathcal{V}}^1, \mathcal{D}_X^{(m)}) \hookrightarrow \Gamma(\mathbb{A}_{\mathcal{V}}^1, \mathcal{D}_X) \hookrightarrow \Gamma(\mathbb{A}_K^1, \mathcal{D}_{X_K}) = K[t, \partial],$$

où t est une coordonnée sur $\mathbb{A}_{\mathcal{V}}^1$ et ∂ la dérivation correspondante. Cette injection identifie alors $\Gamma(\mathbb{A}_{\mathcal{V}}^1, \mathcal{D}_X^{(m)})$ à la sous- \mathcal{V} -algèbre $\mathcal{V}[t, \partial, \partial^p/p!, \dots, \partial^{p^m}/p^m!]$ de $K[t, \partial]$, qu'on peut encore décrire comme étant le sous- \mathcal{V} $[t]$ -module libre ayant pour base les opérateurs $q! \partial^k/k!$, où $k = p^m q + r$, $0 \leq r < p^m$.

Si \mathcal{V} est complet, et si \mathcal{X} est un \mathcal{V} -schéma formel lisse, nous introduisons ensuite le complété p -adique $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, et nous donnons alors la description en termes de conditions de Monsky-Washnitzer du faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger$, défini comme limite inductive des faisceaux $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. Ainsi, si l'on considère le cas où $\mathcal{X} = \text{Spf } \mathcal{V}\{t\}$ est la droite affine formelle sur \mathcal{V} , on vérifie que $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger)$ peut être décrit par

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger) = \left\{ \sum_{i, k \geq 0} \alpha_{i, k} t^i \partial^k/k! \mid \begin{array}{l} \alpha_{i, k} \in \mathcal{V}; \quad \forall k, \alpha_{i, k} \rightarrow 0 \text{ pour } i \rightarrow +\infty; \\ \exists c, \eta \in \mathbb{R}, \eta < 1, \text{ tels que } \forall i, k, |\alpha_{i, k}| \leq c \eta^k \end{array} \right\}.$$

Dans la troisième partie, nous étudions les propriétés de cohérence des faisceaux $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$. A la différence du faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ des opérateurs différentiels usuels, les faisceaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ sont des faisceaux d'anneaux noethériens. Pour la commodité des références, nous rappelons d'abord brièvement comment s'étendent au cas non commutatif les résultats classiques sur les complétés d'anneaux noethériens. Nous en déduisons la cohérence des faisceaux $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, et les théorèmes A et B pour les $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -modules cohérents, ainsi que les résultats analogues pour $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} = \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \otimes \mathbb{Q}$. Le résultat le plus important de cette partie est alors le théorème 3.5.3, établissant la platitude de $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m+1)}$ sur $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$. La cohérence du

faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ en résulte, de même que les théorèmes A et B pour les $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents.

Les résultats précédents sont en fait prouvés dans un contexte plus général, permettant de les appliquer aux opérateurs différentiels à coefficients dans une $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbre \mathcal{B} munie d'une action de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. Dans la dernière partie, nous considérons une immersion ouverte $j : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$, de réduction $Y \hookrightarrow X$ sur k , telle que le complémentaire de Y soit le support d'un diviseur $Z \subset X$. Nous montrons alors comment associer de manière canonique à ces données des faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbres $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)$, munis d'une action de $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, qui sont des modèles entiers de certaines algèbres de fonctions « surconvergentes » le long de Z (au sens de la cohomologie rigide [2]). En passant à la limite inductive sur m , on obtient le faisceau, noté $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)$, des fonctions sur \mathcal{Y} à singularités surconvergentes le long de Z , grâce auquel on définit un faisceau d'opérateurs différentiels sur \mathcal{X} , noté $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)$, dont les coefficients appartiennent à $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)$. Si l'on reprend l'exemple de la droite affine formelle sur \mathcal{V} considéré plus haut, avec pour diviseur $Z = \{0\}$, on obtient ainsi pour sections globales de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ l'anneau d'opérateurs différentiels

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}) = \left\{ \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ k \geq 0}} \alpha_{i, k} t^i \partial^k / k! \mid \begin{array}{l} \alpha_{i, k} \in K; \quad \forall k, \alpha_{i, k} \rightarrow 0 \text{ pour } i \rightarrow +\infty; \\ \exists c, \eta \in \mathbb{R}, \eta < 1, \text{ tels que } \forall i, k, |\alpha_{i, k}| \leq c \eta^{k + \sup(0, -i)} \end{array} \right\},$$

dont les coefficients convergent hors d'un disque de rayon < 1 à l'origine. L'introduction du faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)$, qui est un sous-faisceau du faisceau image directe usuel $j_* \mathcal{D}_{\mathcal{Y}}^\dagger$, permet de donner un sens à la notion de « $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}^\dagger$ -module sur \mathcal{Y} à singularités surconvergentes le long de Z ». Par une extension du théorème de platitude 3.5.3, nous montrons la cohérence du faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$. Nous montrons également la fidèle platitude sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ du faisceau $j_* \mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^\dagger$. Enfin, nous terminons ce premier article en montrant que les isoscristaux sur Y , surconvergentes le long de Z , peuvent s'interpréter comme des $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules, cohérents sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ et sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$, (théorèmes 4.4.5 et 4.4.12), étendant ainsi les résultats obtenus dans [4] pour les isoscristaux convergents. Le lecteur pourra se reporter à [4] ou à [20] pour différents exemples de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents en liaison avec la cohomologie rigide.

Rappelons pour finir que Mebkhout et Narvaez ont également entrepris l'étude des coefficients p -adiques [35], par des méthodes voisines, mais quelque peu différentes des nôtres, reposant sur la notion de schéma faiblement formel introduite par Meredith [36] plutôt que sur les schémas formels classiques utilisés dans le présent article. L'avantage du point de vue que nous adoptons ici est de permettre de travailler modulo p^i , et de bien se prêter aux comparaisons avec la cohomologie cristalline et la cohomologie rigide. Pour pouvoir prendre en compte les conditions de surconvergence à l'infini dans le cas d'une variété ouverte, nous serons alors amenés à introduire une compactification de celle-ci, et à utiliser les techniques que nous commençons à développer dans la quatrième partie de cet article pour l'étude de la surconvergence à l'infini.

Dans les articles suivants de cette série ([6], [7]), nous commencerons l'étude des foncteurs image inverse et image directe. En particulier, nous montrerons la conservation

de la cohérence par image inverse par un morphisme lisse, et par image directe par un morphisme propre, ainsi qu'un théorème de descente par Frobenius qui joue un rôle crucial dans la théorie des $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules. Dans un article ultérieur, nous construirons la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module muni d'une action de Frobenius (que nous appellerons F - $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module), et nous prouverons l'inégalité de Bernstein, ainsi qu'un théorème de l'indice analogue à celui de Dubson (cf. [15], [31]) pour les F - $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules holonomes sur un schéma propre et lisse.

La gestation de cette théorie a beaucoup bénéficié des discussions que j'ai pu avoir avec G. Laumon et Z. Mebkhout, à qui je tiens à exprimer toute ma gratitude. La rédaction du présent article a été achevée lors de séjours effectués en 1993 au Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, et à l'Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge : qu'ils soient aussi remerciés pour l'excellente ambiance de travail que j'ai pu y trouver.

Conventions générales

Dans tout cet article, on fixe un nombre premier p , et on note $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de \mathbb{Z} par rapport à l'idéal (p) . Pour tout anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0, p)$, la valuation p -adique est normalisée par $v_p(p) = 1$, et la valeur absolue correspondante définie par $|a| = p^{-v_p(a)}$.

Nous adopterons les conventions usuelles de l'analyse concernant les multi-indices ; nous noterons $\underline{1}_i$ le multi-indice dont tous les termes sont 0 sauf le i -ième, égal à 1. Si $\underline{k} = (k_1, \dots, k_d)$, nous poserons $|\underline{k}| = k_1 + \dots + k_d$ (en espérant que le soulignement permettra de ne pas confondre cette notation avec celle de la valeur absolue, archimédienne ou p -adique, d'un entier k).

1. Puissances divisées partielles

Nous introduisons ici, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la notion de structure partielle d'idéal à puissances divisées de niveau m sur un idéal I d'une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre A . Il s'agit d'une généralisation de la notion usuelle de PD-structure, qu'on retrouve pour $m = 0$, et qui consiste essentiellement à se donner un idéal à puissances divisées $(J, \gamma) \subset I$ tel que, pour tout $x \in I$, on ait $x^{p^m} \in J$. Une telle structure permet notamment de définir sur I des applications de puissances divisées partielles $x \mapsto x^{\{k\}}$ (dépendant de m), qui vérifient des relations du même type que celles des opérations de puissances divisées usuelles (voir 1.3.5-1.3.6). Ces relations font intervenir certaines variantes des coefficients binômiaux, que nous définirons et dont nous étudierons la valuation p -adique dans la section 1.1. Dans la section 1.2, nous donnerons quelques compléments à [1] sur les conditions de compatibilité entre puissances divisées. Celles-ci jouent un rôle important dans la théorie des PD-structures partielles, car c'est en imposant des conditions de compatibilité aux puissances divisées naturelles de p que l'on peut obtenir de bonnes propriétés d'additivité. La section 1.3 sera consacrée à la définition et aux propriétés de base de la notion de

m -PD-idéal. Nous y définirons en particulier les opérations $x^{\{k\}}$, ainsi que la filtration m -PD-adique qui s'en déduit, et qui, comme la filtration PD-adique habituelle, généralise la filtration I -adique. L'outil essentiel dans l'utilisation des m -PD-idéaux est la construction de l'enveloppe à puissances divisées d'un idéal, qui sera l'objet de 1.4. Le résultat principal de ce chapitre est alors le théorème 1.5.3, qui fournit pour certains idéaux réguliers une description explicite des enveloppes à puissances divisées correspondantes et de leur filtration m -PD-adique, montrant que leur structure est essentiellement celle d'une algèbre de polynômes à puissances divisées partielles, explicitée en 1.5.1.

1.1. Coefficients binômiaux modifiés

La théorie des puissances divisées partielles amène à définir des coefficients binômiaux modifiés. Rappelons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valuation p -adique $v_p(k!)$ est donnée par

$$(1.1.0.1) \quad v_p(k!) = (k - \sigma(k))/(p - 1),$$

où l'on pose $k = \sum_i a_i p^i$, avec $0 \leq a_i \leq p - 1$, et $\sigma(k) = \sum_i a_i$. Pour $k = k' + k''$, avec $k', k'' \in \mathbb{N}$, on en déduit la valuation p -adique des coefficients binômiaux

$$(1.1.0.2) \quad v_p \left(\binom{k}{k'} \right) = (\sigma(k') + \sigma(k'') - \sigma(k))/(p - 1).$$

LEMME 1.1.1. – Soient $k = k' + k''$, avec $k', k'' \in \mathbb{N}$, et soient

$$k = \sum_i a_i p^i, \quad k' = \sum_i a'_i p^i, \quad k'' = \sum_i a''_i p^i,$$

les développements en base p de k, k', k'' . Alors on a

$$(1.1.1.1) \quad \sigma(k) \leq \sigma(k') + \sigma(k''),$$

avec égalité si et seulement si $a_i = a'_i + a''_i$ pour tout i .

L'inégalité résulte de (1.1.0.2); il est clair qu'il y a égalité lorsque $a_i = a'_i + a''_i$ pour tout i . Si ce n'est pas le cas, soient i_0 le plus petit indice tel que $a_i \neq a'_i + a''_i$, et i_1 le plus petit indice supérieur à i_0 tel que $a'_i + a''_i < p - 1$. On a alors

$$\begin{aligned} a_{i_0} &= a'_{i_0} + a''_{i_0} - p < a'_{i_0} + a''_{i_0} - 1, \\ a_i &= a'_i + a''_i - p + 1 < a'_i + a''_i \quad \text{pour } i_0 < i < i_1, \\ a_{i_1} &= a'_{i_1} + a''_{i_1} + 1, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité

$$\sum_{i \leq i_1} a_i < \sum_{i \leq i_1} a'_i + \sum_{i \leq i_1} a''_i,$$

dont l'assertion résulte aussitôt.

1.1.2. Fixons un entier $m \in \mathbb{N}$. Pour $k = k' + k''$, avec $k', k'' \in \mathbb{N}$, soient $k = p^m q + r$, $k' = p^m q' + r'$, $k'' = p^m q'' + r''$ les divisions euclidiennes de k , k' et k'' par p^m . On introduit alors les coefficients

$$(1.1.2.1) \quad \left\{ \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\}_{(m)} := \frac{q!}{q'! q''!},$$

$$(1.1.2.2) \quad \left\langle \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\rangle_{(m)} := \binom{k}{k'} \left\{ \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\}_{(m)}^{-1}.$$

Lorsqu'aucune confusion n'en résultera, nous omettrons l'indice (m) . Pour $m = 0$, on a simplement pour tout k

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\}_{(0)} = \binom{k}{k'}, \quad \left\langle \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\rangle_{(0)} = 1,$$

alors que, pour m quelconque et $k < p^m$, on a

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\}_{(m)} = 1, \quad \left\langle \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\rangle_{(m)} = \binom{k}{k'}.$$

LEMME 1.1.3. – (i) *Quels que soient les entiers positifs m, k, k' , on a*

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\}_{(m)} \in \mathbb{N}, \quad \left\langle \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\rangle_{(m)} \in \mathbb{Z}_{(p)}.$$

(ii) *Soient j , et $q' \leq q$ trois entiers positifs. Si $j \geq m$, ou si $q < p$, on a*

$$\left\langle \begin{matrix} p^j q \\ p^j q' \end{matrix} \right\rangle_{(m)} \in \mathbb{Z}_{(p)}^*.$$

(iii) *Quels que soient les entiers positifs $j, r < p^j$ et q , on a*

$$\left\langle \begin{matrix} p^j q + r \\ p^j q \end{matrix} \right\rangle_{(m)} \in \mathbb{Z}_{(p)}^*.$$

La première assertion résulte de ce que $q \geq q' + q''$. Comme $\sigma(k) = \sigma(q) + \sigma(r)$ (resp. $\sigma(k')$, $\sigma(k'')$), on déduit de (1.1.0.1) l'égalité

$$(1.1.3.1) \quad v_p \left(\left\langle \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\rangle_{(m)} \right) = (q' + q'' - q - \sigma(r) + \sigma(r') + \sigma(r'')) / (p - 1).$$

Si $q = q' + q''$, alors $r = r' + r''$, et la seconde assertion résulte du lemme 1.1.1. Sinon, on a $q = q' + q'' + 1$, $r + p^m = r' + r''$. Comme $r < p^m$, on a $\sigma(r + p^m) = \sigma(r) + 1$, et le lemme 1.1.1 entraîne que $\sigma(r) + 1 \leq \sigma(r') + \sigma(r'')$, d'où (i).

Les assertions (ii) et (iii) sont des conséquences immédiates de (1.1.3.1).

1.1.4. Soient $m, k', k'' \in \mathbb{N}$. On pose $k' = p^m q' + r'$, $k'' = p^m q'' + r''$, $k' k'' = p^m q + r$, avec $0 \leq r, r', r'' < p^m$, et

$$C_{k'', k'}^{(m)} := \frac{q!}{(q')^{k''} q''!}.$$

On observera que, pour $m = 0$, le coefficient

$$C_{k'', k'}^{(0)} = C_{k'', k'} = \frac{(k' k'')!}{(k')^{k''} k''!} = \prod_{i=1}^{k''-1} \binom{(i+1)k' - 1}{k' - 1}$$

est l'entier naturel qui intervient dans la composition des puissances divisées.

LEMME 1.1.5. – *Quels que soient les entiers m, k', k'' , on a*

$$C_{k'', k'}^{(m)} \in \mathbb{N}.$$

Avec les notations de 1.1.4, posons $r' r'' = p^m s + t$, avec $0 \leq t < p^m$, de sorte que $q = p^m q' q'' + q' r'' + q'' r' + s$. On vérifie immédiatement la relation

$$(1.1.5.1) \quad C_{k'', k'}^{(m)} = r''! (q'' r' + s)! (p^m!)^{q''} C_{r'', q'} C_{q'', p^m q'} (C_{p^m, q'})^{q''} \\ \times \frac{q!}{(p^m q' q'')! (q' r'')! (q'' r' + s)!},$$

d'où résulte le lemme.

1.2. Puissances divisées compatibles à (p)

Rappelons que, si A est une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre, la PD-structure canonique de l'idéal $(p) \subset \mathbb{Z}_{(p)}$ s'étend à A [1, I 2.1.1] ; nous la noterons $p^{[n]} = p^n/n!$. Si $(I, \gamma) \subset A$ est un PD-idéal, nous dirons que γ est *compatible à (p)* si γ est compatible aux puissances divisées canoniques de (p) [1, I 2.2.1], i.e. si $I \cap pA$ est un sous-PD-idéal dans I et dans pA , et si γ coïncide sur $I \cap pA$ avec la PD-structure canonique ; il revient au même de demander qu'il existe sur $I + pA$ une PD-structure (nécessairement unique) induisant γ sur I et la PD-structure canonique sur pA . Nous aurons besoin de conditions assurant que certaines opérations sur les idéaux à puissances divisées conservent la compatibilité à (p) ; pour la commodité des références ultérieures, nous les énonçons ici sous des hypothèses plus générales.

LEMME 1.2.1. – *Soient $(R, \mathfrak{a}, \alpha)$ un anneau muni d'un PD-idéal, A une R -algèbre, $(I, \gamma) \subset A$, $(I', \gamma') \subset A$ deux idéaux munis de puissances divisées compatibles à celles de \mathfrak{a} . On note $I_1 = I + \mathfrak{a}A$, $I'_1 = I' + \mathfrak{a}A$; soient $\bar{\alpha}$ la PD-structure sur $\mathfrak{a}A$ étendant α , et δ (resp. δ') la PD-structure sur I_1 (resp. I'_1) prolongeant γ (resp. γ') et $\bar{\alpha}$. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

- (i) Les PD-structures δ et δ' coïncident sur $I_1 \cap I'_1$;
- (ii) Les PD-structures δ et γ' coïncident sur $I_1 \cap I'$;
- (ii') Les PD-structures γ et δ' coïncident sur $I \cap I'_1$;

(iii) Il existe sur $I + I' + \mathfrak{a}A$ une PD-structure induisant γ , γ' et $\bar{\alpha}$;

(iv) Il existe sur $I + I'$ une PD-structure compatible à α induisant γ et γ' .

Les équivalences (ii) \Leftrightarrow (iii) (resp. (ii') \Leftrightarrow (iii)) et (i) \Leftrightarrow (iii) résultent de [1, I 1.6.4], et l'équivalence (iii) \Leftrightarrow (iv) résulte des définitions.

Lorsque les conditions du lemme sont remplies, les PD-structures de (iii) et (iv) sont uniques.

DÉFINITIONS 1.2.2. – (i) Soient $(R, \mathfrak{a}, \alpha)$ un anneau muni d'un PD-idéal, A une R -algèbre, $(I, \gamma) \subset A$ un idéal muni de puissances divisées compatibles à celles de \mathfrak{a} , $\bar{\alpha}$ la PD-structure sur $\mathfrak{a}A$ étendant α , A' une A -algèbre. On dit que γ est *strictement extensible* à A' (relativement à (\mathfrak{a}, α)) si γ s'étend à A' , et si la PD-structure $\bar{\gamma}$ sur IA' étendant γ est compatible à α .

D'après [1, I 2.2], il revient au même de demander que la PD-structure δ sur $I + \mathfrak{a}A$ prolongeant γ et $\bar{\alpha}$ s'étende à A' . Cette condition est donc toujours satisfaite lorsque $I + \mathfrak{a}A$ est localement principal [1, I 2.1.1], ou lorsque A' est plat sur A [1, I 2.7.4].

(ii) Soient $(R, \mathfrak{a}, \alpha)$ un anneau muni d'un PD-idéal, $\varphi : A \rightarrow A'$ un homomorphisme de R -algèbres, $(I, \gamma) \subset A$ et $(I', \gamma') \subset A'$ deux idéaux munis de puissances divisées compatibles à celles de \mathfrak{a} . On dit que (I, γ) et (I', γ') sont *strictement compatibles* (relativement à (\mathfrak{a}, α)) si (I, γ) est strictement extensible à A' , et, en notant $\bar{\gamma}$ la PD-structure de IA' étendant γ , si les PD-idéaux $(IA', \bar{\gamma})$ et (I', γ') vérifient les conditions équivalentes du lemme 1.2.1. Cette définition s'applique en particulier au cas où (I, γ) et (I', γ') sont deux PD-idéaux d'un même anneau A , φ étant l'identité. La condition de compatibilité stricte est automatiquement vérifiée si A' est une A -algèbre augmentée, et I' le noyau de l'homomorphisme d'augmentation, car γ' est alors compatible à toute PD-structure sur un idéal de A [1, 2.2.3].

Remarques 1.2.3. – Les exemples suivant montrent que des opérations telles qu'étendre des puissances divisées, ou prendre le PD-idéal somme de deux PD-idéaux compatibles entre eux, ne conservent pas nécessairement la compatibilité avec un PD-idéal donné sur la base. Des exemples similaires ont été construits par W. Messing.

(i) Pour un entier k fixé, considérons $R = \mathbb{Z}/(p^k)$, avec le PD-idéal $\mathfrak{a} = (p)$, muni de ses puissances divisées canoniques, et prenons pour A l'algèbre de polynômes à puissances divisées $R\langle t \rangle$. Soit $I = \langle t \rangle$ le PD-idéal engendré par t , muni de sa PD-structure canonique γ , qui est compatible à (p) parce que $A \simeq R \oplus I$ [1, 2.2.3]. Soit d'autre part β une PD-structure non canonique sur pR [1, 1.2.6]. Pour la même raison, les puissances divisées canoniques de I sont compatibles à β , de sorte qu'il existe sur $I + pA$ une unique PD-structure δ prolongeant γ et l'extension $\bar{\beta}$ de β à A . Soit alors $I' = \langle t + p \rangle$ le sous-PD-idéal de $I + pA$ engendré par $t + p$, et notons γ' la PD-structure induite par δ sur I' . Par construction, les PD-structures γ et γ' coïncident sur $I \cap I'$. Enfin, la PD-structure γ' est compatible à (p) : en effet, la propriété universelle de l'algèbre de polynômes à puissances divisées entraîne qu'il existe un unique PD-morphisme

$$\varphi : (R\langle t \rangle, I, \gamma) \rightarrow (R\langle t \rangle, I', \gamma')$$

tel que $\varphi(t) = t + p$, et on vérifie aisément que φ est un isomorphisme ; par suite, on a aussi $A \simeq R \oplus I'$, d'où l'assertion. Par contre, la PD-structure sur $I + I'$ prolongeant γ

et γ' , qui n'est autre que δ , n'est pas compatible à (p) , car on a $\delta_n(p) = \beta_n(p) \neq p^{[n]}$ en général. On voit donc que, sous les hypothèses de 1.2.2 (ii), la compatibilité de γ et γ' n'entraîne pas nécessairement la compatibilité stricte de γ et γ' .

(ii) De même, sous les hypothèses de 1.2.2 (i), γ peut s'étendre à A' sans être strictement extensible à A' . En effet, dans l'exemple précédent, l'homomorphisme d'augmentation $\pi : A \rightarrow R$ a pour noyau le sous-PD-idéal I de $(I + pA, \delta)$. Puisque son noyau est un sous-PD-idéal, la PD-structure δ passe au quotient, donnant sur $pR = I'R$ une PD-structure qui étend (I', δ) , et qui n'est autre que β . Elle n'est donc pas compatible à (p) bien que (I', δ) le soit.

Sous les hypothèses de 1.2.2, on observera que, lorsque A' est le quotient de A par un idéal K , la PD-structure γ est strictement extensible à A' si et seulement si $K \cap (I + \mathfrak{a}A)$ est un sous-PD-idéal de $I + \mathfrak{a}A$ (muni de la PD-structure δ prolongeant γ et $\bar{\alpha}$).

Le lemme suivant permet d'assurer que certaines conditions de compatibilité sont toujours vérifiées pour l'idéal (p) .

LEMME 1.2.4. – Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, (\mathfrak{a}, α) un PD-idéal de A . On suppose que \mathfrak{a} est un idéal localement principal. Alors :

- (i) L'idéal $\mathfrak{a} \cap I$ est un sous-PD-idéal de \mathfrak{a} ;
- (ii) Si $(J, \gamma) \subset I$ est un idéal muni de puissances divisées compatibles à (\mathfrak{a}, α) , et si $J_1 = J + \mathfrak{a}$, muni des puissances divisées prolongeant α et γ , alors $J_1 \cap I$ est un sous-PD-idéal de J_1 .

L'assertion étant locale sur $\text{Spec } A$, on peut supposer \mathfrak{a} principal ; soit t un générateur de \mathfrak{a} . Si $n \geq 1$, il existe $a_n \in A$ tel que $\alpha_n(t) = a_n t$. Par suite, si $x = yt \in \mathfrak{a} \cap I$, on peut écrire $\alpha_n(x) = y^n \alpha_n(t) = a_n y^{n-1} x \in \mathfrak{a} \cap I$, d'où (i). L'assertion (ii) résulte alors de ce que $J_1 \cap I = J + \mathfrak{a} \cap I$.

1.3. PD-structures partielles de niveau m sur un idéal

Lorsqu'on considérera dans la suite de cet article une PD-structure sur un idéal d'une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre, on supposera toujours qu'elle est compatible à celle de (p) . Pour tout entier $m \geq 0$, et tout idéal I d'un anneau A , on notera $I^{(p^m)}$ l'idéal engendré par les x^{p^m} pour $x \in I$.

DÉFINITION 1.3.1. – Soient A une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre, $I \subset A$ un idéal, $m \geq 0$ un entier. On appelle *structure partielle d'idéal à puissances divisées de niveau m* sur I (en abrégé, *m -PD-structure*) la donnée d'un PD-idéal $(J, \gamma) \subset I$ tel que

$$(1.3.1.1) \quad I^{(p^m)} + pI \subset J.$$

On dira que (I, J, γ) est un *m -PD-idéal* de A . Si (A, I, J, γ) et (A', I', J', γ') sont des $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbres munies de m -PD-idéaux, un *m -PD-morphisme* de (A, I, J, γ) dans (A', I', J', γ') est un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow A'$ tel que $\varphi(I) \subset I'$, et que $(A, J, \gamma) \rightarrow (A', J', \gamma')$ soit un PD-morphisme. Si φ est l'identité de A , on dira que (I, J, γ) est un *sous- m -PD-idéal* de (I', J', γ') ; si de plus $I' = I$, on dira que (J, γ) est une *sous- m -PD-structure* de (J', γ') sur I .

Lorsque $m = 0$, la condition (1.3.1.1) entraîne que $J = I$, de sorte qu'on retrouve les notions usuelles de PD-idéal (avec compatibilité aux puissances divisées de (p)), et de PD-morphisme. De même, si A est de caractéristique 0, on a $J = I$, et il existe une unique m -PD-structure sur I , donnée par les opérations $x^n/n!$

Si (I, J, γ) et (I', J', γ') sont deux m -PD-idéaux de A , et si les puissances divisées γ et γ' coïncident sur $J \cap J'$, alors $J \cap J'$ munit $I \cap I'$ d'une m -PD-structure.

Nous utiliserons souvent la remarque suivante : pour vérifier la condition (1.3.1.1), il suffit d'après la formule du binôme de vérifier que $pI \subset J$, et que, pour une famille $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ de générateurs de I , on a $x_\lambda^{p^m} \in J$ pour tout λ . Par exemple, si, dans la situation de l'alinéa précédent, γ et γ' sont strictement compatibles (relativement à (p)), $J + J'$, muni des puissances divisées γ'' prolongeant γ et γ' , munit $I + I'$ d'une m -PD-structure.

Exemples. – (i) Soient \mathcal{V} un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0, p)$, \mathfrak{m} son idéal maximal, e son indice de ramification absolu, et π une uniformisante de \mathcal{V} . Si l'on fixe un entier k , l'idéal \mathfrak{m}^k possède une PD-structure si et seulement si $\pi^{kn}/n! \in \mathfrak{m}^k$ pour tout $n \geq 1$, soit encore, d'après (1.1.0.1), si et seulement si $e/(p-1) \leq k$. En explicitant la condition (1.3.1.1), on voit alors que \mathfrak{m}^k , muni de cette PD-structure, définit une m -PD-structure sur \mathfrak{m} si et seulement si on a de plus $k \leq e+1$ et $m \geq \log_p(k)$. En particulier, \mathfrak{m} peut être muni d'une m -PD-structure si et seulement si $p^m \geq e/(p-1)$.

(ii) Soient A une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre, $I \subset A$ un idéal. Si $(J_0, \gamma) \subset I$ est un PD-idéal tel que, pour tout $x \in I$, on ait $x^{p^m} \in J_0$, il résulte de 1.2.4 que l'idéal $J = (J_0 + pA) \cap I$, muni de la PD-structure induite, définit une m -PD-structure sur I .

En particulier, si I est tel que, pour tout $x \in I$, on ait $x^{p^m} \in pA$, l'idéal $J = pA \cap I$, muni de sa PD-structure canonique, définit une m -PD-structure sur I qui sera dite *triviale*. Par exemple, l'idéal maximal $\mathfrak{m} \subset \mathcal{V}$ considéré en (i) peut être muni de la m -PD-structure triviale si et seulement si $p^m \geq e$.

(iii) Soit (J, γ) une m -PD-structure sur un idéal I . Alors, pour tout $m' \geq m$, (J, γ) est une m' -PD-structure sur I .

DÉFINITIONS 1.3.2. – Précisons les conditions de compatibilités pour les m -PD-structures.

(i) Soient $R \rightarrow A$ un homomorphisme, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ un m -PD-idéal de R . On dira que la m -PD-structure (\mathfrak{b}, α) s'étend à A si la PD-structure α est strictement extensible à A (relativement à (p)). Cette propriété est en particulier vérifiée lorsque l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- a) $\mathfrak{b}A = 0$;
- b) $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} + pR$ est un idéal localement principal ;
- c) A est plat sur R .

Si on note $\bar{\alpha}$ les puissances divisées sur $\mathfrak{b}A$ étendant celles de \mathfrak{b} , $(\mathfrak{b}A, \bar{\alpha})$ est alors une m -PD-structure sur $\mathfrak{a}A$.

(ii) Soient $R \rightarrow A$ un homomorphisme, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ (resp. (I, J, γ)) un m -PD-idéal de R (resp. A), β la PD-structure sur $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} + pR$ prolongeant α et la PD-structure canonique de pR . On dira que la m -PD-structure (J, γ) est *compatible* à (\mathfrak{b}, α) si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1.3.2.1) Les PD-structures α et γ sont strictement compatibles (relativement à (p)).

(1.3.2.2) Si on munit $\mathfrak{b}_1 A$ de la PD-structure $\bar{\beta}$ prolongeant β , alors $\mathfrak{b}_1 A \cap I$ est un sous-PD-idéal de $\mathfrak{b}_1 A$.

Dans ce cas, l'idéal $J + \mathfrak{b}A$, muni des puissances divisées γ' prolongeant γ et α , est une m -PD-structure sur $I + \mathfrak{a}A$. Celle-ci est compatible à (\mathfrak{b}, α) , car un élément $x \in \mathfrak{b}_1 A \cap (I + \mathfrak{a}A)$ s'écrit sous la forme $x = y + z$, avec $y \in \mathfrak{b}A \subset \mathfrak{a}A$, $z \in pA \cap (I + \mathfrak{a}A)$, et on a alors d'une part $\bar{\beta}_i(y) \in \mathfrak{b}A$ pour $i \geq 1$, d'autre part $\bar{\beta}_j(z) \in (I + \mathfrak{a}A)$ pour $j \geq 1$ d'après 1.2.4, de sorte que $\bar{\beta}_n(x) \in \mathfrak{b}_1 A \cap (I + \mathfrak{a}A)$ pour $n \geq 1$.

On notera que si une m -PD-structure est compatible à (\mathfrak{b}, α) , elle le reste lorsqu'on la considère comme m' -PD-structure pour $m' \geq m$.

La condition (1.3.2.2). sera utilisée en 1.3.7 pour définir la filtration m -PD-adique. Pour $m = 0$, elle résulte de (1.3.2.1), si bien que la condition de compatibilité introduite ici se réduit alors à celle de 1.2.2 (ii).

PROPOSITION 1.3.3. – *Les notations étant celles de 1.3.2 (ii), supposons que l'on soit dans l'un des cas suivants :*

- a) $\mathfrak{b}A = 0$;
- b) \mathfrak{b}_1 est un idéal localement principal, et $\text{Tor}_1^R(R/\mathfrak{b}_1, A/J) = 0$;
- c) A est plat sur R , et $\text{Tor}_1^R(R/\mathfrak{b}_1, A/J) = \text{Tor}_1^R(R/\mathfrak{b}_1, A/I) = 0$.

Alors la m -PD-structure (J, γ) est compatible à (\mathfrak{b}, α) .

D'après 1.3.2 (i), la PD-structure β s'étend alors en une PD-structure $\bar{\beta}$ sur $\mathfrak{b}_1 A$ dans chacun des trois cas considérés. De plus, $\bar{\beta}$ et γ coïncident sur $\mathfrak{b}_1 A \cap J$, car γ est compatible à (p) dans le cas a), et $\mathfrak{b}_1 A \cap J = \mathfrak{b}_1 J$ est un sous-PD-idéal de $\mathfrak{b}_1 A$ et de J dans les cas b) et c). La condition (1.3.2.1) est donc vérifiée; il en est de même de (1.3.2.2) d'après 1.2.4 dans les cas a) et b), et parce que $\mathfrak{b}_1 A \cap I = \mathfrak{b}_1 I$ est un sous-PD-idéal de $\mathfrak{b}_1 A$ dans le cas c).

1.3.4. Soient (I, J, γ) un m -PD-idéal de A , et K un idéal de A . Pour qu'il existe sur $I(A/K)$ une m -PD-structure telle que l'homomorphisme de passage au quotient soit un m -PD-morphisme, il faut et suffit que $(J + pA) \cap K$ soit un sous-PD-idéal de $J + pA$. L'idéal $J(A/K)$, muni de la PD-structure quotient, définit alors la plus petite m -PD-structure sur $I(A/K)$ telle que l'homomorphisme de passage au quotient soit un m -PD-morphisme.

Supposons que A soit une R -algèbre, où R est munie d'un m -PD-idéal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$, et soit $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} + pR$, muni de la PD-structure β prolongeant α et la PD-structure canonique de (p) . Si la m -PD-structure (J, γ) est compatible à (\mathfrak{b}, α) , la m -PD structure quotient sur $I(A/K)$ est compatible à (\mathfrak{b}, α) si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(1.3.4.1) L'idéal $(J + \mathfrak{b}_1 A) \cap K$ est un sous-PD-idéal de $J + \mathfrak{b}_1 A$ (ce qui entraîne qu'il en est de même pour $(J + pA) \cap K$);

(1.3.4.2) L'idéal $\mathfrak{b}_1 A \cap (I + K)$ est un sous-PD-idéal de $\mathfrak{b}_1 A$.

1.3.5. Soient A une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre, $(I, J, \gamma) \subset A$ un m -PD-idéal. On peut alors définir sur I des opérations de puissances divisées partielles analogues aux puissances divisées

usuelles. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $k = p^m q + r$ la division euclidienne de k par p^m , et on pose, pour $x \in I$:

$$(1.3.5.1) \quad x^{\{k\}_{(m)}} := x^r (\gamma_q (x^{p^m})),$$

ce qui a un sens grâce à (1.3.1.1). Lorsqu'aucune confusion n'en résultera, nous noterons simplement $x^{\{k\}} := x^{\{k\}_{(m)}}$. Lorsque $m = 0$, on a donc $x^{\{k\}_{(0)}} = \gamma_k (x)$, de sorte que l'on retrouve les puissances divisées habituelles; nous les noterons souvent $x^{[k]}$. On observera que la relation $q! \gamma_q (y) = y^q$ entraîne

$$(1.3.5.2) \quad q! x^{\{k\}_{(m)}} = x^k.$$

Si $\varphi : (A, I, J, \gamma) \rightarrow (A', I', J', \gamma')$ est un m -PD-morphisme, il est clair que, pour tout $x \in I$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(x^{\{k\}}) = \varphi(x)^{\{k\}}$.

Soit d'autre part $m' \geq m$, ce qui permet de considérer (J, γ) comme définissant une m' -PD-structure sur I . Soit $k \in \mathbb{N}$; posons $k = p^m q + r = p^{m'} q' + r'$, avec $0 \leq r < p^m$, $0 \leq r' < p^{m'}$. On a alors

$$(1.3.5.3) \quad x^{\{k\}_{(m')}} = (q!/q!) x^{\{k\}_{(m)}}.$$

En effet, posons $r' = p^m s + r$, de sorte que $q = p^{m'-m} q' + s$. On a alors

$$\begin{aligned} x^{\{k\}_{(m')}} &= x^{r'} \gamma_{q'} (x^{p^{m'}}) = x^r (x^{p^m})^s \gamma_{q'} (p^{m'-m}! \gamma_{p^{m'-m}} (x^{p^m})) \\ &= x^r s! \gamma_s (x^{p^m}) (p^{m'-m}!)^{q'} C_{q', p^{m'-m}} \gamma_{p^{m'-m} q'} (x^{p^m}) \\ &= (q!/q!) x^{\{k\}_{(m)}}. \end{aligned}$$

En particulier, considérant J lui-même comme un m -PD-idéal, on voit que, pour $x \in J$, on a

$$(1.3.5.4) \quad x^{\{k\}_{(m)}} = (k!/q!) \gamma_k (x).$$

Les opérations $x^{\{k\}}$ vérifient des relations analogues à celles des puissances divisées usuelles :

PROPOSITION 1.3.6. – Soient A une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre, (I, J, γ) un idéal de A muni d'une PD-structure de niveau m . Les opérations $x \mapsto x^{\{k\}}$ vérifient les propriétés suivantes :

- (i)
$$\begin{cases} \forall x \in I, & x^{\{0\}} = 1, & x^{\{1\}} = x; \\ \forall k \geq 1, & x^{\{k\}} \in I; & \forall k \geq p^m, & x^{\{k\}} \in J; \end{cases}$$
- (ii)
$$\forall x \in I, \quad \forall a \in A, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (ax)^{\{k\}} = a^k x^{\{k\}};$$
- (iii)
$$\forall x, y \in I, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (x+y)^{\{k\}} = \sum_{k'+k''=k} \left\langle \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\rangle_{(m)} x^{\{k'\}} y^{\{k''\}};$$

$$(iv) \quad \forall x \in I, \quad \forall k', k'' \in \mathbb{N}, \quad x^{\{k'\}} x^{\{k''\}} = \left\{ \begin{matrix} k' + k'' \\ k' \end{matrix} \right\}_{(m)} x^{\{k'+k''\}};$$

$$(v) \quad \forall x \in I, \quad \forall k', k'' \in \mathbb{N}, \quad (x^{\{k'\}})^{\{k''\}} = C_{k'', k'}^{(m)} x^{\{k' k''\}}.$$

Les propriétés (i) et (ii) sont des conséquences immédiates des propriétés analogues des puissances divisées usuelles. Compte tenu de (1.1.5.1), les propriétés (iv) et (v) peuvent également s'en déduire par un calcul semblable à celui qui a été fait pour prouver (1.3.5.3). Nous montrerons en 1.5.2 la propriété (iii) par réduction à une situation universelle (le lecteur s'assurera que cette propriété n'est pas utilisée dans la démonstration de 1.5.2).

1.3.7. Les opérations précédentes permettent de définir sur un m -PD-idéal une filtration canonique. Nous allons la construire dans une situation générale avec conditions de compatibilité. Soient R une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ un m -PD-idéal de R , A une R -algèbre, $I \subset A$ un idéal muni d'une m -PD-structure (J, γ) compatible à (\mathfrak{b}, α) . Notons β la PD-structure de $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} + pR$ prolongeant α et la PD-structure canonique de (p) , et δ celle de $J_1 = J + \mathfrak{b}_1 A$ prolongeant γ et l'extension β de β à $\mathfrak{b}_1 A$. Soient $n \in \mathbb{N}$, et I_n l'idéal de A engendré par les produits de la forme $x_1^{\{n_1\}} \dots x_r^{\{n_r\}}$, avec $x_i \in I$ pour tout i , et $\sum n_i \geq n$. On note $I^{\{n\}}$ l'idéal de A engendré par les produits de la forme

$$(1.3.7.1) \quad x_1^{\{n_1\}} \dots x_r^{\{n_r\}} \delta_{h_1}(y_1) \dots \delta_{h_s}(y_s),$$

avec $x_i \in I$, $y_j \in J_1 \cap I_{k_j}$, et

$$n_1 + \dots + n_r + k_1 h_1 + \dots + k_s h_s \geq n.$$

Grâce à la condition (1.3.2.2), les $I^{\{n\}}$ forment une suite décroissante de sous-idéaux de I , telle que $I^{\{0\}} = A$, $I^{\{1\}} = I$. Ils vérifient les relations $I^{\{n\}} I^{\{n'\}} \subset I^{\{n+n'\}}$ quels que soient n et n' , de sorte qu'on obtient ainsi une filtration d'anneau sur A .

DÉFINITIONS. – On dira que la filtration par les $I^{\{n\}}$ est la *filtration m -PD-adique* définie par I . Un m -PD-idéal (I, J, γ) sera dit *m -PD-nilpotent* s'il existe un entier n tel que $I^{\{n\}} = 0$, et *topologiquement m -PD-nilpotent* (pour la topologie p -adique) si la topologie définie par la filtration m -PD-adique est plus fine que la topologie p -adique sur A .

La filtration m -PD-adique est fonctorielle par rapport aux m -PD-morphismes entre R -algèbres munies d'un m -PD-idéal compatible à (\mathfrak{b}, α) . En général, elle dépend de l'entier m : si $m \leq m'$, et si l'on considère (J, γ) comme définissant une m' -PD-structure sur I , il résulte de (1.3.5.3) que la filtration m' -PD-adique est plus fine que la filtration m -PD-adique. Lorsque $m = 0$, on retrouve simplement la filtration PD-adique de A . Lorsque A est de caractéristique 0, on retrouve la filtration I -adique de A .

Exemple. – Dans l'exemple (i) de 1.3.1, où \mathfrak{m}^k définit une m -PD-structure sur l'idéal maximal \mathfrak{m} d'un anneau de valuation discrète \mathcal{V} d'inégales caractéristiques, on vérifie

(¹) Cette définition et les résultats qui en découlent se substituent à ceux de [4, (1.1.3)-(1.1.4)].

facilement que celle-ci est topologiquement nilpotente si et seulement si $k > e/(p-1)$. En particulier, \mathfrak{m} peut être muni d'une m -PD-structure topologiquement nilpotente si et seulement si $p^m > e/(p-1)$.

