ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL BERTHIER
DOMINIQUE CERVEAU

Quelques calculs de cohomologie relative

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 26, nº 3 (1993), p. 403-424
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1993_4_26_3_403_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4ᵉ série, t. 26, 1993, p. 403 à 424.

QUELQUES CALCULS DE COHOMOLOGIE RELATIVE

PAR MICHEL BERTHIER ET DOMINIQUE CERVEAU

ABSTRACT. — Let ω be a holomorphic integrable differential form. We define the space $H^1_{top}(\omega)$ of closed relative 1 forms η with vanishing integrals $\int_\gamma \eta$ on the evanescent cycles γ of ω. We compute this space in particular cases.

0. Introduction

Soient $\mathcal{O}_n$ l'anneau des germes en $0 \in \mathbb{C}^n$ de fonctions holomorphes, $\mathcal{M}_n$ son idéal maximal et Ω^i_n le $\mathcal{O}_n$-module des germes en $0 \in \mathbb{C}^n$ de i-formes différentielles holomorphes.

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ nous désignons par $\mathcal{O}_n(\mathrm{U})$ l'espace des fonctions holomorphes sur U et par $\Omega^i_n(\mathrm{U})$ le $\mathcal{O}_n(\mathrm{U})$-module des i-formes différentielles holomorphes sur U. Pour $\omega \in \Omega^1_n$, $\mathrm{S}(\omega)$ sera le lieu singulier de ω *i.e.*:

$$\mathrm{S}(\omega) = \{ m \in \mathbb{C}^n, 0, \omega(m) = 0 \}.$$

De même pour $\omega \in \Omega^1_n(\mathrm{U})$, on note $\mathrm{S}(\omega; \mathrm{U}) = \{ m \in \mathrm{U}, \omega(m) = 0 \}$.

DÉFINITION. — *Soit* $\omega \in \Omega^1_n(\mathrm{U})$, ω *intégrable au sens de Frobenius* (*i.e.* $\omega \wedge d\omega = 0$). *Un cycle de* ω *est la donnée d'une application analytique* γ:

$$\gamma : [0; 1] \to \mathrm{U} \setminus \mathrm{S}(\omega; \mathrm{U})$$

telle que:

(i) $\gamma(0) = \gamma(1)$

(ii) $\gamma^* \omega \equiv 0$.

Si γ est un cycle de ω, le lacet image de γ est contenu dans une feuille du feuilletage $\mathcal{F}(\omega; \mathrm{U} \setminus \mathrm{S}(\omega; \mathrm{U}))$ induit par ω sur $\mathrm{U} \setminus \mathrm{S}(\omega; \mathrm{U})$. On note $\mathcal{C}(\omega; \mathrm{U})$ l'ensemble des cycles de ω dans U. On introduit alors les espaces $H^1_{top}(\omega; \mathrm{U})$ de la façon suivante:

$$H^1_{top}(\omega; \mathrm{U}) = \frac{\{ \eta \in \Omega^1_n(\mathrm{U}), d\eta \wedge \omega = 0, \int_\gamma \eta = 0 \ \forall \gamma \in \mathcal{C}(\omega; U) \}}{\{ \eta \in \Omega^1_n(\mathrm{U}), \exists a, h \in \mathcal{O}_n(\mathrm{U}), \eta = a\omega + dh \}}.$$

Considérons désormais ω dans Ω_n^1 vérifiant $\omega \wedge d\omega = 0$; nous posons :

$$H_{\mathrm{top}}^1(\omega) = \lim_{U} H_{\mathrm{top}}^1(\omega_U;\ U)$$

où ω_U désigne un représentant sur U du germe ω pour U ouvert suffisamment petit.

Enfin on définit les espaces classiques de cohomologie

$$H_{\mathrm{rel}}^1(\omega) = \frac{\{\eta \in \Omega_n^1,\ d\eta \wedge \omega = 0\}}{\{\eta \in \Omega_n^1,\ \exists\, a,\ h \in \mathcal{O}_n,\ \eta = a\omega + dh\}}.$$

Remarque. — La condition d'intégrabilité sur ω fait que ces espaces sont bien définis.

Dans cet article on propose des calculs des espaces $H_{\mathrm{top}}^1(\omega)$ et $H_{\mathrm{rel}}^1(\omega)$ pour des germes de 1-formes possédant des intégrales premières holomorphes et pour des germes de 1-formes possédant des intégrales premières de type Liouville. Ce type de problème a été considéré par Malgrange [M1] et alt pour les formes $\omega = df$, $f \in \mathcal{O}_n$ présentant de petites singularités (cod $S(df) \geqq 3$, notamment chez Malgrange f est irréductible). Cette étude classique ne dit pas grand chose lorsque les singularités sont de dimension plus grande (cas où la fibre générale peut ne pas être simplement connexe) et encore moins lorsque la forme ω ne possède pas d'intégrale première holomorphe, ... ce qui est tout de même le cas général [C, M]. Dans cette dernière situation on ne dipose pas de théorie à la Milnor donnant des renseignements sur l'homologie de la feuille générale. On peut se demander si, comme dans le cas des fonctions à singularité isolée, l'exactitude relative d'une 1-forme peut se lire sur la feuille (la fibre pour les fonctions) générique : d'où l'introduction des espaces H_{top}^1 dans lesquels l'obstruction triviale d'intégrale non nulle sur les cycles évanescents est levée.

Voici deux types d'exemples où les espaces $H_{\mathrm{top}}^1(\omega)$ sont de dimension infinie alors que la feuille générique est simplement connexe. Les 1-formes $\omega_\lambda = xdy + \lambda ydx$ pour λ irrationnel positif bien approché par les rationnels voient leurs espaces $H_{\mathrm{top}}^1(\omega_\lambda)$ de dimension infinie bien que leur feuille générique soit simplement connexe, bien qu'aussi tout élément $\eta \in \Omega_2^1$ soit formellement exact modulo ω_λ; les problèmes de divergence qui apparaissent ici sont liés à l'arithmétique du nombre λ. En présence de formes résonnantes [M_a, R] on se heurte à d'autres avatars; par exemple la 1-forme $\omega = x(1+xy)\,dy + ydx = (xy)^2\, d(-(1/(xy)) + \operatorname{Log} y)$ a aussi sa feuille générique simplement connexe et son espace $H_{\mathrm{rel}}^1(\omega) = H_{\mathrm{top}}^1(\omega)$ de dimension infinie. A contrario de l'exemple précédent tout élément $\eta \in \Omega_2^1$ n'est pas formellement exact (mod ω), mais les éléments qui le sont sont en fait exacts (mod ω) dans une certaine classe Gevrey [Be]. Dans cet article, où l'on tente de donner une classe de formes ω pour lesquelles l'espace $H_{\mathrm{top}}^1(\omega)$ est trivial, on a cherché à éliminer les deux pathologies précédentes en ne considérant que des formes présentant des intégrales premières de types $f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$, f_i holomorphes les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ étant assujettis à satisfaire des conditions arithmétiques génériques.