PROPOSITION 1.3.8. – Avec les notations et les hypothèses de 1.3.7, la filtration m -PD-adique de A vérifie les propriétés suivantes :

(i) Quels que soient $n \in \mathbb{N}$, $h \geq 1$ et $x \in J_1 \cap I^{\{n\}}$, on a $\delta_h(x) \in J_1 \cap I^{\{nh\}}$. En particulier, $J_1 \cap I^{\{n\}}$ est un sous-PD-idéal de J_1 , et $J \cap I^{\{n\}}$ définit sur $I^{\{n\}}$ une m -PD-structure compatible à (\mathfrak{b}, α) .

(ii) Quels que soient $h, k \in \mathbb{N}$, $x \in I^{\{k\}}$, on a $x^{\{h\}} \in I^{\{kh\}}$.

(iii) Soient $\bar{A} = A/I^{\{n\}}$, $\pi : A \rightarrow \bar{A}$ l'homomorphisme canonique, $\bar{I} = I\bar{A}$, $\bar{J} = J\bar{A}$, $\bar{\gamma}$ la PD-structure quotient sur \bar{J} . Alors $(\bar{J}, \bar{\gamma})$ définit sur \bar{I} une m -PD-structure compatible à (\mathfrak{b}, α) , π est un morphisme strict pour les filtrations m -PD-adiques, et π est universel pour les m -PD-morphismes de (A, I, J, γ) dans une R -algèbre A' munie d'un m -PD-idéal (I', J', γ') compatible à (\mathfrak{b}, α) et tel que $I'^{\{n\}} = 0$.

(iv) Soient $A \rightarrow A'$ un homomorphisme plat, $I' = IA'$, muni de la m -PD-structure $(J' = JA', \gamma')$ étendant celle de I [cf. 1.3.2 (i)]. La filtration m -PD-adique de A' est donnée par $I'^{\{n\}} = I^{\{n\}}A'$.

Soit $z \in J_1 \cap I^{\{n\}}$. Alors z est somme d'un élément de I_n et d'une combinaison linéaire d'éléments (1.3.7.1) pour lesquels s et l'un des h_i sont non nuls. Un tel élément est dans J_1 , et on voit immédiatement que sa puissance divisée δ_h est dans $J_1 \cap I^{\{nh\}}$. Cela ramène au cas où $z \in J_1 \cap I_n$; on a alors $\delta_h(z) \in I^{\{nh\}}$ par définition, donc $\delta_h(z) \in J_1 \cap I^{\{nh\}}$ si $h \geq 1$. Par suite, $J_1 \cap I^{\{n\}}$ est un sous-PD-idéal de J_1 ; a fortiori, $J \cap I^{\{n\}}$ est un sous-PD-idéal de J , qui munit alors $I^{\{n\}}$ d'une m -PD-structure, et $\mathfrak{b}_1 A \cap I^{\{n\}}$ est un sous-PD-idéal de $\mathfrak{b}_1 A$, ce qui entraîne que cette structure est compatible à (\mathfrak{b}, α) .

Soit $z \in I^{\{k\}}$. En posant $h = p^m q + r$, $0 \leq r < p^m$, on a alors $z^{\{h\}} = z^r \delta_q(z^{p^m})$, avec $z^r \in I^{\{kr\}}$, $z^{p^m} \in J \cap I^{\{kp^m\}}$, donc $\delta_q(z^{p^m}) \in I^{\{kp^m q\}}$ d'après (i), et (ii) en résulte.

Puisque $J_1 \cap I^{\{n\}}$ est un sous-PD-idéal de J_1 , il résulte de 1.3.4 que l'idéal $\bar{I} \subset \bar{A}$ peut être muni de la m -PD-structure quotient, définie par $\bar{J} = J/(J \cap I^{\{n\}})$ muni de la PD-structure quotient $\bar{\gamma}$, et que celle-ci est encore compatible à (\mathfrak{b}, α) ; π est alors un m -PD-morphisme. Pour tout k , on a $\bar{I}_k = \pi(I_k)$, et en particulier $\bar{I}_k = 0$ pour $k \geq n$. Soient $\bar{J}_1 = \bar{J} + \mathfrak{b}_1 \bar{A} = \pi(J_1)$, et $\bar{\delta}$ la PD-structure quotient sur \bar{J}_1 . Pour prouver que π est strict, il suffit de prouver que si $x \in \bar{I}_k \cap \bar{J}_1$, alors $\bar{\delta}_h(x) \in \pi(I^{\{kh\}})$. On peut supposer que $k < n$ et écrire $x = \pi(x') = \pi(y)$, avec $x' \in I_k$, $y \in J_1$, $x' - y \in I^{\{n\}}$, d'où $y \in I^{\{k\}} \cap J_1$. D'après (i), on a alors $\delta_h(y) \in I^{\{kh\}}$, d'où l'assertion. En particulier, on voit que $\bar{I}^{\{n\}} = 0$, et la propriété universelle de $A/I^{\{n\}}$ est alors claire.

Soit enfin A' une A -algèbre plate. Les relations 1.3.6 entraînent que $I'_n = I_n A'$. Si $J'_1 = J' + \mathfrak{b}_1 A' = J_1 A'$, on a alors par platitude $J'_1 \cap I'_k = (J_1 \cap I_k) A'$ pour tout k , et la dernière assertion en résulte.

Remarque. – Il est clair que la filtration m -PD-adique est la filtration d'anneau la plus fine sur A qui soit égale à I en degré 1, et vérifie la propriété (i) de la proposition. L'exemple suivant montre qu'en général, les idéaux $J \cap I_n$ ne sont pas des sous-PD-idéaux

de J , de sorte qu'il y a bien lieu d'introduire la famille des éléments (1.3.7.1) comme générateurs de $I^{\{n\}}$.

Soient k un corps de caractéristique 2, $R = k[x, y]/(x^2, y^2)$, $A_0 = R\langle z \rangle$ l'algèbre de polynômes à puissances divisées en z , à coefficients dans R , considérée comme algèbre graduée en affectant le degré 1 à x et y , et le degré 2 à z . L'idéal $(xy - z)$ est alors un idéal homogène, et, si $\langle z \rangle$ désigne le PD-idéal engendré par z , on vérifie que $(xy - z) \cap \langle z \rangle$ est un sous-PD-idéal de $\langle z \rangle$. Soient $A = A_0/(xy - z)$ l'anneau gradué quotient, J le PD-idéal image de $\langle z \rangle$, $I = (x, y) + J$. Alors I est un idéal dont tout élément est de carré nul, et J munit I d'une 1-PD-structure pour laquelle on a $a^{\{k\}} = 0$ pour tout $a \in I$ et tout $k \geq 2$. Par suite, il n'existe pas dans I_2 d'élément homogène de degré 4 autre que 0. Dans A , l'élément $xy = z$ appartient à $J \cap I_2$; par contre, on vérifie que $z^{\{2\}} \neq 0$ dans A , si bien que $z^{\{2\}} \notin I_2$.

1.4. Enveloppes à puissances divisées partielles

La proposition suivante montre qu'on dispose encore pour les PD-structures partielles d'une notion d'enveloppe à puissances divisées d'un idéal. Si $(R, \mathfrak{a}, \alpha)$ est un anneau muni d'un PD-idéal, A une R -algèbre, et $I \subset A$ un idéal, nous noterons $P_\alpha(I)$ l'enveloppe à puissances divisées compatibles à α de I ([1], 2.4.2).

PROPOSITION 1.4.1. – Soient $m \geq 0$ un entier, R une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ un idéal de R muni d'une m -PD-structure, A une R -algèbre, $I \subset A$ un idéal. Il existe un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow A_1$, un idéal $I_1 \subset A_1$ tel que $\varphi(I) \subset I_1$, et une m -PD-structure $(J_1, \{1\})$ sur I_1 compatible à (\mathfrak{b}, α) tels que, pour tout R -homomorphisme $f : A \rightarrow A'$ envoyant I dans un idéal I' muni d'une m -PD-structure (J', γ') compatible à (\mathfrak{b}, α) , il existe un unique m -PD-morphisme

$$g : (A_1, I_1, J_1, \{1\}) \rightarrow (A', I', J', \gamma')$$

tel que $g \circ \varphi = f$.

Soient $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} + pR$, et β la PD-structure sur \mathfrak{b}_1 prolongeant α et la PD-structure canonique de pR . On pose $J = I^{(p^m)} + \mathfrak{b}_1 A$, et on note $A_1 = P_\beta(J)$ l'enveloppe à puissances divisées compatibles à β de J , $\varphi : A \rightarrow A_1$ l'homomorphisme canonique, \bar{J} le PD-idéal canonique de A_1 (engendré en tant que PD-idéal par $\varphi(J)$), et $x^{\{n\}}$ les puissances divisées d'un élément $x \in J$. Pour tout idéal $K \subset \bar{J}$, soit \bar{K} le sous-PD-idéal de \bar{J} engendré par K ; on pose

$$I_0 = IA_1 + \overline{(I^{(p^m)} + pI) A_1}, \quad J_0 = \overline{(I^{(p^m)} + pI) A_1}.$$

D'après la formule du binôme, J_0 définit une m -PD-structure sur I_0 . Pour assurer la compatibilité à β , on pose ensuite

$$(1.4.1.1) \quad I_1 = I_0 + \overline{(\mathfrak{b}_1 A_1 \cap I_0)}.$$

On a alors

$$I_1^{(p^m)} + pI_1 = I_0^{(p^m)} + \overline{(\mathfrak{b}_1 A_1 \cap I_0)^{(p^m)}} + pI_0 + p \overline{(\mathfrak{b}_1 A_1 \cap I_0)} \subset J_0 + \overline{(\mathfrak{b}_1 A_1 \cap I_0)},$$

et $J_0 + \overline{(\mathfrak{b}_1 A_1 \cap I_0)}$ est un sous-PD-idéal de \bar{J} contenu dans I_1 . On définit donc un PD-idéal $J_1 \subset I_1$ en posant

$$(1.4.1.2) \quad J_1 = \overline{(I_1^{(p^m)} + p I_1)}.$$

Il est clair que J_1 munit I_1 d'une m -PD-structure. Par construction, la PD-structure de J_1 est compatible à celle de \mathfrak{b}_1 , donc strictement compatible à celle de \mathfrak{b} . De plus, on a $\mathfrak{b}_1 A_1 \cap I_1 = \overline{(\mathfrak{b}_1 A_1 \cap I_0)}$, de sorte que la condition (1.3.2.2) est bien satisfaite, ce qui entraîne que J_1 définit sur I_1 une m -PD-structure compatible à (\mathfrak{b}, α) . On observera de plus que $\bar{J} = J_1 + \mathfrak{b}_1 A_1$.

Soit alors $f : A \rightarrow A'$ un R -homomorphisme envoyant I dans un idéal I' muni d'une m -PD-structure (J', γ') compatible à (\mathfrak{b}, α) . Puisque $I^{(p^m)} \subset J'$, on a $f(J) \subset J' + \mathfrak{b}_1 A'$. Puisque γ' est strictement compatible à α , $J' + \mathfrak{b}_1 A'$ est muni d'une PD-structure δ' prolongeant γ' et β . Il existe donc une unique factorisation de f par un PD-morphisme $g : (A_1, \bar{J}, [1]) \rightarrow (A', J' + \mathfrak{b}_1 A', \delta')$. On a alors $g(J_0) \subset J'$, donc $g(I_0) \subset I'$. Comme la m -PD-structure (J', γ') est compatible à (\mathfrak{b}, α) , $\mathfrak{b}_1 A' \cap I'$ est un sous-PD-idéal de $\mathfrak{b}_1 A'$, qui contient $g(\mathfrak{b}_1 A_1 \cap I_0)$. Par suite, $g(I_1) \subset I'$, d'où il résulte que $g(J_1) \subset J'$. Comme $\bar{J} = J_1 + \mathfrak{b}_1 A_1$, et que les puissances divisées considérées sont compatibles à (\mathfrak{b}_1, β) , un R -homomorphisme $g : A_1 \rightarrow A'$ tel que $g(J_1) \subset J'$ est un PD-morphisme $(A_1, \bar{J}, [1]) \rightarrow (A', J' + \mathfrak{b}_1 A', \delta')$ si et seulement si c'est un PD-morphisme $(A_1, J_1, [1]) \rightarrow (A', J', \gamma')$, ce qui entraîne que $(A_1, I_1, J_1, [1])$ satisfait la propriété universelle voulue.

DÉFINITION. – Sous les hypothèses de la proposition, nous dirons que A_1 , muni du m -PD-idéal $(I_1, J_1, [1])$, est l'enveloppe à puissances divisées partielles de niveau m (compatibles à (\mathfrak{b}, α)) de (A, I) , et nous la noterons $P_{(m), \alpha}(I)$, ou simplement $P_{(m)}(I)$ si aucune confusion n'est possible; le m -PD-idéal universel I_1 sera noté \bar{I} , et le PD-idéal J_1 définissant sa m -PD-structure sera noté \tilde{I} . Lorsque $m = 0$, $P_{(0)}(I)$ est l'enveloppe à puissances divisées usuelle $P(I)$, et $\bar{I} = \tilde{I}$ le PD-idéal engendré par I .

COROLLAIRE 1.4.2. – Sous les hypothèses de la proposition précédente, il existe pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ une R -algèbre $P_{(m), \alpha}^n(I)$ munie d'un m -PD-idéal $(\bar{I}, \tilde{I}, [1])$ compatible à (\mathfrak{b}, α) et tel que $\bar{I}^{\{n+1\}} = 0$, et un R -homomorphisme $\varphi_n : A \rightarrow P_{(m), \alpha}^n(I)$ tel que $\varphi_n(I) \subset \bar{I}$, universels pour les R -homomorphismes $A \rightarrow (A', I', J', \gamma')$ qui envoient I dans un m -PD-idéal I' compatible à (\mathfrak{b}, α) et tel que $I'^{\{n+1\}} = 0$.

D'après 1.3.8, il suffit de prendre $P_{(m), \alpha}^n(I) = P_{(m), \alpha}(I) / \bar{I}^{\{n+1\}}$, muni du m -PD-idéal quotient.

Remarques 1.4.3. – Gardons les hypothèses et les notations de 1.4.1. Les propriétés qui suivent étendent aux enveloppes à puissances divisées partielles des résultats standards sur les enveloppes à puissances divisées usuelles.

(i) Grâce à leur propriété universelle, les enveloppes à puissances divisées partielles commutent aux limites inductives.

(ii) Si l'homomorphisme $R \rightarrow A$ se factorise par une R -algèbre R' telle que la m -PD-structure (\mathfrak{b}, α) s'étende à R' , en une m -PD-structure $(\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} R', \alpha')$ sur $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} R'$,

alors la compatibilité à (\mathfrak{b}, α) équivaut à la compatibilité à (\mathfrak{b}', α') , de sorte qu'on a des m -PD-isomorphismes canoniques, compatibles aux filtrations m -PD-adiques,

$$P_{(m), \alpha}(I) \xrightarrow{\sim} P_{(m), \alpha'}(I), \quad P_{(m), \alpha}^n(I) \xrightarrow{\sim} P_{(m), \alpha'}^n(I).$$

(iii) Soit $I' = I + \mathfrak{a}A$. L'homomorphisme de functorialité

$$(1.4.3.1) \quad P_{(m), \alpha}(I) \rightarrow P_{(m), \alpha}(I')$$

est alors un isomorphisme. En effet, d'après 1.3.2 (ii), la condition de compatibilité à (\mathfrak{b}, α) entraîne que le PD-idéal $\tilde{I} + \mathfrak{b}P_{(m), \alpha}(I)$ munit $\tilde{I} + \mathfrak{a}P_{(m), \alpha}(I)$ d'une m -PD-structure compatible à (\mathfrak{b}, α) , de sorte qu'il existe un m -PD-morphisme

$$P_{(m), \alpha}(I') \rightarrow (P_{(m), \alpha}(I), \tilde{I} + \mathfrak{a}P_{(m), \alpha}(I), \tilde{I} + \mathfrak{b}P_{(m), \alpha}(I)),$$

fournissant un inverse à (1.4.3.1).

(iv) Soit $K \subset A$ un idéal d'image nulle dans $P_{(m), \alpha}(I)$ [resp. $P_{(m), \alpha}^n(I)$]. L'homomorphisme canonique

$$P_{(m), \alpha}(I) \rightarrow P_{(m), \alpha}(I/(I \cap K))$$

[resp. $P_{(m), \alpha}^n(I) \rightarrow P_{(m), \alpha}^n(I/(I \cap K))$] est alors un m -PD-isomorphisme, compatible aux filtrations m -PD-adiques; son inverse est défini par la propriété universelle de $P_{(m), \alpha}(I/(I \cap K))$ [resp. $P_{(m), \alpha}^n(I/(I \cap K))$], grâce à la factorisation de $A \rightarrow P_{(m), \alpha}(I)$ [resp. $P_{(m), \alpha}^n(I)$] par A/K .

En particulier, on a $\tilde{I}^{n+1} \subset \tilde{I}^{\{n+1\}}$, si bien qu'on obtient un m -PD-isomorphisme

$$(1.4.3.2) \quad P_{(m), \alpha}^n(I) \xrightarrow{\sim} P_{(m), \alpha}^n(I/I^{n+1}).$$

De même, supposons qu'il existe un entier i tel que $p^i A = 0$. La relation (1.3.5.2) entraîne alors que \tilde{I} est un nilidéal. Si l'on suppose que I est de type fini, il existe une puissance I^N de I d'image nulle dans $P_{(m), \alpha}(I)$, d'où un m -PD-isomorphisme

$$(1.4.3.3) \quad P_{(m), \alpha}(I) \xrightarrow{\sim} P_{(m), \alpha}(I/I^N).$$

PROPOSITION 1.4.4. – Avec les notations de 1.4.1, soit $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de générateurs de I . En tant que A -algèbre, $P_{(m), \alpha}(I)$ est engendrée par les éléments $(x_\lambda^{p^m})^{[q]} = x_\lambda^{\{p^m q\}}$, pour $\lambda \in L$ et $q \in \mathbb{N}$. Supposons de plus que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

- a) $\mathfrak{b}A = 0$;
- b) L'idéal $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} + pR$ est localement principal;
- c) Les puissances divisées β s'étendent strictement à A/I , et

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{b}_1, A/I) = 0.$$

Alors l'idéal \tilde{I} est engendré par les éléments x_λ et $x_\lambda^{\{p^m q\}}$, avec $q \geq 1$, et l'idéal \tilde{I} est engendré par les éléments px_λ et $x_\lambda^{\{p^m q\}}$, avec $q \geq 1$.

Reprenons les notations de 1.4.1. Comme $J = I^{(p^m)} + \mathfrak{b}_1 A$, la A -algèbre $P_{(m), \alpha}(I) = A_1 = P_\beta(J)$ est engendrée par les puissances divisées des éléments de $I^{(p^m)}$, donc par les $(x_\lambda^{p^m})^{[q]} = x_\lambda^{\{p^m q\}}$. Si l'on suppose de plus l'une des conditions de l'énoncé satisfaite, l'idéal $\mathfrak{b}_1 A_1 \cap I_0$ est un sous-PD-idéal de $\mathfrak{b}_1 A_1$. Dans le cas *a*) et *b*), cela résulte de 1.2.4. Dans le cas *c*), l'hypothèse que β s'étend strictement à A/I entraîne que l'idéal $J(A/I) = \mathfrak{b}_1(A/I)$ est muni d'une PD-structure canonique compatible à (\mathfrak{b}_1, β) . Il existe donc un PD-morphisme naturel $A_1 \rightarrow A/I$, dont la factorisation fournit un inverse à gauche de l'homomorphisme canonique $A/I \rightarrow A_1/I_0$. Comme ce dernier est surjectif d'après ce qu'on a vu plus haut, c'est un isomorphisme. La nullité de $\text{Tor}_1^R(R/\mathfrak{b}_1, A/I)$ entraîne alors que $\mathfrak{b}_1 A_1 \cap I_0 = \mathfrak{b}_1 I_0$, de sorte que l'idéal $\mathfrak{b}_1 A_1 \cap I_0$ est encore un sous-PD-idéal de $\mathfrak{b}_1 A_1$. Sous chacune de ces trois hypothèses, on a donc $\bar{I} := I_1 = I_0$. Comme I_0 est engendré par I et par les puissances divisées des éléments de J_0 , \bar{I} est engendré par les x_λ et les $x_\lambda^{\{p^m q\}}$. On vérifie de même que $\tilde{I} := J_1 = J_0$, de sorte que \tilde{I} est engendré par les px_λ et les $x_\lambda^{\{p^m q\}}$.

PROPOSITION 1.4.5. – Avec les notations de 1.4.1 et 1.4.2, soit $n < p^m$. Supposons les conditions suivantes vérifiées :

- a) La m -PD-structure (\mathfrak{b}, α) s'étend à A/I^{n+1} ;
- b) Pour tout $k \leq n$, $\mathfrak{b}_1 A \cap I^k \subset \mathfrak{b}_1 I^k + I^{n+1}$.

Alors l'homomorphisme

$$(1.4.5.1) \quad \bar{\varphi}_n : A/I^{n+1} \rightarrow P_{(m), \alpha}^n(I)$$

factorisant φ_n est un isomorphisme, et identifie la filtration I -adique de A/I^{n+1} et la filtration m -PD-adique de $P_{(m), \alpha}^n(I)$. En particulier, si la m -PD-structure (\mathfrak{b}, α) s'étend à A/I , les homomorphismes canoniques

$$(1.4.5.2) \quad A/I \rightarrow P_{(m), \alpha}(I)/\bar{I} \rightarrow P_{(m), \alpha}^r(I)/\bar{I}$$

sont des isomorphismes pour tout r .

Observons d'abord que, d'après 1.4.4, $\bar{\varphi}_n$ est surjectif. D'autre part, puisque $n < p^m$, on peut munir l'idéal $I' = I/I^{n+1} \subset A/I^{n+1}$ de la m -PD-structure triviale. Or la condition *b*) entraîne que $\mathfrak{b}_1(A/I^{n+1}) \cap I' = \mathfrak{b}_1 I'$. Puisque (\mathfrak{b}, α) s'étend à A/I^{n+1} , la m -PD-structure triviale sur I' est donc compatible à (\mathfrak{b}, α) . La filtration correspondante vérifie $I'^{\{k\}} = I'^k$ pour tout $k \leq n$, et $I'^{\{n+1\}} = 0$, car, pour $x \in I'$, on a $x^{\{k\}} = x^k$ pour $k \leq n < p^m$, et l'hypothèse *b*) signifie que $\mathfrak{b}_1(A/I^{n+1}) \cap I'^k = \mathfrak{b}_1 I'^k$; avec les notations de 1.3.7, on en déduit que, pour $x \in \mathfrak{b}_1(A/I^{n+1}) \cap I'^k$, on a $\delta_h(x) \in I'^{kh}$. On obtient alors une rétraction $P_{(m), \alpha}^n(I) \rightarrow A/I^{n+1}$, montrant que $\bar{\varphi}_n$ est un isomorphisme.

PROPOSITION 1.4.6. – Sous les hypothèses de 1.4.1, soit A' une A -algèbre plate. Alors les homomorphismes canoniques

$$(1.4.6.1) \quad P_{(m), \alpha}(I) \otimes_A A' \rightarrow P_{(m), \alpha}(IA'),$$

$$(1.4.6.2) \quad P_{(m), \alpha}^n(I) \otimes_A A' \rightarrow P_{(m), \alpha}^n(IA'),$$

sont des m -PD-isomorphismes, compatibles aux filtrations m -PD-adiques.

Comme A' est plat sur A , les puissances divisées de \tilde{I} s'étendent à l'idéal $\tilde{I} \otimes_A A'$, qui munit alors $\tilde{I} \otimes_A A'$ d'une m -PD-structure. Il est immédiat de vérifier que celle-ci est compatible à (\mathfrak{b}, α) , et il en résulte que, via l'homomorphisme canonique $A' \rightarrow P_{(m),\alpha}(I) \otimes_A A'$, $(P_{(m),\alpha}(I) \otimes_A A', \tilde{I} \otimes_A A', \tilde{I} \otimes_A A')$ possède la propriété universelle caractérisant $P_{(m),\alpha}(IA')$. De plus, on obtient par 1.3.8 (iv) les isomorphismes

$$(1.4.6.3) \quad \tilde{I}^{\{n\}} \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} \tilde{I}'^{\{n\}},$$

d'où l'on déduit les m -PD-isomorphismes (1.4.6.2).

Remarques. – L'énoncé qui précède entraîne les conséquences suivantes :

(i) Comme il existe une unique m -PD-structure sur un idéal I d'un anneau de caractéristique 0, et que la filtration m -PD-adique coïncide alors avec la filtration I -adique, les homomorphismes canoniques $A \rightarrow P_{(m),\alpha}(I)$ et $A/I^{n+1} \rightarrow P_{(m),\alpha}^n(I)$ sont des isomorphismes modulo torsion.

(ii) Si S est un schéma muni d'un m -PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$, X un S -schéma, et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal quasi-cohérent, les préfaisceaux qui associent à un ouvert $U \subset X$ les enveloppes $P_{(m),\alpha}(\Gamma(U, \mathcal{I}))$, $P_{(m),\alpha}^n(\Gamma(U, \mathcal{I}))$ sont des faisceaux de \mathcal{O}_X -algèbres quasi-cohérents, qu'on notera $\mathcal{P}_{(m),\alpha}(\mathcal{I})$ et $\mathcal{P}_{(m),\alpha}^n(\mathcal{I})$. De même, le m -PD-idéal canonique $\tilde{\mathcal{I}}$ de $\mathcal{P}_{(m),\alpha}(\mathcal{I})$, son sous-PD-idéal $\tilde{\mathcal{I}}$, et les idéaux $\tilde{\mathcal{I}}^{\{n\}}$ définissant la filtration m -PD-adique sont quasi-cohérents.

1.4.7. Pour $m \leq m'$, il existe un homomorphisme canonique

$$(1.4.7.1) \quad \psi_{m,m'} : P_{(m'),\alpha}(I) \rightarrow P_{(m),\alpha}(I),$$

défini en considérant la m -PD-structure canonique de $P_{(m),\alpha}(I)$ comme une m' -PD-structure. D'après (1.3.5.3), on a donc, pour tout $x \in I$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(1.4.7.2) \quad \psi_{m,m'}(x^{\{k\}_{(m')}}) = (q!/q!) x^{\{k\}_{(m)}},$$

en posant $k = p^m q + r = p^{m'} q' + r'$, $0 \leq r < p^m$, $0 \leq r' < p^{m'}$. Il en résulte que les $\psi_{m,m'}$ sont des homomorphismes d'algèbres filtrées, définissant par passage au quotient des homomorphismes

$$(1.4.7.3) \quad \psi_{m,m'}^n : P_{(m'),\alpha}^n(I) \rightarrow P_{(m),\alpha}^n(I).$$

Pour $m \leq m' \leq m''$, on a la formule de transitivité $\psi_{m,m'} \circ \psi_{m',m''} = \psi_{m,m''}$ [resp. $\psi_{m,m'}^n \circ \psi_{m',m''}^n = \psi_{m,m''}^n$] qui fait de la famille des $P_{(m),\alpha}(I)$ [resp. $P_{(m),\alpha}^n(I)$] un système projectif d'algèbres filtrées.

1.5. Enveloppe d'un idéal régulier

Précisons d'abord la structure des enveloppes à puissances divisées partielles d'algèbres de polynômes.

PROPOSITION 1.5.1. – Soient R une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ un m -PD-idéal de R , $A = R[t_1, \dots, t_d]$ une algèbre de polynômes à coefficients dans R , $I = (t_1, \dots, t_d)$.

(i) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'enveloppe à puissances divisées $P_{(m), \alpha}(I)$ est indépendante de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$, et est un R -module libre de base les produits $t_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}}$, avec $(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$. Le m -PD-idéal \bar{I} est le sous- R -module libre de base les produits $t_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}}$, avec $\sum k_i \geq 1$, et le PD-idéal \tilde{I} le sous- R -module engendré par les produits $t_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}}$, où $k_i \geq p^m$ pour au moins un i , et par les produits $pt_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}}$, avec $\sum k_i \geq 1$.

(ii) Le n -ième cran $\bar{I}^{\{n\}}$ de la filtration m -PD-adique de $P_{(m), \alpha}(I)$ est indépendant de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$, et est le sous- R -module libre de base les produits $t_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}}$, avec $\sum k_i \geq n$. L'enveloppe à puissances divisées nilpotentes $P_{(m), \alpha}^n(I)$ est indépendante de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$, et est un R -module libre de base les produits $t_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}}$, avec $\sum k_i \leq n$, le PD-idéal \tilde{I} et la filtration m -PD-adique de $P_{(m), \alpha}^n(I)$ ayant la même description que dans $P_{(m), \alpha}(I)$.

Soient $A_0 = R[x_1, \dots, x_d]$ une algèbre de polynômes en d variables, $f : A_0 \rightarrow A$ l'homomorphisme défini par $f(x_i) = t_i^{p^m}$, $I_0 = (x_1, \dots, x_d)$, et $I' = (t_1^{p^m}, \dots, t_d^{p^m}) = I_0 A$. Soient $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} + pR$, et β la PD-structure sur \mathfrak{b}_1 prolongeant α et la PD-structure canonique de (p) . La platitude de f entraîne que l'homomorphisme canonique

$$(1.5.1.1) \quad P_\beta(I_0) \otimes_{A_0} A \rightarrow P_\beta(I')$$

est un isomorphisme. Par construction, on a $P_{(m), \alpha}(I) = P_\beta(I^{(p^m)} + \mathfrak{b}_1 A) = P_\beta(I')$. D'après [1, 2.6.1], $P_\beta(I_0)$ est indépendante du PD-idéal de compatibilité choisi sur R , et est l'algèbre de polynômes à puissances divisées en t_1, \dots, t_d . Par conséquent, $P_{(m), \alpha}(I)$ est indépendante de α . De plus, A est libre sur A_0 de base les monômes $t_1^{r_1} \dots t_d^{r_d}$, avec $0 \leq r_i < p^m$, et $P_\beta(I_0)$ est un R -module libre de base les produits $x_1^{[q_1]} \dots x_d^{[q_d]}$, avec $(q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{N}^d$. Comme les images de ceux-ci dans $P_{(m), \alpha}(I)$ sont les $(t_1^{p^m})^{[q_1]} \dots (t_d^{p^m})^{[q_d]}$, il en résulte que $P_{(m), \alpha}(I)$ est libre sur R de base les produits $t_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}}$, avec $(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$. Compte tenu de 1.3.6 (iv), les assertions concernant \bar{I} et \tilde{I} résultent alors du cas c) de 1.4.4.

Pour prouver l'assertion sur les idéaux $\bar{I}^{\{n\}}$, observons d'abord que, grâce à la description donnée de \bar{I} et à 1.3.6, \bar{I}_n est engendré comme R -module par les produits $t_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}}$, avec $\sum k_i \geq n$. Il suffit donc de prouver que si $x \in (\tilde{I} + \mathfrak{b}_1 A) \cap \bar{I}_k$, alors $\delta_h(x) \in \bar{I}_{kh}$ (en notant δ la PD-structure sur $\tilde{I} + \mathfrak{b}_1 A$ prolongeant β et la PD-structure canonique). D'après ce qui précède, x peut s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{\sum k_i \geq k} a_{k_1 \dots k_d} t_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}},$$

avec $a_{k_1 \dots k_d} \in \mathfrak{b}_1 A$ si $k_i < p^m$ pour tout i . Si x est de la forme $at_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}}$, avec $a \in \mathfrak{b}_1 A$, on obtient

$$\delta_h(x) = \beta_h(a)(t_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}})^h \in \bar{I}_{kh},$$

et si x est de la forme $at_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}}$, avec $k_d \geq p^m$, on pose $k_d = p^m q + r$, et on obtient

$$\begin{aligned} \delta_h(x) &= (at_1^{\{k_1\}} \dots t_{d-1}^{\{k_{d-1}\}})^h (t_d^{\{k_d\}})^{[h]} \\ &= (at_1^{\{k_1\}} \dots t_{d-1}^{\{k_{d-1}\}})^h t_d^{rh} ((t_d^{p^m})^{[q]})^{[h]} \\ &= C_{h,q} (at_1^{\{k_1\}} \dots t_{d-1}^{\{k_{d-1}\}})^h t_d^{rh} t_d^{\{p^m q h\}}, \end{aligned}$$

de sorte qu'on a encore $\delta_h(x) \in \bar{I}_{kh}$. La description obtenue montre alors que la filtration par les $\bar{I}^{\{n\}}$ est indépendante de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$. Compte tenu de 1.3.8 (iii), la description du PD-idéal canonique et de la filtration m -PD-adique de $P_{(m)}^n(I)$ résultent de celles de $P_{(m)}(I)$ par passage au quotient.

DÉFINITION. – Sous les hypothèses de la proposition, nous dirons que $P_{(m)}(I)$ est l'algèbre de polynômes à puissances divisées de niveau m en d variables, à coefficients dans R , et nous la noterons $R\langle t_1, \dots, t_d \rangle_{(m)}$.

COROLLAIRE 1.5.2. – La relation (iii) de 1.3.6 est vraie.

Soient A une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre, (I, J, γ) un m -PD-idéal de A , x, y deux éléments de I . Il existe alors un homomorphisme $f : \mathbb{Z}_{(p)}[t_1, t_2] \rightarrow A$ tel que $f(t_1) = x$, $f(t_2) = y$, et il se factorise de manière unique en un m -PD-morphisme $g : \mathbb{Z}_{(p)}\langle t_1, t_2 \rangle_{(m)} \rightarrow A$. Pour tout élément z du m -PD-idéal canonique de $\mathbb{Z}_{(p)}\langle t_1, t_2 \rangle_{(m)}$, on a $g(z^{\{k\}}) = g(z)^{\{k\}}$, de sorte qu'on est ramené à prouver 1.3.6 (iii) pour les éléments $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_{(p)}\langle t_1, t_2 \rangle_{(m)}$. Comme, d'après 1.5.1 (i), cet anneau est sans torsion, il suffit de prouver la relation voulue dans $\mathbb{Z}_{(p)}\langle t_1, t_2 \rangle_{(m)} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[t_1, t_2]$, où elle résulte de la formule du binôme.

Avec certaines hypothèses de platitude et de régularité, il est possible de généraliser les résultats précédents :

PROPOSITION 1.5.3. – Soient $m \in \mathbb{N}$, R une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ un m -PD-idéal de R , A une R -algèbre, $I \subset A$ un idéal. On suppose que A/I est plat sur R , et que I est un idéal régulier. Alors :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'enveloppe à puissances divisées $P_{(m), \alpha}^n(I)$ est plate sur R , indépendante du m -PD-idéal de compatibilité $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$, et sa formation commute à tout changement de base $R \rightarrow R'$. Si l'on suppose de plus qu'il existe un entier i tel que $p^i A = 0$, les mêmes conclusions s'appliquent à $P_{(m), \alpha}(I)$.

(ii) S'il existe une section R -linéaire $\sigma_n : A/I \rightarrow A/I^{n+1}$, et si t_1, \dots, t_d est une suite régulière de générateurs de I , σ_n fait de l'enveloppe $P_{(m), \alpha}^n(I)$ un (A/I) -module libre de base les produits $t_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}}$ avec $\sum k_i \leq n$. Dans cette base, les idéaux \bar{I}, \tilde{I} et la filtration m -PD-adique admettent la même description qu'en 1.5.1.

(iii) S'il existe une telle section σ_n pour tout $n \geq 0$, et s'il existe de plus un entier i tel que $p^i A = 0$, alors, pour n assez grand, σ_n fait que l'enveloppe $P_{(m), \alpha}(I)$ un (A/I) -module

libre de base les produits $t_1^{\{k_1\}} \dots t_d^{\{k_d\}}$ avec $(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$, les idéaux \bar{I} , \tilde{I} , et la filtration m -PD-adique ayant encore la même description.

La démonstration est analogue à celle de [8, 2.3.3 et 2.3.4]. Grâce à 1.4.6 (ii), il suffit de prouver l'énoncé localement sur $\text{Spec } A$, de sorte qu'on peut supposer I engendré par une suite régulière (t_1, \dots, t_d) . Soient $A_0 = R[x_1, \dots, x_d]$, $I_0 = (x_1, \dots, x_d)$, $f : A_0 \rightarrow A$ l'homomorphisme défini par $f(x_i) = t_i$. Comme la suite des t_i est régulière, on a $\text{Tor}_i^{A_0}(R, A) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Il en résulte que, pour tout $n \geq 0$, A/I^{n+1} est plat sur A_0/I_0^{n+1} . On déduit alors de (1.4.3.2) et 1.4.6 que l'homomorphisme

$$(1.5.3.1) \quad P_{(m), \alpha}^n(I_0) \otimes_{A_0} A \rightarrow P_{(m), \alpha}^n(I)$$

est un m -PD-isomorphisme, de sorte que $P_{(m), \alpha}^n(I)$ est plat sur $P_{(m), \alpha}^n(I_0)$. D'après 1.5.1, $P_{(m), \alpha}^n(I_0)$ est libre sur R et indépendant de α . Par suite, $P_{(m), \alpha}^n(I)$ est plat sur R et indépendant de α .

Si R' est une R -algèbre, soient $A'_0 = R'[x_1, \dots, x_d]$, $I'_0 = I_0 A'_0$, $A' = R' \otimes_R A \simeq A'_0 \otimes_{A_0} A$, $I' = IA' = I'_0 A'$. On a alors

$$A'/I'^{n+1} \simeq A'_0/I_0'^{n+1} \otimes_{A_0/I_0^{n+1}} A/I^{n+1},$$

de sorte que A'/I'^{n+1} est plat sur $A'_0/I_0'^{n+1}$. On en déduit un m -PD-isomorphisme

$$(1.5.3.2) \quad P_{(m), \alpha}^n(I'_0) \otimes_{A'_0} A' \xrightarrow{\sim} P_{(m), \alpha}^n(I').$$

Comme A_0 et A'_0 sont des algèbres de polynômes, il résulte de 1.5.1 que l'homomorphisme

$$(1.5.3.3) \quad P_{(m), \alpha}^n(I_0) \otimes_{A_0} A'_0 \rightarrow P_{(m), \alpha}^n(I'_0)$$

est un m -PD-isomorphisme. Par conséquent, l'homomorphisme

$$(1.5.3.4) \quad P_{(m), \alpha}^n(I) \otimes_R R' \simeq P_{(m), \alpha}^n(I) \otimes_A A' \rightarrow P_{(m), \alpha}^n(I')$$

est lui-même un m -PD-isomorphisme.

Supposons enfin qu'il existe une section R -linéaire $\sigma_n : A/I \rightarrow A/I^{n+1}$, ce qui munit $P_{(m), \alpha}^n(I)$ d'une structure de (A/I) -module. On en déduit un isomorphisme

$$(A/I) \otimes_R (A_0/I_0^{n+1}) \xrightarrow{\sim} A/I^{n+1}.$$

Par suite, l'isomorphisme (1.5.3.1) peut encore s'écrire

$$P_{(m), \alpha}^n(I_0) \otimes_R (A/I) \xrightarrow{\sim} P_{(m), \alpha}^n(I),$$

et l'on déduit alors de 1.5.1 que $P_{(m), \alpha}^n(I)$ possède la base annoncée, avec la description voulue pour les idéaux \bar{I} et \tilde{I} , et pour la filtration m -PD-adique.

Lorsqu'il existe un entier i tel que $p^i A = 0$, il existe une puissance I^N de I d'image nulle dans $P_{(m)}(I)$, ce qui permet d'appliquer les raisonnements précédents à $P_{(m)}(I)$ en remplaçant I^{n+1} par I^N .

COROLLAIRE 1.5.4. – *Sous les hypothèses précédentes, supposons que $n < p^{m+1}$. Alors l'homomorphisme canonique*

$$A/I^{n+1} \rightarrow P_{(m), \alpha}^n(I)$$

est un isomorphisme.

En effet, l'isomorphisme (1.5.3.1) montre qu'il suffit de prouver l'assertion pour l'idéal I_0 de l'algèbre de polynômes A_0 . Elle résulte alors de ce que, pour $k_i < p^{m+1}$, on a $k_i = p^m q_i + r_i$, avec $q_i < p$, $0 \leq r_i < p^m$, ce qui, dans $P_{(m), \alpha}^n(I)$, donne $t_i^{k_i} = q_i! t_i^{\{k_i\}}$ avec $q_i!$ inversible.

2. Opérateurs différentiels de niveau fini

Rappelons d'abord brièvement comment, dans [EGA, IV 16.8.4], la construction du faisceau des opérateurs différentiels sur un S -schéma lisse X de dimension relative d se déduit par dualité de celle des faisceaux de parties principales. Si \mathcal{I} est l'idéal de l'immersion diagonale $X \hookrightarrow X \times_S X$, on note $\mathcal{P}_{X/S}^n = \mathcal{O}_{X \times_S X} / \mathcal{I}^{n+1}$ le faisceau des parties principales. On le considère comme \mathcal{O}_X -module par la structure correspondant à la première projection $p_0 : X \times_S X \rightarrow X$, donnée par $a \mapsto a \otimes 1$ sur $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ lorsque U est un ouvert affine de X , et on pose

$$\mathcal{D}_{X/S} = \bigcup_n \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{X/S}^n, \mathcal{O}_X).$$

Nous renvoyons à [EGA, IV, 16.8.9] pour la définition de la structure d'anneau de $\mathcal{D}_{X/S}$, que nous généraliserons plus bas, et nous expliciterons simplement ici sa description locale. A tout système de coordonnées au voisinage d'un point, définissant une base $\partial_1, \dots, \partial_d$ du faisceau des dérivations, est associée une base de $\mathcal{D}_{X/S}$ en tant que \mathcal{O}_X -module, que nous noterons $\underline{\partial}^{[k]}$, $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$ (cf. [EGA, IV 16.11.2], où elle est notée $D_{\underline{k}}$). Dans cette base, la règle de multiplication est donnée par

$$(2.0.1) \quad \underline{\partial}^{[k']} \underline{\partial}^{[k'']} = \binom{k' + k''}{k'} \underline{\partial}^{[k' + k'']}$$

(ce qui entraîne que $\underline{k}! \underline{\partial}^{[k]} = \underline{\partial}^{[k]}$), et la règle de commutation aux scalaires par

$$(2.0.2) \quad \underline{\partial}^{[k]} f = \sum_{\underline{k}' + \underline{k}'' = \underline{k}} \underline{\partial}^{[k']} (f) \underline{\partial}^{[k'']}.$$

Lorsque S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$ -schéma, on déduit de (1.1.0.2) que, si l'on écrit k sous la forme $k = \sum_j a_j p^j$, avec $0 \leq a_j < p$, alors

$$\partial_i^{[k]} = u \prod_{j \geq 0} (\partial_i^{[p^j]})^{a_j},$$

où u est une unité p -adique. On voit ainsi que $\mathcal{D}_{X/S}$ est engendré par les opérateurs $\partial_i^{[p^j]}$, $1 \leq i \leq d$, $j \in \mathbb{N}$. Par contre, il résulte de (2.0.1) qu'aucune sous-famille finie de

la famille des $\partial_i^{[p^j]}$ n'engendre $\mathcal{D}_{X/S}$, et que les sections de $\mathcal{D}_{X/S}$ ne sont pas en général des anneaux noëthériens, même si X est localement noëthérien.

Supposant toujours que S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$ -schéma, notre objectif est ici de construire une famille de faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$, pour $m \geq 0$, tels que $\varinjlim_m \mathcal{D}_{X/S}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{X/S}$. Comme dans le cas de $\mathcal{D}_{X/S}$, les faisceaux $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ sont obtenus en dualisant des faisceaux de parties principales, que nous construisons en 2.1 en appliquant la théorie des m -PD-enveloppes du chapitre précédent à l'idéal de l'immersion diagonale. On dispose alors d'un homomorphisme $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S}$ induisant un isomorphisme entre les sous-faisceaux des opérateurs d'ordre $\leq p^m$ par rapport à chacune des dérivations ∂_i (mais non injectif si X n'est pas plat sur $\mathbb{Z}_{(p)}$). Pour tout m , $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ admet pour base une famille d'opérateurs $\partial_i^{(k)(m)}$ tels que $\partial_i^{(k)(m)} = \partial_i^{[k]}$ pour $k \leq p^m$, et vérifiant des relations analogues à (2.0.1) et (2.0.2) faisant intervenir les coefficients binômiaux modifiés définis en 1.1. Ces relations entraînent que $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ est engendré par les $\partial_i^{[p^j]}$ pour $j \leq m$, et, lorsque X est localement noëthérien, que ses sections sur les ouverts affines sont des anneaux noëthériens.

En 2.3, nous donnons une interprétation de la structure de $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ -module à gauche en termes de stratifications au sens de Grothendieck (cf. [22] ou [1]). Cette interprétation revêt ici une importance particulière du fait que les anneaux $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ ne sont pas engendrés par les dérivations dès que $m \geq 1$, de sorte qu'elle constitue souvent le seul moyen pratique de munir un \mathcal{O}_X -module d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module. Nous en déduisons en particulier l'existence d'une structure de faisceau d'anneaux naturelle sur $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ lorsque \mathcal{B} est une \mathcal{O}_X -algèbre sur laquelle $\mathcal{D}_X^{(m)}$ opère de manière compatible à sa structure d'algèbre ; cela nous servira de manière essentielle au chapitre 4 pour la construction des faisceaux d'opérateurs différentiels à singularités surconvergentes. Enfin, nous nous plaçons en 2.4 sur un schéma formel \mathcal{X} , et nous étudions alors le complété $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, et la limite inductive $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger$ des faisceaux $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, dont nous donnons en 2.4.4 la description locale faisant apparaître des conditions de type Monsky-Washnitzer.

2.1. Faisceaux de parties principales

Nous commençons donc par appliquer les résultats du chapitre 1 à la construction de faisceaux de parties principales avec des PD-structures partielles.

DÉFINITIONS 2.1.1. – Soient S un $\mathbb{Z}_{(p)}$ -schéma, muni d'un m -PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$, et $X \hookrightarrow Y$ une S -immersion. Si $U \subset Y$ est un ouvert tel que X soit fermé dans U , défini par un idéal quasi-cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_U$, l'algèbre $\mathcal{P}_{(m), \alpha}^n(\mathcal{I})$, qui est quasi-cohérente d'après la remarque (ii) de 1.4.6, est à support dans X , et est donc indépendante du choix de l'ouvert U . Il en est de même de $\mathcal{P}_{(m), \alpha}(\mathcal{I})$ lorsque p est localement nilpotent sur Y . Nous utiliserons les notations

$$P_{X, (m), \alpha}^n(Y) = \text{Spec } \mathcal{P}_{(m), \alpha}^n(\mathcal{I}), \quad P_{X, (m), \alpha}(Y) = \text{Spec } \mathcal{P}_{(m), \alpha}(\mathcal{I}).$$

Si la m -PD-structure (\mathfrak{b}, α) s'étend à X , le sous-schéma fermé de $P_{X, (m), \alpha}^n(Y)$ (resp. $P_{X, (m), \alpha}(Y)$) défini par $\tilde{\mathcal{I}}$ s'identifie à X , d'après 1.4.5. Nous dirons dans ce cas que $P_{X, (m), \alpha}(Y)$ (resp. $P_{X, (m), \alpha}^n(Y)$) est le *voisinage à puissances divisées partielles de*

niveau m (resp. et d'ordre n), compatibles à (\mathfrak{b}, α) , de X dans Y . Lorsqu'aucune confusion n'en résultera, nous omettrons l'indice α . D'après 1.5.3, c'est notamment possible lorsque X est un S -schéma plat, et l'idéal \mathcal{I} un idéal régulier (par exemple si X et Y sont lisses sur S), puisqu'alors les $P_{X, (m), \alpha}^n(Y)$ (resp. $P_{X, (m), \alpha}(Y)$ si p est localement nilpotent sur Y) sont indépendants de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$.

Les voisinages $P_{X, (m), \alpha}^n(Y)$ sont munis de morphismes naturels $P_{X, (m), \alpha}^n(Y) \rightarrow Y$. Ils possèdent la propriété universelle suivante, conséquence de celle des enveloppes à puissances divisées partielles : si $i' : X' \hookrightarrow Y'$ est une S -immersion dont l'idéal \mathcal{I}' est muni d'une m -PD-structure (\mathcal{I}', γ') compatible à (\mathfrak{b}, α) et vérifiant $\mathcal{I}'^{\{n+1\}} = 0$, et si $f : Y' \rightarrow Y$ est un S -morphisme dont la restriction à X' se factorise par X , il existe un unique m -PD-morphisme $Y' \rightarrow P_{X, (m), \alpha}^n(Y)$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \swarrow \downarrow \\ X & \hookrightarrow P_{X, (m), \alpha}^n(Y) & \rightarrow Y \end{array}$$

soit commutatif. Lorsque p est localement nilpotent sur Y , $P_{X, (m), \alpha}(Y)$ vérifie la propriété analogue sans condition de nilpotence sur \mathcal{I}' .

2.1.2. Ce qui précède s'applique aux immersions diagonales $X \hookrightarrow X/S^{r+1}$. Nous poserons alors

$$\Delta_{X/S, (m)}^n(r) = P_{X, (m)}^n(X/S^{r+1}), \quad \Delta_{X/S, (m)}(r) = P_{X, (m)}(X/S^{r+1}).$$

Si U est un ouvert de X/S^{r+1} dans lequel X est fermé, et si $\mathcal{I}(r)$ est l'idéal de X dans U , nous emploierons des notations analogues à celles de [EGA, IV § 16], en posant

$$\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n(r) = \mathcal{P}_{(m)}^n(\mathcal{I}(r)), \quad \mathcal{P}_{X/S, (m)}(r) = \mathcal{P}_{(m)}(\mathcal{I}(r)).$$

Lorsque $r = 1$, nous utiliserons simplement les notations $\Delta_{X/S, (m)}^n$, $\Delta_{X/S, (m)}$, $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$, $\mathcal{P}_{X/S, (m)}$. Si la base S ou le niveau m sont clairs d'après le contexte, nous les omettrons aussi les notations précédentes. Rappelons enfin que, lorsque X est lisse sur S , les $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$ (resp. $\mathcal{P}_{X/S, (m)}$ si p est localement nilpotent sur X) sont indépendants de la donnée d'un m -PD-idéal de compatibilité sur S . En particulier, si $m = 0$, l'hypothèse que S soit un $\mathbb{Z}_{(p)}$ -schéma n'est pas nécessaire pour les définir (cf. [1, I, 4.3.1]).

Nous dirons que le faisceau $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$ est le *faisceau des parties principales de niveau m et d'ordre n* de X relativement à S . Pour $m \leq m'$, les faisceaux $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$ sont reliés par les homomorphismes $\psi_{m, m'}^n : \mathcal{P}_{X/S, (m')}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$ définis en (1.4.7.1), qui en font un système projectif pour m variable. On dispose également pour tout m d'un homomorphisme canonique $\psi_m^n : \mathcal{P}_{X/S}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$, où $\mathcal{P}_{X/S}^n$ est le faisceau des parties principales usuel ; si X est lisse sur S , et que $n < p^{m+1}$, le corollaire 1.5.4 montre que c'est un isomorphisme. On obtient ainsi pour tout n un isomorphisme

$$(2.1.2.1) \quad \mathcal{P}_{X/S}^n \xrightarrow{\sim} \varprojlim_m \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n.$$

Notations. – Les notations suivantes seront reprises systématiquement lorsque nous aurons à faire des calculs en coordonnées locales.

Les projections $p_i : X/S^{r+1} \rightarrow X$, $0 \leq i \leq r$, définissent $r + 1$ homomorphismes $d_i : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n(r)$, dont chacun munit $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n(r)$ d'une structure de \mathcal{O}_X -algèbre. Si X est lisse sur S , et muni de coordonnées locales t_1, \dots, t_d , on pose

$$(2.1.2.2) \quad \tau_i = p_1^*(t_i) - p_0^*(t_i) \in \mathcal{O}_{X \times X};$$

nous commettrons souvent les abus de notation consistant à écrire $t_i \otimes 1$ (resp. $1 \otimes t_i$) au lieu de $d_0(t_i)$ (resp. $d_1(t_i)$), et à noter encore $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$ les images des τ_i dans les $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$. Nous appellerons *structure gauche* (resp. *droite*) sur $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$ celle qui est définie par l'homomorphisme d_0 tel que $d_0(a) = a \otimes 1$ (resp. d_1 tel que $d_1(a) = 1 \otimes a$). Comme la suite des τ_i est une suite régulière de générateurs de l'idéal de la diagonale, il résulte de 1.5.3 que, pour chacune des deux structures de \mathcal{O}_X -algèbre, $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$ est un \mathcal{O}_X -module libre de base les éléments $\underline{\tau}^{\{k\}} = \tau_1^{\{k_1\}} \dots \tau_d^{\{k_d\}}$, avec $\sum k_i \leq n$.

PROPOSITION 2.1.3. – Avec les notations précédentes, supposons X lisse sur S .

(i) Soient $r, r', n, n' \in \mathbb{N}$, et $\bar{I}(r) \subset \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n(r)$, $\bar{I}(r') \subset \mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n'}(r')$ les m -PD-idéaux canoniques. Il existe sur l'idéal $\bar{I}(r) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n'}(r') + \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n(r) \otimes_{\mathcal{O}_X} \bar{I}(r')$ une m -PD-structure (nécessairement unique) telle que les homomorphismes

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n(r) &\rightarrow \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n(r) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n'}(r'), \\ \mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n'}(r') &\rightarrow \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n(r) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n'}(r'), \end{aligned}$$

soient des m -PD-morphismes.

(ii) Soient $n, n' \in \mathbb{N}$. Il existe un unique m -PD-morphisme

$$\delta_{(m)}^{n, n'} : \mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n+n'} \rightarrow \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n'}$$

qui rende commutatif le diagramme

$$(2.1.3.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n+n'} & \xrightarrow{\delta_{(m)}^{n, n'}} & \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n'} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{P}_{X/S}^{n+n'} & \xrightarrow{\delta^{n, n'}} & \mathcal{P}_{X/S}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{n'} \end{array}$$

où l'homomorphisme du bas est l'homomorphisme (16.8.9.2) de [EGA, IV], caractérisé par la condition $\delta^{n, n'}(a \otimes b) = (a \otimes 1) \otimes (1 \otimes b)$ pour $a, b \in \mathcal{O}_X$. Pour $m \leq m'$, les homomorphismes $\delta_{(m)}^{n, n'}$ vérifient la relation de commutation

$$(2.1.3.2) \quad \delta_{(m)}^{n, n'} \circ \psi_{m, m'}^{n+n'} = (\psi_{m, m'}^n \otimes \psi_{m, m'}^{n'}) \circ \delta_{(m')}^{n, n'}.$$

L'assertion (i) est valable quelle que soient les structures de \mathcal{O}_X -modules choisies sur $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n(r)$ et $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n'}(r')$ parmi celles que définissent les d_i ; on supposera par exemple qu'on prend celle que définit d_r sur $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n(r)$ et celle que définit d_0 sur $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n'}(r')$.

On peut supposer S et X affines, et X muni de coordonnées locales t_1, \dots, t_d au-dessus de S ; soient $S = \text{Spec } R$, $X = \text{Spec } A$. Pour tout r , soit $I(r) = \text{Ker}(A^{\otimes(r+1)} \rightarrow A)$, et, pour tout n , soit $\bar{I}(r)$ le m -PD-idéal canonique de $P_{(m)}^n(I(r))$. D'après 1.5.3, $P_{(m)}^n(I(r))$ est plat sur A quels que soient n et r , donc les idéaux $P_{(m)}^n(I(r)) \otimes_A \bar{I}(r')$ et $\bar{I}(r) \otimes_A P_{(m)}^{n'}(I(r'))$ de $P_{(m)}^n(I(r)) \otimes_A P_{(m)}^{n'}(I(r'))$ sont munis de m -PD-structures étendant celles de $\bar{I}(r')$ et $\bar{I}(r)$. Si τ_1, \dots, τ_{dr} est une suite régulière de générateurs de $I(r)$, soit $\tilde{I}'(r) \subset \tilde{I}(r)$ l'idéal engendré par les produits $\tau_1^{\{k_1\}} \dots \tau_{dr}^{\{k_{dr}\}}$, où l'un des k_i est au moins égal à p^m . D'après 1.5.3 et 1.5.1, l'idéal $\tilde{I}_1(r) = \tilde{I}'(r) + p P_{(m)}^n(I(r))$ peut s'écrire $\tilde{I}_1(r) = \tilde{I}'(r) + p P_{(m)}^{n'}(I(r))$, et $\tilde{I}'(r)$ est facteur direct de $P_{(m)}^n(I(r))$ comme A -module. Il en résulte qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} & (\tilde{I}_1(r) \otimes_A P_{(m)}^{n'}(I(r')) \cap (P_{(m)}^n(I(r)) \otimes_A \tilde{I}_1(r'))) \\ &= \tilde{I}'(r) \otimes_A \tilde{I}'(r') + p (P_{(m)}^n(I(r)) \otimes_A P_{(m)}^{n'}(I(r'))). \end{aligned}$$

On en déduit que les PD-structures de $P_{(m)}^n(I(r)) \otimes_A \tilde{I}'(r')$ et $\tilde{I}'(r) \otimes_A P_{(m)}^{n'}(I(r'))$ sont strictement compatibles, d'où (i).

Soit \mathcal{I} l'idéal de la diagonale dans $X \times_S X$. Comme on a $\delta^{n, n'}(\tau_i) = 1 \otimes \tau_i + \tau_i \otimes 1$, l'homomorphisme composé

$$\mathcal{P}_{X/S}^{n+n'} \rightarrow \mathcal{P}_{X/S}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{n'} \rightarrow \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n'}$$

envoie $\mathcal{I}/\mathcal{I}^{n+n'+1} \subset \mathcal{P}_{X/S}^{n+n'}$ dans le m -PD-idéal $\bar{\mathcal{I}} \otimes \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n + \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n \otimes \bar{\mathcal{I}}$. La propriété universelle de $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n+n'}$ fournit alors le m -PD-morphisme $\delta_{(m)}^{n, n'}$, et les commutations annoncées.

Remarque. – Lorsque p est localement nilpotent sur S , on montre de même qu'il existe une m -PD-structure canonique sur $\bar{\mathcal{I}}(r) \otimes \mathcal{P}_{X/S, (m)}(r') + \mathcal{P}_{X/S, (m)}(r) \otimes \bar{\mathcal{I}}(r')$. On en déduit d'ailleurs, grâce à la propriété universelle des enveloppes à puissances divisées, l'existence d'un m -PD-isomorphisme

$$\mathcal{P}_{X/S, (m)}(r) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S, (m)}(r') \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{X/S, (m)}(r + r').$$

De même, on voit qu'il existe un m -PD-morphisme $\delta : \mathcal{P}_{X/S, (m)} \rightarrow \mathcal{P}_{X/S, (m)} \otimes \mathcal{P}_{X/S, (m)}$ qui rend commutatif le diagramme analogue à (2.1.3.1).

2.1.4. Supposons qu'on ait un diagramme commutatif

$$(2.1.4.1) \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S', \mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \alpha') & \rightarrow & (S, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha), \end{array}$$

où la ligne du bas est un m -PD-morphisme. La propriété universelle énoncée en 2.1.1 entraîne que l'homomorphisme composé

$$\Delta_{X'/S', \alpha'}^n(r) \rightarrow X'_{/S'}^{r+1} \rightarrow X_{/S}^{r+1}$$

se factorise de manière unique par un m -PD-morphisme

$$(2.1.4.2) \quad \Delta_{X'/S', (m), \alpha'}^n(r) \rightarrow \Delta_{X/S, (m), \alpha}^n(r).$$

Les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} X' & \hookrightarrow & \Delta_{X'/S', (m), \alpha'}^n(r) & \xrightarrow{p'_i} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ X & \hookrightarrow & \Delta_{X/S, (m), \alpha}^n(r) & \xrightarrow{p_i} & X \end{array}$$

induits par les immersions diagonales et les projections sont alors commutatifs. On en tire en particulier des homomorphismes canoniques $\mathcal{O}_{X'}$ -linéaires

$$(2.1.4.3) \quad f^* \mathcal{P}_{X/S, (m), \alpha}^n(r) \rightarrow \mathcal{P}_{X'/S', (m), \alpha'}^n(r),$$

les structures de \mathcal{O}_X -module (resp. $\mathcal{O}_{X'}$ -module) étant définies à partir d'une quelconque des projections p_i (resp. p'_i).

Supposons que le carré (2.1.4.1) soit cartésien, et que de plus X soit lisse sur S . L'énoncé de commutation au changement de base donné en 1.5.3 pour les enveloppes à puissances divisées entraîne alors que (2.1.4.3) est un isomorphisme.

2.1.5. Soit encore $m \in \mathbb{N}$ entier fixé, et soit \mathcal{V} un anneau de valuation discrète complet, d'idéal maximal \mathfrak{m} ; si $m \geq 1$, on suppose que la caractéristique résiduelle de \mathcal{V} est p . Lorsque nous parlerons, dans la suite de cet article, d'un \mathcal{V} -schéma formel \mathcal{X} , il sera toujours sous-entendu que $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ en est un idéal de définition, et que \mathcal{X} est localement noethérien.

Les définitions précédentes peuvent s'étendre aux \mathcal{V} -schémas formels. Soit $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ un morphisme lisse de \mathcal{V} -schémas formels (*i.e.* dont la réduction modulo \mathfrak{m}^i est lisse pour tout i). Si \mathcal{X} et \mathcal{S} sont affines, $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ est plat sur $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}})$. De plus, l'idéal de l'immersion diagonale de \mathcal{X} dans $\mathcal{X}_{/\mathcal{S}}^{r+1}$ est régulier. On peut donc encore appliquer ici les résultats de 1.5.3. On dispose ainsi de faisceaux de parties principales $\mathcal{P}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}, (m)}^n(r)$, qui sont des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules localement libres pour chacune des structures définies par les projections $p_i : \mathcal{X}_{/\mathcal{S}}^{r+1} \rightarrow \mathcal{X}$; si t_1, \dots, t_d sont des coordonnées locales de \mathcal{X} sur \mathcal{S} , et $\tau_i = p_1^*(t_i) - p_0^*(t_i)$, les produits $\tau_1^{\{k_1\}} \dots \tau_d^{\{k_d\}}$, avec $\sum k_i \leq n$, forment encore une base de $\mathcal{P}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}, (m)}^n$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ pour chacune des deux structures naturelles. De même, les résultats de 2.1.3 et 2.1.4 se généralisent dans ce contexte.

2.2. Faisceaux d'opérateurs différentiels

Soient $m \in \mathbb{N}$, et S un schéma (resp. un schéma formel au sens de 2.1.5) ; lorsque $m \geq 1$, on suppose que S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$ -schéma. Dans le reste du chapitre 2, on désignera par X un S -schéma lisse (resp. un S -schéma formel lisse).

Pour $m, n \in \mathbb{N}$, nous considérerons sauf mention expresse du contraire le faisceau des parties principales $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$ comme muni de sa structure gauche de \mathcal{O}_X -algèbre (*cf.* 2.1.2).

2.2.1. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On définit le *faisceau des opérateurs différentiels de niveau m et d'ordre $\leq n$* sur X relativement à S comme étant le dual \mathcal{O}_X -linéaire du faisceau des parties principales $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$:

$$(2.2.1.1) \quad \mathcal{D}_{X/S, n}^{(m)} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n, \mathcal{O}_X).$$

Pour n variable, les surjections $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n'} \rightarrow \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$ fournissent des injections

$$\mathcal{D}_{X/S, n}^{(m)} \hookrightarrow \mathcal{D}_{X/S, n'}^{(m)}.$$

Le *faisceau des opérateurs différentiels de niveau m* est alors défini par

$$\mathcal{D}_{X/S}^{(m)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{X/S, n}^{(m)}.$$

On munit $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ d'une structure de faisceau d'anneaux grâce aux accouplements

$$(2.2.1.2) \quad \mathcal{D}_{X/S, n}^{(m)} \times \mathcal{D}_{X/S, n'}^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S, n+n'}^{(m)}$$

définis comme suit : si $P \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n, \mathcal{O}_X)$, $P' \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n'}, \mathcal{O}_X)$, alors PP' est l'homomorphisme composé

$$(2.2.1.3) \quad \mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n+n'} \xrightarrow{\delta_{(m)}^{n, n'}} \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S, (m)}^{n'} \xrightarrow{\text{Id} \otimes P'} \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X.$$

Les $\mathcal{D}_{X/S, n}^{(m)}$ munissent ainsi le faisceau $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ d'une filtration naturelle de faisceau d'anneaux, appelée comme d'habitude *filtration par l'ordre*. Si P est une section de $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ au voisinage d'un point $x \in X$, nous noterons $\text{ord}_x(P)$ le plus petit entier n tel que $P_x \in \mathcal{D}_{X/S, n, x}^{(m)}$; pour tout ouvert $U \subset X$, et tout $P \in \Gamma(U, \mathcal{D}_{X/S}^{(m)})$, nous poserons

$$\text{ord}(P) = \sup_{x \in U} \text{ord}_x(P).$$

Comme les faisceaux $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$, les faisceaux $\mathcal{D}_{X/S, n}^{(m)}$ sont munis de deux structures de \mathcal{O}_X -module, correspondant à la multiplication à gauche ou à droite par une section de \mathcal{O}_X . Nous les appellerons encore *structure gauche* et *structure droite*. Par construction, la structure gauche est duale de la structure gauche de $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$, et la structure droite provient par functorialité de l'action de \mathcal{O}_X sur $\mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$ définie par sa structure droite.

Les faisceaux $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ opèrent sur \mathcal{O}_X , l'action de $P \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{X/S, (m)}, \mathcal{O}_X)$ étant donnée par le composé

$$(2.2.1.4) \quad \mathcal{O}_X \xrightarrow{d_1} \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X.$$

Le faisceau \mathcal{O}_X est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ -module à gauche. Pour $f \in \mathcal{O}_X$, $P \in \mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$, nous noterons souvent $P(f)$ pour $P \cdot f := P \circ d_1(f)$. On prendra

garde que, contrairement au cas des opérateurs différentiels usuels, l'opération de $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ sur \mathcal{O}_X n'est pas fidèle en général (voir 2.2.7).

Pour $m' \geq m$, les homomorphismes $\psi_{m,m'}^n : \mathcal{P}_{X/S, (m')}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$ fournissent par dualité des homomorphismes \mathcal{O}_X -linéaires $\mathcal{D}_{X/S, n}^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S, n}^{(m')}$, compatibles aux accouplements (2.2.1.2) d'après (2.1.3.2). Par passage à la limite inductive, on en tire donc des homomorphismes canoniques de faisceaux d'anneaux filtrés

$$(2.2.1.5) \quad \rho_{m', m} : \mathcal{D}_{X/S}^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S}^{(m')},$$

non injectifs en général d'après les formules qui suivent. De même, en dualisant les homomorphismes $\mathcal{P}_{X/S}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X/S, (m)}^n$ et en passant à la limite, on obtient encore des homomorphismes de faisceaux d'anneaux filtrés $\rho_m : \mathcal{D}_{X/S}^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S}$. Il résulte alors de 1.5.4 que les homomorphismes

$$(2.2.1.6) \quad \mathcal{D}_{X/S, n}^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S, n}^{(m')} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S, n}$$

sont des isomorphismes pour $n < p^{m+1}$. C'est en particulier le cas quel que soit m si $n \leq 1$, de sorte que $\mathcal{D}_{X/S, 1}^{(m)}$ est le faisceau habituel des opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1 . En outre, l'homomorphisme

$$(2.2.1.7) \quad \varinjlim_m \mathcal{D}_{X/S}^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S}$$

est un isomorphisme.

2.2.2. Considérons un carré commutatif de la forme (2.1.4.1), dans lequel on suppose X lisse sur S et X' lisse sur S' . En dualisant les homomorphismes (2.1.4.3) et en passant à la limite, on obtient des homomorphismes canoniques

$$(2.2.2.1) \quad \mathcal{D}_{X'/S', n}^{(m)} \rightarrow f^* \mathcal{D}_{X/S, n}^{(m)},$$

$$(2.2.2.2) \quad \mathcal{D}_{X'/S'}^{(m)} \rightarrow f^* \mathcal{D}_{X/S}^{(m)}.$$

Lorsque le carré (2.1.4.1) est cartésien, de sorte que (2.1.4.3) est un isomorphisme, il en est de même de (2.2.2.1) et (2.2.2.2).

2.2.3. *Notations.* – Dans la suite, nous omettrons en général l'indice S , le schéma (ou schéma formel) de base étant supposé fixé.

Supposons données des coordonnées locales t_1, \dots, t_d sur X relativement à S , et notons comme précédemment $\tau_i = p_1^*(t_i) - p_0^*(t_i)$. Les dérivations de \mathcal{O}_X correspondant à la base duale de la base dt_i de Ω_X^1 seront notées ∂_i . A la base de $\mathcal{P}_{X, (m)}^n$ formée des $\tau^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \leq n$, correspond la base duale de $\mathcal{D}_{X, n}^{(m)}$, dont les éléments seront notés $\underline{\partial}^{\{\underline{k}\}}$; pour $\underline{k} = \underline{1}_i$, on a donc $\underline{\partial}^{\{\underline{1}_i\}} = \partial_i$. Pour n variable, les $\underline{\partial}^{\{\underline{k}\}}$ forment une base de $\mathcal{D}_X^{(m)}$. Si

nécessaire, nous précisons le niveau m par la notation $\underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}}$. De même, nous noterons $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ la base de $\mathcal{D}_{X,n}$ duale de la base $\underline{\tau}^{\underline{k}}$ de $\mathcal{P}_{X,n}^n$; pour n variable, les $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ forment une base de \mathcal{D}_X (notée $\underline{D}_{\underline{k}}$ dans [EGA, IV, 16.11.2]).

Soient $m' \geq m$, et posons $k_i = p^m q_i + r_i = p^{m'} q'_i + r'_i$, avec $0 \leq r_i < p^m$, $0 \leq r'_i < p^{m'}$. Il résulte de (1.4.7.2) et (1.3.5.2) que l'on a pour tout \underline{k}

$$(2.2.3.1) \quad \rho_{m',m}(\underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}}) = (\underline{q}!/\underline{q}'!) \underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m')}},$$

$$(2.2.3.2) \quad \rho_m(\underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}}) = \underline{q}! \underline{\partial}^{[\underline{k}]}.$$

En particulier, si l'on a $k_i \leq p^m$ pour tout i , on obtient $\rho_m(\underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}}) = \underline{\partial}^{[\underline{k}]}$; dans ce cas, nous utiliserons indifféremment les notations $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ ou $\underline{\partial}^{(\underline{k})}$ dans $\mathcal{D}_X^{(m)}$.

PROPOSITION 2.2.4. – Soient $U \subset X$ un ouvert, t_1, \dots, t_d des coordonnées locales sur U relativement à S , $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$. Avec les notations de 2.2.3, on a les relations suivantes :

$$(i) \quad \forall f \in \mathcal{O}_X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad d_1(f) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} \underline{\partial}^{(\underline{k})}(f) \underline{\tau}^{\underline{k}} \in \mathcal{P}_{X,(m)}^n$$

(formule de Taylor).

$$(ii) \quad \forall \underline{k}, \underline{i} \in \mathbb{N}^d, \quad \underline{\partial}^{(\underline{k})}(\underline{t}^{\underline{i}}) = \underline{q}! \binom{\underline{i}}{\underline{k}} \underline{t}^{\underline{i}-\underline{k}} \in \mathcal{O}_X.$$

$$(iii) \quad \forall \underline{k}', \underline{k}'' \in \mathbb{N}^d, \quad \underline{\partial}^{(\underline{k}')} \underline{\partial}^{(\underline{k}'')} = \left\langle \begin{matrix} \underline{k}' + \underline{k}'' \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\rangle \underline{\partial}^{(\underline{k}'+\underline{k}'')} \in \mathcal{D}_X^{(m)}.$$

$$(iv) \quad \forall \underline{k} \in \mathbb{N}^d, \quad \forall f \in \mathcal{O}_X, \quad \underline{\partial}^{(\underline{k})} f = \sum_{\underline{k}'+\underline{k}''=\underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{(\underline{k}')} (f) \underline{\partial}^{(\underline{k}'')} \in \mathcal{D}_X^{(m)}.$$

La formule de Taylor résulte de (2.2.1.4) et de la définition des $\underline{\partial}^{(\underline{k})}$ comme base duale des $\underline{\tau}^{\underline{k}}$. La relation (ii) en résulte d'après (1.3.5.2), puisqu'on a

$$d_1(\underline{t}^{\underline{i}}) = d_1(\underline{t})^{\underline{i}} = (d_0(\underline{t}) + \underline{\tau})^{\underline{i}}.$$

D'autre part, les relations $\delta_{(m)}^{n,n'}(\tau_i) = \tau_i \otimes 1 + 1 \otimes \tau_i$ entraînent que l'on a

$$\underline{\partial}^{(\underline{k}')} \underline{\partial}^{(\underline{k}'')}(\underline{\tau}^{\underline{i}}) = \underline{\partial}^{(\underline{k}')} \circ (\text{Id} \otimes \underline{\partial}^{(\underline{k}'')}) \circ \delta_{(m)}^{n,n'}(\underline{\tau}^{\underline{i}}) = \underline{\partial}^{(\underline{k}')} \circ (\text{Id} \otimes \underline{\partial}^{(\underline{k}'')}) \circ ((\underline{\tau} \otimes 1 + 1 \otimes \underline{\tau})^{\underline{i}}),$$

de sorte que (iii) résulte de 1.3.6 (iii). Enfin, pour prouver (iv), on observe que $\delta_{(m)}^{n,0} = \text{Id}$, de sorte que l'on a grâce à (i)

$$(\underline{\partial}^{(\underline{k})} f)(\underline{\tau}^{\underline{i}}) = \underline{\partial}^{(\underline{k})}((1 \otimes f) \underline{\tau}^{\underline{i}}) = \underline{\partial}^{(\underline{k})} \left(\left(\sum_{|\underline{k}'| \leq n} \underline{\partial}^{(\underline{k}')} (f) \underline{\tau}^{\underline{k}'} \right) \underline{\tau}^{\underline{i}} \right),$$

et la formule résulte de 1.3.6 (iv).

Remarque. – Les relations 2.2.4 (iii) entraînent que $\underline{\partial}^{(k')} \underline{\partial}^{(k'')} = \underline{\partial}^{(k'')} \underline{\partial}^{(k')}$. Lorsque \underline{k} est de la forme $\underline{k} = (0, \dots, k, \dots, 0)$, où k est à la i -ième place, nous noterons $\partial_i^{(k)}$ au lieu de $\underline{\partial}^{(k)}$. Pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, on peut ainsi écrire sans ambiguïté

$$(2.2.4.1) \quad \underline{\partial}^{(\underline{k})} = \prod_{i=1}^d \partial_i^{(k_i)}.$$

COROLLAIRE 2.2.5. – (i) *Sous les hypothèses de 2.2.4, le faisceau d'anneaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ est engendré par \mathcal{O}_X et par les opérateurs $\partial_i^{(p^j)} = \partial_i^{[p^j]}$, avec $0 \leq j \leq m$, ces derniers commutant deux à deux.*

(ii) *Supposons que S soit un schéma (resp. schéma formel) localement noëthérien. Pour tout ouvert affine $U \subset X$ (resp. tout $x \in X$), l'anneau $D_U^{(m)} = \Gamma(U, \mathcal{D}_X^{(m)})$ (resp. l'anneau $\mathcal{D}_{X,x}^{(m)}$) est noëthérien à gauche et à droite.*

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $k = \sum_{j=0}^{m-1} a_j p^j + ap^m$, avec $0 \leq a_j < p$ pour tout j . On déduit alors de 2.2.4 (ii) et 1.1.3 que

$$(2.2.5.1) \quad \partial_i^{(k)} = u \left(\prod_{j=0}^{m-1} (\partial_i^{[p^j]})^{a_j} \right) (\partial_i^{[p^m]})^a,$$

avec $u \in \mathbb{Z}_{(p)}^*$ (resp. $u = 1$ si $m = 0$), d'où (i). Si U est un ouvert affine de X , il est séparé et quasi-compact, de sorte que le foncteur $\Gamma(U, -)$ commute aux limites inductives [SGA 4, VI, 5.2]. L'anneau $D_U^{(m)}$ est alors muni de la filtration par l'ordre, et son gradué associé est commutatif d'après 2.2.4 (iv). Comme ce dernier est noëthérien, car engendré par les $\text{gr}_i D_U^{(m)} = \Gamma(U, \text{gr}_i \mathcal{D}_X^{(m)})$ pour $i \leq p^m$ d'après 2.2.5, un argument classique montre que $D_U^{(m)}$ est noëthérien (cf. [11, II, 5.3] ou [34, I, 2.5.1]), et de même pour $\mathcal{D}_{X,x}^{(m)}$.

Remarques. – (i) Pour $m = 0$, on voit donc que l'anneau $\mathcal{D}_X^{(0)}$ est engendré par \mathcal{O}_X et les dérivations (cet anneau est noté $PD\text{-}Diff_{X/S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ dans [1] ou [9]).

(ii) Il résulte par contre de 1.1.1 que, si p n'est pas inversible sur X , et si $j \leq m$, $\partial_i^{[p^j]}$ n'appartient pas au sous-anneau engendré par \mathcal{O}_X et les $\partial_i^{[p^{j'}]}$ pour $j' < j$. Le même argument montre que l'anneau \mathcal{D}_X des opérateurs différentiels usuels ne peut être engendré par \mathcal{O}_X et une famille finie d'opérateurs $\partial_i^{[p^j]}$, et également que l'idéal à gauche de \mathcal{D}_X engendré par les $\partial_i^{[p^j]}$, pour $j \in \mathbb{N}$, n'est pas un idéal de type fini, de sorte que, même si X est localement noëthérien, \mathcal{D} n'est pas en général un faisceau d'anneaux noëthériens.

PROPOSITION 2.2.6. – *Supposons que S soit un schéma de caractéristique p , et, pour tout $r \in \mathbb{N}$, soit $X^{(r)} := S \times_S X$ le schéma déduit de X par changement de base par la puissance r -ième du Frobenius absolu de S . Alors le Frobenius relatif*

$$F_{X/S}^{m+1} : X \rightarrow X^{(m+1)}$$

envoie $\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}$ dans le centre de $\mathcal{D}_X^{(m)}$; ce dernier s'identifie localement à l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}$ en les opérateurs $\partial_i^{(p^{m+1})} = u_m (\partial_i^{[p^m]})^p$, avec $u_m = p! (p^m)!^p / p^{m+1}! \in \mathbb{Z}_{(p)}^*$.

Pour montrer que $\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}$ est contenu dans le centre de $\mathcal{D}_X^{(m)}$, il suffit d'après 2.2.4 (iv) de vérifier que, pour tout $\underline{k} \neq \underline{0}$, et tout $f \in \mathcal{O}_X$, on a $\partial^{(\underline{k})} (f^{p^{m+1}}) = 0$, et, compte tenu de 2.2.4 (i), cela résulte de ce que, dans $\mathcal{P}_{X, (m)}^n$, on a

$$\begin{aligned} d_1 (f^{p^{m+1}}) &= (f \otimes 1 + (1 \otimes f - f \otimes 1))^{p^{m+1}} \\ &= f^{p^{m+1}} \otimes 1 + p! ((1 \otimes f - f \otimes 1)^{p^m})^{[p]} \\ &= f^{p^{m+1}} \otimes 1. \end{aligned}$$

Pour montrer que les opérateurs $\partial_i^{(p^{m+1})}$ appartiennent aussi au centre de $\mathcal{D}_X^{(m)}$, on applique encore 2.2.4 (iv) en observant que, si l'on pose $k' = p^m q' + r'$, $p^{m+1} - k' = p^m q'' + r''$, avec $0 \leq r', r'' < p^m$, d'une part

$$\left\{ \begin{matrix} p^{m+1} \\ k' \end{matrix} \right\}_{(m)} = p! / (q'! q''!),$$

est divisible par p pour $k' \neq 0$, p^{m+1} , d'autre part $\partial_i^{(p^{m+1})} = p! \partial_i^{[p^{m+1}]}$ s'annule sur \mathcal{O}_X .

Réciproquement, prouvons que le centre de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ est engendré par $\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}$ et les $\partial_i^{(p^{m+1})}$. Pour cela, on note d'abord que, localement, tout opérateur P de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $P = \sum_{\underline{n}} P_{\underline{n}} (\partial^{(p^{m+1})})^{\underline{n}}$, où les opérateurs

$P_{\underline{n}} \in \mathcal{D}_X^{(m)}$ sont d'ordre $< p^{m+1}$ par rapport à chacun des ∂_i . Si P appartient au centre de $\mathcal{D}_X^{(m)}$, il en résulte que, pour tout $f \in \mathcal{O}_X$, et tout \underline{n} , on a $[P_{\underline{n}}, f] = 0$. Fixons \underline{n} , et posons $P_{\underline{n}} = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \partial^{(\underline{k})}$, avec $a_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_X$, et $k_i < p^{m+1}$ pour tout i . Pour montrer que $a_{\underline{k}} = 0$ pour $\underline{k} \neq \underline{0}$, on ordonne l'ensemble des multi-indices \underline{k} selon l'ordre lexicographique, et on note \underline{h} le plus grand multi-indice \underline{k} tel que $a_{\underline{k}} \neq 0$. Si $\underline{h} \neq \underline{0}$, soit i minimum tel que $h_i \neq 0$. On forme alors

$$[P_{\underline{n}}, t_i] = \sum_{0 \leq k \leq p^{m+1} - 1} \left\{ \begin{matrix} k_i \\ 1 \end{matrix} \right\} a_{\underline{k}} \partial^{(\underline{k} - \underline{1}_i)},$$

où $\underline{1}_i$ désigne le multi-indice dont les composantes sont nulles sauf celle d'indice i , qui est égale à 1. Si $k_i = p^m q + r$, $k_i - 1 = p^m q' + r'$ avec $0 \leq r, r' < p^m$, on a $\left\{ \begin{matrix} k_i \\ 1 \end{matrix} \right\} = q! / q'!$

si $k_i \geq 1$, et $\left\{ \begin{matrix} k_i \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0$ sinon, de sorte que $\left\{ \begin{matrix} k_i \\ 1 \end{matrix} \right\}$ est inversible sauf si $k_i = 0$. Comme $[P_{\underline{n}}, t_i] = 0$, il s'ensuit que $\underline{h} = \underline{0}$, donc que P est de la forme $P = \sum_{\underline{n}} a_{\underline{n}} (\partial^{(p^{m+1})})^{\underline{n}}$, avec $a_{\underline{n}} \in \mathcal{O}_X$. On peut alors écrire $a_{\underline{n}}$ de manière unique sous la forme $a_{\underline{n}} = \sum_r b_{\underline{n}, r} t_r^{\underline{n}}$,

avec $b_{\underline{n}, \underline{r}} \in \mathcal{O}_{X^{(m+1)}}$, et $r_i < p^{m+1}$ pour tout i . Soit \underline{s} un multi-indice tel que $s_i < p^{m+1}$ pour tout i . Le crochet $[\underline{\partial}^{(\underline{s})}, P]$ est donné par

$$[\underline{\partial}^{(\underline{s})}, P] = \sum_{\underline{n}} \left(\sum_{\underline{0} \leq \underline{r} \leq \underline{p}^{m+1} - \underline{1}} \left(\sum_{\underline{j} < \underline{s}} \left\{ \begin{matrix} \underline{s} \\ \underline{j} \end{matrix} \right\} b_{\underline{n}, \underline{r}} \underline{\partial}^{(\underline{s}-\underline{j})} (\underline{t}^{\underline{r}}) \underline{\partial}^{(\underline{j})} \right) (\underline{\partial}^{(p^{m+1})})^{\underline{n}}, \right.$$

ce qui s'écrit encore d'après 2.2.4

$$\begin{aligned} [\underline{\partial}^{(\underline{s})}, P] &= \sum_{\substack{\underline{n} \\ \underline{j} < \underline{s}}} \left\{ \begin{matrix} \underline{s} \\ \underline{j} \end{matrix} \right\} \left\langle \begin{matrix} p^{m+1} \underline{n} + \underline{j} \\ \underline{j} \end{matrix} \right\rangle q_{\underline{s}-\underline{j}}! \\ &\quad \times \left(\sum_{\underline{s}-\underline{j} \leq \underline{r} \leq \underline{p}^{m+1} - \underline{1}} \binom{\underline{r}}{\underline{s}-\underline{j}} b_{\underline{n}, \underline{r}} \underline{t}^{\underline{r}-\underline{s}+\underline{j}} \right) \underline{\partial}^{(p^{m+1} \underline{n} + \underline{j})}, \end{aligned}$$

où $q_{\underline{s}-\underline{j}}$ désigne le quotient de $\underline{s} - \underline{j}$ par p^m . Pour \underline{n} , \underline{j} , et \underline{r} variables, avec $\underline{0} \leq \underline{j} < \underline{s}$ et $\underline{s} - \underline{j} \leq \underline{r} \leq \underline{p}^{m+1} - \underline{1}$, les sections $\underline{t}^{\underline{r}-\underline{s}+\underline{j}} \underline{\partial}^{(p^{m+1} \underline{n} + \underline{j})}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}$, de sorte que leurs coefficients dans l'expression précédente sont nuls. Si $\underline{s} \neq \underline{0}$, on peut prendre $\underline{j} = \underline{0}$, $\underline{r} = \underline{s}$, et on en déduit que $q_{\underline{s}}! b_{\underline{n}, \underline{s}} = 0$. Comme $q_{\underline{s}}!$ est inversible, les $b_{\underline{n}, \underline{s}}$ sont nuls pour $\underline{s} \neq \underline{0}$, ce qui montre que les opérateurs appartenant au centre de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ ont bien la forme annoncée.