Les résultats obtenus poussent à proposer la conjecture suivante : si l'espace $H_{\mathrm{top}}^1(\omega)$ est trivial alors tout 1-forme η formellement exacte modulo ω (*i.e.* $\eta = \hat{a}.\omega + d\hat{f}$, $\hat{a}$ et $\hat{f}$ séries formelles) est exacte modulo ω.

Outre le fait qu'il nous permet de calculer certains H^1_{rel}, le calcul des espaces H^1_{top} trouve sa motivation — tout au moins pour les spécialistes de systèmes dynamiques — dans le célèbre 16ᵉ problème de Hilbert (partie *b*). Il s'agit d'établir que le nombre de cycles limites d'une forme différentielle (réelle) polynomiale $\omega_0 = A\,dx + B\,dy$, A et B polynômes de degré d, est majoré par un nombre $N(d)$ ne dépendant que du degré d. Même pour $d=2$ l'existence d'une telle borne n'est pas connue (*cf.* [A, I] pour une introduction et une bibliographie sur le sujet); dans chaque article consacré au problème — et la littérature est très abondante — on trouve plus ou moins déguisé un calcul de cohomologie relative. Grosso modo on cherche à observer la naissance de cycles limites près de formes ω_0 spéciales, a fortiori non génériques : celles dont les trajectoires présentent près d'un point singulier une configuration centrale — *i.e.* homéomorphe aux cercles concentriques — C'est par exemple le cas lorsque ω_0 est exacte, $\omega_0 = df$, et f présente un extremum local en un point 0. Le nombre de cycles limites naissant près du point 0 dans une famille à paramètre ω_ε, $\omega_0 = \omega_{\varepsilon=0}$, est intimement lié à la nature des intégrales abéliennes :

$$I(t) = \int_{f=t} \eta, \qquad \text{où} \quad \eta = \left.\frac{d\omega_\varepsilon}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Par exemple si I est non identiquement nulle, chaque zéro simple t_0 de I fait naître près de $f=t_0$, un cycle limite $\gamma(t_0, \varepsilon)$ de ω_ε pour ε petit. Par contre lorsque I est identiquement nulle on est typiquement face à un calcul de cohomologie relative (réelle) et la nullité de l'espace $H^1_{top}(\omega_0)$ produit des formes normales pour la famille ω_ε, formes normales que l'on peut étudier spécifiquement, tout du moins en petit degré et pour certaines formes ω_0 (*cf.* [A. I] où l'on discute aussi le problème analogue complexe).

Venons-en à nos résultats. Notre étude repose sur deux démarches distinctes. L'une consiste en une étude spécifique du problème en dimension deux. L'autre permet de ramener les problèmes des grandes dimensions à la dimension deux grâce à l'énoncé de type Lefschetz suivant :

THÉORÈME D'EXTENSION I. — *Soient* ω, $\eta \in \Omega^1_n$, $n \geqq 3$ *tels que* $\omega \wedge d\omega = 0$ *et* $d\eta \wedge \omega = 0$. *Soit* $i : \mathbb{C}^p, 0 \to \mathbb{C}^n, 0$ *un plongement général*, $2 \leqq p \leqq n$. *On suppose qu'il existe* a_0 *et* h_0, *éléments de* $\mathcal{O}_p$, *tels que* :

$$i^*\eta = a_0\, i^*\omega + dh_0.$$

Alors il existe a *et* $h \in \mathcal{O}_n$ *uniques tels que* :

(i) $a \circ i = a_0$, $h \circ i = h_0$

(ii) $\eta = a\omega + dh$.

Remarque. — Puisque les espaces H^1_{rel} et H^1_{top} sont attachés aux feuilletages (et non aux équations qui les définissent), nous supposerons toujours $\operatorname{cod}(S(\omega)) \geqq 2$. Le paragraphe 2 est consacré à la démonstration des deux théorèmes suivants :

THÉORÈME II. — *Soit* $\omega \in \Omega^1_n$, *intégrable possédant une intégrale première* $f = f_1^{n_1} \ldots f_p^{n_p}$, $f_i \in \mathcal{O}_n$ *irréductibles*, $n_i \in \mathbb{N}^*$, $pgcd(n_1, \ldots n_p) = 1$, *alors*

$$H^1_{top}(\omega) = 0.$$

Rappelons que $f \in \mathcal{O}_n$ est une intégrale première de $\omega \in \Omega_n^1$ si

$$df \wedge \omega = 0.$$

Remarque. — Le théorème 2 indique la nullité de l'espace

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{top}}(d, f) = \frac{\{\eta \in \Omega_n^1,\ d\eta \wedge df = 0,\ \int_\gamma \eta = 0\ \forall \gamma \in \mathscr{C}(df)\}}{\{\eta \in \Omega_n^1,\ \exists\, a, h \in \mathcal{O}_n,\ \eta = a f_1 \ldots f_p \Sigma\, n_i\, df_i/f_i + dh\}}.$$

THÉORÈME III. — *Soit* $\omega \in \Omega_n^1$, *intégrable possédant une intégrale première de type Liouville* $f = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$, $f_i \in \mathcal{O}_n$ *irréductibles;* $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p \in \mathbb{C}^*$. *On suppose en outre*:

(i) ω *est non dicritique au sens de* [C; C]

(ii) *Les* λ_i *vérifient une condition diophantienne*:

$$|i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 + \ldots + i_p \lambda_p| > \frac{c}{(|i_1| + |i_2| + \ldots + |i_p|)^\delta}$$

où c, δ *sont des constantes positives, ceci pour tout p-uplet d'entiers relatifs* $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ *tel que* $i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 + \ldots + i_p \lambda_p \neq 0$. *Alors* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{top}}(\omega) = 0$.

Remarque. — La condition (i) implique que les seules hypersurfaces X telles que $\mathrm{X} \setminus \mathrm{S}(\omega)$ soit feuille de $\mathscr{F}(\omega;\ \mathbb{C}^n, 0 \setminus \mathrm{S}(\omega))$ sont les hypersurfaces définies par $\mathrm{X} = (f_i = 0)$. Elle implique aussi que la désingularisation de ω est essentiellement celle de l'hypersurface $f_1 f_2 \ldots f_p = 0$.

Remarquons également que l'hypothèse (i) du théorème s'avère indispensable. Pour cela considérons dans $\mathbb{C}^2$ la 1-forme différentielle holomorphe

$$\omega = x\,d(y^2 + x^3) - 2(y^2 + x^3)\,dx = (x^3 - 2y^2)\,dx + 2xy\,dy.$$

On vérifie que ω possède l'intégrale première rationnelle

$$f = \frac{y^2 + x^3}{x^2}.$$

Les feuilles de $\mathscr{F}(\omega;\ \mathrm{U} \setminus \{0\})$ (U voisinage suffisamment petit de 0) sont dépourvues de cycles pouvant produire des intégrales non nulles. En effet si $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$, 0 désigne l'application d'éclatement de l'origine, les fibres de $f \circ \pi$ vues dans un petit voisinage $\tilde{\mathrm{U}} = \pi^{-1}(\mathrm{U}) \subset \tilde{\mathbb{C}}^2$ de $\pi^{-1}(0)$ sont simplement connexes.

Par suite: $\mathrm{H}^1_{\mathrm{top}}(\omega;\ \mathrm{U}) = \dfrac{\Omega_2^1}{\{\eta \in \Omega_2^1,\ \exists\, a,\ h \in \mathcal{O}_2,\ \eta = a\,\omega + dh\}}$.

Un exemple de cocycle non trivial est donné par $\eta = y\,dx$.

Enfin, pour conclure ce travail, nous nous proposons de calculer directement les espaces $\mathrm{H}^1_{\mathrm{rel}}$ de certaines formes possédant des intégrales premières holomorphes non nécessairement réduites (paragraphe III) ou des intégrales premières de type Liouville (paragraphe IV). Les hypothèses relatives à ces résultats seront précisées en temps opportun.

1. Théorème d'extension et algorithme de Godbillon Vey

1.1. THÉORÈME D'EXTENSION. — On se propose d'abord de démontrer le théorème I. Il suffit de le prouver pour $p=2$. Pour cela on identifie le plongement:

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^n \text{ au plongement standard}\\ &\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2}\\ &x \ \mapsto (x, 0).\end{aligned}$$

On choisit un polydisque $U=U_0 \times U_1$ centré en l'origine, $U_0 \subset \mathbb{C}^2$ $U_1 \subset \mathbb{C}^{n-2}$ suffisamment petit pour qu'il existe des représentants $\underline{\eta}$, $\underline{\omega}$, $\underline{\eta}_0$, $\underline{\omega}_0$, $\underline{h}_0$, $\underline{a}_0$ des germes η, ω, $\eta_0=i^* \eta$, $\omega_0=i^* \eta$, h_0, a_0. Puisque i est général $S(\underline{\omega}_0; U_0))=\{0\}$ [M; M]. Soit $m_0 \in U_0 \setminus S(\underline{\omega}_0; U_0)$; puisque $m \notin S(\underline{\omega}; U)$ il existe une submersion f_{m_0}, une unité g_{m_0} définies sur un voisinage $U_{m_0}=V_0 \times V_1$ de m_0 dans U telles que:

$$\underline{\omega}_{U_{m_0}}=g_{m_0}\, df_{m_0}$$

où $\underline{\omega}_{U_{m_0}}$ désigne la restriction de $\underline{\omega}$ au voisinage U_{m_0}. On a :

$$\underline{\eta}_{0V_0}=(\underline{a}_0\, \underline{\omega}_0+d\underline{h}_0)_{V_0}=(\underline{a}_0\, (g_{m_0} \circ i)\, d(f_{m_0} \circ i)+d\underline{h}_0)_{V_0}.$$

Comme f est submersive et $d\eta \wedge \omega=0$, il existe A et H éléments de $\mathcal{O}_n(U_{m_0})$ tels que:

$$\underline{\eta}_{U_{m_0}}=A\, \underline{\omega}_{U_{m_0}}+dH$$

notamment:

$$\underline{\eta}_{0V_0}=A \circ i\, \underline{\omega}_{0V_0}+d(H \circ i).$$

On constate alors que:

$$d(H \circ i-\underline{h}_0) \wedge d(f_{m_0} \circ i)=0.$$

Par suite, $f_{m_0} \circ i$ étant submersive, il existe $l \in \mathcal{O}_1(D)$, D disque de $\mathbb{C}$, tel que:

$$\underline{h}_0-H \circ i=l \circ f_{m_0} \circ i.$$

On définit $h \in \mathcal{O}_n(Um_0)$ par $\underline{h}_{U_{m_0}}=H_{m_0}+l \circ f_{m_0}$.

Visiblement il existe $a_{m_0} \in \mathcal{O}_n(U_{m_0})$ tel que

$$\underline{\eta}_{U_{m_0}}=a_{m_0}\, \underline{\omega}_{U_{m_0}}+dh_{m_0}.$$

Remarques:

(i) $a_{m_0} \circ i=\underline{a}_{0V_0}$

(ii) h_{m_0} et a_{m_0} sont uniques.

En procédant ainsi on construit a' et $h' \in \mathcal{O}_n(\mathrm{U}')$ vérifiant :

$$\eta_{\mathrm{U}'} = a' \,\omega_{\mathrm{U}'} + dh'$$

où U' désigne une "couronne" $\mathrm{U}' = \mathrm{U}'_0 \times \mathrm{U}'_1$, U'_1 polydisque dans U_1, U'_0 différence de deux polydisques dans U_0. Par la formule de Cauchy a' et h' s'étendent en a et h holomorphiquement à un polydisque; a et h conviennent. ■

1.2. UN PRINCIPE "LOCAL IMPLIQUE GLOBAL": VARIATIONS SUR GODBILLON VEY. — Les techniques de démonstration des résultats de ce paragraphe sont inspirées de celles employées par Malgrange dans [M1].