PROPOSITION 2.2.7. – *Sous les hypothèses de 2.2.6, l'image de l'homomorphisme canonique*

$$\rho_m : \mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_X \hookrightarrow \text{End}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X)$$

est l'anneau des endomorphismes $\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}$ -linéaires de \mathcal{O}_X , et son noyau \mathcal{K} est l'idéal bilatère de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ engendré localement par les opérateurs $\partial_i^{(p^{m+1})^{(m)}}$. De plus, pour tout $m' > m$, le noyau de l'homomorphisme canonique $\rho_{m', m} : \mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_X^{(m')}$ est aussi égal à \mathcal{K} , et, si $\bar{\mathcal{D}}_X^{(m)} \simeq \mathcal{D}_X^{(m)} / \mathcal{K}$ est l'image de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ dans $\mathcal{D}_X^{(m')}$, ce dernier est localement libre sur $\bar{\mathcal{D}}_X^{(m)}$ (à droite et à gauche), de base les opérateurs de la forme $\underline{\partial}^{(p^{m+1} \underline{n})^{(m')}}$, $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$.

D'après la proposition précédente, l'endomorphisme de \mathcal{O}_X induit par un opérateur de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ est $\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}$ -linéaire. Inversement, pour prouver que tout endomorphisme $\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}$ -linéaire de \mathcal{O}_X appartient à l'image de $\mathcal{D}_X^{(m)}$, il suffit d'observer grâce à 2.2.4 (ii) que, pour $k = p^m q + r < p^{m+1}$, et tout i , les opérateurs $\partial_i^{(k)}$ vérifient $\partial_i^{(k)}(t_i^k) = q! \in \mathbb{Z}_{(p)}^*$, tandis que $\partial_i^{(k)}(t_i^h) = 0$ pour $h < k$; on en déduit aisément que, si \underline{k} est tel que $k_i < p^{m+1}$ pour tout i , il existe un opérateur $P_{\underline{k}} \in \mathcal{D}_X^{(m)}$ tel que $P_{\underline{k}}(\underline{t}^{\underline{k}}) = 1$, et $P_{\underline{k}}(\underline{t}^{\underline{h}}) = 0$ pour $\underline{h} \neq \underline{k}$, $h_i < p^{m+1}$, d'où l'assertion.

Soit maintenant $P = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{(\underline{k})} \in \mathcal{D}_X^{(m)}$ un opérateur annulant \mathcal{O}_X . La relation

$\underline{\partial}^{(\underline{k})}(\underline{t}^{\underline{k}}) = q!$, avec $q! \in \mathbb{Z}_{(p)}^*$ lorsque $k_i < p^{m+1}$ pour tout i , entraîne alors que $a_{\underline{k}} = 0$ lorsque $k_i < p^{m+1}$ pour tout i . La description du noyau en résulte grâce à (2.2.5.1).

Soit \underline{k} un multi-indice, et posons $k_i = p^m q_i + r_i = p^{m+1} q'_i + r'_i$, avec $0 \leq r_i < p^m$, $0 \leq r'_i < p^{m+1}$. D'après (2.2.3.1), l'homomorphisme $\rho_{m+1, m} : \mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_X^{(m+1)}$ envoie $\underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}}$ sur $\underline{q}!/\underline{q}'! \underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m+1)}}$. Comme on a $\underline{q} = p\underline{q}' + \underline{s}$, avec $0 \leq s_i < p$, on voit que

$$v_p(\underline{q}!/\underline{q}'!) = \sum_{i=1}^d (q_i - \sigma(q_i) - q'_i + \sigma(q'_i))/(p-1) = \sum_{i=1}^d q'_i,$$

de sorte que l'image de $\underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}}$ dans $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$ est nulle si et seulement s'il existe i tel que $k_i \geq p^{m+1}$. Utilisant encore (2.2.5.1), on voit donc que le noyau de $\rho_{m+1, m}$ est égal à \mathcal{K} . Il en est alors de même pour celui de $\rho_{m', m}$, car on a

$$\text{Ker}(\rho_{m+1, m}) \subset \text{Ker}(\rho_{m', m}) \subset \text{Ker}(\rho_m).$$

Par contre, si $k_i < p^{m+1}$ pour tout i , $\underline{q}!$ est inversible dans $\mathbb{Z}_{(p)}$, et on a $\rho_{m', m}(\underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}}) = \underline{q}! \underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)'}}$. Le fait que $\mathcal{D}_X^{(m')}$ soit libre sur $\bar{\mathcal{D}}_X^{(m')}$ avec pour base les $\underline{\partial}^{(p^{m+1}\underline{n})^{(m)'}}$ résulte alors de (2.2.5.1).

Remarque. – Dans [35], une confusion malheureuse entre $\mathcal{D}_X^{(m)}$ et son image dans $\text{End}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X)$ (p. 279, 1. 9-111) invalide les résultats des sections (1.2.5)-(1.2.8). En particulier, nous montrerons dans un article ultérieur que, lorsque X est affine, la dimension cohomologique de $\Gamma(X, \mathcal{D}_X^{(m)})$ est égale à $2 \dim(X)$. De même, si \mathcal{X} est un schéma (ou un schéma formel) affine et lisse sur un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques, la dimension cohomologique de $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ est égale à $2 \dim(X) + 1$, ainsi que celle de son complété p -adique.

2.3. PD-stratifications de niveau m

Nous allons expliciter ici l'interprétation d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche sur un \mathcal{O}_X -module \mathcal{E} en termes de stratifications, au sens de [1, II 1.3.1]. Cette interprétation sera particulièrement utile dans ce contexte parce que, pour $m \geq 1$, il ne suffit plus de spécifier l'action des dérivations pour définir une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche sur \mathcal{E} , contrairement au cas des $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -modules, ou des \mathcal{D}_X -modules en caractéristique 0.

Le schéma (resp. schéma formel) de base S étant fixé, nous omettons de préciser l'indice S dans ce qui suit. Si $m = 0$, les résultats qui suivent sont valables sans supposer que S soit un $\mathbb{Z}_{(p)}$ -schéma.

DÉFINITION 2.3.1. – Soient $X \rightarrow S$ un morphisme lisse de $\mathbb{Z}_{(p)}$ -schémas (resp. schémas formels), \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -module. Une m -PD-stratification (ou PD-stratification de niveau m) ε sur \mathcal{E} relativement à S est la donnée d'une famille compatible d'isomorphismes $\mathcal{P}_{X, (m)}^n$ -linéaires

$$\varepsilon_n : \mathcal{P}_{X, (m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X, (m)}^n,$$

où les produits tensoriels sont respectivement pris pour les structures droite et gauche de $\mathcal{P}_{X, (m)}^n$, ces isomorphismes étant astreints aux conditions suivantes :

- (i) $\varepsilon_0 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$;

(ii) Pour tous n, n' , le diagramme

$$(2.3.1.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow[\sim]{\delta_{(m)}^{n,n'}(\varepsilon_{n+n'})} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \\ q_1^{n,n'}(\varepsilon_{n+n'}) \searrow \sim & & \sim \nearrow q_0^{n,n'}(\varepsilon_{n+n'}) \\ & \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} & \end{array}$$

dont les flèches sont obtenues par extension des scalaires grâce à l'homomorphisme $\delta_{(m)}^{n,n'}$ défini en 2.1.3 et aux homomorphismes naturels

$$\begin{aligned} q_0^{n,n'} : \mathcal{P}_{X,(m)}^{n+n'} &\rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'}, \\ q_1^{n,n'} : \mathcal{P}_{X,(m)}^{n+n'} &\rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'}, \end{aligned}$$

est commutatif.

Si $q_{i,j}^n : \mathcal{P}_{X,(m)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ (2) est l'homomorphisme correspondant à la projection de X^3 sur X^2 définie par les facteurs d'indices i, j , il est facile de voir que cette dernière condition (condition de cocycle) équivaut à

$$(2.3.1.2) \quad \forall n, \quad q_{02}^{n*}(\varepsilon_n) = q_{01}^{n*}(\varepsilon_n) \circ q_{12}^{n*}(\varepsilon_n).$$

Un homomorphisme \mathcal{O}_X -linéaire $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ entre modules munis de m -PD-stratifications est dit *horizontal* s'il commute aux isomorphismes ε_n pour \mathcal{E} et \mathcal{F} en un sens évident.

PROPOSITION 2.3.2. – Soit \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -module. Il y a équivalence entre les données suivantes :

- Une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche sur \mathcal{E} prolongeant sa structure de \mathcal{O}_X -module ;
- Une famille compatible d'homomorphismes \mathcal{O}_X -linéaires

$$\theta_n : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^n$$

(ce dernier étant considéré comme \mathcal{O}_X -module par l'intermédiaire de la structure droite de $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$), telle que $\theta_0 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$, et que pour tous n, n' , le diagramme

$$(2.3.2.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n+n'} & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \delta_{(m)}^{n,n'}} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \\ \theta_{n+n'} \uparrow & & \uparrow \theta_n \otimes \text{Id} \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\theta'_n} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \end{array}$$

soit commutatif ;

c) Une m -PD-stratification $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ sur \mathcal{E} .

De plus, un homomorphisme \mathcal{O}_X -linéaire $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ entre deux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules à gauche est $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire si et seulement s'il commute aux homomorphismes θ_n (resp. aux isomorphismes ε_n), i.e. s'il est horizontal.

La méthode est standard [1, II 4.1-4.2], et due à Grothendieck dans le cas des opérateurs différentiels usuels. Rappelons brièvement comment on passe d'une structure à l'autre.

Une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche sur un \mathcal{O}_X -module \mathcal{E} fournit une famille compatible d'homomorphismes $\mu_m : \mathcal{D}_{X,n}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, où le produit tensoriel est pris pour la structure droite de \mathcal{O}_X -module de $\mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$, μ_n étant lui-même \mathcal{O}_X -linéaire pour la structure gauche. Cette donnée équivaut par adjonction à celle d'une famille d'homomorphismes \mathcal{O}_X -linéaires

$$\theta_n : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{D}_X^{(m)}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^n,$$

où le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}$ est pris pour la structure gauche de $\mathcal{D}_X^{(m)}$, et est considéré comme \mathcal{O}_X -module par la structure droite de $\mathcal{D}_X^{(m)}$; la commutativité des diagrammes (2.3.2.1) traduit alors l'associativité de l'action de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ sur \mathcal{E} . Les isomorphismes ε_n sont les factorisations $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ -linéaires des θ_n , et la commutativité de (2.3.2.1) correspond à la condition de cocycle (2.3.1.1).

En coordonnées locales, et avec les notations de 2.2.3, l'application θ_n est celle qui associe à une section $x \in \mathcal{E}$ son « développement de Taylor » :

$$(2.3.2.2) \quad \theta_n(x) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} \underline{\partial}^{(\underline{k})} x \otimes \tau^{\{\underline{k}\}}.$$

L'expression de ε_n s'en déduit aussitôt par linéarité, et on vérifie que c'est un isomorphisme en observant que son inverse est donné par

$$(2.3.2.3) \quad \varepsilon_n^{-1}(x \otimes 1) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} (-1)^{|\underline{k}|} \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}} \otimes \underline{\partial}^{(\underline{k})} x.$$

On déduit de ces formules le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.3.3. – Soient \mathcal{E}, \mathcal{F} deux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules à gauche.

(i) Il existe sur le produit tensoriel $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ une unique structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche telle que, pour tout \underline{k} , et toutes sections x de \mathcal{E} , y de \mathcal{F} , on ait

$$(2.3.3.1) \quad \underline{\partial}^{(\underline{k})} \cdot (x \otimes y) = \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{(\underline{i})} x \otimes \underline{\partial}^{(\underline{k}-\underline{i})} y.$$

(ii) Il existe sur le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ une unique structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche telle que, pour tout \underline{k} , tout morphisme $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, et toute section x de \mathcal{E} , on ait

$$(2.3.3.2) \quad (\underline{\partial}^{(\underline{k})} \varphi)(x) = \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{i}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{(\underline{k}-\underline{i})} (\varphi) \underline{\partial}^{(\underline{i})} x).$$

DÉFINITION 2.3.4. – Soit \mathcal{B} une \mathcal{O}_X -algèbre commutative. On dira qu'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche sur \mathcal{B} est compatible à sa structure d'algèbre, si la structure de \mathcal{O}_X -module sous-jacente à la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module est celle qu'induit la structure de \mathcal{O}_X -algèbre, et si les isomorphismes $\varepsilon_n : \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B} \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ de la m -PD-stratification correspondante sont des isomorphismes de $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ -algèbres.

Il résulte de (2.3.2.2) que cette condition s'exprime en coordonnées locales par la formule de Leibnitz

$$(2.3.4.1) \quad \forall f, g \in \mathcal{B}, \quad \forall \underline{k} \in \mathbb{N}^d, \quad \underline{\partial}^{(\underline{k})}(fg) = \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{(\underline{i})}(f) \underline{\partial}^{(\underline{k}-\underline{i})}(g).$$

Exemples. – (i) Soient $Y \subset X$ un sous-schéma fermé défini par un idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$, et $\hat{\mathcal{O}}_{X/Y} = \varprojlim_i \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^i$ le complété formel de X le long de Y . D'après (2.0.2), l'action de \mathcal{D}_X sur \mathcal{O}_X vérifie la formule de Leibnitz. Par récurrence sur n , puis sur k , il en résulte qu'elle définit des accouplements $\mathcal{D}_{X,n}^{(m)} \times \mathcal{J}^k \rightarrow \mathcal{J}^{k-n}$, d'où une structure de \mathcal{D}_X -module à gauche sur $\hat{\mathcal{O}}_{X/Y}$ qui est compatible à sa structure de \mathcal{O}_X -algèbre. Par composition avec $\rho_m : \mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_X$, on obtient donc sur $\hat{\mathcal{O}}_{X/Y}$ une structure compatible de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche.

(ii) Sous les hypothèses précédentes, soit $\mathcal{P}_{(m)}(\mathcal{J})$ la m -PD-enveloppe de \mathcal{J} . On munit $\mathcal{P}_{(m)}(\mathcal{J})$ d'une m -PD-stratification de la manière suivante. Soient $\bar{\mathcal{I}} \subset \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ le m -PD-idéal canonique, et α sa m -PD-structure. Posons

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J} \cdot \mathcal{P}_{X,(m)}^n + \bar{\mathcal{I}} = \text{Ker}(\mathcal{P}_{X,(m)}^n \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = \mathcal{P}_{X,(m)}^n \cdot \mathcal{J} + \bar{\mathcal{I}}.$$

On dispose alors d'un homomorphisme canonique

$$(2.3.4.2) \quad \mathcal{P}_{(m)}(\mathcal{J}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{(m),\alpha}(\mathcal{J}'),$$

qui est un isomorphisme. Pour le voir, il suffit de montrer qu'il existe sur l'idéal $\bar{\mathcal{I}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n + \mathcal{P}_{(m)}(\mathcal{J}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \bar{\mathcal{I}}$ une m -PD-structure prolongeant celles de $\bar{\mathcal{I}}$ et $\bar{\mathcal{I}}$, car elle fournit alors un m -PD-morphisme inverse de (2.3.4.2). Or $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ est localement isomorphe au quotient d'une algèbre de polynômes à puissances divisées de niveau m , à coefficients dans \mathcal{O}_X , par le n -ième cran de sa filtration m -PD-adique, et, par extension des scalaires, $\mathcal{P}_{(m)}(\mathcal{J}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ garde la même structure. De plus, d'après 1.5.1 (iii), la m -PD-structure canonique de $\mathcal{P}_{(m)}(\mathcal{J}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \bar{\mathcal{I}}$ est compatible à toute m -PD-structure sur un idéal de l'anneau de coefficients $\mathcal{P}_{(m)}(\mathcal{J})$, ce qui entraîne l'existence de la m -PD-structure cherchée. Comme le même argument fournit un isomorphisme canonique

$$\mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{(m)}(\mathcal{J}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{(m),\alpha}(\mathcal{J}'),$$

on en déduit la m -PD-stratification (ε_n) cherchée.

Soient t_1, \dots, t_d des coordonnées locales sur X . Par construction, on a

$$\varepsilon_n(1 \otimes \underline{t}^{\{\underline{i}\}}) = (\underline{t} \otimes 1 + \underline{\tau})^{\{\underline{i}\}},$$

d'où l'on déduit la relation

$$(2.3.4.3) \quad \forall \underline{k}, \underline{i} \in \mathbb{N}^d, \quad \underline{\partial}^{(\underline{k})} \underline{t}^{\{\underline{i}\}} = \left\langle \begin{matrix} \underline{i} \\ \underline{k} \end{matrix} \right\rangle \underline{t}^{\{\underline{i}-\underline{k}\}}.$$

(iii) Soit $Z \subset X$ un diviseur. Nous construisons en 4.2.3 des \mathcal{O}_X -algèbres commutatives $\mathcal{B}_X(Z, r)$, munies d'une action compatible de $\mathcal{D}_X^{(m)}$. Lorsque X est un schéma formel,

leurs complétées p -adiques fourniront des modèles entiers pour les algèbres de fonctions analytiques sur certains voisinages stricts du tube du complémentaire de Z . Les anneaux d'opérateurs différentiels qu'on en déduit grâce à la proposition suivante jouent un rôle fondamental dans la théorie des coefficients pour les variétés non propres.

La condition de compatibilité introduite plus haut permet en effet de munir le produit tensoriel $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ d'une structure canonique de faisceau d'anneaux, auquel s'étend naturellement la filtration par l'ordre de $\mathcal{D}_X^{(m)}$:

PROPOSITION 2.3.5. – Soit \mathcal{B} une \mathcal{O}_X -algèbre commutative, munie d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche compatible avec sa structure de \mathcal{O}_X -algèbre. Il existe alors sur le produit tensoriel $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ une unique structure de faisceau d'anneaux telle que les morphismes $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$, $b \mapsto b \otimes 1$, et $\mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$, $P \mapsto 1 \otimes P$, soient des homomorphismes d'anneaux, que $(b \otimes 1)(1 \otimes P) = b \otimes P$ pour tous $b \in \mathcal{B}$, $P \in \mathcal{D}_X^{(m)}$, et que, pour tout système de coordonnées locales sur X , tout \underline{k} , et tout $b \in \mathcal{B}$, on ait

$$(2.3.5.1) \quad (1 \otimes \underline{\partial}^{(\underline{k})}) \cdot (b \otimes 1) = \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{(\underline{k}-\underline{i})} b \otimes \underline{\partial}^{(\underline{i})}.$$

Si \mathcal{B}' est une \mathcal{B} -algèbre commutative munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module, telle que $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ soit $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire, le morphisme $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ est un homomorphisme d'anneaux.

L'unicité est claire. Pour définir la multiplication sur $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$, on écrit

$$\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{X,(m)}^n, \mathcal{B}).$$

On définit alors le produit PP' de $P : \mathcal{P}_{X,(m)}^n \rightarrow \mathcal{B}$ et de $P' : \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \rightarrow \mathcal{B}$ comme le composé

$$\mathcal{P}_{X,(m)}^{n+n'} \xrightarrow{\delta_{(m)}^{n,n'}} \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \xrightarrow{\text{Id} \otimes P'} \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{B} \xrightarrow{\varepsilon_n} \mathcal{B} \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^n \xrightarrow{\text{Id} \otimes P} \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \xrightarrow{\mu} \mathcal{B},$$

où ε_n est la m -PD-stratification définie par la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module de \mathcal{B} , et μ la multiplication de \mathcal{B} . La seule vérification nécessaire est celle de l'associativité de l'opération ainsi définie : elle résulte d'un diagramme commutatif qu'on laisse au lecteur le soin d'explicitier, et où interviennent le triangle (2.3.1.1) exprimant la condition de cocycle pour les ε_n , et la compatibilité des ε_n avec μ . La formule (2.3.5.1) résulte immédiatement de cette définition, et des formules précédentes. La dernière assertion résulte de ce qu'un homomorphisme $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire est horizontal.

Remarques. – (i) L'homomorphisme $\mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ munit $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ de deux structures de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module. La structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à droite est définie par la multiplication à droite par les opérateurs de $\mathcal{D}_X^{(m)}$, et la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche coïncide avec la structure produit tensoriel définie en 2.3.3.

(ii) On voit comme en 2.3.2 que la donnée d'une structure de $(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)})$ -module à gauche sur un \mathcal{B} -module \mathcal{E} est équivalente à la donnée d'une m -PD-stratification dont les

isomorphismes $\varepsilon_n : \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ sont semi-linéaires par rapport aux isomorphismes $\mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ de la m -PD-stratification de \mathcal{B} .

(iii) Soient $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ un homomorphisme d'algèbres vérifiant les propriétés de l'énoncé, et \mathcal{E} un $(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)})$ -module à gauche. Grâce à la remarque précédente, $\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{E}$ est muni d'une structure naturelle de $(\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)})$ -module. On vérifie alors aisément que l'homomorphisme canonique

$$(2.3.5.2) \quad \mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{E} \rightarrow (\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}) \otimes_{\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}} \mathcal{E}$$

est un isomorphisme de $(\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)})$ -modules.

PROPOSITION 2.3.6.– Soient $X \rightarrow S$ un morphisme lisse de schémas (resp. schémas formels), \mathcal{B} une \mathcal{O}_X -algèbre commutative munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche. Pour tout ouvert affine $U \subset X$, l'homomorphisme canonique

$$(2.3.6.1) \quad \Gamma(U, \mathcal{B}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{D}_X^{(m)}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)})$$

est un isomorphisme. Si $\Gamma(U, \mathcal{B})$ (resp. si la fibre \mathcal{B}_x en un point $x \in X$) est un anneau noëthérien, $\Gamma(U, \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)})$ (resp. $(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)})_x$) est noëthérien à gauche et à droite.

Pour tout n , le faisceau $\mathcal{D}_{U,n}^{(m)}$ est un \mathcal{O}_U -module localement libre, donc facteur direct d'un \mathcal{O}_U -module libre de type fini. Comme l'homomorphisme (2.3.6.1) est un isomorphisme lorsque $\mathcal{D}_X^{(m)}$ est remplacé par un tel module, il l'est encore pour $\mathcal{D}_{U,n}^{(m)}$. Comme U est quasi-compact et séparé, le foncteur $\Gamma(U, -)$ commute aux limites inductives, et l'assertion pour $\mathcal{D}_X^{(m)}$ en résulte. La dernière assertion se démontre alors comme 2.2.5 (ii).

Nous terminerons cette section en introduisant pour les $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules une notion de nilpotence analogue à celle de connexion nilpotente [29].

PROPOSITION 2.3.7. – Soient $X \rightarrow S$ un morphisme lisse de schémas, \mathcal{E} un $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche. On suppose que p est localement nilpotent sur S , et qu'il existe sur X un système de coordonnées locales t_1, \dots, t_d . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour toute section e de \mathcal{E} , il existe localement un entier N tel que $\partial^{\langle \underline{k} \rangle} e = 0$ pour $|\underline{k}| \geq N$.

(ii) La condition (i) est satisfaite pour tout système de coordonnées locales sur un ouvert de X .

(iii) Il existe un isomorphisme

$$\varepsilon : \mathcal{P}_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}$$

vérifiant la condition de cocycle, et induisant par réduction sur les $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ la m -PD-stratification de \mathcal{E} . De plus, cet isomorphisme est alors unique.

Gardons les notations de 2.2.3. Comme p est localement nilpotent sur S , il résulte de 1.5.3 que $\mathcal{P}_{X,(m)}$ est libre sur \mathcal{O}_X de base les $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$, avec $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$. Si la condition (i) est satisfaite, on peut encore définir une application $\theta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}$ en posant $\theta(e) = \sum_{\underline{k}} \partial^{\langle \underline{k} \rangle} e \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$ pour toute section e de \mathcal{E} ; on vérifie qu'elle est \mathcal{O}_X -linéaire pour la structure droite de $\mathcal{P}_{X,(m)}$, de sorte qu'on obtient par factorisation l'homomorphisme ε .

Il est clair qu'il induit les isomorphismes ε_n donnant la m -PD-stratification de \mathcal{E} , et la condition de cocycle en découle. Pour voir que ε est un isomorphisme, on construit l'isomorphisme inverse par factorisation de l'application $\theta' : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}_{X, (m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ définie par $\theta'(e) = \sum_k (-1)^{|k|} \tau^{\{k\}} \otimes \underline{\partial}^{\{k\}} e$. Inversement, si la condition (iii) est satisfaite, on déduit de (2.3.2.2). que les composantes de $\varepsilon(1 \otimes e)$ dans la base formée des $\tau^{\{k\}}$ sont les $\underline{\partial}^{\{k\}} e$ (ce qui montre l'unicité de ε lorsque la m -PD-stratification est donnée). Comme les sections sur les ouverts affines commutent aux sommes directes, il existe donc pour chaque point de X un voisinage sur lequel les $\underline{\partial}^{\{k\}} e$ sont nuls sauf un nombre fini. La condition (iii) étant indépendante du choix d'un système de coordonnées locales, la condition (ii) en résulte.

DÉFINITIONS. – Soit X un S -schéma lisse, sur lequel p est localement nilpotent. Nous dirons que \mathcal{E} est un $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module *quasi-nilpotent* s'il vérifie les conditions de la proposition au voisinage de tout point de X ; nous dirons qu'il est *nilpotent* si l'entier N peut être pris indépendamment de la section e . De même, nous dirons qu'une m -PD-stratification sur un \mathcal{O}_X -module \mathcal{E} est *quasi-nilpotente* si elle vérifie la condition (iii) de la proposition. Si X est un schéma formel, de réduction X_i modulo p^i , nous dirons qu'un $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module \mathcal{E} est *topologiquement quasi-nilpotent* (resp. *topologiquement nilpotent*) si sa réduction mod p^i est un $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$ -module quasi-nilpotent (resp. nilpotent).

C'est le cas par exemple si la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module de \mathcal{E} est induite par une structure de $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$ -module, car, pour tout i , on a alors $\partial_i^{\{k\}(m)} e = (q!/q'!) \partial_i^{\{k\}(m+1)} e$, avec $k = p^m q + r = p^{m+1} q' + r'$, $0 \leq r < p^m$, $0 \leq r' < p^{m+1}$, et $q!/q'! \rightarrow 0$ pour la topologie p -adique. Cette condition est vérifiée par \mathcal{O}_X , qui est donc un $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module nilpotent lorsque p est nilpotent sur X , et il en résulte alors que tout $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module de type fini quasi-nilpotent est nilpotent.

2.4. Passages à la limite

Comme en 2.1.5, on désigne par \mathcal{V} un anneau de valuation discrète complet, d'inégales caractéristiques $(0, p)$, d'idéal maximal \mathfrak{m} , de corps résiduel k , de corps des fractions K , d'indice de ramification absolue e . On fixe un \mathcal{V} -schéma formel \mathcal{S} (dont $\mathfrak{m} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est par hypothèse un idéal de définition), et, pour tout $i \geq 0$, on note S_i la réduction de \mathcal{S} modulo \mathfrak{m}^{i+1} . Si \mathcal{X} est un \mathcal{S} -schéma formel, on pose de même $X_i = \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} S_i$; pour $i = 0$, on note simplement X la réduction de \mathcal{X} sur k . Les opérateurs différentiels considérés sur \mathcal{X} (resp. X_i) sont relatifs à \mathcal{S} (resp. S_i). On rappelle que les schémas formels considérés sont toujours supposés localement noëthériens.

2.4.1. Soit \mathcal{X} un \mathcal{S} -schéma formel lisse. On notera $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}$ le faisceau d'anneaux obtenu par complétion p -adique du faisceau des opérateurs différentiels usuels (relativement à \mathcal{S}), et, pour tout entier $m \geq 0$, on notera de même $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ le complété p -adique du faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. Compte tenu de 2.2.2, on a donc

$$(2.4.1.1) \quad \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} = \varprojlim_i \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)} / \mathfrak{m}^{i+1} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}.$$

On ne dispose plus sur les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ et $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}$ de la filtration par l'ordre. Localement, leurs sections peuvent être décrites comme des opérateurs différentiels d'ordre infini : si

$\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ est un ouvert affine sur lequel il existe des coordonnées locales t_1, \dots, t_d , toute section $P \in \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ (resp. $P \in \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}})$) peut s'écrire de manière unique

$$(2.4.1.2) \quad P = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{(\underline{k})} \quad (\text{resp. } P = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]})$$

où les $a_{\underline{k}} \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ tendent vers 0 pour la topologie p -adique.

Pour m variable, les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ forment un système inductif de faisceaux d'anneaux, et on pose

$$(2.4.1.3) \quad \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger} = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}.$$

Par passage à la limite, on dispose donc d'un homomorphisme canonique de faisceaux d'anneaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}$. Enfin, pour tout faisceau abélien E , nous noterons $E_{\mathbb{Q}}$ le faisceau $E \otimes \mathbb{Q}$. On introduit ainsi les faisceaux

$$(2.4.1.4) \quad \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \otimes \mathbb{Q}, \quad \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger} = \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger} \otimes \mathbb{Q}.$$

Comme \mathcal{X} est localement noëthérien, son idéal de p -torsion est localement annulé par une puissance fixe de p . Il résulte donc de 2.2.3 et (2.4.1.2) que, pour tous $m \leq m'$, l'homomorphisme canonique $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m')}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$) est injectif, de sorte que l'on obtient les injections

$$(2.4.1.5) \quad \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(0)} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(1)} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}.$$

Lorsque $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est sans p -torsion (ce qui est le cas par exemple si $\mathcal{S} = \text{Spf } \mathcal{V}$), on a de plus les inclusions

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}, \quad \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger} \hookrightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}, \quad \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}},$$

ainsi que

$$(2.4.1.6) \quad \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger} = \bigcup_{m \geq 0} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}.$$

Par passage à la limite, le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}$ opère sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, de sorte qu'il en est de même des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$. De même, les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ opèrent sur le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes \mathbb{Q}$.

Nous dirons que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$, $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}$) est le *faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini et de niveau m* (resp. *de niveau fini, de niveau infini*) sur \mathcal{X} .

2.4.2. Pour donner une description analogue à (2.4.1.2) pour les sections de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ sur un ouvert affine \mathcal{U} , il peut être commode d'utiliser une norme sur $A = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$. Pour simplifier, on supposera ici que $\mathcal{S} = \text{Spf } \mathcal{V}$. Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est alors sans p -torsion, A s'injecte dans $A_K = A \otimes_{\mathcal{V}} K$, qui est une K -algèbre de Tate. On dispose donc sur celle-ci des normes quotients associées aux présentations $A_K \xrightarrow{\sim} K\{T_1, \dots, T_r\}/I$ de A_K comme quotient d'une algèbre de séries formelles restreintes sur K , et à la norme standard de $K\{T_1, \dots, T_r\}$. Ces normes, qui font de A_K une K -algèbre de Banach, sont toutes équivalentes et sont appelées *normes de Banach* sur A_K ; comme A_K est réduit, elles sont

aussi équivalentes à la norme spectrale sur le spectre maximal $\text{Spm } A_K$ (cf. [12, 6.2.4, th. 1]). On observera d'autre part que, pour la norme spectrale sur A_K , la condition $b_{\underline{k}} \in A$ équivaut à $\|b_{\underline{k}}\| \leq 1$: en effet, si $b \in A_K$ vérifie $\|b\| \leq 1$, b est entier sur A [12, 6.3.5, th. 1 et 5.1.4, cor. 6] ; écrivant $b = b'/\pi^r$, où π est une uniformisante de A et $b' \in A - \pi A$, le fait que $A/\pi A$ soit lisse sur k , donc réduit, entraîne que $r \leq 0$.

Nous noterons par $\| - \|$ l'une quelconque des normes considérées ici, les conditions de décroissance qui suivent étant indépendantes de la norme choisie.

LEMME 2.4.3. – Pour $m, k \in \mathbb{N}$, posons $k = p^m q_k^{(m)} + r_k^{(m)}$, avec $0 \leq r_k^{(m)} < p^m$.

(i) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $\eta' < 1, c' \in \mathbb{R}$ tels que $|q_k^{(m)}|! \leq c' \eta'^k$ pour tout k .

(ii) Pour tout $\eta < 1$, il existe $m \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}$ tels que $\eta^k \leq c|q_k^{(m)}|!$ pour tout k .

Pour m fixé, et $k \in \mathbb{N}$, posons $q = q_k^{(m)}$, d'où $(k - p^m)/p^m < q \leq k/p^m$. Rappelons que $v_p(q!) = (q - \sigma(q))/(p - 1)$; compte tenu de la majoration

$$\forall q \geq 0, \quad \sigma(q) < (p - 1)(\log_p(q + 1) + 1),$$

on en tire l'estimation

$$(2.4.3.1) \quad k/p^m(p - 1) - \log_p(k + 1) - p/(p - 1) < v_p(q!) \leq k/p^m(p - 1).$$

Le lemme en résulte.

PROPOSITION 2.4.4. – Soient \mathcal{X} un \mathcal{V} -schéma formel lisse, \mathcal{U} un ouvert affine de \mathcal{X} , muni de coordonnées locales $t_1, \dots, t_d, A = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$, $\| - \|$ une norme de Banach sur A_K . Pour tout opérateur

$$(2.4.4.1) \quad P = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{\underline{k}} / \underline{k}! \in \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}),$$

soit $P_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{D}_{X_i})$ la réduction de P modulo \mathfrak{m}^{i+1} . Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

(i) L'opérateur P appartient à $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger})$;

(ii) Il existe des constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, telles que

$$(2.4.4.2) \quad \text{ord}(P_i) \leq \alpha i + \beta.$$

(iii) Il existe des constantes $c, \eta \in \mathbb{R}$, avec $\eta < 1$, telles que, quel que soit \underline{k} ,

$$(2.4.4.3) \quad \|a_{\underline{k}}\| \leq c \eta^{|\underline{k}|}.$$

Comme \mathcal{U} est quasi-compact et séparé, le foncteur $\Gamma(\mathcal{U}, -)$ commute aux limites inductives, de sorte que $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}) = \bigcup_m \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$. Soient $A = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$,

$P \in \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$. On peut écrire P sous la forme

$$P = \sum_{\underline{k}} b_{\underline{k}} \underline{\partial}^{(\underline{k})} = \sum_{\underline{k}} \underline{q}! b_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]},$$

où les coefficients $b_{\underline{k}} \in A$ tendent vers 0 pour $|\underline{k}| \rightarrow \infty$, et où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $k = p^m q + r, 0 \leq r < p^m$. Si v_m désigne la valuation de \mathcal{V} , le lemme précédent

entraîne qu'il existe des constantes $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $v_m(q!) = e v_p(q!) \geq ak + b$. Par suite, $q! b_{\underline{k}} \in \mathfrak{m}^{i+1} A$ dès que $|\underline{k}| \geq (i - b + 1)/a$, d'où (2.4.4.2).

Pour montrer que (ii) \Rightarrow (iii), on peut prendre pour $\| - \|$ la norme spectrale de A_K , de sorte que $\|b\| \leq 1$ pour tout $b \in A$. La condition (2.4.4.2) entraîne alors que $\|b_{\underline{k}}\| \leq p^{-(i+1)/e}$ pour tout i tel que $i < (|\underline{k}| - \beta)/\alpha$. On obtient donc $\|b_{\underline{k}}\| \leq p^{-(|\underline{k}| - \beta)/e\alpha}$, d'où la condition (2.4.4.3).

Soit enfin $P = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \partial^{[\underline{k}]} \in \Gamma(\mathcal{U}, \hat{\mathcal{D}}_X)$ un opérateur dont les coefficients $a_{\underline{k}}$ vérifient une condition de la forme (2.4.4.3), et prenons encore pour norme la norme spectrale. Il faut alors montrer que, pour m assez grand, les coefficients $b_{\underline{k}} \in A_K$ définis par $b_{\underline{k}} = a_{\underline{k}}/q!$ (où on a posé $\underline{k} = p^m \underline{q} + \underline{r}$ avec $0 \leq r_i < p^m$ pour tout i), sont dans A pour tout \underline{k} , et tendent vers 0 pour la topologie m -adique. Si l'on pose $v_p(a_{\underline{k}}) = -\log_p \|a_{\underline{k}}\|$, la relation $\|a_{\underline{k}}\| \leq c \eta^{|\underline{k}|}$ peut être écrite sous la forme $v_p(a_{\underline{k}}) \geq \lambda |\underline{k}| + \mu$, avec $\lambda > 0$. On obtient alors d'après le lemme

$$v_p(b_{\underline{k}}) = v_p(a_{\underline{k}}) - v_p(q!) \geq (\lambda - 1/p^m(p-1))|\underline{k}| + \mu,$$

ce qui montre qu'en choisissant m assez grand, on assure que $b_{\underline{k}} \rightarrow 0$ pour $|\underline{k}| \rightarrow \infty$. D'après 2.4.2, la condition $b_{\underline{k}} \in A$ équivaut à $\|b_{\underline{k}}\| \leq 1$. Or on voit que $v_p(b_{\underline{k}}) \geq 0$ dès que $|\underline{k}| \geq -\mu(\lambda - 1/p^m(p-1))^{-1}$. Il reste donc à observer que, lorsque $\mu < 0$, on peut prendre m assez grand pour avoir $\underline{q} = 0$ tant que $|\underline{k}| < -\mu(\lambda - 1/p^m(p-1))^{-1}$: en effet, il suffit de choisir m tel que l'on ait $p^m > -\mu(\lambda - 1/p^m(p-1))^{-1}$, i.e. $p^m > \lambda^{-1}(-\mu + 1/(p-1))$.

Remarque. – On voit donc apparaître de la sorte, pour caractériser les opérateurs $P \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_X^\dagger)$, des conditions de décroissance sur les coefficients analogues à celles de Monsky-Washnitzer (cf. [37] ou [41]). Si $f \in A$ est tel que $V(f)$ soit une hypersurface lisse, ou une intersection d'hypersurfaces lisses se coupant transversalement, la $A_{\mathbb{Q}}$ -algèbre $A_{f, \mathbb{Q}}^\dagger$, où A_f^\dagger est la complétée faible de l'anneau de fractions A_f , est engendrée sous l'action de $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{X, \mathbb{Q}}^\dagger)$ par $1/f$ [4, 4.2.2 et 4.3.2]. On conjecture que, sans hypothèse sur f , il existe encore un nombre fini d'éléments de A_f^\dagger engendrant $A_{f, \mathbb{Q}}^\dagger$ en tant que $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{X, \mathbb{Q}}^\dagger)$ -module.

3. Théorèmes de cohérence

Nous allons examiner maintenant les propriétés de finitude des complétés d'anneaux d'opérateurs différentiels construits précédemment, et prouver pour les modules cohérents sur ceux-ci les analogues des théorèmes A et B pour les modules \mathcal{O}_X -cohérents. Pour la commodité des références, nous regrouperons dans les premières sections divers rappels et généralisations simples de résultats classiques.

Rappelons tout d'abord (cf. [40] ou [23, (0_r, 5.3)]) que, si \mathcal{D} est un faisceau d'anneaux sur un espace topologique X quelconque, et \mathcal{M} un \mathcal{D} -module à gauche, on dit que \mathcal{M} est cohérent s'il est de type fini sur \mathcal{D} , et si, pour tout ouvert $U \subset X$ et tout morphisme $\varphi : (\mathcal{D}|_U)^r \rightarrow \mathcal{M}|_U$, le noyau de φ est de type fini sur \mathcal{D} . On dit que \mathcal{D} est un

faisceau d'anneaux cohérent s'il est cohérent en tant que \mathcal{D} -module à gauche. Lorsque \mathcal{D} est cohérent, un \mathcal{D} -module à gauche est cohérent si et seulement s'il est localement de présentation finie. Quel que soit \mathcal{D} , la catégorie des \mathcal{D} -modules cohérents est abélienne.

Dans la section 3.1, nous traitons d'abord le cas des faisceaux d'opérateurs d'ordre fini, pour lesquels la cohérence résulte simplement de la quasi-cohérence sur \mathcal{O}_X et de la noëthérianité. Après avoir fait en 3.2 quelques rappels sur les complétions dans le cas des anneaux noëthériens non nécessairement commutatifs, nous étudions en 3.3 les modules cohérents sur des anneaux tels que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, lorsque \mathcal{X} est un \mathcal{V} -schéma formel ; les techniques de limites projectives mises en œuvre reprennent celles qui sont utilisées dans [EGA] pour l'étude des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules cohérents. La section 3.4 permet de passer au cas des modules cohérents sur les anneaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$, grâce à la proposition 3.4.5 qui fournit des modèles entiers pour ceux-ci. Dans la section 3.5, nous établissons la platitude des homomorphismes canoniques $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m+1)}$. C'est le résultat-clé dont nous déduisons en 3.6 la cohérence du faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$, et, par passage à la limite inductive, les théorèmes A et B pour les $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules cohérents. Pour finir, mentionnons que ces résultats seront établis dans un cadre suffisamment général pour couvrir le cas des faisceaux d'opérateurs différentiels à coefficients dans une $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbre sur laquelle ils opèrent, afin notamment de pouvoir les appliquer aux opérateurs à singularités surconvergentes construits dans le chapitre suivant.

3.1. Cas des opérateurs d'ordre fini

Nous considérons d'abord le cas des faisceaux non complétés $\mathcal{D}_X^{(m)}$. Rappelons l'énoncé général suivant :

PROPOSITION 3.1.1. – Soient X un espace topologique, \mathcal{D} un faisceau d'anneaux sur X , \mathfrak{B} une base d'ouverts de X . On suppose vérifiées les conditions suivantes :

- a) Pour tout $U \in \mathfrak{B}$, l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{D})$ est noëthérien à gauche (resp. à droite) ;
- b) Pour tous $U, V \in \mathfrak{B}$, avec $V \subset U$, l'homomorphisme $\Gamma(U, \mathcal{D}) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{D})$ est plat à droite (resp. à gauche).

Alors \mathcal{D} est un faisceau d'anneaux cohérent à gauche (resp. à droite).

Il suffit de montrer que, pour tout $U \in \mathfrak{B}$, et tout $u : (\mathcal{D}|_U)^r \rightarrow \mathcal{D}|_U$, $\mathcal{N} = \text{Ker}(u)$ est un \mathcal{D} -module à gauche de type fini. Si $D = \Gamma(U, \mathcal{D})$ le D -module $N = \Gamma(U, \mathcal{N})$ est de type fini, de sorte qu'on achève en observant que le foncteur qui associe à un D -module à gauche M le $\mathcal{D}|_U$ -module à gauche $\mathcal{D}|_U \otimes_D M$ est exact grâce à b).