PROPOSITION 1.2.1. — *Soit* $\mathrm{U} \subset \mathbb{C}^3$ *un polydisque centré à l'origine,* $\mathrm{U}^* = \mathrm{U} - \{0\}$. *Soient* $f \in \mathcal{O}_3(\mathrm{U})$ *et* $\eta \in \Omega^1_3(\mathrm{U})$ *tels que* $\operatorname{cod}(\mathrm{S}(df)) \geqq 2$ *et* $d\eta \wedge df = 0$. *On suppose en outre qu'il existe un recouvrement* $\mathcal{U} = (\mathrm{U}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *de* U^* *par des polydisques* U_i *et* $(a_i)_{i \in \mathrm{I}}$, $(h_i)_{i \in \mathrm{I}}$, $a_i, h_i \in \mathcal{O}_3(\mathrm{U}_i)$ *tels que* :

$$\eta_{\mathrm{U}_i} = a_i \, df_{\mathrm{U}_i} + dh_i.$$

Alors il existe une suite $\eta_0 = \eta, \eta_1, \ldots, \eta_i, \ldots; \eta_i \in \Omega^1_3(\mathrm{U}_i)$ *telle sur*

$$d\eta_{i-1} = \eta_i \wedge df.$$

Preuve. — Sur une intersection non triviale $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j = \mathrm{U}_{ij}$ on obtient par différentiation :

$$d(a_i - a_j)_{\mathrm{U}_{ij}} \wedge df_{\mathrm{U}_{ij}} = 0.$$

Le lemme de division de De Rham-Saïto [S] assure l'existence de $b_{ij} \in \mathcal{O}_3(\mathrm{U}_{ij})$ tels que :

$$d(a_i - a_j)_{\mathrm{U}_{ij}} = b_{ij} \, df_{\mathrm{U}_{ij}}.$$

Par construction les b_{ij} vérifient chaque fois que cela à un sens :

$$b_{ij} + b_{jk} + b_{ki} = 0;$$

Suivant H. Cartan [C] il existe $(b_i)_{i \in \mathrm{I}}$, $b_i \in \mathcal{O}_3(\mathrm{U}_i)$ tels que :

$$b_{ij} = b_i - b_j.$$

On constate alors que les formes $da_i - b_i \, df$ se recollent pour définir un élément $\eta_1^* \in \Omega^1_3(\mathrm{U}^*)$ qui se prolonge par Hartogs en $\eta_1 \in \Omega^1_3(\mathrm{U})$ vérifiant :

$$d\eta_0 = \eta_1 \wedge df.$$

Remarquons que η_1 satisfait les mêmes hypothèses que η_0. On termine la preuve en itérant le processus. ■

Définition. — Soient $f \in \mathcal{O}_n$, $\operatorname{cod}(\mathrm{S}(df)) \geqq 2$ et $\eta \in \Omega^1_n$, $d\eta \wedge df = 0$. Nous dirons que η est localement exacte modulo df en dehors d'un ensemble analytique X s'il existe un polydisque U et des représentants $f \in \mathcal{O}_n(\mathrm{U})$, $\eta \in \Omega^1_n(\mathrm{U})$ de f et η satisfaisant : « il existe un recouvrement $\mathcal{U} = (\mathrm{U}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de $\mathrm{U}^* = \mathrm{U} - \mathrm{U} \cap \mathrm{X}$ par des polydisques U_i et $(a_i)_{i \in \mathrm{I}}$, $(h_i)_{i \in \mathrm{I}}$; $a_i, h_i \in \mathcal{O}_n(\mathrm{U}_i)$ tels que $\eta_{\mathrm{U}_i} = a_i \, df_{\mathrm{U}_i} + dh_i$ ».

COROLLAIRE 1.2.2. — *Soient* $f \in \mathcal{O}_3$, $\operatorname{cod}(S(df)) \geqq 2$ *et* $\eta \in \Omega_3^1$, $d\eta \wedge df = 0$. *Si* η *est localement exacte modulo* df *en dehors de* 0, *alors* η *est exacte modulo* df *i.e.*:

$$\exists\, a,\ h \in \mathcal{O}_3,\ \eta = a\,df + dh.$$

Preuve. — D'après 1.2.1, il existe une suite $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que

(i) $\eta_i \in \Omega_3^1$

(ii) $d\eta_{i-1} = \eta_i \wedge df$.

Suivant [M1] on peut choisir les η_i de sorte que la série

$$\alpha = \sum_{i \geqq 0} \frac{t^i \eta_i}{i!} \text{ soit convergente.}$$

Un calcul simple prouve alors que: $d\alpha \wedge d(f+t) = 0$

et puisque $f+t$ est submersive, il existe a_t, $h_t \in \mathcal{O}_3$ tels que:

$$\alpha = a_t\, d(f+t) + dh_t.$$

Pour $t=0$, on obtient le résultat. ■

COROLLAIRE 1.2.3. — *Soient* $f \in \mathcal{O}_n$, $n \geqq 3$ $\operatorname{cod}(S(df)) \geqq 2$ *et* $\eta \in \Omega_n^1$, $d\eta \wedge df = 0$. *Si* η *est localement exacte modulo* df *en dehors de* X, *ensemble analytique de codimension* 3, *alors* η *est exacte modulo* df.

Preuve. — Il suffit de considérer un plongement transverse et d'appliquer 1.2.2 puis le théorème d'extension I. ■

2. Preuves des théorèmes II et III

On commence par établir les démonstrations des théorèmes II et III en dimension deux. Elles procèdent par récurrence sur le nombre d'éclatements nécessaires à la désingularisation de $\omega \in \Omega_2^1$.

Remarque préliminaire. — Rappelons qu'il y a équivalence via le lemme de De Rham-Saïto [S] entre:

(i) $\exists\, a,\ h \in \mathcal{O}_2,\ \eta = a\omega + dh$

(ii) $\exists\, h \in \mathcal{O}_2,\ \eta \wedge \omega = dh \wedge \omega$

où η, $\omega \in \Omega_2^1$ et $\operatorname{cod}(S(\omega)) \geqq 2$.

2.1. LE CAS DES FORMES RÉDUITES DE Ω_2^1. — Dans la suite les références implicites sont [C; M], [M; M].

Les formes réduites possédant des intégrales premières comme dans les théorèmes II et III sont linéarisables, c'est-à-dire s'écrivent, à changement de coordonnées holomorphe et unité près:

$$\omega = x\,dy + \lambda\, y\,dx;\ \lambda \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{Q}^-.$$

LEMME 2.1.1. — *Soit* $\omega \in \Omega_2^1$, $\omega = pydx + qxdy$ *où* p, $q \in \mathbb{N}$ *et* $(p, q) = 1$. *Alors* $H^1_{\text{top}}(\omega) = 0$.