COROLLAIRE 3.1.2. – Soient $X \rightarrow S$ un morphisme lisse de schémas (resp. schémas formels), $m \in \mathbb{N}$, et \mathcal{B} une \mathcal{O}_X -algèbre commutative munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche, vérifiant les conditions a) et b) de 3.1.1 pour la famille des ouverts affines de X . Alors le faisceau $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ défini en 2.3.5 est un faisceau d'anneaux cohérent à gauche.

Compte tenu de 2.3.6, il suffit de prouver que pour $V \subset U$ affines, l'homomorphisme canonique $\Gamma(U, \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)})$ est plat à droite. Observons d'abord que l'homomorphisme

$$(3.1.2.1) \quad \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{D}_X^{(m)}) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{D}_X^{(m)})$$

est un isomorphisme, car $\mathcal{D}_X^{(m)}$ est limite inductive des \mathcal{O}_X -modules cohérents $\mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$. En appliquant l'isomorphisme (2.3.6.1), on en déduit que l'homomorphisme

$$(3.1.2.2) \quad \Gamma(V, \mathcal{B}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{B})} \Gamma(U, \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)})$$

est un isomorphisme $\Gamma(U, \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)})$ -linéaire à droite, et l'assertion résulte de la platitude de $\Gamma(V, \mathcal{B})$ sur $\Gamma(U, \mathcal{B})$.

Remarque. – On peut également montrer que $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ est cohérent à droite.

Supposons maintenant que X soit un schéma, et \mathcal{B} une \mathcal{O}_X -algèbre commutative quasi-cohérente, à sections noëthériennes sur les ouverts affines. Compte tenu de ce qui précède et de 2.3.6, on peut appliquer à $\mathcal{D} = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ l'énoncé général suivant, dont la démonstration est standard (et dans lequel on peut remplacer gauche par droite) :

PROPOSITION 3.1.3. – *Soient X un schéma, \mathcal{D} un faisceau d'anneaux sur X tel que, pour tout ouvert affine $U \subset X$, $\Gamma(U, \mathcal{D})$ soit un anneau noëthérien. On suppose donné un homomorphisme $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{D}$ tel que la multiplication à gauche par les sections de \mathcal{O}_X fasse de \mathcal{D} un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent.*

(i) *Le faisceau \mathcal{D} est un faisceau d'anneaux cohérent à gauche.*

(ii) *Pour qu'un \mathcal{D} -module à gauche \mathcal{M} soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit quasi-cohérent en tant que \mathcal{O}_X -module, et que, pour tout ouvert U d'un recouvrement affine de X , $\Gamma(U, \mathcal{M})$ soit un $\Gamma(U, \mathcal{D})$ -module à gauche de type fini.*

(iii) *Supposons X affine, et soit $D = \Gamma(X, \mathcal{D})$. Alors les foncteurs $\mathcal{M} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{M})$ et $M \mapsto \mathcal{D} \otimes_D M$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des \mathcal{D} -modules à gauche cohérents et la catégorie des D -modules à gauche de type fini.*

3.2. Rappels sur le complété I -adique d'un anneau non commutatif

Pour la commodité des références, nous rappelons ici comment les résultats classiques sur la complétion des modules de type fini sur un anneau commutatif s'énoncent dans le cas non commutatif (voir aussi par exemple [38, Ch. D]). Sauf mention explicite du contraire, les modules considérés sont des modules à gauche, les résultats restant valables lorsqu'on échange gauche et droite. Nous emploierons le terme « complété » dans le sens de « séparé complété ».

3.2.1. Soient D un anneau non nécessairement commutatif, $I \subset D$ un idéal bilatère, et M un D -module à gauche. La topologie I -adique sur D (resp. M) est définie par la famille d'idéaux bilatères I^n (resp. de sous-modules $I^n M$). Le complété $\widehat{D} = \varprojlim_n D/I^n$ de D est muni d'une structure d'anneau, et le complété $\widehat{M} = \varprojlim_n M/I^n M$ de M d'une structure de \widehat{D} -module à gauche.

Nous dirons que I est un idéal *central* de D s'il est engendré par une famille d'éléments appartenant au centre de D . Lorsque I est de type fini comme idéal à gauche (ou à droite), il est engendré par une famille finie d'éléments du centre, à la fois comme idéal à gauche et comme idéal à droite.

Nous aurons à utiliser le lemme élémentaire suivant (cf. [8, 1.2.6]) :

LEMME 3.2.2. – Soient D un anneau non nécessairement commutatif, $I \subset D$ un idéal central de type fini, $D_i = D/I^{i+1}$, $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un système projectif de D_i -modules à gauche, tel que, pour tout $i \geq 1$, les homomorphismes canoniques $M_i/I^i M_i \rightarrow M_{i-1}$ soient des isomorphismes. On pose $M = \varprojlim_i M_i$.

(i) Pour tout $n \geq 0$, les homomorphismes canoniques

$$(3.2.2.1) \quad I^n M \rightarrow \varprojlim_i I^n M_i,$$

$$(3.2.2.2) \quad M/I^{n+1} M \rightarrow M_n,$$

sont des isomorphismes.

(ii) Si M_0 est de type fini sur D_0 , alors M est de type fini sur $\widehat{D} = \varprojlim_i D_i$, toute famille relevant une famille finie de générateurs de M_0 engendrant M .

(iii) Si D_0 est nœthérien à gauche (resp. à droite), \widehat{D} est nœthérien à gauche (resp. à droite).

Comme les topologies I -adique et I^n -adique coïncident, il suffit de prouver l'assertion (i) pour $n = 1$. Soient t_1, \dots, t_r une famille de générateurs de I appartenant au centre de D , et $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un élément de $\varprojlim_i IM_i$. Chaque x_i peut s'écrire sous la forme

$x_i = \sum_{k=1}^r t_k y_{k,i}$ avec $y_{k,i} \in M_i$, et on va montrer qu'il existe des suites d'éléments $y'_{k,i} \in M_i$ telles que, pour tous k, i , $y'_{k,i}$ ait $y'_{k,i-1}$ pour image dans M_{i-1} , et que $x_i = \sum_{k=1}^r t_k y'_{k,i}$ pour tout i . Pour cela, on construit par récurrence sur i les éléments $y'_{k,j}$ cherchés, pour $0 \leq j < i$, et des éléments $y''_{k,i}$ d'image $y'_{k,i-1}$ dans M_{i-1} , tels que $x_i = \sum_{k=1}^r t_k y''_{k,i}$. Si $i = 0$, on pose $y''_{k,0} = y_{k,0}$. Supposant la construction faite pour l'indice i , posons $z_{k,i} = \bar{y}_{k,i+1} - y''_{k,i}$, où $\bar{y}_{k,i+1}$ est l'image de $y_{k,i+1}$ dans M_i . On a donc $\sum_{k=1}^r t_k z_{k,i} = 0$, et, si $z_{k,i+1} \in M_{i+1}$ relève $z_{k,i}$, on a $\sum_{k=1}^r t_k z_{k,i+1} \in I^{i+1} M_{i+1}$.

On peut donc écrire $\sum_{k=1}^r t_k z_{k,i+1} = \sum_{k=1}^r t_k u_{k,i+1}$ où $u_{k,i+1} \in I^i M_{i+1}$. On achève alors la récurrence en posant $y'_{k,i} = y''_{k,i} + u_{k,i}$, où $u_{k,i}$ est l'image de $u_{k,i+1}$ dans M_i et $y''_{k,i+1} = y_{k,i+1} - z_{k,i+1} + u_{k,i+1}$, ce qui prouve l'isomorphisme (3.2.2.1). Comme l'homomorphisme canonique $M = \varprojlim_i M_i \rightarrow M_n$ est surjectif, la suite

$$0 \rightarrow \varprojlim_i I^{n+1} M_i \rightarrow M \rightarrow M_n \rightarrow 0$$

est exacte, d'où l'isomorphisme (3.2.2.2). L'assertion (ii) est alors standard.

D'après (i), \widehat{D} est séparé et complet pour la topologie I -adique. Le gradué associé est quotient de l'anneau de polynômes $D_0[T_1, \dots, T_r]$, où les T_i commutent aux éléments de D_0 . Si D_0 est nœthérien, il en est de même de $D_0[T_1, \dots, T_r]$, donc de $\text{gr } \widehat{D}$, et \widehat{D} est alors nœthérien d'après [13, III, § 2, n° 9, cor. 2 à la prop. 12].

3.2.3. Supposons que D soit un anneau noëthérien à gauche, et $I \subset D$ un idéal central. On montre essentiellement comme dans le cas commutatif les propriétés suivantes, où l'on peut échanger gauche et droite :

(i) Si M est un D -module à gauche de type fini, et $N \subset M$ un sous D -module, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$I^n N \subset I^n M \cap N \subset I^{n-n_0} N.$$

L'hypothèse que I est central permet d'employer la même démonstration que dans le cas commutatif : l'anneau $D^* = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$ est alors noëthérien car quotient d'un anneau de polynômes $D[T_1, \dots, T_r]$ (où les T_i commutent aux éléments de D).

(ii) Le foncteur $M \mapsto \widehat{M}$ est exact sur la sous-catégorie des D -modules à gauche de type fini.

(iii) Pour tout D -module à gauche de type fini M , l'homomorphisme canonique

$$\widehat{D} \otimes_D M \rightarrow \widehat{M}$$

est un isomorphisme.

(iv) L'homomorphisme canonique $D \rightarrow \widehat{D}$ fait de \widehat{D} un D -module à droite plat.

(v) Tout \widehat{D} -module à gauche de type fini est séparé et complet.

(vi) L'anneau \widehat{D} est noëthérien à gauche.

(vii) Soit $D \rightarrow E$ un homomorphisme d'anneaux tel que E soit noëthérien à gauche, et que IE soit un idéal central de E . Pour que \widehat{E} soit plat à droite sur \widehat{D} , il faut et suffit que, pour tout n , l'anneau $E/I^n E$ soit plat à droite sur $D/I^n D$.

Remarque. – L'hypothèse que I est central, qui suffira ici, peut en fait être remplacée par l'hypothèse plus faible que I est engendré par une suite centralisante d'éléments de D , i.e. une suite (t_1, \dots, t_d) telle que, pour tout i , l'image de t_i appartienne au centre de $D/(t_1, \dots, t_{i-1})$ [38, D, ch. V]. Par exemple, sous les hypothèses de 2.2.1, soit (t_2, \dots, t_d) une suite quelconque de sections de \mathcal{O}_X ; alors la suite $(p, t_2^{p^{m+1}}, \dots, t_d^{p^{m+1}})$ est une suite centralisante dans $\mathcal{D}_X^{(m)}$, d'après 2.2.4 (ii).

Nous utiliserons également le résultat suivant (cf. [9, p. B5]) :

PROPOSITION 3.2.4. – Soient D un anneau noëthérien à gauche, I un idéal central, E un D -module à droite tel que, pour tout n , $E/E I^n$ soit un $D/I^n D$ -module plat. Alors \widehat{E} est un \widehat{D} -module à droite plat, et, pour tout \widehat{D} -module à gauche de type fini M , le groupe abélien $\widehat{E} \otimes_{\widehat{D}} M$ est séparé et complet pour la topologie définie par les sous-groupes $\widehat{E} \otimes_{\widehat{D}} I^n M$.

Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de \widehat{D} -modules à gauche de type fini. La platitude de $E/E I^n$ sur $D/I^n D$ entraîne que, pour tout n , on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \widehat{E} \otimes_{\widehat{D}} (M'/I^n M \cap M') \rightarrow \widehat{E} \otimes_{\widehat{D}} M/I^n M \rightarrow \widehat{E} \otimes_{\widehat{D}} M''/I^n M'' \rightarrow 0.$$

Par Mittag-Leffler, la suite obtenue par passage à la limite projective reste exacte. Comme, d'après 3.2.3 (i), il existe n_0 tel que $I^n M' \subset I^n M \cap M' \subset I^{n-n_0} M'$ pour tout $n \geq n_0$, on obtient ainsi la suite exacte

$$0 \rightarrow (\widehat{E} \otimes_{\widehat{D}} M')^\wedge \rightarrow (\widehat{E} \otimes_{\widehat{D}} M)^\wedge \rightarrow (\widehat{E} \otimes_{\widehat{D}} M'')^\wedge \rightarrow 0,$$

ce qui montre l'exactitude du foncteur $M \mapsto (\widehat{E} \otimes_{\widehat{D}} M)^\wedge$ sur la catégorie des \widehat{D} -modules à gauche de type fini. En prenant une présentation finie de M sur \widehat{D} , et en remarquant que la deuxième assertion est vraie lorsque M est libre de type fini, on en déduit que l'homomorphisme $\widehat{E} \otimes_{\widehat{D}} M \rightarrow (\widehat{E} \otimes_{\widehat{D}} M)^\wedge$ est un isomorphisme, d'où l'énoncé.

3.3. Modules cohérents sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$

Comme pour les $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules cohérents, les propriétés de cohérence sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ résultent des propriétés des complétés d'anneaux noëthériens, étendues ici au cas non commutatif. Elles sont valables sous des hypothèses plus générales, sur un schéma formel localement noëthérien, et c'est le cadre que nous adopterons dans cette section pour les énoncer.

Dans cette section, nous désignerons donc par \mathcal{X} un schéma formel localement noëthérien, et par $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ un idéal de définition. Nous noterons X_i le schéma usuel $(|\mathcal{X}|, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{I}^{i+1})$.

LEMME 3.3.1. – Soient $(\mathcal{M}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un système projectif de \mathcal{O}_{X_i} -modules quasi-cohérents, et $\mathcal{M} = \varprojlim_i \mathcal{M}_i$. On suppose que les homomorphismes $\mathcal{M}_{i+1}/\mathcal{I}^{i+1} \mathcal{M}_{i+1} \rightarrow \mathcal{M}_i$ sont des isomorphismes. Alors, pour tout $n \geq 0$, les homomorphismes canoniques

$$(3.3.1.1) \quad \mathcal{I}^n \mathcal{M} \rightarrow \varprojlim_i \mathcal{I}^n \mathcal{M}_i,$$

$$(3.3.1.2) \quad \mathcal{M}/\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_n,$$

sont des isomorphismes.

Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ un ouvert affine. Posons $I = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{I})$, $M_i = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{M}_i)$, $M = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{M})$. Comme les \mathcal{M}_i sont quasi-cohérents, on a $M_i/I^i M_i \xrightarrow{\sim} M_{i-1}$, et $M = \varprojlim_i M_i$ par définition. Le lemme résulte donc de 3.2.2.

LEMME 3.3.2. – Supposons \mathcal{X} affine, et soit $I = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{I})$.

(i) Soit \mathcal{M} un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module tel que $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathcal{M}/\mathcal{I}^i \mathcal{M}$, et que les $\mathcal{M}/\mathcal{I}^i \mathcal{M}$ soient \mathcal{O}_{X_i} -quasi-cohérents. Alors :

$$(3.3.2.1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall q \geq 1, \quad H^q(\mathcal{X}, \mathcal{I}^n \mathcal{M}) = 0,$$

$$(3.3.2.2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{I}^n \mathcal{M}) = I^n \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}).$$

(ii) Soit \mathcal{M} un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module limite inductive filtrante d'une famille $(\mathcal{M}_\lambda)_{\lambda \in L}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules vérifiant les conditions de (i). Alors \mathcal{M} vérifie encore les propriétés précédentes. De plus, si $\widehat{\mathcal{M}} = \varprojlim_i \mathcal{M}/\mathcal{I}^i \mathcal{M}$, et si l'on munit $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ de la topologie I -adique, on a

$$(3.3.2.3) \quad \Gamma(\widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{M}}).$$

Pour tout n , on a encore $\mathcal{I}^n \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{i \geq n} \mathcal{I}^n \mathcal{M} / \mathcal{I}^i \mathcal{M}$. Comme les $\mathcal{I}^n \mathcal{M} / \mathcal{I}^i \mathcal{M}$ sont \mathcal{O}_{X_i} -quasi-cohérents, la nullité des $H^q(\mathcal{X}, \mathcal{I}^n \mathcal{M})$ pour $q \geq 1$ résulte de [EGA, 0_{III} 13.3.1]. Pour $q = 0$, on en déduit également, compte tenu de 3.2.2 :

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{I}^n \mathcal{M}) &\simeq \varprojlim_i \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{I}^n \mathcal{M} / \mathcal{I}^i \mathcal{M}) \simeq \varprojlim_i I^n \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M} / \mathcal{I}^i \mathcal{M}) \\ &\simeq I^n \varprojlim_i \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M} / \mathcal{I}^i \mathcal{M}), \end{aligned}$$

d'où (i). Comme les foncteurs $\mathcal{M} \mapsto H^q(\mathcal{X}, \mathcal{I}^n \mathcal{M})$ commutent aux limites inductives, les relations (3.3.2.1) et (3.3.2.2) restent valables sous les hypothèses de (ii). Comme elles entraînent les isomorphismes

$$(3.3.2.4) \quad \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}) / I^i \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M} / \mathcal{I}^i \mathcal{M}),$$

la relation (3.3.2.3) en découle.

3.3.3. Dans la suite de la section 3.3, on désigne par \mathcal{D} un faisceau d'anneaux (non nécessairement commutatifs) sur \mathcal{X} , muni d'un homomorphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{D}$. On suppose que, sur tout ouvert affine de \mathcal{X} , \mathcal{I} est engendré par une famille de sections dont l'image est dans le centre de \mathcal{D} ; on pose $\mathcal{D}_i = \mathcal{D} / \mathcal{I}^{i+1} \mathcal{D}$, et on note $\widehat{\mathcal{D}} = \varprojlim_i \mathcal{D}_i$ le complété \mathcal{I} -adique de \mathcal{D} . On suppose de plus que \mathcal{D} vérifie les conditions suivantes :

a) En tant que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module par la multiplication à gauche, \mathcal{D} est limite inductive filtrante d'une famille de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules \mathcal{D}_λ tels que les $\mathcal{D}_\lambda / \mathcal{I}^n \mathcal{D}_\lambda$ soient \mathcal{O}_{X_i} -quasi-cohérents, et que $\mathcal{D}_\lambda \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathcal{D}_\lambda / \mathcal{I}^i \mathcal{D}_\lambda$;

b) Pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, l'anneau $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D})$ est noëthérien à gauche.

On observera que la condition a) entraîne que, pour tout i , \mathcal{D}_i est quasi-cohérent sur \mathcal{O}_{X_i} , de sorte que \mathcal{D}_i est un faisceau d'anneaux cohérent à gauche d'après 3.1.3.

Soit \mathcal{B} une $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbre commutative, à sections noëthériennes sur les ouverts affines de \mathcal{X} , telle que les $\mathcal{B} / \mathcal{I}^i \mathcal{B}$ soient $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -quasi-cohérentes, et que $\mathcal{B} \simeq \varprojlim_i \mathcal{B} / \mathcal{I}^i \mathcal{B}$. Supposons que \mathcal{X} soit un \mathcal{V} -schéma formel lisse, et que \mathcal{B} soit munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module à gauche. Grâce à l'existence de la filtration par l'ordre, et à 2.3.6, les hypothèses a) et b) sont alors vérifiées par les faisceaux $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. Dans ce cas, nous noterons le complété $\widehat{\mathcal{D}}$ par

$$(3.3.3.1) \quad \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} := \varprojlim_i \mathcal{B} / \mathcal{I}^{i+1} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}.$$

Sauf mention explicite du contraire, les modules considérés par la suite sont des modules à gauche. Une variante consiste à remplacer gauche par droite dans l'énoncé des conditions a) et b). Les énoncés qui suivent restent alors valables en échangeant gauche et droite.

PROPOSITION 3.3.4. – Soit \mathcal{D} un faisceau d'anneaux sur \mathcal{X} , muni d'un homomorphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{D}$, et vérifiant les hypothèses de 3.3.3.

(i) Pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, l'anneau $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}})$ est noëthérien à gauche.

(ii) Pour tout couple d'ouverts affines $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, l'homomorphisme

$$\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}', \widehat{\mathcal{D}})$$

est plat à droite.

(iii) Le faisceau \widehat{D} est cohérent à gauche.

(iv) Si \mathcal{D} est plat à droite sur \mathcal{O}_X , il en est de même de \widehat{D} .

Soient $I = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{I})$, $D = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D})$, et munissons D de la topologie I -adique. Grâce à (3.3.2.3), on a $\widehat{D} \simeq \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{D})$, si bien que la première assertion résulte de 3.2.3 (vi). La seconde résulte de même de 3.2.3 (vii), grâce à la quasi-cohérence des \mathcal{D}_i . La troisième est alors conséquence de 3.1.1. Enfin, l'assertion (iv) résulte aussi de 3.2.3 (vii).

LEMME 3.3.5. – Soient $A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux tel que B soit plat à droite sur A . Pour que B soit fidèlement plat sur A , il faut et suffit que, pour tout A -module à gauche M monogène de présentation finie, la relation $B \otimes_A M = 0$ entraîne $M = 0$.

Soit M un A -module à gauche tel que $B \otimes_A M = 0$. Si $x \in M$, et si l'on pose $M' = A \cdot x \subset M$, alors $B \otimes_A M' = 0$ par platitude. Pour prouver que $M = 0$, il suffit de prouver que $M' = 0$ pour tout x . On peut donc supposer M de la forme A/J , où J est un idéal à gauche. En écrivant $J = \bigcup_{\alpha} J_{\alpha}$ où les J_{α} sont les sous-idéaux à gauche de type fini de J , et en posant $M_{\alpha} = A/J_{\alpha}$, on obtient l'isomorphisme $\varinjlim_{\alpha} M_{\alpha} \xrightarrow{\sim} M$, où les M_{α} sont monogènes de présentation finie, et où, pour $\beta \geq \alpha$, les morphismes $M_{\alpha} \rightarrow M_{\beta}$ sont surjectifs. On a alors $\varinjlim_{\alpha} B \otimes_A M_{\alpha} = 0$. Comme M_{α} est monogène, il existe $\beta \geq \alpha$ tel que l'homomorphisme $\overline{B} \otimes_A M_{\alpha} \rightarrow B \otimes_A M_{\beta}$ soit nul. Cet homomorphisme étant surjectif, $B \otimes_A M_{\beta}$ est nul, donc $M_{\beta} = M = 0$.

PROPOSITION 3.3.6. – Sous les hypothèses de 3.3.3, supposons de plus que la fibre \mathcal{D}_x en un point de X soit un anneau noëthérien à gauche. Alors :

(i) Soit $(\widehat{D}_x)^{\wedge}$ le complété \mathcal{I}_x -adique de la fibre \widehat{D}_x . Alors $(\widehat{D}_x)^{\wedge}$ est un \widehat{D}_x -module à droite fidèlement plat.

(ii) L'anneau \widehat{D}_x est noëthérien à gauche.

Comme l'homomorphisme $(\mathcal{D}_x)^{\wedge} \rightarrow (\widehat{D}_x)^{\wedge}$ est un isomorphisme, $(\widehat{D}_x)^{\wedge}$ est un anneau noëthérien d'après 3.2.3 (vi). L'assertion (ii) résulte alors de (i).

Pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \ni x$, et tout i , l'homomorphisme $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_i) \rightarrow \mathcal{D}_{i,x}$ est plat à droite, puisque \mathcal{D}_i est \mathcal{O}_{X_i} -quasi-cohérent pour la multiplication à gauche. Les anneaux $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D})$ et \mathcal{D}_x étant noëthériens par hypothèse, $(\widehat{D}_x)^{\wedge}$ est plat à droite sur $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{D})$ d'après 3.2.3 (vii). Par passage à la limite inductive, il est donc plat sur \widehat{D}_x .

Pour prouver la fidèle platitude de $(\widehat{D}_x)^{\wedge}$ sur \widehat{D}_x , il suffit d'après le lemme de montrer que si M est un \widehat{D}_x -module à gauche monogène de présentation finie tel que $(\widehat{D}_x)^{\wedge} \otimes_{\widehat{D}_x} M = 0$, alors $M = 0$. Il existe dans ce cas un ouvert affine \mathcal{U} , et un $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{D})$ -module monogène de présentation finie $M_{\mathcal{U}}$ tel que $\widehat{D}_x \otimes_{\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{D})} M_{\mathcal{U}} \simeq M$. Modulo \mathcal{I}_x , on a $\widehat{D}_x / \mathcal{I}_x \widehat{D}_x \simeq (\widehat{D}_x)^{\wedge} / \mathcal{I}_x (\widehat{D}_x)^{\wedge}$. Par suite, $M / \mathcal{I}_x M = 0$, d'où $\mathcal{D}_{0,x} \otimes_{\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{D})} M_{\mathcal{U}} = 0$. Il existe donc un ouvert affine $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, avec $x \in \mathcal{U}'$, tel que $\Gamma(\mathcal{U}', \mathcal{D}_0) \otimes_{\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{D})} M_{\mathcal{U}} = 0$. Soient $I = \Gamma(\mathcal{U}', \mathcal{I})$, et $M_{\mathcal{U}'} = \Gamma(\mathcal{U}', \widehat{D}) \otimes_{\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{D})} M_{\mathcal{U}}$. Comme, d'après 3.3.2, on a $\Gamma(\mathcal{U}', \mathcal{D}_0) \simeq \Gamma(\mathcal{U}', \widehat{D}) / I \Gamma(\mathcal{U}', \widehat{D})$, on en déduit que $M_{\mathcal{U}'} / I M_{\mathcal{U}'} = 0$. Or $M_{\mathcal{U}'}$ est de type fini sur $\Gamma(\mathcal{U}', \widehat{D})$, donc séparé et complet pour la topologie I -adique. Il en résulte que $M_{\mathcal{U}'} = 0$, d'où la nullité de M .

Remarque. – D’après 2.3.6, les faisceaux de la forme $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ vérifient l’hypothèse de l’énoncé lorsque les fibres \mathcal{B}_x sont noethériennes.

3.3.7. Supposons maintenant que \mathcal{X} soit affine, et notons $D = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D})$, $I = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{I})$, $D_i = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_i) \simeq D/I^{i+1}D$ (d’après (3.3.2.4)), $\widehat{D} = \widehat{\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D})} \simeq \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}})$ (d’après (3.3.2.3)). On peut alors étendre la construction de [23, I 10.10.1] aux \widehat{D} -modules en associant à un tel module M le \widehat{D} -module

$$(3.3.7.1) \quad M^\Delta = \varprojlim_i \overline{M/I^{i+1}M},$$

où $\overline{M/I^{i+1}M}$ désigne le \mathcal{O}_{X_i} -module quasi-cohérent défini par $M/I^{i+1}M$, muni de sa structure canonique de \mathcal{D}_i -module définie grâce à 3.1.3.

On dispose alors d’un homomorphisme naturel $M_{\mathcal{X}} \rightarrow M^\Delta$, où $M_{\mathcal{X}}$ est le préfaisceau constant de valeur M , d’où un homomorphisme canonique

$$(3.3.7.2) \quad \widehat{\mathcal{D}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}} M \rightarrow M^\Delta.$$

PROPOSITION 3.3.8. – Avec les notations de 3.3.7, le foncteur $M \mapsto M^\Delta$ possède les propriétés suivantes :

- (i) L’homomorphisme canonique $\widehat{\mathcal{D}} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}^\Delta$ est un isomorphisme.
- (ii) Le foncteur $M \mapsto M^\Delta$ est exact sur la catégorie des \widehat{D} -modules de type fini.
- (iii) Quel que soit le \widehat{D} -module de type fini M , l’homomorphisme $M \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}, M^\Delta)$ est un isomorphisme.
- (iv) Quels que soient les \widehat{D} -modules de type fini M, N , l’homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{D}}}(M, N) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{D}}}(M^\Delta, N^\Delta)$$

est un isomorphisme.

Par construction, on a $\widehat{D}^\Delta = \varprojlim_i (\widehat{D}/I^{i+1}\widehat{D})^\sim$. Comme \mathcal{D}_i est \mathcal{O}_{X_i} -quasi-cohérent, et $\widehat{D} = \varprojlim_i \mathcal{D}_i$, il suffit pour prouver (i) de prouver que l’homomorphisme canonique

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_i) \rightarrow \widehat{D}/I^{i+1}\widehat{D}$$

est un isomorphisme, ce qui résulte de (3.3.2.4). Grâce à 3.2.3 (i), les autres assertions se montrent comme dans [23, I 10.10.2].

L’énoncé suivant n’est qu’une variante de [23, I 10.10.2.9].

PROPOSITION 3.3.9 (“Théorème A”). – Sous les hypothèses de 3.3.3, supposons \mathcal{X} affine, et soit $\widehat{D} = \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}})$. Si \mathcal{M} est un \widehat{D} -module, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout i , le \mathcal{D}_i -module $\mathcal{M}/\mathcal{I}^{i+1}\mathcal{M}$ est cohérent, et l’homomorphisme canonique $\mathcal{M} \rightarrow \varprojlim_i \mathcal{M}/\mathcal{I}^{i+1}\mathcal{M}$ est un isomorphisme.
- (ii) Il existe un isomorphisme $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathcal{M}_i$, où (\mathcal{M}_i) est un système projectif de \mathcal{D}_i -modules cohérents dont les morphismes de transition se factorisent par des isomorphismes $\mathcal{M}_i/\mathcal{I}^i\mathcal{M}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{i-1}$.
- (iii) Il existe un \widehat{D} -module de type fini M , et un isomorphisme $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} M^\Delta$.

(iv) Le \widehat{D} -module $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ est de type fini, et l'homomorphisme canonique

$$(3.3.9.1) \quad \widehat{D} \otimes_{\widehat{D}} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$$

est un isomorphisme.

(v) \mathcal{M} est un \widehat{D} -module cohérent.

L'implication (i) \Rightarrow (ii) est claire ; Posons $D_i = \Gamma(X_i, \mathcal{D}_i)$. Pour vérifier l'implication (ii) \Rightarrow (iii), on observe que, \mathcal{M}_i étant cohérent sur \mathcal{D}_i et ce dernier quasi-cohérent sur \mathcal{O}_{X_i} , le D_i -module $M_i = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}_i)$ est de type fini d'après 3.1.3. De plus, les homomorphismes canoniques $D_{i-1} \otimes_{D_i} M_i \rightarrow M_{i-1}$ sont des isomorphismes. Comme $I\widehat{D}$ est un idéal central de type fini, il résulte de 3.2.2 que le \widehat{D} -module $M = \varprojlim_i M_i$ est de type fini, et que $M/I^{i+1}M \xrightarrow{\sim} M_i$. On obtient alors

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i M_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \widetilde{M}_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \overline{M/I^{i+1}M} = M^\Delta.$$

Pour prouver que (iii) \Rightarrow (iv), on peut remplacer \mathcal{M} par M^Δ dans (3.3.9.1). Une présentation de M sur \widehat{D} fournit alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{D} \otimes_{\widehat{D}} \widehat{D}^r & \rightarrow & \widehat{D} \otimes_{\widehat{D}} \widehat{D}^s & \rightarrow & \widehat{D} \otimes_{\widehat{D}} M & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ (\widehat{D}^r)^\Delta & \rightarrow & (\widehat{D}^s)^\Delta & \rightarrow & M^\Delta & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes d'après 3.3.8 (i), d'où l'assertion, compte tenu de 3.3.8 (iii).

Si (iv) est vérifiée, une présentation de $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ sur \widehat{D} fournit une présentation de $\widehat{D} \otimes_{\widehat{D}} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}$ sur \widehat{D} , d'où (v) grâce à 3.3.4 (iii).

Montrons enfin que (v) \Rightarrow (i). D'après (3.3.1.2), une présentation locale de \mathcal{M} sur \widehat{D} fournit une présentation sur \mathcal{D}_i de $\mathcal{M}/\mathcal{I}^{i+1}\mathcal{M}$, qui est donc \mathcal{D}_i -cohérent grâce à 3.3.3. Prouver que $\mathcal{M} \rightarrow \varprojlim_i \mathcal{M}/\mathcal{I}^{i+1}\mathcal{M}$ est un isomorphisme est une question locale sur \mathcal{X} , de sorte qu'on peut supposer que \mathcal{M} est le conoyau d'un homomorphisme de la forme $u : \widehat{D}^r \rightarrow \widehat{D}^s$. Mais u est alors de la forme v^Δ , avec $v : \widehat{D}^r \rightarrow \widehat{D}^s$, d'où un isomorphisme $\mathcal{M} \simeq (\text{Coker}(v))^\Delta$, d'après 3.3.8 (ii). On est ainsi ramené au cas où $\mathcal{M} = M^\Delta$, avec M de type fini sur \widehat{D} . Il suffit alors de vérifier que, pour tout i , l'homomorphisme canonique $\overline{M/I^{i+1}M} \rightarrow M^\Delta/\mathcal{I}^{i+1}M^\Delta$ est un isomorphisme, et il suffit encore de vérifier que, pour tout $f \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$, l'application

$$(M/I^{i+1}M)_f \rightarrow (\varprojlim_n (M/I^n M)_f)/I_f^{i+1}(\varprojlim_n (M/I^n M)_f)$$

est un isomorphisme, ce qui résulte de (3.2.2.2) appliqué au système projectif de D_f -modules formés des $(M/I^n M)_f$.

COROLLAIRE 3.3.10. – *Supposons \mathcal{X} affine. Les foncteurs $\Gamma(\mathcal{X}, -)$ et $M \mapsto M^\Delta$ sont des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des \widehat{D} -modules cohérents et celle des \widehat{D} -modules de type fini.*

On déduit aussi de 3.3.9 (i) et (3.3.2.1) le corollaire :

COROLLAIRE 3.3.11 (« Théorème B »). – *Supposons \mathcal{X} affine, et soit \mathcal{M} un \widehat{D} -module cohérent. Alors, pour tout $q \geq 1$, on a $H^q(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = 0$.*

COROLLAIRE 3.3.12. – *Sous les hypothèses de 3.3.3, soit \mathcal{M} un $\widehat{\mathcal{D}}$ -module. Pour que \mathcal{M} soit cohérent, il faut et suffit que, pour tout couple d'ouverts affines $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ soit un $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}})$ -module de type fini, et l'homomorphisme*

$$\Gamma(\mathcal{U}', \widehat{\mathcal{D}}) \otimes_{\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}})} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}', \mathcal{M})$$

un isomorphisme.

3.4. Modules cohérents sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$

Pour tout faisceau abélien E , nous noterons $E_{\mathbb{Q}}$ le faisceau $E \otimes \mathbb{Q}$. Rappelons que, si X est un espace topologique noëthérien, et E un faisceau abélien sur X , le préfaisceau qui associe à un ouvert U le produit tensoriel $\Gamma(U, E) \otimes \mathbb{Q}$ est un faisceau. Il en résulte que, pour tout $q \geq 0$, on a alors

$$(3.4.0.1) \quad H^q(X, E) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} H^q(X, E_{\mathbb{Q}}).$$

Nous garderons dans cette section les hypothèses et les notations de 3.3, et nous supposerons de plus que l'idéal de définition \mathcal{I} de \mathcal{X} est tel que $p\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{I}$.

3.4.1. Comme en 3.3.3, on se donne un faisceau d'anneaux non nécessairement commutatifs \mathcal{D} sur \mathcal{X} , muni d'un homomorphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{D}$, tel que, sur tout ouvert affine de \mathcal{X} , \mathcal{I} soit engendré par une famille de sections dont l'image est dans le centre de \mathcal{D} . On suppose maintenant que \mathcal{D} vérifie les hypothèses suivantes :

a) Pour tout i , $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}/\mathcal{I}^{i+1}\mathcal{D}$ est un \mathcal{O}_{X_i} -module quasi-cohérent pour la structure définie par la multiplication à gauche, et l'homomorphisme $\mathcal{D} \rightarrow \varinjlim_i \mathcal{D}_i$ est un isomorphisme.

b) Pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, l'anneau $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D})$ est noëthérien à gauche.

Lorsque \mathcal{X} est lisse sur \mathcal{V} , et que \mathcal{B} est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbre commutative vérifiant les conditions a) et b), munie d'une action compatible de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, le faisceau $\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ vérifie encore ces conditions.

On suppose dans la suite que les modules considérés sont des modules à gauche. En remplaçant gauche par droite dans les conditions a) et b), on pourra encore échanger droite et gauche dans les résultats de cette section.

D'après 3.3.4, les conditions a) et b) entraînent que \mathcal{D} est un faisceau d'anneaux cohérent à gauche. Puisque, pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, on a $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathbb{Q}}) = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D})_{\mathbb{Q}}$, on en déduit aussitôt le lemme suivant :

LEMME 3.4.2. – *Sous les hypothèses précédentes, le faisceau $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ est un faisceau d'anneaux cohérent à gauche.*

LEMME 3.4.3 (cf. [39, 7.4]). – *Supposons \mathcal{X} noëthérien, et soient $\mathcal{X} = \mathcal{X}' \cup \mathcal{X}''$ un recouvrement ouvert de \mathcal{X} , \mathcal{M}' (resp. \mathcal{M}'') un $\mathcal{D}|_{\mathcal{X}'}$ -module (resp. $\mathcal{D}|_{\mathcal{X}''}$ -module) cohérent sans p -torsion, $\varepsilon : \mathcal{M}'_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}''_{\mathbb{Q}}$ un isomorphisme défini sur $\mathcal{X}' \cap \mathcal{X}''$. Il existe alors un \mathcal{D} -module cohérent sans p -torsion \mathcal{M} sur \mathcal{X} prolongeant \mathcal{M}' , et un isomorphisme $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}|_{\mathcal{X}''}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}''_{\mathbb{Q}}$ prolongeant ε .*

Comme $\mathcal{X}' \cap \mathcal{X}''$ est quasi-compact, on peut, en multipliant ε par une puissance convenable de p , supposer que $\varepsilon(\mathcal{M}'|_{\mathcal{X}' \cap \mathcal{X}''}) \subset \mathcal{M}''|_{\mathcal{X}' \cap \mathcal{X}''}$. Il existe alors un entier i

tel que $p^{i+1} (\mathcal{M}''|_{\mathcal{X}' \cap \mathcal{X}''} / \varepsilon (\mathcal{M}'|_{\mathcal{X}' \cap \mathcal{X}''})) = 0$. Soient alors $\mathcal{M}''_i = \mathcal{M}'' / \mathcal{I}^{i+1} \mathcal{M}''$, et $\overline{\mathcal{M}}'_i$ l'image de $\mathcal{M}'|_{\mathcal{X}' \cap \mathcal{X}''}$ dans $\mathcal{M}''_i|_{\mathcal{X}' \cap \mathcal{X}''}$. Comme \mathcal{D}_i est \mathcal{O}_{X_i} -quasi-cohérent, il en est de même de \mathcal{M}''_i et $\overline{\mathcal{M}}'_i$, et ce dernier est réunion de ses sous $\mathcal{O}_{X'_i \cap X''_i}$ -modules cohérents. Puisque $\overline{\mathcal{M}}'_i$ est \mathcal{D}_i -cohérent, il existe alors un sous $\mathcal{O}_{X'_i \cap X''_i}$ -module cohérent \mathcal{E} de $\overline{\mathcal{M}}'_i$ qui engendre $\overline{\mathcal{M}}'_i$ en tant que \mathcal{D}_i -module. Soient \mathcal{F} un sous $\mathcal{O}_{X''_i}$ -module cohérent de \mathcal{M}''_i prolongeant \mathcal{E} et $\overline{\mathcal{N}}_i = \mathcal{D}_i \cdot \mathcal{F}$ le sous- \mathcal{D}_i -module (cohérent) de \mathcal{M}''_i engendré par \mathcal{F} . Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}''$ est l'image réciproque de $\overline{\mathcal{N}}_i$, \mathcal{N} est un sous- \mathcal{D} -module cohérent de \mathcal{M}'' tel que $p^{i+1} \mathcal{M}'' \subset \mathcal{N}$, et coïncidant avec \mathcal{M}' sur $\mathcal{X}' \cap \mathcal{X}''$. Le \mathcal{D} -module \mathcal{M} sur \mathcal{X} obtenu par recollement de \mathcal{M}' et \mathcal{N} a donc les propriétés voulues.

LEMME 3.4.4. – *Sous les hypothèses de 3.4.1, soient \mathcal{M} un \mathcal{D} -module cohérent, et \mathcal{M}_t le sous-faisceau des sections de p -torsion de \mathcal{M} . Alors \mathcal{M}_t et $\mathcal{M}/\mathcal{M}_t$ sont \mathcal{D} -cohérents.*

Pour tout n , le noyau $\mathcal{M}(n)$ de la multiplication par p^n sur \mathcal{M} est \mathcal{D} -cohérent. Il suffit donc de montrer que sur tout ouvert affine \mathcal{U} de \mathcal{X} , on a $\mathcal{M}_t = \mathcal{M}(n)$ pour n assez grand, ce qui résulte de 3.3.10 et de ce que $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D})$ est noëthérien.

PROPOSITION 3.4.5. – *Sous les hypothèses de 3.4.1, supposons \mathcal{X} noëthérien, et soient $\text{Coh}(\mathcal{D})$ (resp. $\text{Coh}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}})$) la catégorie des \mathcal{D} -modules (resp. $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ -modules) cohérents, $\text{Coh}(\mathcal{D})_{\mathbb{Q}}$ la catégorie des \mathcal{D} -modules cohérents à isogénie près. Alors le foncteur $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ induit une équivalence de catégories entre $\text{Coh}(\mathcal{D})_{\mathbb{Q}}$ et $\text{Coh}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}})$.*

Rappelons que $\text{Coh}(\mathcal{D})_{\mathbb{Q}}$ pour objets ceux de $\text{Coh}(\mathcal{D})$, l'ensemble des morphismes dans $\text{Coh}(\mathcal{D})_{\mathbb{Q}}$ entre deux \mathcal{D} -modules cohérents \mathcal{M}, \mathcal{N} étant $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \otimes \mathbb{Q}$.

Lorsque \mathcal{M} est cohérent, l'homomorphisme canonique

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{N}_{\mathbb{Q}})$$

est un isomorphisme pour tout \mathcal{N} , car l'existence locale de présentations de \mathcal{M} sur \mathcal{D} permet de se ramener au cas où $\mathcal{M} = \mathcal{D}$. Grâce à (3.4.0.1), la pleine fidélité en résulte en prenant les sections sur \mathcal{X} . D'autre part, si \mathcal{M}' est un $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent, il existe un \mathcal{D} -module cohérent sans torsion \mathcal{M} , et un isomorphisme $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'$. En effet, s'il existe sur \mathcal{X} une présentation $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}^s \xrightarrow{u'} \mathcal{D}_{\mathbb{Q}}^r \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow 0$, on peut, grâce à (3.4.0.1), multiplier u' par une puissance de p , et supposer qu'il existe $u : \mathcal{D}^r \rightarrow \mathcal{D}^s$ tel que $u' = u \otimes \text{Id}_{\mathbb{Q}}$; si $\mathcal{M} = \text{Coker}(u) / \text{Coker}(u)_t$, \mathcal{M} est cohérent d'après 3.4.4, et on a $\mathcal{M}' \simeq \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$. Dans le cas général, il existe un recouvrement fini de \mathcal{X} par des ouverts sur lesquels \mathcal{M}' possède une telle présentation, et le lemme 3.4.3 permet d'achever la démonstration par récurrence sur le nombre d'ouverts du recouvrement.