Preuve. — Soit U un petit polydisque de $\mathbb{C}^2$ centré en 0 et soient $\underline{\omega}$ et $\underline{\eta}$ des éléments de $\Omega_2^1(U)$ représentants les germes de ω et $\eta \in \Omega_2^1$. Nous supposons :

$$\int_\gamma \underline{\eta} = 0 \text{ pour tout cycle } \gamma \text{ de } \mathscr{C}(\underline{\omega};\, U).$$

Considérons alors les cycles γ de $\mathscr{F}(\underline{\omega};\, U \setminus \{0\})$ image de l'application analytique (que nous notons encore γ) :

$$\gamma : [0;\, 1] \to \mathscr{L}_{x_0, y_0}$$

$$t \mapsto (x_0 e^{2 i \pi q t},\, y_0 e^{-2 i \pi p t})$$

où $\mathscr{L}_{x_0, y_0}$ désigne la feuille de $\mathscr{F}(\underline{\omega};\, U \setminus \{0\})$ passant par le point (x_0, y_0). En écrivant : $\underline{\eta} = \sum a_{mn} x^m y^n \, dx + \sum b_{mn} x^m y^n \, dy$ il vient :

$$\gamma^* \underline{\eta}(t) = 2 i \pi \sum x_0^m y_0^n e^{2 i \pi t (qm - pn)} (a_{m-1, n} q - b_{m, n-1} p) \, dt.$$

La condition d'intégrale nulle se traduit alors par : pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $qm - pn = 0$ on a :

$$q a_{m-1, n} - p b_{m, n-1} = 0.$$

Ceci permet de résoudre en $h \in \mathcal{O}_2(U)$ l'équation différentielle :

$$\underline{\eta} \wedge \underline{\omega} = dh \wedge \underline{\omega}.$$

En effet :

$$\underline{\eta} \wedge \underline{\omega} = \sum x^m y^n (q a_{m-1, n} - p b_{m, n-1}) \, dx \wedge dy.$$

Or si $h = \sum h_{ij} x^i y^j$, alors :

$$dh \wedge \underline{\omega} = \sum x^i y^j (iq - jp) h_{ij} \, dx \wedge dy.$$

La série h définie par :

$$h_{ij} = \frac{q a_{i-1, j} - p b_{i, j-1}}{iq - jp} \quad \text{si} \quad iq - jp \neq 0$$

$$h_{ij} = 0 \quad \text{sinon}$$

est clairement convergente et répond à la question. ■

Remarque. — La solution h n'est pas unique, elle n'est définie qu'à intégrale première holomorphe de ω près.

LEMME 2.1.2. — *Soit* $\omega \in \Omega_2^1$, $\omega = y\,dx + \lambda x\,dy$, $\lambda \notin \mathbb{Q}$. *On suppose que si* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *il existe c et* δ, *réels positifs, tels que pour tout couple* $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ *on ait*:

$$|\lambda i - j| > c / |i + j|^{\delta}.$$

Alors: $H^1_{top}(\omega) = 0 = H^1_{rel}(\omega)$.

Preuve. — Soit U un polydisque centré en $0 \in \mathbb{C}^2$ et $\underline{\omega} \in \Omega_2^1(U)$ un représentant de ω. La paramétrisation des feuilles de $\mathcal{F}(\underline{\omega}; U \setminus \{0\})$ montre que ces dernières ne portent aucun cycle susceptible de produire des intégrales non nulles; ainsi:

$$H^1_{top}(\omega) = H^1_{rel}(\omega).$$

Par ailleurs donnons nous $\underline{\eta} \in \Omega_2^1(U)$ représentant d'un germe quelconque $\eta \in \Omega_2^1$; la 2-forme $\underline{\eta} \wedge \underline{\omega}$ s'écrit:

$$\underline{\eta} \wedge \underline{\omega} = g(x, y)\,dx \wedge dy;\; g \in \mathcal{O}_2(U)\, g = \sum g_{ij} x^i y^j.$$

On doit résoudre en $h \in \mathcal{O}_2(U)$, $h = \sum h_{ij} x^i y^j$ l'équation:

$$dh \wedge \underline{\omega} = \left(\lambda x \frac{\partial h}{\partial x} - y \frac{\partial h}{\partial y}\right) dx \wedge dy = g(x, y)\,dx \wedge dy.$$

Ainsi $h = \sum \dfrac{g_{ij}}{\lambda i - j} x^i y^j$ est une solution formelle. La convergence de la série résulte des conditions diophantiennes imposées à λ. ■

2.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II DANS $\mathbb{C}^2$. — Tout d'abord notons qu'il n'est pas restrictif de demander que les entiers n_i soient premiers dans leur ensemble. En effet si tel n'est pas le cas, en considérant une racine de f nous obtenons une intégrale première holomorphe qui n'est pas une puissance.

Introduisons quelques notations nécessaires à la démonstration du théorème.

Notations. — Elles reprennent essentiellement celles utilisées dans [C; M] et [M; M].

Nous désignerons par $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$, 0 l'application d'éclatement de $0 \in \mathbb{C}^2$. Rappelons que puisque ω possède une intégrale première holomorphe, ω n'est pas dicritique. Dans la carte $y = tx$ de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ on note $\tilde{\omega}$ l'éclaté divisé de ω, à savoir:

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi^* \omega}{x^{\nu}} \text{ où } \nu \text{ est l'ordre de } \omega.$$

La forme $\tilde{\omega}$ définit un feuilletage singulier $\mathcal{F}(\tilde{\omega}; \tilde{U} \setminus S(\tilde{\omega}; \tilde{U}))$ sur un voisinage $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ du diviseur exceptionnel, U étant voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$. Le cône tangent est par définition:

$$C_{\omega} = S(\tilde{\omega}; \tilde{U}) \cap \mathbb{C}P_1.$$

On supposera dans la suite $C_\omega=\{t_1, \ldots, t_n\} \subset \{x=0\}$. Les germes de $\tilde{\omega}$ et de $f\circ\pi$ au point t_j seront désignés par $\tilde{\omega}_{t_j}$ et $(f\circ\pi)_{t_j}$. Il se peut qu'en t_j $(f\circ\pi)_{t_j}$ soit une puissance, on note alors $\tilde{f}_{t_j}$ une racine de $(f\circ\pi)_{t_j}$ de sorte que $\tilde{f}_{t_j}$ ne soit pas une puissance.

Preuve du théorème. — L'étape initiale de la récurrence découle du lemme 2.1.1 (c'est le cas où ω est réduite). Nous supposons le théorème vrai pour les éléments de Ω_2^1 possédant une intégrale première holomorphe et se désingularisant en moins de m éclatements strictement. Considérons alors $\omega\in\Omega_2^1$ possédant une intégrale première holomorphe f et se désingularisant en m éclatements.

Après un éclatement les germes $\tilde{\omega}_{t_j}$ se réduisent en moins de m éclatements strictement et possèdent des intégrales premières $\tilde{f}_{t_j}$ qui ne sont pas des puissances. Tous les cycles de $\mathscr{F}(\underline{\omega}; U\setminus\{0\})$ ($\underline{\omega}\in\Omega_2^1(U)$ désigne un représentant de ω) se retrouvent sur les feuilles de $\mathscr{F}(\underline{\tilde{\omega}}; \tilde{U}\setminus S(\underline{\tilde{\omega}}; \tilde{U}))$; ceux tracés sur le diviseur $\pi^{-1}(0)$ ne produisent que des intégrales nulles.

Nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence:

$$H^1_{\text{top}}(\tilde{\omega}_{t_j})=0 \qquad \forall j=1,2,\ldots,n.$$

Soit $\underline{\eta}\in\Omega_2^1(U)$ un représentant de $\eta\in\Omega_2^1$ vérifiant la condition d'intégrale nulle:

$$\int_\gamma \underline{\eta}=0 \qquad \forall\gamma\in\mathscr{C}(\underline{\omega}; U).$$

Il existe alors pour chaque point t_j du cône tangent un voisinage W_j de t_j et $h_j\in\mathcal{O}_2(W_j)$ tels que:

$$(\pi^*\eta)_{W_j}\wedge\tilde{\omega}_{W_j}=dh_j\wedge\tilde{\omega}_{W_j}.$$

Dans la suite nous allons prouver qu'il est possible de modifier les h_j par des intégrales premières pour qu'ils se recollent.

Tout d'abord, puisqu'en dehors des singularités de $\tilde{\omega}$, le feuilletage $\mathscr{F}(\tilde{\omega}; \tilde{U}\setminus S(\tilde{\omega}; \tilde{U}))$ est donné par les lignes de niveaux d'une submersion, il est possible d'étendre les voisinages W_j de sorte que:

(i) $\bigcap_{j=1}^{n} W_j\neq\varnothing$

(ii) $\bigcup_{j=1}^{n} W_j$ est un voisinage du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$.

Une manipulation classique (voir par exemple [M; M]) permet également d'étendre les intégrales premières $\tilde{f}_{t_j}$ pour qu'elles soient définies sur W_j. Soit $t_0\in\bigcap_{j=1}^{n} W_j\cap\{x=0\}$. Désignons par $\mathbb{C}_{t_0}$ une transversale à $\{x=0\}$ au point t_0. Le groupe d'invariance de $f\circ\pi/\mathbb{C}_{t_0}$ noté $H(f; t_0)$ est alors:

$$H(f; t_0)=\{h\in\operatorname{Diff}(\mathbb{C}_{t_0}; 0), f\circ\pi_{/\mathbb{C}_{t_0}}\circ h=f\circ\pi_{/\mathbb{C}_{t_0}}\}.$$

On définit de façon analogue les groupes d'invariances $H(\tilde{f}_{t_j}; t_0)$ des intégrales premières locales $\tilde{f}_{t_j}$. On trouve dans [M; M] outre les justifications de telles définitions le fait que $H(f; t_0)$ est linéarisable. Plus précisément $H(f; t_0)$ est analytiquement conjugué au groupe engendré par la rotation $z \mapsto e^{2i\pi/\mu} z$ où μ est l'ordre de $f \circ \pi/\mathbb{C}_{t_0}$ (z est appelé «coordonnée linéarisante»). Par suite, dans la coordonnée linéarisante z les groupes $H(\tilde{f}_{t_j}; t_0)$ sont engendrés par les rotations $z \mapsto e^{2i\pi/\mu_j} z$ où μ_j est l'ordre de $\tilde{f}_{t_j}/\mathbb{C}_{t_0}$.

On pose $\alpha_j = 2i\pi/\mu_j$, $\alpha = 2i\pi/\mu$.

LEMME 2.2.1. — *Soit* $z \in \mathbb{C}_{t_0}$, *il existe un chemin* $\delta : [0; 1] \to \mathscr{L}_z$ *vérifiant*:

(i) $\delta([0; 1]) \subset W_i$

(ii) $\delta(0) = z$, $\delta(1) = e^{\alpha_i} z$.

Preuve. — Au voisinage du point t_i les feuilles $\mathscr{F}(\tilde{\omega}; \tilde{U} \setminus S(\tilde{\omega}; \tilde{U}))$ sont données par les composantes connexes des lignes de niveaux $\tilde{f}_{t_i}$. La preuve du lemme repose alors sur un résultat de [M; M] (V, lemme 1, p. 500) montrant qu'il existe un voisinage de t_i tel que les niveaux de $\tilde{f}_{t_i}$ soient connexes en restriction à ce voisinage. ■

Nous sommes en mesure de recoller h_1 et h_2. Pour ce faire nous allons utiliser l'abélianité de $H(f; t_0)$ pour créer des cycles liant les deux résolutions locales. Grâce au lemme précédent, nous pouvons trouver des chemins δ_1, δ'_1, δ_2, δ'_2 vérifiant :

(i) $\delta_1, \delta'_1 \subset W_1$

(ii) $\delta_2, \delta'_2 \subset W_2$

(iii) $\delta_1(0) = z$; $\delta_1(1) = e^{\alpha_1} z$; $\delta_2(0) = \delta_1(1)$, $\delta_2(1) = e^{\alpha_2} \delta_2(0)$

(iv) $\delta'_1(0) = \delta_2(1)$; $\delta'_1(1) = e^{-\alpha_1} \delta'_1(0)$; $\delta'_2(0) = \delta'_1(1)$; $\delta'_2(1) = e^{-\alpha_2} \delta'_2(0) = z$

(v) les δ et δ' sont tracés dans les feuilles de $\mathscr{F}(\tilde{\omega}; \tilde{U} \setminus S(\tilde{\omega}; \tilde{U}))$.

Ainsi $\delta_1 \delta'_1 \delta_2 \delta'_2$ est un cycle γ de $\mathscr{F}(\tilde{\omega}; \tilde{U} \setminus S(\tilde{\omega}; \tilde{U}))$. Par hypothèse on doit avoir :

$$\int_\gamma \pi^* \eta = \int_z^{e^{\alpha_1} z} dh_1 + \int_{e^{\alpha_1} z}^{e^{\alpha_1+\alpha_2} z} dh_2 + \int_{e^{\alpha_1+\alpha_2} z}^{e^{\alpha_2} z} dh_1 + \int_{e^{\alpha_2} z}^{z} dh_2 = 0.$$

Notons : $h^0_{1,2} = (h_1 - h_2)/\mathbb{C}_{t_0}$.

Alors : $h^0_{1,2}(z) + h^0_{1,2}(e^{\alpha_1+\alpha_2} z) - h^0_{1,2}(e^{\alpha_1} z) - h^0_{1,2}(e^{\alpha_2} z) = 0$.

Posant $h^0_{1,2}(z) = \sum_{k \geqq 0} c_k z^k$; il vient :

$$c_k (1 - e^{k\alpha_1})(1 - e^{k\alpha_2}) = 0 \qquad \forall k \geqq 0.$$

Remarque. — On peut modifier h_1 en $h_1 - c_0$ de sorte que $h^0_{1,2}(0) = 0$, cette modification étant justifiée par $d(h_1 - c_0) = dh_1$.