DÉFINITION. – Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Nous appellerons *modèle entier* de \mathcal{M} tout \mathcal{D} -module cohérent $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ pour lequel il existe un isomorphisme $\overset{\circ}{\mathcal{M}}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$. On dira que $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ est un *réseau* dans \mathcal{M} si $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ est un sous- \mathcal{D} -module cohérent de \mathcal{M} tel que l'inclusion induise un tel isomorphisme.

Les théorèmes A et B pour les \mathcal{D} -modules cohérents entraînent alors immédiatement les théorèmes analogues pour les $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents :

COROLLAIRE 3.4.6. – *Supposons \mathcal{X} affine, et soient $D = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D})$, $D_{\mathbb{Q}} = D \otimes \mathbb{Q} \simeq \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathbb{Q}})$.*

(i) Pour qu'un $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ -module \mathcal{M} soit cohérent, il faut et suffit que $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ soit un $D_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini, et l'homomorphisme canonique

$$(3.4.6.1) \quad \mathcal{D}_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathbb{Q}}} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$$

un isomorphisme.

(ii) Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Pour tout $q \geq 1$, on a $H^q(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = 0$.

Comme $D_{\mathbb{Q}}$ est noethérien, et $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ cohérent, les conditions de (i) entraînent que \mathcal{M} est cohérent. Inversement, si \mathcal{M} est cohérent, il existe d'après 3.4.5 un \mathcal{D} -module cohérent $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ et un isomorphisme $\overset{\circ}{\mathcal{M}}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$. Compte tenu de (3.4.0.1), les assertions (i) et (ii) résultent alors de 3.3.9 et 3.3.11.

On notera qu'il en résulte encore qu'un $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ -module \mathcal{M} sur un schéma formel \mathcal{X} (non nécessairement affine) est cohérent si et seulement s'il satisfait les conditions de 3.3.12 (en remplaçant $\widehat{\mathcal{D}}$ par $D_{\mathbb{Q}}$).

3.4.7. Sous les hypothèses du corollaire précédent, on peut étendre la définition du foncteur M^{Δ} aux $D_{\mathbb{Q}}$ -modules de type fini en posant

$$(3.4.7.1) \quad M^{\Delta} = \mathcal{D}_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathbb{Q}}} M.$$

Le foncteur ainsi défini est encore exact, car $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ est plat sur $D_{\mathbb{Q}}$ grâce à 3.3.4 (ii). Comme il existe un D -module de type fini $\overset{\circ}{M}$ et un isomorphisme $M \xrightarrow{\sim} \overset{\circ}{M}_{\mathbb{Q}}$, et que

$$(3.4.7.2) \quad (\overset{\circ}{M})_{\mathbb{Q}}^{\Delta} \xrightarrow{\sim} M^{\Delta}$$

d'après 3.3.9, il résulte de 3.3.8 et 3.4.5 que les homomorphismes

$$(3.4.7.3) \quad M \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}, M^{\Delta}),$$

$$(3.4.7.4) \quad \text{Hom}_{D_{\mathbb{Q}}}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{D_{\mathbb{Q}}}(M^{\Delta}, N^{\Delta})$$

sont des isomorphismes. Les foncteurs $\Gamma(\mathcal{X}, -)$ et $M \mapsto M^{\Delta}$ sont donc des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents et celle des $D_{\mathbb{Q}}$ -modules de type fini.

3.5. Théorèmes de platitude I

Le résultat le plus important de cette section est le théorème de platitude de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m+1)}$ sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$. Il joue en effet un rôle essentiel non seulement pour prouver la cohérence de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$, mais aussi dans beaucoup de problèmes de passage de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ à $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$.

3.5.1. Soient $m \in \mathbb{N}$, \mathcal{X} un \mathcal{V} -schéma formel lisse, et \mathcal{B} une $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbre commutative munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module à gauche, à sections noethériennes sur les ouverts affines de \mathcal{X} , telle que les $\mathcal{B}/m^{i+1}\mathcal{B}$ soient \mathcal{O}_{X_i} -quasi-cohérentes, et que $\mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathcal{B}/m^{i+1}\mathcal{B}$. On définit comme en 3.3.3 les faisceaux d'anneaux $\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. Si \mathcal{B}

est munie d'une telle structure pour tout $m \in \mathbb{N}$, ces structures étant compatibles entre elles (ce qui équivaut à dire que \mathcal{B} est muni d'une structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ -module compatible à sa structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbre), on obtient par passage à la limite inductive un faisceau d'anneaux noté $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{\dagger} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$.

On observera que, sous ces hypothèses, $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ est un faisceau d'anneaux cohérent (à gauche et à droite). En effet, quels que soient les ouverts affines $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, $\Gamma(\mathcal{U}', \mathcal{B})$ est plat sur $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ d'après 3.3.4, et il suffit d'appliquer 3.1.2.

PROPOSITION 3.5.2. – Soit \mathcal{B} un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbres vérifiant les hypothèses de 3.5.1 pour un entier $m \in \mathbb{N}$ (resp. tout $m \in \mathbb{N}$). Alors le faisceau $\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ est plat à droite et à gauche sur \mathcal{B} et sur $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ (resp. $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{\dagger} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ est plat à droite et à gauche sur \mathcal{B} et sur $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}$).

D'après 2.3.6, $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ est un anneau noëthérien à gauche et à droite pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$. L'anneau $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ s'identifie au complété $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)})^{\widehat{}}$ d'après 3.3.2, de sorte qu'il est plat sur $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)})$. La proposition en résulte.

THÉORÈME 3.5.3. – Soient $m \in \mathbb{N}$, et \mathcal{B} un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbres vérifiant les hypothèses de 3.5.1 pour l'entier $m + 1$. Alors l'homomorphisme canonique

$$(3.5.3.1) \quad (\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})_{\mathbb{Q}} \rightarrow (\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)})_{\mathbb{Q}}$$

est plat à droite et à gauche.

Nous montrerons que (3.5.3.1) est plat à droite, l'argument étant identique pour la platitude à gauche. Il suffit de prouver que, pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ sur lequel \mathcal{X} possède un système de coordonnées locales t_1, \dots, t_d , l'homomorphisme

$$\Gamma(\mathcal{U}, (\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})_{\mathbb{Q}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}, (\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)})_{\mathbb{Q}})$$

est plat. Nous poserons $A = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$, $B = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B})$, et, pour $i = m, m + 1$,

$$D^{(i)} = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(i)}), \quad \widehat{D}^{(i)} = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(i)}), \quad \widehat{D}_{\mathbb{Q}}^{(i)} = \Gamma(\mathcal{U}, (\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(i)})_{\mathbb{Q}}).$$

Rappelons que $B \otimes_A \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(i)}) \xrightarrow{\sim} D^{(i)}$ d'après (2.3.6.1), que $\widehat{D}^{(i)}$ est le complété p -adique de $D^{(i)}$ d'après (3.3.2.3), et que $\widehat{D}^{(i)} \otimes_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \widehat{D}_{\mathbb{Q}}^{(i)}$ d'après (3.4.0.1).

Les hypothèses faites sur \mathcal{B} entraînent que \mathcal{B} est un faisceau d'anneaux cohérent. Soit \mathcal{B}_t l'idéal de \mathcal{B} formé des sections de p -torsion. D'après 3.4.4, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}/\mathcal{B}_t$ est un \mathcal{B} -module cohérent, ce qui entraîne par 3.3.9 qu'il vérifie les mêmes hypothèses que \mathcal{B} . De plus, l'action de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ passe au quotient et munit \mathcal{B}' d'une structure compatible de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ -module. Pour tout $i \leq m + 1$, l'homomorphisme canonique

$$(\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(i)})_{\mathbb{Q}} \rightarrow (\mathcal{B}' \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(i)})_{\mathbb{Q}}$$

est alors un isomorphisme. D'après 3.4.4, il existe en effet sur tout ouvert affine \mathcal{U} un entier N tel que $p^N \mathcal{B}_t = 0$. Par suite, $\mathcal{B}_t \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(i)}$ est quasi-cohérent sur \mathcal{O}_{X_N} , d'où la suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{B}_t \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(i)}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(i)}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{B}' \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(i)}) \rightarrow 0.$$

Comme $\mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(i)}$ est à sections noëthériennes sur les ouverts affines, on obtient encore une suite exacte après complétion, ce qui entraîne l'assertion. On peut donc supposer que \mathcal{B} est sans p -torsion.

Tout élément $P \in D^{(m)}$ (resp. $\widehat{D}^{(m)}$) s'écrit de manière unique comme une somme finie (resp. la somme d'une série convergente)

$$P = \sum_{|\underline{k}| \leq d} b_{\underline{k}} \otimes \underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}} \quad (\text{resp. } P = \sum_{\underline{k}} b_{\underline{k}} \otimes \underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}}),$$

où les $b_{\underline{k}}$ sont dans B (resp. et tendent vers 0). Par conséquent, les homomorphismes $D^{(m)} \rightarrow \widehat{D}^{(m)} \rightarrow \widehat{D}_{\mathbb{Q}}^{(m)}$, $\widehat{D}^{(m)} \rightarrow \widehat{D}^{(m+1)}$ sont injectifs. Soit D' le sous-anneau de $\widehat{D}_{\mathbb{Q}}^{(m)}$ engendré par $\widehat{D}^{(m)}$ et $D^{(m+1)}$:

$$\begin{array}{ccc} & \widehat{D}_{\mathbb{Q}}^{(m)} & \\ \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ \widehat{D}^{(m)} & \hookrightarrow D' \hookleftarrow & D^{(m+1)}. \end{array}$$

On peut décrire D' comme l'ensemble des sommes de la forme $P + Q$, avec $P \in \widehat{D}^{(m)}$, et $Q \in D^{(m+1)}$. En effet, il suffit de vérifier que l'ensemble de ces sommes est stable par multiplication. et il suffit pour cela que, pour $P \in \widehat{D}^{(m)}$, $Q \in D^{(m+1)}$, on ait $PQ \in D'$ (resp. $QP \in D'$). Comme Q est d'ordre fini, il existe un entier $r \geq 0$ tel que $p^r Q \in D^{(m)}$. On peut alors écrire $P = P_1 + p^r P_2$, où $P_1 \in D^{(m)}$ est d'ordre fini, et $P_2 \in \widehat{D}^{(m)}$. On en déduit que $PQ = P_1 Q + P_2 (p^r Q)$, avec $P_1 Q \in D^{(m+1)}$, et $P_2 (p^r Q) \in \widehat{D}^{(m)}$.

Pour tout i , l'homomorphisme $D^{(m+1)}/p^i D^{(m+1)} \rightarrow D'/p^i D'$ est un isomorphisme. En effet, sa surjectivité résulte de ce qu'on peut écrire comme précédemment un opérateur $P + Q \in D'$ sous la forme $P_1 + p^i P_2 + Q$, avec $P_1 + Q \in D^{(m+1)}$. Pour prouver qu'il est injectif, considérons un opérateur $P \in D^{(m+1)} \cap p^i D'$. On peut donc écrire P sous la forme $P = p^i (R + S)$, avec $R \in \widehat{D}^{(m)}$, $S \in D^{(m+1)}$. Comme P et S sont d'ordre fini, il existe un entier d tel qu'on puisse écrire dans $\widehat{D}^{(m+1)}$

$$\begin{aligned} P &= \sum_{|\underline{k}| \leq d} a_{\underline{k}} \otimes \underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m+1)}}, & S &= \sum_{|\underline{k}| \leq d} c_{\underline{k}} \otimes \underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m+1)}}, \\ R &= \sum_{|\underline{k}|} b_{\underline{k}} \otimes \underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}} = \sum_{|\underline{k}|} (q_{\underline{k}}^{(m)}! / q_{\underline{k}}^{(m+1)}!) b_{\underline{k}} \otimes \underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m+1)}}. \end{aligned}$$

Comme \mathcal{B} est sans p -torsion, on voit que $b_{\underline{k}} = 0$ pour $|\underline{k}| > d$, de sorte que $R \in D^{(m)}$, et $P \in p^i D^{(m+1)}$.

Il en résulte que l'homomorphisme $\widehat{D}^{(m+1)} \rightarrow \widehat{D}'$ est un isomorphisme, de sorte que $\widehat{D}_{\mathbb{Q}}^{(m+1)} \xrightarrow{\sim} \widehat{D}'_{\mathbb{Q}}$. D'autre part, on a $D_{\mathbb{Q}}^{(m+1)} = D_{\mathbb{Q}}^{(m)} \subset \widehat{D}_{\mathbb{Q}}^{(m)}$, si bien que l'inclusion $\widehat{D}_{\mathbb{Q}}^{(m)} \hookrightarrow D'_{\mathbb{Q}}$ est une égalité. Pour achever la démonstration, il suffit donc de prouver que D' est noëthérien à gauche, puisqu'alors \widehat{D}' sera plat à droite sur D' .

D'après 2.2.5, D' est engendré en tant que $\widehat{D}^{(m)}$ -module à gauche par les éléments de la forme $(\partial_j^{[p^{m+1}]})^q$, pour $q \in \mathbb{N}^d$. Les éléments $\partial_j^{[p^{m+1}]} = \partial_j^{(p^{m+1})^{(m+1)}}$ commutent avec les éléments $\partial_j^{(k)^{(m)}}$, tandis que, pour tout $b \in B$, on a dans $D^{(m+1)}$:

$$[\partial_j^{[p^{m+1}]}, b] = \sum_{i < p^{m+1}} \binom{p^{m+1}}{i} \partial_j^{[p^{m+1}-i]} b \otimes \partial_j^{[i]}.$$

Si l'on pose $i = p^m q + r$, avec $r < p^m$, on a $q < p$ pour tout $i < p^{m+1}$. On peut alors écrire $\partial_j^{[i]} = (q!)^{-1} \partial_j^{(i)^{(m)}}$, d'où $[\partial_j^{[p^{m+1}]}, b] \in D^{(m)}$. En passant à la limite, on voit donc que, pour tout $P \in \widehat{D}^{(m)}$, on a $[\partial_j^{[p^{m+1}]}, P] \in \widehat{D}^{(m)}$. Par itération, on en déduit alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $P \in \widehat{D}^{(m)}$, on a

$$(3.5.3.2) \quad [(\partial_j^{[p^{m+1}]})^k, P] \in \sum_{i < k} \widehat{D}^{(m)} (\partial_j^{[p^{m+1}]})^i.$$

Pour $j = 0, \dots, d$, soit D'_j le sous-anneau de D' engendré par $\widehat{D}^{(m)}$ et par les $\partial_k^{[p^{m+1}]}$ pour $k \leq j$. Montrons par récurrence sur j que D'_j est noëthérien. Posons $\partial' = \partial_j^{[p^{m+1}]}$, et soit $I \subset D'_j$ un idéal à gauche. Tout élément $P \in I$ peut s'écrire (de manière non unique)

$$P = \sum_{i \leq r} A_i \partial'^i,$$

avec $A_i \in D'_{j-1}$. Soit $J \subset D'_{j-1}$ l'ensemble des éléments A tels qu'il existe $P \in I$ qui puisse s'écrire sous la forme

$$P = A \partial'^r + \sum_{i < r} A_i \partial'^i,$$

avec $A_i \in D'_{j-1}$. Alors J est stable par somme : si $P' \in I$ s'écrit $P' = A' \partial'^{r'} + \sum_{i < r'} A'_i \partial'^i$, avec $r \leq r'$, l'élément $\partial'^{r-r} P + P'$ appartient à I , et on peut écrire grâce à (3.5.3.2)

$$\partial'^{r-r} P + P' = (A + A') \partial'^{r'} + \sum_{i < r'} A'_i \partial'^i.$$

Par suite, J est un idéal à gauche de D'_{j-1} , et possède une famille finie de générateurs A_k , $1 \leq k \leq s$. Soient $P_1, \dots, P_s \in I$ tels que $P_k = A_k \partial'^{r_k} + \sum_{i < r_k} A_{k,i} \partial'^i$, avec $A_{k,i} \in D'_{j-1}$, et $r = \sup_k r_k$. Si $M \subset D'_j$ est le sous- D'_{j-1} -module à gauche engendré par $1, \partial', \dots, \partial'^r$, M est noëthérien à gauche, et $I \cap M$ en est un sous-module de type fini. Si Q_1, \dots, Q_t est une famille de générateurs de $I \cap M$ comme D'_{j-1} -module à gauche, on vérifie aisément à l'aide de (3.5.3.2) que la famille $(P_1, \dots, P_s, Q_1, \dots, Q_t)$ engendre I .

Par passage à la limite inductive, on en déduit le corollaire :

COROLLAIRE 3.5.4. – Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'homomorphisme canonique $\widehat{D}_{\mathcal{X}, \mathcal{Q}}^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathcal{Q}}^\dagger$ est plat à droite et à gauche.

3.6. Modules cohérents sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$

Grâce au théorème de platitude prouvé dans la section précédente, nous allons maintenant étendre par passage à la limite inductive les résultats prouvés pour les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents aux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents.

Nous énoncerons ici aussi les résultats sous des hypothèses plus générales. Nous désignerons par \mathcal{X} un schéma formel localement noethérien (ou un schéma usuel), et nous supposerons donné sur \mathcal{X} un système inductif (\mathcal{D}_λ) de faisceaux d'anneaux cohérents à gauche (resp. à droite), indexé par un ensemble ordonné filtrant. Nous noterons $\mathcal{D}^\dagger = \varinjlim_\lambda \mathcal{D}_\lambda$. Si \mathcal{M}_λ est un \mathcal{D}_λ -module à gauche (resp. à droite), et si $\mu \geq \lambda$, nous poserons $\mathcal{M}_\mu = \mathcal{D}_\mu \otimes_{\mathcal{D}_\lambda} \mathcal{M}_\lambda$, et $\mathcal{M}^\dagger = \varinjlim_{\mu \geq \lambda} \mathcal{M}_\mu \simeq \mathcal{D}^\dagger \otimes_{\mathcal{D}_\lambda} \mathcal{M}_\lambda$.

On dispose d'abord du résultat général suivant, dont la démonstration est immédiate :

PROPOSITION 3.6.1. – *Soient X un espace topologique, et (\mathcal{D}_λ) un système inductif filtrant de faisceaux d'anneaux cohérents à gauche (resp. à droite) sur X , tel que, quels que soient $\lambda \leq \mu$, les homomorphismes $\mathcal{D}_\lambda \rightarrow \mathcal{D}_\mu$ soient plats à droite (resp. à gauche). Alors le faisceau $\mathcal{D}^\dagger = \varinjlim_\lambda \mathcal{D}_\lambda$ est un faisceau d'anneaux cohérent à gauche (resp. à droite).*

Remarques. – (i) Le théorème de platitude 3.5.3 entraîne donc que, lorsque \mathcal{X} est un \mathcal{V} -schéma formel lisse, et $\mathcal{D}_\mathcal{X}^\dagger$ le faisceau défini en (2.4.1.6), le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger = \bigcup_m \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ est cohérent à gauche et à droite. J'ignore par contre si $\mathcal{D}_\mathcal{X}^\dagger$ lui-même est cohérent.

(ii) Lorsque les morphismes $\mathcal{D}_\lambda \rightarrow \mathcal{D}_\mu$ sont plats, la proposition précédente permet de remplacer dans les énoncés de cette section « \mathcal{D}^\dagger -module localement de présentation finie » par « \mathcal{D}^\dagger -module cohérent ».

La démonstration de l'énoncé suivant est classique.

PROPOSITION 3.6.2. – *Supposons \mathcal{X} quasi-compact et quasi-séparé.*

(i) *Soient $\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{N}_\lambda$ deux \mathcal{D}_λ -modules localement de présentation finie. L'homomorphisme canonique*

$$(3.6.2.1) \quad \varinjlim_{\mu \geq \lambda} \text{Hom}_{\mathcal{D}_\mu}(\mathcal{M}_\mu, \mathcal{N}_\mu) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger, \mathcal{N}^\dagger)$$

est un isomorphisme.

(ii) *Si \mathcal{M} est un \mathcal{D}^\dagger -module localement de présentation finie, il existe un indice λ , un \mathcal{D}_λ -module cohérent \mathcal{M}_λ , et un isomorphisme $\varepsilon : \mathcal{M}^\dagger \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$. Si $(\mathcal{X}', \mathcal{M}', \varepsilon')$ vérifient la même propriété, il existe $\mu \geq \lambda$, \mathcal{X}' et $\varepsilon'_\mu : \mathcal{M}'_\mu \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_\mu$ tel que $\varepsilon \circ \varepsilon'^\dagger = \varepsilon'$.*

3.6.3. Supposons maintenant \mathcal{X} affine. Comme précédemment, nous considérons dans ce qui suit les \mathcal{D}_λ -modules à gauche, les résultats s'étendant aux modules à droite en échangeant droite et gauche. Nous supposerons que les \mathcal{D}_λ -modules cohérents vérifient les théorèmes A et B, i.e. :

A) Pour qu'un \mathcal{D}_λ -module \mathcal{M}_λ soit cohérent, il faut et suffit que $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}_\lambda)$ soit un $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_\lambda)$ -module de présentation finie, et que l'homomorphisme

$$\mathcal{D}_\lambda \otimes_{\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_\lambda)} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}_\lambda) \rightarrow \mathcal{M}_\lambda$$

soit un isomorphisme ;

B) Pour tout \mathcal{D}_λ -module cohérent \mathcal{M}_λ , et tout $q \geq 1$, on a $H^q(\mathcal{X}, \mathcal{M}_\lambda) = 0$.

Ces hypothèses sont donc satisfaites lorsque les \mathcal{D}_λ vérifient les hypothèses de 3.4.1, ou bien sont de la forme $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\lambda, \mathbb{Q}}$ où les $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\lambda$ vérifient les hypothèses de 3.4.1. Elles permettent d'assurer que les théorèmes A et B sont encore valables sur $\mathcal{D}^\dagger = \varinjlim_\lambda \mathcal{D}_\lambda$:

PROPOSITION 3.6.4. – *Sous les hypothèses de 3.6.3, soient $D_\lambda = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_\lambda)$, $D^\dagger = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^\dagger)$. En remplaçant \mathcal{D}_λ et D_λ par \mathcal{D}^\dagger et D^\dagger , et « cohérent » par « localement de présentation finie », les propriétés A) et B) de 3.6.3 sont encore valables pour les \mathcal{D}^\dagger -modules.*

Il est clair que si \mathcal{M} vérifie les conditions de 3.6.3 A), \mathcal{M} est un \mathcal{D}^\dagger -module de présentation finie sur \mathcal{X} . Pour prouver la réciproque, notons d'abord que, \mathcal{X} étant quasi-compact et quasi-séparé, les foncteurs $H^q(\mathcal{X}, -)$ commutent aux limites inductives filtrantes pour tout $q \geq 0$, de sorte que $\varinjlim_\lambda \mathcal{D}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger$. Si \mathcal{M} est localement de présentation finie, il existe d'après 3.6.2 un indice λ , un \mathcal{D}_λ -module cohérent \mathcal{M}_λ , et un isomorphisme $\mathcal{D}^\dagger \otimes_{\mathcal{D}_\lambda} \mathcal{M}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$. La condition A) de 3.6.3 entraîne que \mathcal{M}_λ possède globalement sur \mathcal{X} une présentation $\mathcal{D}_\lambda^s \rightarrow \mathcal{D}_\lambda^r \rightarrow \mathcal{M}_\lambda \rightarrow 0$. Comme le foncteur $\Gamma(\mathcal{X}, -)$ est exact pour les \mathcal{D}_λ -modules cohérents, on en déduit une présentation finie du D_λ -module $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}_\lambda)$. De plus, l'homomorphisme

$$(3.6.4.1) \quad D_\mu \otimes_{D_\lambda} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}_\lambda) \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}_\mu),$$

est un isomorphisme pour tout $\mu \geq \lambda$, car l'exactitude de $\Gamma(\mathcal{X}, -)$ pour les \mathcal{D}_λ -modules (resp. \mathcal{D}_μ -modules) cohérents, appliquée à la présentation précédente, ramène au cas où $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{D}_\lambda$. Par passage à la limite inductive, on en déduit que l'homomorphisme

$$(3.6.4.2) \quad D^\dagger \otimes_{D_\lambda} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}_\lambda) \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}),$$

est un isomorphisme, de sorte que \mathcal{M} vérifie bien les conditions de A). Enfin, grâce à la commutation de la cohomologie aux limites inductives filtrantes, la propriété B) pour \mathcal{M} résulte de la propriété B) pour les \mathcal{M}_μ .

On vérifie de même par passage à la limite inductive qu'un \mathcal{D}^\dagger -module \mathcal{M} sur un schéma formel \mathcal{X} (non nécessairement affine) est cohérent si et seulement s'il satisfait les conditions de 3.3.12 (en remplaçant $\widehat{\mathcal{D}}$ par \mathcal{D}^\dagger).

COROLLAIRE 3.6.5. – *Sous les hypothèses précédentes, les foncteurs $\Gamma(\mathcal{X}, -)$ et $\mathcal{D}^\dagger \otimes_{D^\dagger} -$ sont des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des \mathcal{D}^\dagger -modules localement de présentation finie, et la catégorie des D^\dagger -modules de présentation finie.*

Il suffit de montrer que, pour tout D^\dagger -module de présentation finie M , l'homomorphisme $M \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^\dagger \otimes_{D^\dagger} M)$ est un isomorphisme. Il existe un indice λ , un D_λ -module de présentation finie M_λ , et un isomorphisme $D^\dagger \otimes_{D_\lambda} M_\lambda \xrightarrow{\sim} M$. Si $M_\mu = D_\mu \otimes_{D_\lambda} M_\lambda$, on a donc $\varinjlim_\mu M_\mu \xrightarrow{\sim} M$, et $\varinjlim_\mu \mathcal{D}_\mu \otimes_{D_\mu} M_\mu \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger \otimes_{D^\dagger} M$. On est ainsi ramené à vérifier que les homomorphismes $M_\mu \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_\mu \otimes_{D_\mu} M_\mu)$ sont des isomorphismes. Utilisant une présentation de M_μ sur D_μ , et l'exactitude de $\Gamma(\mathcal{X}, -)$ pour les \mathcal{D}_μ -modules cohérents, on déduit alors l'assertion du cas où $M_\mu = D_\mu$.

Remarque. – Supposons que les \mathcal{D}_λ vérifient les hypothèses de 3.4.1. Alors, d'après 3.3.4, \mathcal{D}_λ est plat sur D_λ . Par suite, \mathcal{D}^\dagger est plat sur D^\dagger , et le foncteur qui associe à un D^\dagger -module (resp. $D_{\mathbb{Q}}^\dagger$ -module) M de présentation finie le \mathcal{D}^\dagger -module (resp. $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}^\dagger$ -module) de présentation finie $M^\Delta := \mathcal{D}^\dagger \otimes_{D^\dagger} M$ est un foncteur exact. C'est donc le cas, si \mathcal{X} est lisse sur \mathcal{V} , pour $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger = \bigcup_m \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$).

4. Relations avec les isocristaux surconvergents

On désigne toujours par \mathcal{X} un \mathcal{V} -schéma formel lisse, de réduction X sur k , et on suppose donné un diviseur $Z \subset X$, de complémentaire Y . On note \mathcal{Y} le \mathcal{V} -schéma formel d'espace sous-jacent Y , $j : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$ l'immersion ouverte correspondante, \mathcal{X}_K la fibre générique de \mathcal{X} , qui est un K -espace analytique rigide, et $\text{sp} : \mathcal{X}_K \rightarrow \mathcal{X}$ le morphisme de spécialisation. Par des constructions de géométrie analytique rigide sur \mathcal{X}_K , on peut définir la catégorie des isocristaux sur Y , surconvergents le long de Z , qui constitue une catégorie de coefficients pour la cohomologie rigide de Y (cf. [2], [5]). On se propose ici de donner une interprétation de cette catégorie du point de vue de la théorie des $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules qui complète les résultats de [4].

Dans la section 4.1, nous précisons d'abord les résultats de [4] sur l'interprétation des isocristaux convergents comme $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents. Pour les étendre aux isocristaux surconvergents le long d'un diviseur, l'étape essentielle est la construction en 4.2 d'un sous-faisceau noté $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ du faisceau image directe $j_* \mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^\dagger$, le faisceau des opérateurs différentiels « à singularités surconvergentes le long de Z » ; cette construction, essentielle pour l'étude de la cohomologie des variétés non propres, sera résumée dans l'introduction de 4.2. La section 4.3 est alors consacrée à étendre aux faisceaux à partir desquels on contruit $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ les théorèmes de platitude de 3.5. Les propriétés de cohérence qui en résultent permettent enfin de donner dans 4.4 une interprétation des isocristaux surconvergents analogue à 4.1.

4.1. Cas des isocristaux convergents

Nous complétons ici les résultats de [4, 3.1] sur l'interprétation des isocristaux convergents sur X comme $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents.

4.1.1 Soit $\mathcal{U} = \text{Spf } A \subset \mathcal{X}$ un ouvert affine. Pour tout m , l'anneau $\widehat{D}_{\mathcal{U}}^{(m)} = \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ est muni de la topologie p -adique, qui s'étend naturellement à $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \simeq \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})$. Supposons que \mathcal{U} soit muni de coordonnées locales t_1, \dots, t_d . Tout opérateur $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ s'écrit alors de manière unique $P = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \partial^{\underline{k}}$, avec $a_{\underline{k}} \rightarrow 0$ pour $|\underline{k}| \rightarrow \infty$. Si $\| \cdot \|$

désigne une norme de Banach sur $A_{\mathbb{Q}} = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}})$, on étend cette norme à $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ en posant $\|P\| = \sup_{\underline{k}} \|a_{\underline{k}}\|$. Puisque toutes les normes de Banach sur A_K sont équivalentes, il en est de même pour celles qu'on obtient ainsi sur $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$. La topologie définie par une telle norme sur $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ est la topologie p -adique, car il en est ainsi sur $A_{\mathbb{Q}}$. Notons aussi que si l'on change de coordonnées locales, l'extension de la norme de $A_{\mathbb{Q}}$ à $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ est

remplacée par une norme équivalente, car, si $\partial^{(k)}$ est la base de $D_{\mathcal{U}}^{(m)}$ correspondant aux nouvelles coordonnées, le changement de base dans $D_{\mathcal{U}}^{(m)}$ s'effectue par une matrice à coefficients dans A , donc de norme bornée. Si la norme de $A_{\mathbb{Q}}$ est la norme spectrale, de sorte que d'après 2.4.2 A est l'ensemble des éléments de norme ≤ 1 , l'extension de cette norme à $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ est alors indépendante du choix des coordonnées locales, l'ensemble des éléments de norme ≤ 1 n'étant autre que $\widehat{D}_{\mathcal{U}}^{(m)}$.

La K -algèbre $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ étant munie ainsi d'une structure d'algèbre de Banach noethérienne, on peut également munir le module $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ des sections d'un $\widehat{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module cohérent \mathcal{E} d'une structure de $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de Banach. En effet, $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ est un $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de type fini d'après 3.4.6. Si $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)r} \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ est un homomorphisme surjectif, son noyau est un sous- $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de type fini de $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)r}$, donc fermé, et la semi-norme quotient sur $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ est une norme qui en fait un $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de Banach. Les normes obtenus pour deux présentations différentes sont alors équivalentes [12, 3.7.3, prop. 3].

Le lemme suivant montre que l'on peut parfois changer l'algèbre de Banach utilisée pour munir un module d'une norme sans changer sa topologie :

LEMME 4.1.2. – Soient $\rho : A \rightarrow B$ un homomorphisme continu entre K -algèbres de Banach noethériennes, et E un B -module à gauche qui est de type fini sur A . Alors les normes de Banach définies sur E par sa structure de A -module et par sa structure de B -module sont équivalentes. En particulier, l'action de B sur E est continue pour la topologie de B et la topologie de A -module de E .

Soient $\| - \|_A$ et $\| - \|_B$ les normes de A et B . Comme ρ est continue, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $a \in A$, on ait $\|\rho(a)\|_B \leq c\|a\|_A$. Fixons une application surjective $u : A^r \rightarrow E$; on en déduit une norme quotient $\| - \|_1$ sur E . Soit $u' : B^r \rightarrow E$ la factorisation B -linéaire de u ; comme u' est surjective, on obtient une autre norme quotient $\| - \|_2$ sur E . Grâce à la relation précédente, on voit que $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1$ pour tout $x \in E$, de sorte que l'application $\text{Id}_E : (E, \| - \|_1) \rightarrow (E, \| - \|_2)$ est continue. Ces deux normes faisant de E un espace de Banach sur K , le théorème de Banach [14, ch. I, § 3, th. 1] entraîne qu'elles définissent la même topologie sur E . La dernière assertion en découle.

4.1.3. Nous renvoyons à [5, 2.3.2] pour la définition générale de la catégorie des isocristaux convergents sur X , et nous rappellerons simplement ici qu'elle peut s'interpréter comme la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -modules E localement libres de type fini sur l'espace analytique rigide \mathcal{X}_K , munis d'une connexion $\nabla : E \rightarrow E \otimes \Omega_{\mathcal{X}_K}^1$ qui vérifie la condition de convergence suivante [5, 2.2.14] : pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, de fibre générique \mathcal{U}_K , muni de coordonnées locales t_1, \dots, t_d , définissant des dérivations ∂_i , toute section $e \in \Gamma(\mathcal{U}_K, E)$ et tout $\eta < 1$, on a

$$(4.1.3.1) \quad \|\underline{\partial}^{[k]} e\|_{\eta}^{|k|} \rightarrow 0 \quad \text{pour } |k| \rightarrow \infty,$$

où $\underline{\partial}^{[k]} e$ est défini par l'action des dérivations ∂_i fournie par la connexion ∇ , et $\| - \|$ est une norme de Banach quelconque sur $\Gamma(\mathcal{U}_K, E)$.

Pour tout $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module cohérent (resp. localement libre de type fini) E , le $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}$ -module $\text{sp}_* E$ est cohérent (resp. localement projectif de type fini), et il résulte des théorèmes de

Kiehl [30] et de 3.4.6 que les foncteurs sp_* et sp^* induisent des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -modules cohérents et celle des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}$ -modules cohérents. Cette équivalence s'étend aux modules cohérents munis d'une connexion intégrable, et si (E, ∇) correspond à un isocrystal convergent sur X , la condition (4.1.3.1) entraîne que la structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}$ -module définie par la connexion $\mathrm{sp}_* \nabla$ sur $\mathrm{sp}_* E$ s'étend par continuité en une structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module [4, 3.1.1]. De même, tout morphisme horizontal $(E, \nabla) \rightarrow (E', \nabla')$ définit un morphisme $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -linéaire $\mathrm{sp}_* E \rightarrow \mathrm{sp}_* E'$, car, pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, le morphisme $\Gamma(\mathcal{U}_K, E) \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}_K, E')$ est continu pour les topologies d'espaces de Banach de $\Gamma(\mathcal{U}_K, E)$ et $\Gamma(\mathcal{U}_K, E')$. On obtient alors :

PROPOSITION 4.1.4. – *Le foncteur sp_* induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des isocristaux convergents sur X dans la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules, dont l'image essentielle est la sous-catégorie des $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}$ -cohérents. De plus, ceux-ci sont $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -cohérents.*

Comme les morphismes entre isocristaux sont les morphismes $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -linéaires commutant aux connexions, donc, en coordonnées locales, à l'action des dérivations ∂_i , la pleine fidélité est claire. Soit \mathcal{E} un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}$ -cohérent. D'après ce qui précède, il existe un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module cohérent E , muni d'une connexion intégrable ∇ , et un isomorphisme $\mathcal{E} \simeq \mathrm{sp}_*(E, \nabla)$. Il suffit donc de vérifier que ∇ vérifie la condition (4.1.3.1). Soient $\eta < 1$, et $\mathcal{U} = \mathrm{Spf} A$ un ouvert affine de \mathcal{X} , possédant des coordonnées locales donnant une base de dérivations $\partial_1, \dots, \partial_d$. D'après 2.4.3, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\eta^{|\underline{k}|} \leq c_k |q_k^{(m)}|$, avec $c_k \rightarrow 0$, et $k = p^m q_k^{(m)} + r_k^{(m)}$, $0 \leq r_k^{(m)} < p^m$. Comme $q_k^{(m)}! \partial^{[\underline{k}]} = \partial^{(\underline{k})^{(m)}}$, il suffit de montrer que, pour tout m , et tout $e \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$, les éléments $\partial^{(\underline{k})^{(m)}} e$, $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, forment une famille bornée dans $M = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ pour sa topologie naturelle de $A_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini.

Soit $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} = \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})$. Comme on l'a vu en 4.1.1, on peut munir $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ d'une norme prolongeant celle de $A_{\mathbb{Q}}$. Le lemme 4.1.2 entraîne que la topologie de $A_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini de M coïncide avec sa topologie de $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de type fini. Les éléments $\partial^{(\underline{k})^{(m)}}$, $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$ formant une famille bornée dans $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$, il en est de même de leurs images par l'application $\widehat{D}_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow M$ qui envoie un opérateur P sur Pe .

La cohérence sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ des isocristaux convergents a été prouvée en [4, 3.1.4].

4.2. Opérateurs différentiels à singularités surconvergentes

Reprenant les notations introduites au début de ce chapitre, nous allons construire ici un sous-faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ du faisceau image directe $j_* \mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^\dagger$, dont les sections peuvent s'interpréter comme des opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^\dagger$ dont les coefficients ont des singularités satisfaisant des conditions de surconvergence le long de Z . Son intérêt vient de ce qu'il permet de décrire, parmi les $\mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents, ceux qui vérifient les conditions de surconvergence qui en font des coefficients pour la cohomologie rigide de \mathcal{Y} (lorsque \mathcal{X} est propre sur \mathcal{Y}). Il jouera ainsi dans la présente théorie le même rôle que le faisceau « image directe à singularités méromorphes de $\mathcal{D}_{\mathcal{Y}}$ » dans la théorie analytique complexe.

La méthode de construction de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ utilisée ici est parallèle à celle que nous avons employée en 2.4.1 pour construire $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$: pour un entier m fixé, nous construirons d'abord une famille de faisceaux d'opérateurs modulo p^i pour tout i , puis nous passerons à la limite projective pour i variable, d'où une famille de faisceaux d'opérateurs sur \mathcal{X} , dont nous prendrons la limite inductive pour m variable. Quant aux faisceaux modulo p^i , nous les construirons en montrant que, pour λ convenablement choisi, l'algèbre des fonctions analytiques sur le voisinage strict $V_{\lambda} = \mathcal{X}_K[-]Z_{[\mathcal{X}, \lambda]} = \{x \in \mathcal{X}_K \mid |f(x)| \geq \lambda\}$ de $]Y[_{\mathcal{X}}$ (cf. [2, 2.5] ou [5, 1.2]) possède un modèle entier canonique muni d'une opération de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, et en appliquant 2.3.5 à sa réduction modulo p^i : le point clé est que, si $\lambda = |p|^{-r}$, où r est multiple de p^{m+1} , un tel modèle est fourni par la complétée $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(f, r)$ de l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[p/f^r]$, et que celle-ci est stable par l'action de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. Par construction, les coefficients de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)$ sont dans l'algèbre $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(f) = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(f, p^{m+1})$; comme $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(f)_{\mathbb{Q}} \simeq (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[1/f]^{\dagger})_{\mathbb{Q}}$, où $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[1/f]^{\dagger}$ est la complétion faible de l'algèbre de fractions $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[1/f]$, les constructions qui suivent fournissent une méthode pour étudier par réduction modulo p^i les propriétés liées à la surconvergence.

PROPOSITION 4.2.1. – Soient $m, r \in \mathbb{N}$ deux entiers tels que r soit multiple de p^{m+1} , et $X \rightarrow S$ un morphisme lisse de $\mathbb{Z}_{(p)}$ -schémas (resp. schémas formels). On fixe $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, et on pose $\mathcal{B}(f, r) = \mathcal{O}_X[T]/(f^r T - p)$.

(i) Il existe sur $\mathcal{B}(f, r)$ une structure canonique de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module compatible avec sa structure de \mathcal{O}_X -algèbre.

(ii) Si $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, et $f' = gf$, l'homomorphisme

$$\rho_g : \mathcal{B}(f, r) = \mathcal{O}_X[T]/(f^r T - p) \rightarrow \mathcal{B}(f', r) = \mathcal{O}_X[T']/(f'^r T' - p)$$

tel que $\rho_g(T) = g^r T'$ est $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire.

(iii) Si r est multiple de $p^{m'+1}$, avec $m' \geq m$, la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module de $\mathcal{B}(f, r)$ est induite par sa structure de $\mathcal{D}_X^{(m')}$ -module.

Pour munir $\mathcal{B}(f, r)$ d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module compatible avec sa structure de \mathcal{O}_X -algèbre, il suffit d'après 2.3.4 de définir une m -PD-stratification

$$\varepsilon_n : \mathcal{P}_{X, (m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}(f, r) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(f, r) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X, (m)}^n$$

telle que les ε_n soient des isomorphismes d'algèbres. Par functorialité, il suffit de le faire lorsque $S = \text{Spec } \mathbb{Z}_{(p)}$, $X = \text{Spec } \mathbb{Z}_{(p)}[t]$, $f = t$. Posons alors $t_1 = t \otimes 1$, $t_2 = 1 \otimes t$, de sorte que, d'après 1.5.1, on a $(|X|, \mathcal{P}_{X, (m)}^n) = \text{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}[t_1] \langle t_2 - t_1 \rangle_{(m)} / I^{\{n+1\}})$, où $I = \overline{(t_2 - t_1)}$ est le m -PD-idéal engendré par $t_2 - t_1$. Soit $r = p^{m+1}q$. Comme l'anneau $\mathbb{Z}_{(p)}[t_1] \langle t_2 - t_1 \rangle_{(m)}$ est sans torsion, on peut définir un polynôme à puissances divisées $\varphi_r^{(m)}(t_1, t_2) \in I \subset \mathbb{Z}_{(p)}[t_1] \langle t_2 - t_1 \rangle_{(m)}$, homogène de degré r , par la relation

$$\begin{aligned} (4.2.1.1) \quad t_2^r - t_1^r &= ((t_1 + (t_2 - t_1))^{p^{m+1}})^q - t_1^r \\ &= ((t_1^{p^{m+1}} + p\psi(t_1, t_2) + p!(t_2 - t_1)^{\{p^{m+1}\}})^q - t_1^r \\ &= p\varphi_r^{(m)}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Posons alors

$$T_1 = T \otimes 1 \in \mathcal{O}_X [T] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n, \quad T_2 = 1 \otimes T \in \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X [T].$$

On définit un homomorphisme de $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ -algèbres

$$\varepsilon_n : \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X [T]/(t^r T - p)) \rightarrow (\mathcal{O}_X [T]/(t^r T - p)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n$$

en posant

$$(4.2.1.2) \quad \varepsilon_n (T_2) = T_1 (1 + T_1 \varphi_r^{(m)} (t_1, t_2))^{-1},$$

ce qui a un sens car $\varphi_r^{(m)} (t_1, t_2)$ est nilpotent dans $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$. C'est un isomorphisme, dont l'inverse envoie T_1 sur $T_2 (1 - T_2 \varphi_r^{(m)} (t_1, t_2))^{-1}$. Comme $\varphi_r^{(m)} (t_1, t_2) \in I$, ε_n induit l'identité par réduction modulo I , et la condition de cocycle résulte de ce que, d'après (4.2.1.1), on a

$$(4.2.1.3) \quad \varphi_r^{(m)} (t_1, t_2) + \varphi_r^{(m)} (t_2, t_3) = \varphi_r^{(m)} (t_1, t_3)$$

dans $\mathbb{Z}_{(p)} [t_1] \langle t_2 - t_1, t_3 - t_2 \rangle_{(m)}$.