Par suite on obtient une décomposition de $h^0_{1,2}$ en une somme $h^0_{1,2} = \sigma_1 - \sigma_2$ où $\sigma_1 \in \mathcal{O}_1$ est invariant par $H(\tilde{f}_{t_1}; t_0)$ et où $\sigma_2 \in \mathcal{O}_1$ est invariant par $H(\tilde{f}_{t_2}; t_0)$.

LEMME 2.2.2. — *Pour* $i = 1, 2$, σ_i *se prolonge en une intégrale première holomorphe* $\bar{\sigma}_i$ *sur* W_i.

Preuve. — Elle se trouve dans [M; M], nous ne donnons ici que les grandes lignes. Soit z une coordonnée linéarisante de $\mathrm{H}(f, t_0)$; il existe un germe de difféomorphisme φ à l'origine $\mathbb{C}_{t_0}$ tel que:

$$\tilde{f}_{t_1}/\mathbb{C}_{t_0}=\varphi(z^{\mu_i}).$$

Par ailleurs puisque σ_i est invariant par $\mathrm{H}(\tilde{f}_{t_i}; t_0)$, il existe $l\in\mathcal{O}_1$ vérifiant:

$$\sigma_i=l(z^{\mu_i}).$$

Les deux égalités permettent d'écrire:

$$\sigma_i=l\circ(\varphi^{-1}\circ\tilde{f}_{t_1}/\mathbb{C}_{t_0}).$$

Il est alors facile de prouver que σ_i se prolonge par la formule précédente en une intégrale première holomorphe $\bar{\sigma}_i$ au voisinage de t_i. ■

Modifions h_1 en $\mathrm{H}_1=h_1-\bar{\sigma}_1$; évidemment $d\mathrm{H}_1 \wedge \tilde{\omega}_{\mathrm{W}_1}=(\pi^*\eta)\wedge\tilde{\omega}_{\mathrm{W}_1}$ et H_1 est encore une résolution locale. Il en est de même pour $\mathrm{H}_2=h_2-\bar{\sigma}_2$. Enfin H_1 et H_2 se recollent en une fonction $\mathrm{H}_{1,2}$ holomorphe sur $\mathrm{W}_{1,2}=\mathrm{W}_1\cup\mathrm{W}_2$ vérifiant:

$$d\mathrm{H}_{1,2}\wedge\tilde{\omega}_{\mathrm{W}_{1,2}}=(\pi^*\eta)_{\mathrm{W}_{1,2}}\wedge\tilde{\omega}_{\mathrm{W}_{1,2}}.$$

Par itération de ce procédé il est possible de recoller tous les h_j. Considérons à titre d'exemple $h_3\in\mathcal{O}(\mathrm{W}_3)$ vérifiant:

$$dh_3\wedge\tilde{\omega}_{\mathrm{W}_3}=(\pi^*\eta)_{\mathrm{W}_3}\wedge\tilde{\omega}_{\mathrm{W}_3}.$$

Notons β_1 et β_2 les deux entiers relatifs tels que $\beta_1/\mu_1+\beta_2/\mu_2=1/\mu_{1,2}$ où $\mu_{1,2}=\mathrm{ppcm}(\mu_1,\mu_2)$ et posons $\alpha'_1=2i\pi\beta_1/\mu_1$, $\alpha'_2=2i\pi\beta_2/\mu_2$. Il est possible grâce au lemme 2.2.1 de trouver 6 chemins δ_1, δ'_1, δ_2, δ'_2, δ_3, δ'_3 dont la composée est un cycle γ de $\mathscr{F}(\tilde{\omega}; \tilde{\mathrm{U}}\setminus\mathrm{S}(\tilde{\omega}; \tilde{\mathrm{U}}))$ et tels que la nullité de l'intégrale $\int_\gamma \pi^*\eta$ se traduise par:

$$(h_3-\mathrm{H}_{1,2})/\mathbb{C}_{t_0}=\sigma_3-\sigma_{1,2}$$

où σ_3 est invariant par $\mathrm{H}(\tilde{f}_{t_3}; t_0)$ et $\sigma_{1,2}$ est invariant par $\mathrm{H}(\tilde{f}_{t_1}; t_0)$ et $\mathrm{H}(\tilde{f}_{t_2}; t_0)$. Le lemme 2.2.2 permet alors de modifier les résolutions locales pour qu'elles se recollent.

En fin d'opération on obtient donc $\mathrm{H}_{1,2,\ldots,n}$ holomorphe sur $\bigcup_{j=1}^{n}\mathrm{W}_j$ satisfaisant

$$d\mathrm{H}_{1,2,\ldots,n}\wedge\tilde{\omega}=\pi^*\eta\wedge\tilde{\omega}.$$

Le blowing-down fournit h holomorphe sur un voisinage de $0\in\mathbb{C}^2$ privé de 0 tel que:

$$h\circ\pi=\mathrm{H}_{1,2,\ldots,n} \qquad \text{et} \qquad dh\wedge\omega=\eta\wedge\omega.$$

Le théorème d'Hartogs permet d'étendre h holomorphiquement en 0 et de conclure. ■

2.3 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III DANS $\mathbb{C}^2$. — Nous commençons par quelques rappels (on pourra consulter [C; M]). Soit $\omega \in \Omega_2^1$ possédant l'intégrale première multiforme $f=f_1^{\lambda_1}\ldots f_p^{\lambda_p}$. On suppose que $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ ne sont pas des entiers positifs et que $\lambda_{q+1}, \ldots \lambda_p$ le sont. Quitte à élever f à une puissance complexe convenable on supposera que $p>q$.

Notons $X_j=\{f_j=0\}$ et $X=X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_q$. La fonction f est multiforme sur $U \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_q)$ où U désigne un voisinage ouvert de 0 assez petit. Pour définir le groupe d'invariance de f en a_0 on procède comme suit. Considérons $a_0 \neq 0$ un point de la partie lisse de X_{j_0}, $j_0>q$ et donnons nous un plongement transverse à X_{j_0} au point a_0:

$$i: \mathbb{C}, 0 \to U \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_q), a_0 \qquad i(0)=a_0.$$

Nous désignons par $D(f)_{a_0}$ l'ensemble des déterminations de f en a_0. Soit $D^0(f)_{a_0}$ l'ensemble de $\mathcal{O}_1$ constitué des restrictions par i des éléments de $D(f)_{a_0}$; on définit alors:

$$H(f; a_0)=\{h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0), \forall g \in D^0(f)_{a_0}, g \circ h \in D^0(f)_{a_0}\}.$$