Si $f' = gf$, soient $f_1 = f \otimes 1$, $f'_1 = f' \otimes 1$, $g_1 = g \otimes 1$, $f_2 = 1 \otimes f$, $f'_2 = 1 \otimes f'$, $g_2 = 1 \otimes g$. Prouver que ρ_g est $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire revient à prouver qu'il est horizontal. Si $T'_1 = T' \otimes 1$, il faut montrer que

$$g_2^r T'_1 (1 + T'_1 \varphi_r^{(m)} (f'_1, f'_2))^{-1} = g_1^r T'_1 (1 + g_1^r T'_1 \varphi_r^{(m)} (f_1, f_2))^{-1}$$

dans $(\mathcal{O}_X [T']/(f'^r T' - p)) \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^n$. Compte tenu de l'homogénéité de $\varphi_r^{(m)} (t_1, t_2)$, il suffit de vérifier que

$$g_2^r (1 + T'_1 \varphi_r^{(m)} (f'_1, g_1 f_2)) = g_1^r (1 + T'_1 \varphi_r^{(m)} (f'_1, f'_2)),$$

soit encore, grâce à (4.2.1.3),

$$\begin{aligned} g_2^r - g_1^r &= T'_1 (\varphi_r^{(m)} (g_1 f'_1, g_1 f'_2) - \varphi_r^{(m)} (g_2 f'_1, g_1 f'_2)) \\ &= T'_1 \varphi_r^{(m)} (g_1 f'_1, g_2 f'_1) \\ &= T'_1 f_1^r \varphi_r^{(m)} (g_1, g_2), \end{aligned}$$

ce qui est clair.

Enfin, si r est multiple de $p^{m'+1}$, avec $m' \geq m$, il suffit pour prouver l'assertion (iii) de montrer que la m -PD-stratification (ε_n) se déduit de la m' -PD-stratification (ε'_n) par extension des scalaires de $\mathcal{P}_{X,(m')}^n$ à $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$, et cela résulte de ce que, d'après (4.2.1.1), $\varphi_r^{(m)}$ est l'image de $\varphi_r^{(m+1)}$ par l'homomorphisme canonique

$$\mathbb{Z}_{(p)} [t_1] \langle t_2 - t_1 \rangle_{(m')} \rightarrow \mathbb{Z}_{(p)} [t_1] \langle t_2 - t_1 \rangle_{(m)}.$$

Remarque. – Lorsque X est la droite affine \mathbb{A}_S^1 , on peut expliciter l'action des opérateurs $\partial^{(k)}$ sur une section de la forme $T^n \in \mathcal{B}(t, r)$. Soient en effet $k, n \in \mathbb{N}$ deux entiers fixés, (h, a) l'unique couple d'entiers tel que $k + h = ar$, avec $0 \leq h < r$, et posons $k = p^m q_k^{(m)} + r_k^{(m)}$, avec $0 \leq r_k^{(m)} < p^m$. On se ramène d'abord par changement de base au cas où $S = \text{Spec } \mathbb{Z}_{(p)}$. On observe alors que $\mathcal{B}(t, r)$ est sans p -torsion, de sorte que l'on peut faire le calcul après tensorisation par \mathbb{Q} . Cela permet d'écrire $T = p/t^r$, $\varphi_r^{(m)}(t_1, t_2) = (t_2^r - t_1^r)/p$, et on est simplement ramené au calcul en caractéristique 0 de $\partial^{(k)}(p^n/t^{nr})$. On obtient ainsi la relation

$$(4.2.1.4) \quad \partial^{(k)} T^n = (-1)^k \frac{q_k^{(m)}!(nr + k - 1)!}{k!(nr - 1)!p^a} t^h T^{n+a},$$

dans laquelle le coefficient numérique est en fait entier d'après ce qui précède.

PROPOSITION 4.2.2. – *Sous les hypothèses de 4.2.1, soient $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_S$ un m -PD-idéal quasi-cohérent, $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $h \in \Gamma(X, \mathcal{I}\mathcal{O}_X)$, et $f' = gf + h$. Supposons que \mathcal{I} soit m -PD-nilpotent sur S . Il existe alors un homomorphisme canonique de \mathcal{O}_X -algèbres, $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaires*

$$\eta_{g, h} : \mathcal{B}(f, r) \rightarrow \mathcal{B}(f', r),$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Si $g' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $h' \in \Gamma(X, \mathcal{I}\mathcal{O}_X)$, et $f'' = g'f' + h'$, $g'' = g'g$, $h'' = g'h + h'$, alors

$$(4.2.2.1) \quad \eta_{g'', h''} = \eta_{g', h'} \circ \eta_{g, h} : \mathcal{B}(f, r) \rightarrow \mathcal{B}(f'', r).$$

(ii) $\eta_{g, 0} = \rho_g$, $\eta_{1, 0} = \text{Id}$.

(iii) Si f est non diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}\mathcal{O}_X$, $\eta_{g, h}$ ne dépend que de f et f' .

(iv) Si r est multiple de $p^{m'+1}$, avec $m' \geq m$, $\eta_{g, h}$ est indépendant de $m \leq m'$.

Posons $\mathcal{B}(f', r) = \mathcal{O}_X[T']/(f''T' - p)$, et supposons d'abord que $g = 1$. On considère les deux morphismes $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}_{(p)}[t]$ envoyant respectivement t sur f et sur f' ; comme $h = f' - f$ appartient au m -PD-idéal $\mathcal{I}\mathcal{O}_X$, m -PD-nilpotent d'après 3.1.8 (iv), le morphisme produit se factorise par $\text{Spec } \mathbb{Z}_{(p)}[t_1](t_2 - t_1)/I^{\{n+1\}}$ pour n assez grand. On en déduit un isomorphisme d'algèbres $\varepsilon_h : \mathcal{B}(f, r) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(f', r)$ en prenant l'image inverse de la m -PD-stratification ε_n ; on a donc

$$(4.2.2.2) \quad \varepsilon_h(T) = T'(1 + T' \varphi_r^{(m)}(f + h, f))^{-1}.$$

Le fait que ε_h soit horizontal, donc $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire, résulte de la condition de cocycle; si $h' \in \Gamma(X, \mathcal{I}\mathcal{O}_X)$, on déduit aussi de celle-ci la relation $\varepsilon_{h'} \circ \varepsilon_h = \varepsilon_{h'+h}$.

Dans le cas général, où $f' = gf + h$, on pose

$$(4.2.2.3) \quad \eta_{g, h} = \varepsilon_h \circ \rho_g : \mathcal{B}(f, r) \rightarrow \mathcal{B}(gf, r) \rightarrow \mathcal{B}(f', r).$$

L'assertion (ii) est claire. Pour prouver (i), ce qui précède ramène à vérifier que, si $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $h \in \Gamma(X, \mathcal{I}\mathcal{O}_X)$, le diagramme

$$(4.2.2.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(f, r) & \xrightarrow{\varepsilon_h} & \mathcal{B}(f+h, r) \\ \rho_g \downarrow & & \downarrow \rho_g \\ \mathcal{B}(gf, r) & \xrightarrow{\varepsilon_{gh}} & \mathcal{B}(gf+gh, r) \end{array}$$

est commutatif, et cela résulte de l'homogénéité de $\varphi_r^{(m)}(t_1, t_2)$.

Supposons que $f' = gf + h = g'f + h'$, avec $h, h' \in \Gamma(X, \mathcal{I}\mathcal{O}_X)$. Si f est non diviseur de 0 modulo \mathcal{I} , on en déduit que $g' = g + u$, avec $u \in \Gamma(X, \mathcal{I}\mathcal{O}_X)$, et $h = uf + h'$. Pour prouver que $\eta_{g,h} = \eta_{g',h'}$, il faut alors montrer que

$$\rho_{g'} = \varepsilon_{uf} \circ \rho_g : \mathcal{B}(f, r) \rightarrow \mathcal{B}(gf, r) \rightarrow \mathcal{B}(g'f, r).$$

Si $\mathcal{B}(g'f, r) = \mathcal{O}_X[T'_1]/(g'^r f^r T'_1 - p)$, il suffit de vérifier que

$$g'^r (1 + T'_1 \varphi_r^{(m)}(g'f, gf)) = g^r.$$

Comme $g' - g = u \in \Gamma(X, \mathcal{I}\mathcal{O}_X)$, $\varphi_r^{(m)}(g', g)$ est défini, et l'assertion résulte de ce qu'on a

$$g'^r T'_1 f^r \varphi_r^{(m)}(g', g) = p \varphi_r^{(m)}(g', g) = g^r - g'^r.$$

Si on suppose enfin que r est multiple de $p^{m'+1}$, avec $m' \geq m$, il est clair que ρ_g de dépend pas de $m \leq m'$, et il en est de même de ε_h d'après 4.2.1 (iii), si bien que $\eta_{g,h}$ est indépendant de m .

Lorsque f est non diviseur de 0 modulo \mathcal{I} , et $f' = gf + h$, on notera $\eta(f', f, r)$ au lieu de $\eta_{g,h}$. La relation (4.2.2.1) s'écrit alors

$$(4.2.2.5) \quad \eta(f'', f, r) = \eta(f'', f', r) \circ \eta(f', f, r).$$

Si g est inversible, i.e. si f et f' engendrent le même idéal modulo \mathcal{I} , on obtient ainsi un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules $\eta(f', f, r) : \mathcal{B}(f, r) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(f', r)$.

4.2.3. Soient $m, r \in \mathbb{N}$ deux entiers tels que r soit multiple de p^{m+1} , $X \rightarrow S$ un morphisme lisse de $\mathbb{Z}_{(p)}$ -schémas (resp. schéma formels), $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_S$ un m -PD-idéal quasi-cohérent (resp. cohérent), m -PD-nilpotent, $X_0 = V(\mathcal{I}\mathcal{O}_X) \subset X$, et $Z \subset X_0$ un diviseur de X_0 . Si U est un ouvert de X , et $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ une section relevant une équation locale de Z dans X_0 , il résulte de la section précédente que, en tant que \mathcal{O}_U -algèbre munie d'une action compatible de $\mathcal{D}_U^{(m)}$, $\mathcal{B}(f, r)$ est indépendante à isomorphisme canonique près du choix de la section f . En recollant les algèbres ainsi définies sur un recouvrement affine de X sur lequel Z possède une équation locale, on associe donc canoniquement à Z un faisceau de \mathcal{O}_X -algèbres $\mathcal{B}_X(Z, r)$, muni d'une structure compatible de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module. De plus, si $Z' \supset Z$ est un second diviseur, et si f, f' relèvent des équations locales de Z, Z' , les homomorphismes $\eta(f', f, r)$ sont compatibles aux isomorphismes de recollement d'après (4.2.2.5), de sorte qu'on dispose d'un homomorphisme canonique $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire

$$\eta(Z', Z, r) : \mathcal{B}_X(Z, r) \rightarrow \mathcal{B}_X(Z', r),$$

tel que, lorsque $Z'' \supset Z'$ est un troisième diviseur, on ait

$$(4.2.3.1) \quad \eta(Z'', Z, r) = \eta(Z'', Z', r) \circ \eta(Z', Z, r).$$

Soit maintenant $r' = ar$ un multiple de r . D'après ce qui précède il existe un homomorphisme canonique de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules $\eta(aZ, Z, r) : \mathcal{B}_X(Z, r) \rightarrow \mathcal{B}_X(aZ, r)$. Si f relève une équation locale de Z dans X_0 , f^a relève une équation locale de aZ , et on a par définition $\mathcal{B}(f^a, r) = \mathcal{B}(f, ar)$. Cette égalité s'étend aux structures de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules, car il résulte de (4.2.1.1) que l'on a $\varphi_r^{(m)}(t_1^a, t_2^a) = \varphi_{r'}^{(m)}(t_1, t_2)$, si bien que les m -PD-stratifications de $\mathcal{B}(f^a, r)$ et $\mathcal{B}(f, ar)$ coïncident. Si $f' = gf + h$, on a également $\eta(f'^a, f^a, r) = \eta(f', f, ar)$, car il suffit de le vérifier pour ρ_g , ce qui est clair, et pour ε_h , ce qui résulte de la relation précédente. On a donc une égalité de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules

$$\mathcal{B}_X(aZ, r) = \mathcal{B}_X(Z, ar),$$

ce qui permet d'écrire l'homomorphisme $\eta(aZ, Z, r)$ sous la forme

$$\eta(Z, r', r) : \mathcal{B}_X(Z, r) \rightarrow \mathcal{B}_X(Z, r'),$$

avec la relation

$$(4.2.3.2) \quad \eta(Z, r'', r) = \eta(Z, r'', r') \circ \eta(Z, r', r)$$

pour $r'' = a'r'$.

Lorsque r (resp. r') est multiple de $p^{m'+1}$, avec $m' \geq m$, la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module de $\mathcal{B}_X(Z, r)$ est induite par sa structure de $\mathcal{D}_X^{(m')}$ -module, et les homomorphismes $\eta(Z', Z, r)$ (resp. $\eta(Z, r', r)$) sont indépendants de $m \leq m'$.

Remarque. – Plus généralement, on peut définir pour tout $r' \geq r$, avec $p^{m+1} | r'$, un homomorphisme $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire $\eta(Z, r', r) : \mathcal{B}_X(Z, r) \rightarrow \mathcal{B}_X(Z, r')$, en recollant les homomorphismes définis localement par

$$\eta(Z, r', r)(T) = f^{r'-r} T',$$

la $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéarité résultant de la relation

$$(4.2.3.3) \quad \varphi_{r'}^{(m)}(t_1, t_2) = t_2^{r'-r} \varphi_r^{(m)}(t_1, t_2) + t_1^r \varphi_{r'-r}^{(m)}(t_1, t_2)$$

qu'on déduit de (4.2.1.1). La relation (4.2.3.2) reste encore valable, de sorte que les faisceaux $\mathcal{B}_X(Z, p^{m+1})$ forment une famille cofinale dans la famille des $\mathcal{B}_X(Z, r)$ pour r variant dans l'ensemble des multiples de p^{m+1} .

4.2.4. Soient maintenant \mathcal{X} un \mathcal{V} -schéma formel lisse, de réduction X_i sur $\mathcal{V}/\mathfrak{m}^{i+1}$ (resp. X sur k), $Z \subset X$ un diviseur, m un entier tel que \mathfrak{m} soit muni d'une m -PD-structure topologiquement m -PD-nilpotente, et r un multiple de p^{m+1} . En appliquant ce qui précède aux faisceaux $\mathcal{B}_{X_i}(Z, r)$, et en observant que $\mathcal{B}_{X_i}(Z, r) \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m}^i \simeq \mathcal{B}_{X_{i-1}}(Z, r)$, on voit que le faisceau $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r) = \varprojlim_i \mathcal{B}_{X_i}(Z, r)$ est muni d'une structure canonique de

$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module. On observera que, si $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ est un ouvert tel qu'il existe $f \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ relevant une équation locale de Z dans X , on a sur \mathcal{U}

$$(4.2.4.1) \quad \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}}\{T\}/(f^r T - p),$$

grâce au théorème A appliquée à $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}\{T\} = \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[T]}$.

Dans le cas où $r = p^{m+1}$, nous poserons

$$\mathcal{B}_X^{(m)}(Z) = \mathcal{B}_X(Z, p^{m+1}), \quad \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z) = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, p^{m+1}).$$

Pour $m' \geq m$, l'homomorphisme canonique

$$\eta^{(m', m)}(Z) = \eta(Z, p^{m'+1}, p^{m+1}) : \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}(Z)$$

est semi-linéaire par rapport à $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$. Par passage à la limite inductive, on obtient donc un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbres

$$(4.2.4.2) \quad \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z) = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z),$$

muni d'une structure de \mathcal{D}_X^{\dagger} -module compatible à sa structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module.

Nous dirons que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger X)$ est le *faisceau des fonctions sur \mathcal{X} à singularités sur-convergentes le long de Z* .

4.2.5. Soit r un multiple de p^{m+1} . Sous les hypothèses de 4.2.3, on peut grâce à 2.3.5 utiliser l'action de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ sur $\mathcal{B}_X(Z, r)$ pour munir $\mathcal{B}_X(Z, r) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ d'une structure de faisceau d'anneaux. Sous les hypothèses de 4.2.4, on peut ainsi définir, pour tout \mathcal{V} -schéma formel lisse \mathcal{X} , et tout diviseur $Z \subset X$, le faisceau d'anneaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, et son complété p -adique

$$(4.2.5.1) \quad \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} = \varprojlim_i \mathcal{B}_{X_i}(Z, r) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}.$$

Le faisceau $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ vérifie les hypothèses de 3.3.3. Par suite, les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ et $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ sont cohérents, et les modules cohérents sur ces faisceaux vérifient les théorèmes A et B.

Si $m' \geq m$, et si r' est multiple de r et de $p^{m'+1}$, on dispose par passage à la limite d'un homomorphisme canonique de faisceaux d'anneaux

$$(4.2.5.2) \quad \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r') \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m')}.$$

Par passage à la limite inductive, on définit alors le faisceau d'anneaux

$$(4.2.5.3) \quad \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z) = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}.$$

Il est muni d'un homomorphisme canonique $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)$.

Nous dirons que $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)$ est le faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini, à singularités surconvergentes le long de Z . Ses sections sur les ouverts affines possèdent une description analogue à celle de 2.4.4 pour $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ (voir par exemple dans l'introduction le cas où Z est l'origine dans la droite affine). Lorsque Z est un diviseur ample dans une variété projective, ses sections globales fournissent également des anneaux d'opérateurs différentiels importants, dont les coefficients sont dans une algèbre faiblement complète relevant l'anneau de coordonnées de $X \setminus Z$: ainsi, l'exemple suivant, dû à C. Huyghe, fournit une interprétation de la « complétion faible » de l'algèbre de Weyl sur $K = \text{Frac}(\mathcal{V})$ en termes des faisceaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$:

Exemple [24]. – Supposons que \mathcal{X} soit la droite projective formelle sur $\text{Spf } \mathcal{V}$, et Z le point à l'infini de X . On a alors

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}) \simeq \left\{ \sum_{\underline{k}} \alpha_{j,k} t^j \partial^k / \underline{k}! \mid \alpha_{j,k} \in K, \text{ et } \exists c, \eta < 1 \text{ tels que } |\alpha_{j,k}| \leq c \eta^{j+k} \right\}$$

4.3. Théorèmes de platitude II

Les principaux résultats de cette section sont d'une part la cohérence du faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ construit dans la section précédente, grâce au théorème de platitude 4.3.5 généralisant 3.5.3, d'autre part la fidèle platitude sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ du faisceau $j_* \mathcal{D}_{\mathcal{Y}}^{\dagger}$.

Nous commencerons par l'étude du faisceau des fonctions à singularités surconvergentes.

4.3.1. Restant sous les hypothèses de 4.2.4, nous noterons $j : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion du complémentaire de Z dans X , \mathcal{X}_K l'espace analytique rigide fibre générique de \mathcal{X} , $\text{sp} : \mathcal{X}_K \rightarrow \mathcal{X}$ le morphisme de spécialisation. Rappelons que sur \mathcal{X}_K , on définit le faisceau $j^{\dagger} \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ des germes de fonctions surconvergentes le long de Z de la manière suivante. Si $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ est une section de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ relevant une équation locale de Z dans X , et si, pour $\lambda < 1$, on note U_{λ} l'ensemble des points de $\mathcal{U}_K = \text{sp}^{-1}(\mathcal{U})$ tels que $|f(x)| \geq \lambda$, l'ouvert U_{λ} ne dépend pas du choix de f dès que $\lambda \geq |\pi|$ (où π est une uniformisante de \mathcal{V}), ce qui permet de recoller les U_{λ} pour \mathcal{U} variable en un ouvert de \mathcal{X}_K encore noté U_{λ} ; si $j_{\lambda} : U_{\lambda} \hookrightarrow \mathcal{X}_K$ est l'immersion canonique, et E un faisceau sur \mathcal{X}_K , on définit $j^{\dagger} E$ par $j^{\dagger} E = \varinjlim_{\lambda \rightarrow 1} j_{\lambda*} j_{\lambda}^* E$.

PROPOSITION 4.3.2. – Pour tout $r \geq 0$, posons $\lambda_r = p^{-1/r}$.

(i) Avec les notations de 4.2.4, il existe des isomorphismes canoniques de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbres

$$(4.3.2.1) \quad \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \text{sp}_* j_{\lambda_r*} j_{\lambda_r}^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K},$$

$$(4.3.2.2) \quad \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \text{sp}_* j^{\dagger} \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K},$$

ce dernier étant $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -linéaire pour la structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module définie en [4, 4.1.4].

(ii) Pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r))$ et $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)_{\mathbb{Q}})$ sont des anneaux nœthériens. Les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)_{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ sont plats sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}$ et sur les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r')_{\mathbb{Q}}$ pour $p^{m+1} \mid r' \mid r$. Les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)$, $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)_{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ sont cohérents, et les modules cohérents sur ces faisceaux vérifient les théorèmes A et B.

Soient $\mathcal{U} = \text{Spf } A \subset \mathcal{X}$ un ouvert affine sur lequel il existe $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ relevant une équation locale de Z , et $\mathcal{U}_K = \text{sp}^{-1}(\mathcal{U}) = \text{Spm}(A \otimes K)$ sa fibre générique. D'après (3.4.0.1) et (4.2.4.2), on a

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)_{\mathbb{Q}}) &\simeq (A\{T\}/(f^r T - p)) \otimes K \\ &\simeq \Gamma(\mathcal{U}_K \cap U_{\lambda_r}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}) \\ &\simeq \Gamma(\mathcal{U}, \text{sp}_* j_{\lambda_r,*} j_{\lambda_r}^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}). \end{aligned}$$

L'identification ainsi obtenue est indépendante du choix de f , car l'homomorphisme canonique $A \otimes K \rightarrow (A\{T\}/(f^r T - p)) \otimes K$ est un épimorphisme dans la catégorie des K -algèbres de Tate. Par recollement, on obtient donc un isomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbres $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \text{sp}_* j_{\lambda_r,*} j_{\lambda_r}^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$, nécessairement continu. Par passage à la limite, on en déduit l'isomorphisme (4.3.2.2), car l'image inverse par sp d'un ouvert affine de \mathcal{X} est un ouvert affinoïde de \mathcal{X}_K , ce qui entraîne que sp_* commute aux limites inductives filtrantes. Comme l'opération de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ sur $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)$ est continue par construction, et que celle de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ sur $\text{sp}_* j^{\dagger} \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ l'est aussi pour la topologie limite inductive des topologies des $\text{sp}_* j_{\lambda_r,*} j_{\lambda_r}^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ (cf. [4, 4.1.4]), il suffit pour prouver la linéarité sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ de cet isomorphisme de vérifier sa compatibilité à l'action des dérivations ∂_i associées à un système de coordonnées locales. Or on a $T = p/f^r$ dans $(A\{T\}/(f^r T - p)) \otimes K$, et l'action de ∂_i sur T est ainsi déterminée de manière unique.

Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[T]/(f^r T - p)$ vérifie les hypothèses de 3.3.3, il résulte de 3.3.4 et 3.4.2 que $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)$ et $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)_{\mathbb{Q}}$ sont cohérents. Si \mathcal{U} est un ouvert affine de \mathcal{X} , on a $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)) = \varprojlim_i \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B}_{X_i}(Z, r))$, avec

$$\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B}_{X_i}(Z, r))/\mathfrak{m}^i \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B}_{X_i}(Z, r)) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B}_{X_{i-1}}(Z, r)).$$

Or les anneaux $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B}_{X_i}(Z, r))$ sont noëthériens : c'est clair si Z possède une équation globale sur \mathcal{U} , et le cas général en résulte car les $\mathcal{B}_{X_i}(Z, r)$ sont \mathcal{O}_{X_i} -quasi-cohérents. D'après 3.2.2 (iii), $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r))$ est donc noëthérien. Les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)$ satisfont ainsi les hypothèses de 3.3.3 et 3.4.1, de sorte que les $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)$ -modules cohérents vérifient les théorèmes A et B.

Par ailleurs, la démonstration de (i) montre que, pour tout ouvert affine \mathcal{U} assez petit, et tout $r'|r$, les homomorphismes

$$\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r')_{\mathbb{Q}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)_{\mathbb{Q}})$$

s'identifient à des homomorphismes d'algèbres de Tate induits par l'inclusion d'un ouvert affinoïde. Comme de tels homomorphismes sont plats [12, 7.3.2, cor. 6], la platitude sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}$ et sur $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r')_{\mathbb{Q}}$ des faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r)_{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ en résulte. On en déduit également, grâce à 3.6.1, que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ est un faisceau d'anneaux cohérent. De plus, les $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents vérifient les théorèmes A et B d'après 3.6.4. Si $\mathcal{U} = \text{Spf } A$ est un ouvert affine où $f \in A$ relève une équation locale de Z , il est facile de vérifier que l'anneau $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}})$ s'identifie à $(A_f)_{\mathbb{Q}}^{\dagger}$, où $(A_f)^{\dagger}$ est le complété faible de A_f . Comme le complété faible d'une algèbre de type fini sur un anneau noëthérien est noëthérien [19], l'anneau $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}})$ est noëthérien sous cette hypothèse, et le cas général en résulte grâce au théorème A.

Remarque. – Il n'est pas vrai par contre en général que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)$ soit plat sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, ni que $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z))$ soit noëthérien lorsque \mathcal{U} est un ouvert affine de \mathcal{X} . En effet, s'il en était ainsi, l'algèbre $\varinjlim_m \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)$ serait plate sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ et à sections noëthériennes sur les ouverts affines. Or on a localement $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z) \simeq \mathcal{O}_X[T]/(f^{p^{m+1}}T) \simeq \mathbb{S}(\mathcal{O}_X/(f^{p^{m+1}}))$, d'où

$$\varinjlim_m \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z) \simeq \varinjlim_m \mathbb{S}(\mathcal{O}_X/(f^{p^{m+1}})) \simeq \mathbb{S}(\varinjlim_m \mathcal{O}_X/(f^{p^{m+1}})) \simeq \mathbb{S}(\mathcal{H}_Z^1(\mathcal{O}_X)),$$

algèbre qui n'est ni noëthérienne, ni plate sur \mathcal{O}_X , puisque $\mathcal{H}_Z^1(\mathcal{O}_X)$ est un module de f -torsion qui n'est pas de type fini.

Pour étudier la platitude des faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, r) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$, nous aurons besoin des lemmes suivants.

LEMME 4.3.3. – Soient $r \in \mathbb{N}$, A une \mathcal{V} -algèbre séparée et complète, topologiquement de type fini, sans p -torsion, $f \in A$, $A_{\{f\}}$ le complété de l'anneau de fractions A_f , $B = A[T]/(f^r T - p)$. On suppose que f n'est pas diviseur de 0 modulo m .

- (i) L'anneau B est sans p -torsion et p -adiquement séparé.
- (ii) L'homomorphisme $\widehat{B} \rightarrow A_{\{f\}}$ envoyant T sur p/f^r est injectif.
- (iii) Si de plus $A \otimes_{\mathcal{V}} k$ est intègre, \widehat{B} l'est aussi.

Les hypothèses entraînent que les suites (f) et (p, f) sont régulières dans A . Il en est alors de même pour les suites $(f^r T - p)$ et $(p, f^r T - p)$ dans $A[T]$. Il en résulte que la suite $(f^r T - p, p)$ est régulière dans $A[T]$, donc B sans p -torsion. Pour montrer que B est p -adiquement séparé, il suffit de montrer que si $x \in B$ est tel qu'il existe $b \in B$ tel que $(1 - pb)x = 0$, alors $x = 0$. Or A s'envoie injectivement dans B , car f est non diviseur de 0 dans A . De plus, B/A est de f -torsion, et f est non diviseur de 0 dans B , puisque B est sans p -torsion. Il suffit donc de montrer que si $x \in A$ est tel qu'il existe $a \in A$, $s \in \mathbb{N}$ tels que $(f^s - pa)x = 0$, alors $x = 0$. Cela résulte de ce que la suite (p, f^s) est régulière dans A , et A p -adiquement séparé.

Comme B est un anneau noëthérien, on en déduit par platitude que \widehat{B} est aussi sans p -torsion, et par conséquent sans f -torsion ni T -torsion. Par suite, \widehat{B} s'injecte dans l'anneau de fractions \widehat{B}_f , et, puisque $(\widehat{B}_f)^{\widehat{}} \simeq A_{\{f\}}$, il suffit pour prouver (ii) de montrer que \widehat{B}_f est p -adiquement – ou T -adiquement – séparé.

On est ainsi ramené à montrer que si $x \in \widehat{B}_f$ est tel qu'il existe $b \in \widehat{B}_f$ tel que $(1 - bT)x = 0$, alors $x = 0$. Il revient au même de montrer que si $x \in \widehat{B}$ est tel qu'il existe $b \in \widehat{B}$ et $s \in \mathbb{N}$ tels que $(f^s - bT)x = 0$, alors $x = 0$. Observons que $\widehat{B}/(T) \simeq A\{T\}/(T, f^r T - p) \simeq A/pA$. Puisque f est non diviseur de 0 modulo p , il en résulte que $x \in (T)$. Comme \widehat{B} est sans T -torsion, on en déduit que $x \in \bigcap_i T^i \widehat{B}$, donc qu'il existe $c \in \widehat{B}$ tel que $(1 - cT)x = 0$.

Soient \bar{x}, \bar{c} les images de x, c dans B/pB , et $P, C \in (A/pA)[T]$ des éléments d'images \bar{x}, \bar{c} . On a donc $(1 - CT)P \in (f^r T)$, d'où $P \in (T)$. Si $P = TP'$, on obtient donc que $(1 - cT)P' \in (f^r)$, d'où l'on déduit que $P' \in (f^r)$, et $P \in (f^r T)$. Par conséquent, $\bar{x} = 0$, et $x \in p\widehat{B}$. Comme \widehat{B} est sans p -torsion, on voit que $x \in \bigcap_i p^i \widehat{B}$, ce qui entraîne que $x = 0$ puisque \widehat{B} est séparé.

Si A est sans p -torsion et A/mA intègre, A est intègre, et il en est de même de $A_{\{f\}}$, qui vérifie les mêmes hypothèses que A . Par suite, (ii) entraîne (iii).

LEMME 4.3.4. – Soient $m \in \mathbb{N}$, r un multiple de p^{m+1} , r' un multiple de r , $X \rightarrow S$ un morphisme lisse de $\mathbb{Z}_{(p)}$ -schémas (ou schéma formels), $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, et $\eta : \mathcal{B}(f, r) = \mathcal{O}_X[T]/(f^r T - p) \rightarrow \mathcal{B}(f, r') = \mathcal{O}_X[T']/(f^{r'} T' - p)$ l'homomorphisme défini en 4.2.3. Pour tout entier k , le sous- $\mathcal{B}(f, r)$ -module de $\mathcal{B}(f, r')$ engendré par les T^i pour $i \leq k$ est un sous- $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche.

Compte tenu de la construction de la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module en termes de m -PD-stratifications donnée en 4.2.1, il suffit de le prouver dans la situation universelle où $X = \text{Spec } \mathbb{Z}_{(p)}[t]$, $f = t$.

Soit $r' = ar$. On observe d'abord que les polynômes à puissances divisées $\varphi_r^{(m)}$ définis en (4.2.1.1) vérifient la relation

$$(4.3.4.1) \quad \varphi_{r'}^{(m)}(t_1, t_2) = \sum_{1 \leq j \leq a} p^{j-1} \binom{a}{j} t_1^{(a-j)r} \varphi_r^{(m)}(t_1, t_2)^j.$$

En effet, comme $\mathbb{Z}_{(p)}[t_1] \langle t_2 - t_1 \rangle_{(m)}$ est sans torsion, il suffit de le prouver après multiplication par p . On a alors

$$p \varphi_{r'}^{(m)}(t_1, t_2) = t_2^{r'} - t_1^{r'} = (t_1^r + (t_2^r - t_1^r))^a - t_1^{r'} = (t_1^r + p \varphi_r^{(m)}(t_1, t_2))^a - t_1^{r'},$$

d'où l'assertion.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Comme l'isomorphisme $\varepsilon_n : \mathcal{P}_{X, (m)}^n \otimes \mathcal{B}(t, r) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(t, r) \otimes \mathcal{P}_{X, (m)}^n$ est un isomorphisme d'algèbres, il suffit de prouver l'énoncé pour $k = 1$. Reprenons les notations de 4.2.1. Compte tenu de ce que $p = t_1^r T_1$, et $t_1^{(a-1)r} T_1 = T_1$, la relation précédente permet d'écrire

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(T_2') &= T_1' (1 + T_1' \sum_{1 \leq j \leq a} p^{j-1} \binom{a}{j} t_1^{(a-j)r} \varphi_r^{(m)}(t_1, t_2)^j)^{-1} \\ &= T_1' (1 + \sum_{1 \leq j \leq a} \binom{a}{j} T_1^j \varphi_r^{(m)}(t_1, t_2)^j)^{-1} \\ &= T_1' (1 + T_1 \varphi_r^{(m)}(t_1, t_2))^{-a}, \end{aligned}$$

d'où le lemme.

THÉORÈME 4.3.5. – Soient $m' \geq m$, r un multiple de p^{m+1} , r' un multiple commun de $p^{m'+1}$ et de r , $Z \subset X$ un diviseur. Les homomorphismes canoniques

$$(4.3.5.1) \quad \widehat{\mathcal{B}}_X(Z, r) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_{X, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_X(Z, r') \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_{X, \mathbb{Q}}^{(m')}$$

sont plats à droite et à gauche.

Comme les algèbres $\widehat{\mathcal{B}}_X(Z, r)$ vérifient les hypothèses de 3.5.1, le théorème de platitude 3.5.3 entraîne que l'homomorphisme

$$\widehat{\mathcal{B}}_X(Z, r') \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_{X, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_X(Z, r') \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_{X, \mathbb{Q}}^{(m')}$$

est plat à droite et à gauche. Il suffit donc de prouver l'énoncé lorsque $m = m'$.

L'argument est analogue à celui de 3.5.3. Soit $\mathcal{U} = \text{Spf } A \subset \mathcal{X}$ un ouvert affine connexe tel qu'il existe $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ relevant une équation de Z , et un système de coordonnées relatives pour \mathcal{U} . Soient $B = A[T]/(f^r T - p)$, $B' = A[T']/(f^{r'} T' - p)$, $D = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)})$, \widehat{B} , \widehat{B}' , \widehat{D} les complétés p -adiques de B , B' , D , $\eta : B \rightarrow B'$ l'homomorphisme tel que $\eta(T) = f^{r'-r} T'$, $\eta' : B \otimes D \rightarrow B' \otimes D$ l'homomorphisme induit par η . Il suffit de prouver que $\widehat{B}' \widehat{\otimes} \widehat{D}_{\mathbb{Q}}$ est plat sur $\widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D}_{\mathbb{Q}}$. Observons d'abord que, f étant non diviseur de 0 modulo p , les anneaux B et B' sont sans p -torsion d'après 4.3.3, et il en est de même de \widehat{B} et \widehat{B}' par platitude ; de même, $B \otimes D$, $B' \otimes D$, $\widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D}$ et $\widehat{B}' \widehat{\otimes} \widehat{D}$ sont sans p -torsion. De plus, l'existence de coordonnées locales sur \mathcal{U} permet de déduire de 4.3.3 que les homomorphismes $\widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D} \rightarrow \widehat{B}' \widehat{\otimes} \widehat{D}$ et $B' \otimes D \rightarrow \widehat{B}' \widehat{\otimes} \widehat{D}$ sont injectifs. Considérons le sous-anneau

$$(4.3.5.1) \quad D' = \widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D} + B' \otimes D \subset \widehat{B}' \widehat{\otimes} \widehat{D}.$$

C'est bien un sous-anneau de $\widehat{B}' \widehat{\otimes} \widehat{D}$, car il suffit de vérifier que si $P \in \widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D}$, $Q \in B' \otimes D$, alors PQ et QP sont dans D' . Or il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $f^a Q \in B \otimes D$, donc $b \in \mathbb{N}$ tel que $p^b Q \in B \otimes D$. Écrivant P sous la forme $P = P_1 + p^b P_2$, avec $P_1 \in B \otimes D$, $P_2 \in \widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D}$, on en tire l'assertion.

L'homomorphisme $\widehat{D}' \rightarrow \widehat{B}' \widehat{\otimes} \widehat{D}$ est alors un isomorphisme. En effet, l'homomorphisme $D'/p^i D' \rightarrow (\widehat{B}' \widehat{\otimes} \widehat{D})/p^i (\widehat{B}' \widehat{\otimes} \widehat{D})$ est surjectif puisque $B' \otimes D \subset D'$. Il est injectif, car si un opérateur appartient à $D' \cap p^i (\widehat{B}' \widehat{\otimes} \widehat{D})$, il s'écrit sous la forme $P + Q = p^i P'$, avec $P \in \widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D}$, $Q \in B' \otimes D$, $P' \in \widehat{B}' \widehat{\otimes} \widehat{D}$, et P s'écrit $P = P_1 + p^i P_2$, avec $P_1 \in B \otimes D$, $P_2 \in \widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D}$. On a alors

$$P_1 + Q \in B' \otimes D \cap p^i (\widehat{B}' \widehat{\otimes} \widehat{D}) = p^i B' \otimes D,$$

d'où $P + Q \in p^i D'$.

Comme $B_{\mathbb{Q}} \simeq B'_{\mathbb{Q}}$, on a $(\widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D})_{\mathbb{Q}} = D'_{\mathbb{Q}}$. Pour achever la démonstration, il suffit donc de montrer que l'homomorphisme $D' \rightarrow \widehat{D}'$ est plat, et pour cela que D' est noëthérien. Pour tout k , soit

$$D'_k = \left\{ \sum_{i \leq k} T'^i Q_i \mid Q_i \in \widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D} \right\} \subset D'.$$

Par passage aux complétés, il résulte de 4.3.4 que D'_k est un sous- $(\widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D})$ -module à gauche de D' , de sorte que $D'_h \cdot D'_k \subset D'_{h+k}$. On obtient ainsi une filtration d'anneau croissante sur D' , discrète et exhaustive. Pour prouver que D' est noëthérien, il suffit alors de prouver que $\text{gr } D'$ est noëthérien. Or on a $f^{r'} T' = p \in \widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D}$, de sorte que, pour tout $k \geq 1$, on a $f^{r'} \text{gr}_k D' = 0$. Comme $p = f^r T$, il en résulte que $p^a \text{gr}_k D' = 0$ pour $k \geq 1$. Considérons alors la suite exacte

$$0 \rightarrow p^a \text{gr } D' \rightarrow \text{gr } D' \rightarrow \text{gr } D'/p^a \text{gr } D' \rightarrow 0.$$

Comme $p^a \text{gr } D' = p^a \text{gr}_0 D' = p^a \widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D}$, et que sa structure de $\text{gr } D'$ -module provient via l'homomorphisme d'augmentation de sa structure de $\widehat{B} \widehat{\otimes} \widehat{D}$ -module, $p^a \text{gr } D'$ est un $\text{gr } D'$ -module noëthérien. Il suffit alors de montrer que $\text{gr } D'/p^a \text{gr } D'$ est noëthérien. Mais, sur $\text{gr } D'/p^a \text{gr } D'$, la filtration par l'ordre par rapport aux opérateurs $\underline{\partial}^{(k)}$ est une

filtration d'anneau exhaustive, dont le gradué associé est commutatif et noëthérien, car engendré comme B -algèbre par les classes des $\partial_i^{(k)}$, $k \leq p^m$, et par celle de T' . Par suite, $\text{gr } D'/p^a \text{ gr } D'$ est lui-même noëthérien, ainsi donc que $\text{gr } D'$.

On déduit alors de 3.6.1 et 3.6.4 :

COROLLAIRE 4.3.6. – *Sous les hypothèses de 4.2.5, le faisceau $\mathcal{D}_X^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ est un faisceau d'anneaux cohérent à gauche et à droite. Les $\mathcal{D}_X^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents vérifient les théorèmes A et B.*

4.3.7. Sous les hypothèses de 4.2.3, les homomorphismes $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{B}_X(Z, r)$ sont des isomorphismes en dehors de Z . Il en est donc de même des homomorphismes $\mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{B}_X(Z, r) \otimes \mathcal{D}_X^{(m)}$ pour $p^{m+1}|r$, et, sous les hypothèses de 4.2.4, des homomorphismes $\mathcal{O}_X \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_X(Z, r)$, $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(\dagger Z)$, $\widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_X(Z, r) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)}$, $\mathcal{D}_X^\dagger \rightarrow \mathcal{D}_X^\dagger(\dagger Z)$. Par adjonction, on en déduit notamment des homomorphismes canoniques

$$(4.3.7.1) \quad \mathcal{O}_X(\dagger Z) \rightarrow j_* \mathcal{O}_Y,$$

$$(4.3.7.2) \quad \mathcal{D}_X^\dagger(\dagger Z) \rightarrow j_* \mathcal{D}_Y^\dagger.$$

Nous allons montrer que, après tensorisation par \mathbb{Q} , ils sont fidèlement plats.

LEMME 4.3.8. – *Soient X un espace topologique, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un homomorphisme de faisceaux d'anneaux sur X . On suppose qu'il existe une base \mathfrak{B} d'ouverts de X telle que, pour tout $U \in \mathfrak{B}$, $\Gamma(U, \mathcal{B})$ soit un $\Gamma(U, \mathcal{A})$ -module à droite fidèlement plat. Alors, pour tout $x \in X$, \mathcal{B}_x est un \mathcal{A}_x -module à droite fidèlement plat.*

D'après le lemme 3.3.5, il suffit de montrer que, si M est un \mathcal{A}_x -module à gauche monogène de présentation finie tel que $\mathcal{B}_x \otimes_{\mathcal{A}_x} M = 0$, alors $M = 0$. Il existe un ouvert $U \in \mathfrak{B}$, et un $\Gamma(U, \mathcal{A})$ -module monogène de présentation finie M_U tels que $M \simeq \mathcal{A}_x \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{A})} M_U$. Comme $\varinjlim_{U' \ni x} \Gamma(U', \mathcal{B}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{A})} M_U = 0$, et que M_U est monogène, il existe $U' \in \mathfrak{B}$, avec $x \in U'$, tel que $\Gamma(U', \mathcal{B}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{A})} M_U = 0$. L'hypothèse entraîne alors que $\Gamma(U', \mathcal{A}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{A})} M_U = 0$, d'où $M = 0$.

Nous dirons que $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est *fidèlement plat à droite* si, pour tout $x \in X$, \mathcal{B}_x est fidèlement plat à droite sur \mathcal{A}_x . Il est équivalent de demander que \mathcal{B} soit plat à droite sur \mathcal{A} , et que pour tout \mathcal{A} -module à gauche \mathcal{M} , la relation $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} = 0$ entraîne que $\mathcal{M} = 0$.

LEMME 4.3.9. – *Soient $X \rightarrow S$ un morphisme lisse entre schémas de caractéristique p , et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Si r est multiple de p^{m+2} , et si $\mathcal{B}(f, r) = \mathcal{O}_X[T]/(f^r T)$ est muni de la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module définie en 4.2.1, la section $T \otimes 1$ appartient au centre du faisceau d'anneaux $\mathcal{B}(f, r) \otimes \mathcal{D}_X^{(m)}$.*

D'après (2.3.5.1), il suffit de montrer que, pour tout k , on a $\partial^{(k)} T = 0$. Grâce à la définition de la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module de $\mathcal{B}(f, r)$ en termes de m -PD-stratification, il est équivalent de montrer (avec les notations de 4.2.1) que $\varepsilon_n(T_2) = T_1$, soit encore

que $\varphi_r^{(m)}(t_1, t_2)$ est divisible par p lorsque $r = ap^{m+2}$. Dans ce cas, on peut écrire dans $\mathbb{Z}_{(p)}[t_1]\langle t_2 - t_1 \rangle_{(m)}$:

$$\begin{aligned} p\varphi_r^{(m)}(t_1, t_2) &= t_2^r - t_1^r = ((t_2^{p^{m+1}})^p)^a - t_1^r = ((t_1^{p^{m+1}} + p\varphi_{p^{m+1}}^{(m)}(t_1, t_2))^p)^a - t_1^r \\ &= (t_1^{p^{m+2}} + p^2\psi(t_1, t_2))^a - t_1^r = p^2\chi(t_1, t_2), \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque $\mathbb{Z}_{(p)}[t_1]\langle t_2 - t_1 \rangle_{(m)}$ est sans p -torsion.

THÉORÈME 4.3.10. – Avec les notations de 4.3.7, on a :

- (i) Les homomorphismes (4.3.7.1) et (4.3.7.2) sont injectifs et plats à droite et à gauche.
- (ii) Les homomorphismes

$$(4.3.10.1) \quad \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}} \rightarrow j_* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}},$$

$$(4.3.10.2) \quad \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}} \rightarrow j_* \mathcal{D}_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}^{\dagger},$$

sont fidèlement plats à droite et à gauche.

L'injectivité de (4.3.7.1) résulte de 4.3.3 (ii), et celle de (4.3.7.2) s'en déduit en utilisant des coordonnées locales. Si $\mathcal{U} = \text{Spf } A$ est un ouvert affine, l'homomorphisme $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z))_f \rightarrow A_f$ est un isomorphisme, de sorte que A_f est plat sur $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z))$. Ces anneaux étant noethériens, il en résulte en passant aux complétés que $A_{\{f\}}$ est plat sur $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z))$. On en déduit la platitude de (4.3.7.1) par passage à la limite inductive pour m variable. Celle de (4.3.7.2) se voit par le même argument.

Montrons la fidèle platitude de (4.3.10.2), celle de (4.3.10.1) pouvant se prouver par le même argument, ou en invoquant les résultats sur les complétions faibles. Par 3.3.5 et 4.3.8, il suffit de montrer que si \mathcal{U} est un ouvert affine sur lequel il existe $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ relevant une équation locale de Z , et M un $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}})$ -module monogène de présentation finie tel que $\Gamma(\mathcal{U} \cap \mathcal{Y}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}) \otimes M = 0$, alors $M = 0$. Comme $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}) = \varinjlim_{m', m} \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})$, on peut trouver $m' \geq m$, et un $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})$ -module monogène de présentation finie M' tel que M provienne de M' par extension des scalaires. De même, quitte à augmenter m et m' , on peut supposer que $\Gamma(\mathcal{U} \cap \mathcal{Y}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}) \otimes M' = 0$.

Posons $\widehat{D}_{m'} = \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$, $\widehat{D}' = \Gamma(\mathcal{U} \cap \mathcal{Y}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$, et choisissons un $\widehat{D}_{m'}$ -module monogène sans torsion E tel que $M' \simeq E_{\mathbb{Q}}$. Par le même argument que précédemment, \widehat{D}' est plat sur $\widehat{D}_{m'}$, de sorte que $\widehat{D}' \otimes E$ est également sans torsion, et par conséquent est nul. Si $E_0 = E/pE$, on voit ainsi que $(E_0)_f = 0$. Soit e un générateur de E . Il existe alors $s \in \mathbb{N}$ et $R \in \widehat{D}_{m'}$ tels que $(f^s - pR)e = 0$. Quitte à augmenter m' , on peut supposer $s \leq p^{m'+1}$, de sorte que, en notant $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}(Z) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}\{T\}/(f^{p^{m'+1}}T - p)$, cette relation peut se mettre sous la forme $f^s(1 - TR')e = 0$. Puisque E est sans p -torsion, il est *a fortiori* sans f -torsion, si bien que l'on a en fait $(1 - TR')e = 0$. On en déduit que $(1 - TR')^p e = 0$. L'opérateur $(1 - TR')^p$ est de la forme $1 + pS + (-TR')^p$. On peut supposer que $m' \geq m + 1$, ce qui d'après 4.3.9 assure que, modulo p ,

T appartient au centre de $\widehat{D}_{m'}/p\widehat{D}_{m'}$, et permet d'écrire $(1 - TR')^p$ sous la forme $1 + pS' + T^p R''$. L'homomorphisme $\widehat{D}_{m'} \rightarrow \widehat{D}_{m'+1}$ envoie T sur $f^{(p-1)p^{m'+1}} T'$, donc T^p sur $f^{(p-1)p^{m'+2}} T'^p = pf^{(p-2)p^{m'+2}} T'^{p-1}$. Par conséquent, l'opérateur $(1 - TR')^p$ s'écrit sous la forme $1 + pQ$ dans $\widehat{D}_{m'+1}$. Comme cet anneau est p -adiquement complet, $(1 - TR')^p$ y est inversible, ce qui entraîne que $\widehat{D}_{m'+1} \otimes E = 0$, donc que $M = 0$.

COROLLAIRE 4.3.11. – *L'homomorphisme $\mathcal{D}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}^\dagger \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ est plat à droite et à gauche.*

Il résulte de 3.3.4 (ii) par passage à la limite sur m que l'homomorphisme $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^\dagger \rightarrow j_* \mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^\dagger$ est plat à droite et à gauche. La fidélité platitude de $j_* \mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^\dagger$ sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ entraîne alors l'énoncé.

PROPOSITION 4.3.12. – (i) *Pour tout $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent \mathcal{M} , l'homomorphisme canonique*

$$(4.3.12.1) \quad j_* \mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{M} \rightarrow j_* j^* \mathcal{M}$$

est un isomorphisme.

(ii) *Pour qu'un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent soit nul, il faut et suffit que sa restriction à \mathcal{Y} soit nulle.*

La première assertion est locale, et claire si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -module libre de type fini. Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent, il possède sur tout ouvert affine \mathcal{U} une présentation de la forme

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}})^s \rightarrow (\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}})^s \rightarrow \mathcal{M}|_{\mathcal{U}} \rightarrow 0.$$

Comme $\mathcal{U} \cap \mathcal{Y}$ est affine, et que les $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents vérifient le théorème B, le foncteur $j_* j^*$ préserve l'exactitude de cette suite, d'où l'assertion dans le cas général. La deuxième assertion en résulte grâce à la pleine fidélité de $j_* \mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^\dagger$ sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$.

4.4. Cas des isocristaux surconvergents

Nous allons maintenant utiliser les résultats des sections précédentes pour donner une description de la catégorie des isocristaux surconvergents sur Y en termes de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules analogue à 4.1.4.

4.4.1. Nous gardons les hypothèses et les notations de 4.2.4 et 4.3.1. Rappelons que, si E est un $j^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module cohérent (resp. localement libre de rang fini), il existe $\lambda_0 < 1$, et un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module cohérent (resp. localement libre de rang fini) E_0 sur U_{λ_0} , tel que $E \simeq j^\dagger E_0$. De même, si E est muni d'une connexion intégrable ∇ , il existe (en augmentant éventuellement λ_0) une connexion intégrable ∇_0 sur E_0 telle que $\nabla = j^\dagger(\nabla_0)$. On dit que (E, ∇) est surconvergente le long de Z si elle vérifie la condition suivante [5, 2.2.13] : pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ tel qu'il existe $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ relevant une équation de Z , et muni de coordonnées locales t_1, \dots, t_d définissant une base de dérivations ∂_i , et tout $\eta < 1$, il existe $\lambda_\eta < 1$ tel que l'on ait, pour tout λ tel que $\lambda_\eta \leq \lambda < 1$, et tout $e \in \Gamma(\mathcal{U}_\lambda \cap U_\lambda, E_0)$,

$$(4.4.1.1) \quad \|\underline{\partial}^{[\underline{k}]} e\| \eta^{|\underline{k}|} \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad |\underline{k}| \rightarrow \infty,$$

en désignant par $\| - \|$ une norme de Banach sur $\Gamma(\mathcal{U}_K \cap U_\lambda, E_0)$; par continuité, il résulte de la formule de Leibnitz que la propriété (4.4.1.1) est alors satisfaite avec la même constante λ_η pour toute section $e \in \Gamma(\mathcal{U}'_K \cap U_\lambda, E_0)$, lorsque \mathcal{U}' est un ouvert affine contenu dans \mathcal{U} . La catégorie des isocristaux sur Y , surconvergent le long de Z , peut alors être décrite comme la catégorie des $j^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -modules localement libres de rang fini, munis d'une connexion intégrable, et surconvergente le long de Z .

PROPOSITION 4.4.2. – *Pour tout $m \geq 0$, soient $\lambda_m = p^{-1/p^{m+1}}$, $U_m = U_{\lambda_m}$, j_m l'inclusion de U_m dans \mathcal{X}_K . Le foncteur $\mathrm{sp}_* \circ j_{m*}$ (resp. sp_*) induit une équivalence entre la catégorie des \mathcal{O}_{U_m} -modules (resp. $j^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -modules) cohérents et celle des $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules) cohérents. Cette équivalence fait correspondre les modules localement libres de type fini aux modules localement projectifs de type fini, et s'étend aux modules munis d'une connexion intégrable.*

D'après 4.3.2, on a $\mathrm{sp}_* \circ j_{m*} \mathcal{O}_{U_m} \simeq \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)_{\mathbb{Q}}$. Vérifier que, si E est cohérent sur \mathcal{O}_{U_m} , $\mathrm{sp}_* \circ j_{m*} E$ l'est sur $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)_{\mathbb{Q}}$, et qu'on obtient ainsi une équivalence de catégories, est une question locale sur \mathcal{X} , de sorte qu'on peut supposer \mathcal{X} affine, et Z défini par $f \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$. Comme, pour tout ouvert affinoïde V de \mathcal{X}_K , l'ouvert $V \cap U_m = \{x \in V \mid |f(x)| \geq \lambda_m\}$ est affinoïde, on déduit des théorèmes de Kiehl que $j_{m*} \mathcal{O}_{U_m}$ est un faisceau d'anneaux cohérent, que j_{m*} établit une équivalence entre la catégorie des \mathcal{O}_{U_m} -modules cohérents et celle des $j_{m*} \mathcal{O}_{U_m}$ -modules cohérents, et que, sur tout ouvert affinoïde de \mathcal{X}_K , les théorèmes A et B sont valables pour les $j_{m*} \mathcal{O}_{U_m}$ -modules cohérents. Comme, pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, $\mathrm{sp}^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_K$ est affinoïde, on voit que le foncteur sp_* est exact sur la catégorie des $j_{m*} \mathcal{O}_{U_m}$ -modules cohérents, et on déduit alors du théorème A l'assertion de l'énoncé pour les modules sans connexion, ainsi que l'assertion relative aux modules localement libres de rang fini. Pour étendre cette équivalence aux modules à connexion intégrable, il suffit d'observer qu'elle s'étend aux $j_{m*} \mathcal{O}_{U_m}$ -algèbres commutatives qui sont cohérentes en tant que $j_{m*} \mathcal{O}_{U_m}$ -modules, ainsi qu'aux modules cohérents sur celles-ci, et d'utiliser la description des connexions intégrables en termes de stratifications.

Puisque \mathcal{X}_K est quasi-compact et séparé, on peut appliquer les résultats de 3.6 au faisceau $j^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K} = \varinjlim_m j_{m*} \mathcal{O}_{U_m}$ sur \mathcal{X}_K . De plus, le foncteur sp_* commute aux limites inductives filtrantes, car l'image inverse par sp d'un ouvert affine est un ouvert affinoïde. On peut alors déduire par passage à la limite l'énoncé relatif aux $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents de l'énoncé relatif aux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents.

PROPOSITION 4.4.3. – *Soient E un isocristal sur Y , surconvergent le long de Z , et $\mathcal{E} = \mathrm{sp}_* E$. Il existe sur \mathcal{E} une structure canonique de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -module, induisant la structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module définie en [4, 4.1.5], et fonctorielle en E .*

Par recollement, il suffit de considérer les sections sur un ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, muni d'un système de coordonnées locales définissant des dérivations $\partial_1, \dots, \partial_d$, et tel que $Z \cap \mathcal{U}$ soit défini par $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$. Notons ∇ la connexion de E , $\lambda_m = p^{-1/p^{m+1}}$, $U_m = U_{\lambda_m}$, et soit m_0 tel qu'il existe un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module cohérent E_0 sur U_{m_0} , muni d'une connexion intégrable et surconvergente ∇_0 , et un isomorphisme $(E, \nabla) \simeq j^\dagger(E_0, \nabla_0)$.

Pour tout m , posons

$$\begin{aligned} B^{(m)} &= \Gamma(U_m \cap \mathcal{U}_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}) \simeq \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)_{\mathbb{Q}}), \\ M^{(m)} &= \Gamma(U_m \cap \mathcal{U}_K, E_0) \simeq B^{(m)} \otimes_{B^{(m_0)}} M^{(m_0)}, \end{aligned}$$

de sorte que $\Gamma(\mathcal{U}, \text{sp}_* E) \simeq \varinjlim_m M^{(m)}$. Soit $P \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}})$; il existe $m \geq m_0$ tel que P s'écrive $P = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}}$, où $a_{\underline{k}} \in B^{(m)}$, et $a_{\underline{k}} \rightarrow 0$ pour $|\underline{k}| \rightarrow \infty$. Avec les

notations de 2.4.3, choisissons $\eta < 1$ tel qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ pour lequel $|q_k^{(m)}| < c \eta^{|\underline{k}|}$ pour tout \underline{k} . La condition de surconvergence de ∇ entraîne qu'il existe $n_0 \geq m$ tel que l'on ait $\|\underline{\partial}^{(\underline{k})} e\| \eta^{|\underline{k}|} \rightarrow 0$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $e \in M^{(n)}$, la norme étant prise dans $M^{(n)}$. On obtient alors

$$\|a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{(\underline{k})} e\| = \|a_{\underline{k}} q_k^{(m)}! \underline{\partial}^{[\underline{k}]} e\| \leq c \|a_{\underline{k}}\| \|\underline{\partial}^{[\underline{k}]} e\| \eta^{|\underline{k}|} \rightarrow 0,$$

et on peut définir $P \cdot e$ comme l'image dans $\Gamma(\mathcal{U}, \text{sp}_* E)$ de la somme de la série de terme général $a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{(\underline{k})} e$, qui converge dans $M^{(n)}$. Il est clair que cela ne dépend pas des choix faits, et munit $\Gamma(\mathcal{U}, \text{sp}_* E)$ d'une structure de $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}})$ -module qui induit la structure de $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$ -module de [4, 4.1.5]. Tout morphisme horizontal $E \rightarrow E'$ induit un morphisme $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)_{\mathbb{Q}})$ -linéaire $\Gamma(\mathcal{U}, \text{sp}_* E) \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}, \text{sp}_* E')$ qui commute aux dérivations ∂_i , et la construction précédente permet d'en déduire par continuité qu'il est $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}})$ -linéaire.

4.4.4. Pour caractériser les $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules qui proviennent d'un isocrystal surconvergent, nous aurons besoin d'étendre les définitions de 4.1.1 sur la topologie du module des sections d'un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module cohérent. Soit \mathcal{U} un ouvert affine de \mathcal{X} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre $\widehat{B} = \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z))$ est naturellement munie de la topologie p -adique, qui définit la topologie p -adique de $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z)_{\mathbb{Q}}) \simeq \widehat{B}_{\mathbb{Q}}$. La topologie obtenue sur cette algèbre est une topologie de Banach, car \widehat{B} est une algèbre topologiquement de type fini, et $\widehat{B}_{\mathbb{Q}}$ peut donc être munie d'une norme de Banach qui définit sa topologie. De même, s'il existe un système de coordonnées locales sur \mathcal{U} , tout opérateur $P \in \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})$, avec $n \geq m$, peut s'écrire de manière unique $P = \sum_{\underline{k}} b_{\underline{k}} \underline{\partial}^{(\underline{k})}$, où les $b_{\underline{k}} \in \widehat{B}_{\mathbb{Q}}$ tendent vers 0 pour $|\underline{k}| \rightarrow \infty$, et, une fois choisie une

norme de Banach sur $\widehat{B}_{\mathbb{Q}}$, on munit l'algèbre $\widehat{D} = \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})$ d'une norme de Banach définissant sa topologie p -adique en posant $\|P\| = \sup_{\underline{k}} \|b_{\underline{k}}\|$. Enfin, si \mathcal{E} est un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z)_{\mathbb{Q}}$ -module (resp. un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module) cohérent, $E = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ est un module de type fini sur $\widehat{B}_{\mathbb{Q}}$ (resp. $\widehat{D}_{\mathbb{Q}}$) d'après le théorème A, et on munit E d'une norme de Banach en prenant la norme quotient définie par une présentation finie quelconque ; comme $\widehat{B}_{\mathbb{Q}}$ (resp. $\widehat{D}_{\mathbb{Q}}$) est une algèbre de Banach noëthérienne, les normes définies par deux présentations sont équivalentes. On vérifie encore comme en 4.1.1 qu'un changement de coordonnées locales remplace les normes considérées par des normes équivalentes.

THÉORÈME 4.4.5. – *Le foncteur sp_* induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des isocristaux sur Y , surconvergent le long de Z , dans la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules.*

Son image essentielle est formée des $\mathcal{D}_X^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules \mathcal{E} pour lesquels il existe un entier n_0 , et un $\widehat{\mathcal{B}}_X^{(n_0)}(Z)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent \mathcal{E}_0 , muni d'un isomorphisme

$$(4.4.5.1) \quad \varinjlim_{n \geq n_0} \widehat{\mathcal{B}}_X^{(n)}(Z) \otimes \mathcal{E}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E},$$

et vérifiant la condition suivante :

(4.4.5.2) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un entier $n_m \geq \max(n_{m-1}, m)$, et une structure de $(\widehat{\mathcal{B}}_X^{(n_m)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{X, \mathbb{Q}}^{(m)})$ -module sur $\widehat{\mathcal{B}}_X^{(n_m)}(Z) \otimes \mathcal{E}_0$, telle que les homomorphismes

$$\widehat{\mathcal{B}}_X^{(n_m)}(Z) \otimes \mathcal{E}_0 \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_X^{(n_{m+1})}(Z) \otimes \mathcal{E}_0$$

soient $(\widehat{\mathcal{B}}_X^{(n_m)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{X, \mathbb{Q}}^{(m)})$ -linéaires, et l'isomorphisme (4.4.5.1) $\mathcal{D}_X^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire.

Gardons les notations de 4.4.2 et 4.4.3. Grâce à 4.4.2, le foncteur sp_* est pleinement fidèle, car tout morphisme $\mathcal{D}_X^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire est *a fortiori* horizontal. Si (E, ∇) est un isocrystal sur Y , surconvergent le long de Z , il existe n_0 , et un $\mathcal{O}_{X_{n_0}}$ -module cohérent E_0 sur U_{n_0} , muni d'une connexion intégrable et surconvergente ∇_0 , tel que $(E, \nabla) \simeq j^\dagger(E_0, \nabla_0)$. Si l'on pose $\mathcal{E}_0 = \mathrm{sp}_* \circ j_{0*} E_0$, le $\widehat{\mathcal{B}}_X^{(n_0)}(Z)_{\mathbb{Q}}$ -module \mathcal{E}_0 est cohérent grâce à 4.4.2. Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ un ouvert affine sur lequel il existe des coordonnées locales. La démonstration de 4.4.3 montre que, pour tout m , il existe $n \geq m$ tel que $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_X^{(n)}(Z) \otimes \mathcal{E}_0)$ possède une structure canonique de $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_X^{(n)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{X, \mathbb{Q}}^{(m)})$ -module. De plus, d'après 4.4.1, on peut garder le même entier n lorsqu'on remplace \mathcal{U} par un ouvert affine $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. La condition (4.4.5.2) en résulte.

Réciproquement, si \mathcal{E} vérifie les conditions de l'énoncé, il existe sur U_{n_0} un module à connexion intégrable E_0 tel que $\mathcal{E}_0 \simeq \mathrm{sp}_* E_0$. Soit \mathcal{U} un ouvert affine de \mathcal{X} . D'après 4.1.2, l'action de $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_X^{(n_m)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{X, \mathbb{Q}}^{(m)})$ sur $M^{(n_m)} = \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_X^{(n)}(Z) \otimes \mathcal{E}_0)$ est continue pour sa topologie de $B^{(n_m)}$ -module de type fini. Par suite, pour toute section $e \in M^{(n_m)}$, l'ensemble des éléments $\partial^{(k)} e \otimes e$ est borné dans $M^{(n_m)}$, ce qui entraîne comme en 4.1.4 la surconvergence de la connexion de E_0 .

En général, nous identifierons implicitement la catégorie des isocristaux surconvercents le long de Z à son image essentielle dans la catégorie des $\mathcal{D}_X^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules. Nous terminerons en montrant qu'un isocrystal surconvergent le long de Z est cohérent sur $\mathcal{D}_X^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$. Pour cela, nous aurons besoin de quelques préliminaires.

DÉFINITION 4.4.6. – Soient \mathcal{U} un ouvert affine de \mathcal{X} sur lequel il existe un système de coordonnées locales, $n \geq m$ deux entiers, $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}^{(m)} = \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_X^{(n)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{X, \mathbb{Q}}^{(m)})$, E un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de type fini. On dira que E est *topologiquement nilpotent* si, pour tout $e \in E$, $\partial^{(k)} e \rightarrow 0$ pour la topologie de Banach définie en 4.4.4. Si $\overset{\circ}{E}$ est un modèle entier de E , et si $\overset{\circ}{E}_i$ est la réduction de $\overset{\circ}{E}$ modulo \mathfrak{m}^{i+1} , il revient au même de dire que, pour tout i , $\overset{\circ}{E}_i$ est quasi-nilpotent, donc nilpotent d'après 2.3.7 ; on voit ainsi que cette condition ne dépend pas des coordonnées.

Si la structure de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de E est induite par une structure de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}^{(m+1)}$ -module (avec $n \geq m+1$), alors E est topologiquement nilpotent. En effet, E est aussi de type fini sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}^{(m+1)}$. Le lemme 4.1.2 entraîne que les topologies définies par ces deux structures de modules sont les mêmes. Or les éléments $\partial^{(k)} e$ forment une famille bornée de

$\widehat{D}_{\mathbb{Q}}^{(m+1)}$, donc les $\underline{\partial}^{(k)(m+1)} e$ forment une famille bornée de E . L'assertion découle alors de ce que $\partial_i^{(k)(m)} = (q!/q'!) \partial_i^{(k)(m+1)}$, avec $k = p^m q + r = p^{(m+1)} q' + r'$, $0 \leq r < p^m$, $0 \leq r' < p^{m+1}$, et $q!/q'! \rightarrow 0$.

Soit \mathcal{E} un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module. On dira que \mathcal{E} est *topologiquement nilpotent* s'il existe une base d'ouverts affines possédant un système de coordonnées locales, telle que pour tout $\mathcal{U} \in \mathfrak{B}$, $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ soit de type fini sur $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})$, et soit topologiquement nilpotent.

La condition de nilpotence permet d'améliorer les résultats de [39, 7.3] et [4, 3.1.2] sur l'existence de modèles entiers $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -cohérents et stables sous l'action de $\widehat{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ pour les isocristaux convergents.

PROPOSITION 4.4.7. – Soient $m \leq n$ deux entiers, $\mathcal{D} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, et \mathcal{E} un $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ -module, cohérent sur $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z)_{\mathbb{Q}}$, et topologiquement nilpotent. Il existe alors un \mathcal{D} -module $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$, cohérent sur $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z)$ et sans p -torsion, et un isomorphisme \mathcal{D} -linéaire $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$.

On suppose d'abord que \mathcal{X} est un ouvert affine, muni de coordonnées locales, sur lequel la condition de nilpotence de 4.4.6 est remplie ; soient $A = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$, $X_i = \text{Spec } A/\mathfrak{m}^{i+1} A$, $P_i = \Gamma(X_i, \mathcal{P}_{X_i, (m)})$, $B = \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z))$, $D = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D})$, $E = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E})$. On pose

$$P' = \varprojlim_i B \otimes_A P_i.$$

Comme \mathcal{E} est cohérent sur $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z)_{\mathbb{Q}}$, E est un $B_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini ; soit $E' \subset E$ un sous- B -module de type fini tel que $E'_{\mathbb{Q}} = E$. Par ailleurs, P_i est libre sur $A/\mathfrak{m}^{i+1} A$, de base les sections $\tau^{\{k\}}$. Il résulte alors de 3.2.4 que $E' \otimes_B P'$ est séparé et complet pour la topologie p -adique. L'hypothèse de nilpotence entraîne que, pour tout $e \in E$, la famille $(\underline{\partial}^{(k)} e)_k$ tend vers 0 pour la topologie de $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ -module de E , donc pour sa topologie de $B_{\mathbb{Q}}$ -module d'après 4.1.2. Comme celle-ci n'est autre que celle que définit la topologie p -adique de E' , la famille $(\underline{\partial}^{(k)} e \otimes \tau^{\{k\}})_k$ tend vers 0 dans $E \otimes_B P'$. On peut donc définir une application $\theta : E \rightarrow E \otimes_B P'$ en posant

$$\theta(e) = \sum_k \underline{\partial}^{(k)} e \otimes \tau^{\{k\}}.$$

Grâce à la m -PD-stratification des $\mathcal{B}_{X_i}^{(m)}(Z)$, on a $P' \simeq \varprojlim_i P_i \otimes_A B$, ce qui donne une seconde structure de B -module sur P' par multiplication à droite. On vérifie alors facilement que θ est B -linéaire pour cette structure de B -module sur P' .

On pose alors $\overset{\circ}{E} = \theta^{-1}(E' \otimes_B P')$, et on voit comme en [4, 3.1.2] que $\overset{\circ}{E}$ est un sous- B -module de type fini de E , stable sous l'action de D , et tel que $\overset{\circ}{E}_{\mathbb{Q}} \simeq E$. Le $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z)$ -module cohérent $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ défini par $\overset{\circ}{E}$ possède alors les propriétés requises.

Enfin, on passe du cas affine au cas général en raisonnant comme en 3.4.3.

COROLLAIRE 4.4.8. – Supposons vérifiées les hypothèses de 4.4.7. Alors :

- (i) \mathcal{E} est cohérent sur $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$;

(ii) Pour tout $n' \geq n$, l'homomorphisme canonique

$$(4.4.8.1) \quad \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n')} (Z) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z)} \mathcal{E} \rightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n')} (Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \mathcal{E}$$

est un isomorphisme.

L'assertion (ii) entraîne donc que $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n')} (Z) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z)} \mathcal{E}$ possède une structure canonique de $(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n')} (Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})$ -module compatible à sa structure de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n')} (Z)_{\mathbb{Q}}$ -module, et prolongeant la structure de $(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})$ -module de \mathcal{E} .

Pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, posons $B_{\mathcal{U}} = \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z))$, $B'_{\mathcal{U}} = \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n')} (Z))$, $D_{\mathcal{U}} = \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$, $D'_{\mathcal{U}} = \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n')} (Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$. Comme \mathcal{E} est cohérent sur $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z)_{\mathbb{Q}}$, $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ est de type fini sur $B_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}$ donc sur $D_{\mathcal{U}, \mathbb{Q}}$. Pour montrer (i), il suffit donc d'après le théorème A de montrer que, pour tout ouvert affine $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, l'homomorphisme canonique $D_{\mathcal{U}'} \otimes_{D_{\mathcal{U}}} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}', \mathcal{E})$ est un isomorphisme. D'après 4.4.7, il existe un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z)$ -module cohérent $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ muni d'une structure compatible de $(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ -module tel que $\mathcal{E} \simeq \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\mathbb{Q}}$, si bien qu'il suffit de prouver que l'homomorphisme analogue pour $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme. La source et le but étant de type fini sur $D'_{\mathcal{U}}$, ils sont complets, ce qui ramène à montrer la même assertion pour les $\overset{\circ}{\mathcal{E}}/\mathfrak{m}^{i+1}\overset{\circ}{\mathcal{E}}$. Il résulte alors de 2.3.6 et de la remarque (iii) de 2.3.5 que les homomorphismes

$$B'_{U'_i} \otimes_{B_{U_i}} \Gamma(U_i, \overset{\circ}{\mathcal{E}}/\mathfrak{m}^{i+1}\overset{\circ}{\mathcal{E}}) \rightarrow D'_{U'_i} \otimes_{D_{U_i}} \Gamma(U_i, \overset{\circ}{\mathcal{E}}/\mathfrak{m}^{i+1}\overset{\circ}{\mathcal{E}}),$$

où les indices U_i et U'_i désignent les sections des réductions modulo \mathfrak{m}^{i+1} , sont des isomorphismes, d'où l'assertion.

On voit de même que les homomorphismes

$$B'_{U_i} \otimes_{B_{U_i}} \Gamma(U_i, \overset{\circ}{\mathcal{E}}/\mathfrak{m}^{i+1}\overset{\circ}{\mathcal{E}}) \rightarrow D'_{U_i} \otimes_{D_{U_i}} \Gamma(U_i, \overset{\circ}{\mathcal{E}}/\mathfrak{m}^{i+1}\overset{\circ}{\mathcal{E}})$$

sont des isomorphismes, ce qui entraîne l'assertion (ii).

PROPOSITION 4.4.9. – Soit $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}}$ -module, cohérent sur $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z)$. Alors l'homomorphisme canonique

$$(4.4.9.1) \quad \overset{\circ}{\mathcal{E}} \rightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}}} \overset{\circ}{\mathcal{E}}$$

est un isomorphisme.

Il suffit de reprendre la démonstration de [4, 3.1.3] en remplaçant $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ par $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z)$.

COROLLAIRE 4.4.10. – Sous les hypothèses de 4.4.7, l'homomorphisme canonique

$$(4.4.10.1) \quad \mathcal{E} \rightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)} (Z) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m')}}} \mathcal{E}$$

est un isomorphisme pour tout $m' \leq m$.

Pour tout $m' \leq m$, posons $\mathcal{D}'^{(m')} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z) \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m')}$, $\widehat{\mathcal{D}}'^{(m')} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$. D'après 4.4.7, \mathcal{E} possède un modèle entier \mathcal{E}° qui est un $\mathcal{D}'^{(m)}$ -module $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n)}(Z)$ -cohérent. En tensorisant par \mathbb{Q} les isomorphismes (4.4.9.1) pour $m' \leq m$, on obtient les isomorphismes

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}'^{(m')} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}^{(m')}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}'^{(m')} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}^{(m)}} \mathcal{E},$$

dont le corollaire résulte puisque $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}'^{(m')} = \mathcal{D}_{\mathbb{Q}}'^{(m)}$.

COROLLAIRE 4.4.11. – *Sous les hypothèses de 4.4.5, soient E un isocrystal sur Y , surconvergent le long de Z , $\mathcal{E} = \text{sp}_* E$ le $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ -module correspondant, \mathcal{E}_0 un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_0)}(Z)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent vérifiant la condition (4.4.5.2) pour une suite d'entiers (n_m) , $\mathcal{E}^{(m)} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_m)}(Z) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_0)}(Z)} \mathcal{E}_0$. Pour tout m , l'homomorphisme canonique*

$$(4.4.11.1) \quad \mathcal{E}^{(m+1)} \rightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_{m+1})}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}^{(m)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_1)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{E}^{(1)}$$

est un isomorphisme.

La condition (4.4.5.2) entraîne que, pour tout $m \geq 0$, le $(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_{m+1})}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})$ -module $\mathcal{E}^{(m+1)}$ est topologiquement nilpotent. On en déduit successivement grâce à 4.4.10 et 4.4.8 que les homomorphismes

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(m+1)} &\rightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_{m+1})}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_{m+1})}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}} \mathcal{E}^{(m+1)}, \\ \mathcal{E}^{(m+1)} &\rightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_{m+1})}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_1)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}} \mathcal{E}^{(1)} \end{aligned}$$

sont des isomorphismes, d'où le corollaire.

THÉORÈME 4.4.12. – *Soient E un isocrystal sur Y , surconvergent le long de Z , et $\mathcal{E} = \text{sp}_* E$. Alors \mathcal{E} est cohérent sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$.*

Soient \mathcal{E}_0 un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_0)}(Z)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent vérifiant la condition (4.4.5.2) pour \mathcal{E} , (n_m) une suite d'entiers correspondante, $\mathcal{E}^{(m)} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_m)}(Z) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_0)}(Z)} \mathcal{E}_0$. Comme $\mathcal{E}^{(1)}$ est un $(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_1)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(0)})$ -module topologiquement nilpotent, il est cohérent sur $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_1)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(0)}$ d'après 4.4.8. Si

$$(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_1)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(0)})^s \rightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_1)}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(0)}) \rightarrow \mathcal{E}^{(1)} \rightarrow 0$$

est une présentation locale de $\mathcal{E}^{(1)}$, on en déduit grâce au corollaire précédent les présentations

$$(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_{m+1})}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(n_{m+1})}(Z) \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow \mathcal{E}^{(m+1)} \rightarrow 0,$$

qui fournissent une présentation analogue de \mathcal{E} sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger(\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ par passage à la limite inductive pour m variable.

Remarque. – Sous les hypothèses du théorème, il n'est par contre pas toujours vrai que \mathcal{E} soit cohérent sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$. En effet, nous montrerons dans [7] que, lorsque \mathcal{X} est

propre, la cohomologie de de Rham d'un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent est de type fini sur K . Or, si $\mathcal{E} = \text{sp}_* E$, la cohomologie de de Rham de \mathcal{E} s'identifie à la cohomologie rigide de E , d'après [4, 3.2.3 et 4.1.7]. Si l'on prend $\mathcal{V} = \mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathcal{X} = \widehat{\mathbb{P}}_{\mathcal{V}}^1$, $Y = \mathbb{G}_{mk}$, et si E est l'isocrystal surconvergent sur Y défini par $j^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$, muni de la connexion ∇ telle que $\nabla(1) = (\alpha/t) dt$, où $\alpha \in \mathbb{Z}_{(p)}$ est un nombre de Liouville, la cohomologie rigide de E est donnée par l'action de ∇ sur l'espace des fonctions analytiques sur une couronne de la forme $1 - \varepsilon < |t| < 1 + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ variable, et il est classique que son H^1 est de dimension infinie.

Il y a donc lieu de considérer que la cohérence sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ est une condition de finitude supplémentaire à imposer aux isocristaux surconvergents. Par contre, il semble raisonnable de conjecturer que tout F -isocrystal surconvergent est cohérent sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$, l'existence d'une action de Frobenius éliminant les difficultés liées aux nombres de Liouville.

BIBLIOGRAPHIE

- [EGA] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Éléments de Géométrie Algébrique*, (Publ. Math. I.H.E.S., vol. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, 1960-67).
- [SGA4] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (Lecture Notes in Math. 269, 270, Springer-Verlag, 1972).*
- [1] P. BERTHELOT, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$ (Lecture Notes in Math. vol. 407, Springer Verlag, 1974).*
- [2] P. BERTHELOT, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p* , Journées d'analyse p -adique (1982), in *Introduction aux cohomologies p -adiques (Bull. Soc. Math. France, Mémoire, vol. 23, 1986, p. 7-32).*
- [3] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et théorie de Dwork : le cas des sommes exponentielles (Astérisque, vol. 119-120, 1984, p. 17-49).*
- [4] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et théorie des \mathcal{D} -modules*, Proc. Conf. p -adic Analysis (Trento 1989) (*Lecture Notes in Math.* 1454, Springer Verlag, 1990, p. 78-124).
- [5] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, en préparation.
- [6] P. BERTHELOT, *\mathcal{D} -modules arithmétiques II. Descente par Frobenius*, en préparation.
- [7] P. BERTHELOT, *\mathcal{D} -modules arithmétiques III. Images directes et réciproques*, en préparation.
- [8] P. BERTHELOT, L. BREEN et W. MESSING, *Théorie de Dieudonné cristalline II (Lecture Notes in Math. 930, Springer-Verlag, 1982).*
- [9] P. BERTHELOT et A. OGUS, *Notes on crystalline cohomology (Math. Notes 21, Princeton University Press, 1978).*
- [10] P. BERTHELOT et A. OGUS, *F -isocrystals and de Rham cohomology I (Invent. Math., vol. 72, 1983, p. 159-199).*
- [11] A. BOREL *et al.*, *Algebraic D -modules*, Perspectives in Math. 2, Academic Press, 1987.
- [12] S. BOSCH, U. GÜNTZER et R. REMMERT, *Non-archimedean analysis (Grundlehren des math. Wissenschaften, vol. 261, Springer-Verlag, 1984).*
- [13] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Ch. 3-4, Hermann, 1961.
- [14] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Ch. 1-5, Masson, 1981.
- [15] J.-L. BRYLINSKI, A. S. DUBSON et M. KASHIWARA, *Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale (C. R. Acad. Sci. Paris, 293, 1981, p. 573-576).*
- [16] P. DELIGNE, *Équations différentielles à points singuliers réguliers (Lecture Notes in Math., vol. 163, Springer-Verlag, 1970).*

- [17] D. DWORK, *Bessel functions as p -adic functions of the argument* (*Duke Math. Journal*, vol. 41, 1974, p. 711-738).
- [18] G. FALTINGS, *F -isocrystals on open varieties : results and conjectures* (*Grothendieck Festschrift II*, *Prog. in Math.*, 87, Birkhäuser, 1990).
- [19] W. FULTON, *A note on weakly complete algebras* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 1969, p. 591-593).
- [20] L. GARNIER, *Quelques propriétés des \mathcal{D}^1 -modules holonomes sur les courbes* (*Thèse de Doctorat*, Université de Rennes 1, 1993).
- [21] A. GROTHENDIECK, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 29, 1966, p. 351-359).
- [22] A. GROTHENDIECK, *Crystals and the de Rham cohomology of schemes*, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, 1968.
- [23] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Éléments de Géométrie Algébrique I* (*Grundlehren der math. Wissenschaften*, vol. 166, Springer-Verlag, 1971).
- [24] C. HUYGHE, *Construction et étude de la transformation de Fourier des \mathcal{D} -modules arithmétiques* (*Thèse de Doctorat*, Université de Rennes 1, 1995).
- [25] O. HYODO et K. KATO, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, *preprint*.
- [26] M. KASHIWARA, *Faisceaux constructibles et systèmes holonomes d'équations aux dérivées partielles à points singuliers réguliers* (*Sém. Goulaouic-Schwarz*, 1979-80, exp. 19 ; École Polytechnique 1981).
- [27] M. KASHIWARA, *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems* (*Publ. R.I.M.S.*, vol. 437, Kyoto University, 1983).
- [28] K. KATO, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, in : J. Igusa, *Algebraic analysis, Geometry and Number Theory*, John Hopkins University Press, 1989.
- [29] N. M. KATZ, *Nilpotent connexions and the monodromy theorem : applications of a result of Turittin* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 35, 1971, p. 175-232).
- [30] R. KIEHL, *Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie* (*Invent. Math.*, vol. 2, 1967, p. 256-273).
- [31] G. LAUMON, *Sur la catégorie dérivée filtrée des \mathcal{D} -modules filtrés*, in : M. Raynaud et T. Shioda, *Algebraic Geometry (Proc. Tokyo/Kyoto, 1982)* (*Lecture Notes in Math.*, vol. 1016, Springer-Verlag, 1990, p. 151-237).
- [32] Z. MEBKHOUT, *Une équivalence de catégories* (*Comp. Math.*, vol. 51, 1984, p. 51-62).
- [33] Z. MEBKHOUT, *Une autre équivalence de catégories* (*Comp. Math.*, vol. 51, 1984, p. 63-88).
- [34] Z. MEBKHOUT, *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les \mathcal{D}_X -modules cohérents* (*Travaux en cours*, vol. 35, Hermann, 1989).
- [35] Z. MEBKHOUT et L. NARVAEZ-MACARRO, *Sur les coefficients de de Rham-Grothendieck des variétés algébriques*, *Proc. Conf. p -adic Analysis* (Trento 1989) (*Lecture Notes in Math.*, vol. 1454, Springer-Verlag, 1990, p. 267-308).
- [36] D. MEREDITH, *Weak formal schemes* (*Nagoya Math. Journal*, vol. 45, 1971, p. 1-38).
- [37] P. MONSKY et G. WASHNITZER, *Formal cohomology I* (*Annals of Math.*, vol. 88, 1968, p. 181-217).
- [38] C. NĂSTĂCESCU et F. VAN OYSTAEYEN, *Graded ring theory*, North-Holland, 1982.
- [39] A. OGUS, *The convergent topos in characteristic p* , *Grothendieck Festschrift III* (*Progress in Math.*, vol. 88, Birkhäuser, 1990, p. 133-162).
- [40] J.-P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents* (*Annals of Math.*, vol. 61, 1955, p. 197-278).
- [41] M. VAN DER PUT, *The cohomology of Monsky and Washnitzer*, in *Introduction aux cohomologies p -adiques* (*Bull. Soc. Math. France*, Mémoire vol. 23, 1986, p. 33-59).

(Manuscrit reçu le 9 septembre 1993 ;
révisé le 14 juin 1995.)

Pierre BERTHELOT
IRMAR, Université de Rennes
Campus de Beaulieu,
35042 Rennes Cedex, France