On peut donner une interprétation du groupe d'invariance de f en considérant la primitive multiforme:

$$F=\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \operatorname{Log} f_i$$

de la forme logarithmique:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}.$$

Le feuilletage étudié coïncide alors en dehors des séparatrices avec les composantes connexes des « lignes de niveaux » de $F: U \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_q) \to \mathbb{C}/H$ où H est le groupe des périodes de $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ (voir [P]). En notant F^0 la restriction de F par i, on obtient:

$$H(f; a_0)=\{h \in \mathrm{diff}(\mathbb{C}, 0), F^0 \circ h=F^0\}.$$

Rappelons un résultat de Cerveau-Mattei:

PROPOSITION 2.3.1. — [C; M]: *Si $\lambda_{j_0}=1$, tout élément $z \in D^0(f)_{a_0}$ est une coordonnée linéarisante de $(\mathbb{C}, 0)$ qui linéarise $H(f; a_0)$. Plus précisément $H(f; a_0)$ est engendré par les difféomorphismes*

$$z \mapsto e^{2i\pi\lambda_j} z \qquad j=1, 2 \ldots q.$$

De plus $H(f; a_0)$ est fini si et seulement si f est une puissance de fonction méromorphe (peut être holomorphe).

Notations. — De même que précédemment $\tilde{\omega}$ désigne l'éclaté divisé de ω, $\tilde{\omega}_{t_j}$ et $(f \circ \pi)_{t_j}$ les germes de $\tilde{\omega}$ et $f \circ \pi$ au point t_j pour $j=1, 2, \ldots n$; $\{t_j\}_j=C_\omega$; $\tilde{f}_{t_j}$ dénotera une racine de $(f \circ \pi)_{t_j}$ de sorte que $\tilde{f}_{t_j}$ ne soit pas une puissance entière d'une fonction holomorphe.

Quitte à élever $\tilde{f}_{t_j}$ a une certaine puissance complexe convenable nous pouvons toujours supposer $\tilde{f}_{t_j}$ uniforme et régulière sur $L_\omega = \mathbb{C}P_1 \setminus C_\omega$.

Preuve du théorème. — L'étape initiale de la récurrence découle du lemme 2.1.2. Supposons donc le théorème vrai pour les éléments de Ω_2^1 satisfaisant les hypothèses et se désingularisant en moins de m éclatements strictement. Soit $\omega \in \Omega_2^1$ vérifiant les hypothèses et se désingularisant en m éclatements. Après 1 éclatement nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence:

$$H^1_{\mathrm{top}}(\tilde{\omega}_{t_j}) = 0.$$

Soit $\underline{\eta} \in \Omega_2^1(U)$ un représentant de $\eta \in \Omega_2^1$ vérifiant la condition d'intégrale nulle:

$$\int_\gamma \underline{\eta} = 0 \qquad \forall \gamma \in \mathscr{C}(\underline{\omega}; U)$$

où U est un petit voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ et $\underline{\omega}$ un représentant de ω sur U. Il existe alors pour chaque point t_j de C_ω un voisinage W_j de t_j et $h_j \in \mathscr{O}(W_j)$ tels que:

(i) $\bigcup_j W_j$ est un voisinage de $\pi^{-1}(0)$; $\bigcap_j W_j \neq \varnothing$

(ii) $dh_j \wedge \tilde{\omega}_{W_j} = (\pi^* \underline{\eta})_{W_j} \wedge \tilde{\omega}_{W_j}$.

Nous allons prouver que l'on peut modifier (si nécessaire) les h_j pour qu'ils se recollent. Soit $t_0 \in \bigcap_j W_j \cap \{x=0\}$; compte tenu de la remarque concernant les $\tilde{f}_{t_j}$ il est autorisé de considérer $H(\tilde{f}_{t_j}; t_0)$. Invoquant la proposition 2.3.1, on constate que l'un des groupes $H(\tilde{f}_{t_j}; t_0)$ est nécessairement de cardinalité non finie. Nous choisissons alors t_j comme «point de base d'une résolution en étoile». Quitte à réindicer nous supposons $t_j = t_1$. Comme précédemment nous notons $\alpha_j = 2i\pi\lambda_j$.

LEMME 2.3.2. — *Soit $z \in \mathbb{C}_{t_0}$ il existe un chemin $\delta : [0; 1] \to \mathscr{L}_z$ vérifiant*:

(i) $\delta([0; 1]) \subset W_i$

(ii) $\delta(0) = z$, $\delta(1) = e^{\alpha_i} z$.

Preuve. — Elle résulte du fait déjà mentionné que les feuilles de $\mathscr{F}(\tilde{\omega}; \tilde{U} \setminus S(\tilde{\omega}; \tilde{U}))$ sont données par les composantes connexes des lignes de niveaux de $F : U \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_q) \to \mathbb{C}/H$. On trouve dans [P] (proposition 2.2.10, p. 414) la justification de l'existence d'un système fondamental de voisinages de t_i tels que ces hypersurfaces de niveaux soient connexes. ∎

Nous allons prouver que h_1 et tout autre h_j peuvent se recoller. Du lemme 2.3.2 on déduit l'existence de chemins δ_1, δ'_1, δ_j, δ'_j vérifiant:

(i) $\delta_1, \delta'_1 \in W_1$; $\delta_j, \delta'_j \in W_j$

(ii) $\delta_1(0) = z$; $\delta_1(1) = e^{\alpha_1} z$; $\delta_j(0) = \delta_1(1)$; $\delta_j(1) = e^{\alpha_j} \delta_j(0)$

(iii) $\delta'_1(0) = \delta_j(1)$; $\delta'_1(1) = e^{-\alpha_1} \delta'_1(0)$; $\delta'_j(0) = \delta'_1(1)$; $\delta'_1(1) = e^{-\alpha_j} \delta'_1(0) = z$.

De même que dans 2.2, $\delta_1 \delta_j \delta'_1 \delta'_j$ est un lacet γ et $\int_\gamma \pi^* \eta = 0$. En écrivant :

$$(h_1 - h_j)/\mathbb{C}_{t_0} = \sum_{k \geqq 0} C_k z^k$$

on obtient : $C_k (1 - e^{k\alpha_1})(1 - e^{k\alpha_j}) = 0 \qquad \forall k \geqq 0$

et l'on peut toujours se limiter à $k > 0$. Deux cas sont alors à distinguer :

1. Si $\lambda_j \notin \mathbb{Q}$, $(1 - e^{k\alpha_1})(1 - e^{k\alpha_j}) \neq 0$ pour tout $k > 0$. La fonction $(h_1 - h_j)/\mathbb{C}_{t_0}$ est alors identiquement nulle et par suite $h_1 = h_j$ sur $W_1 \cap W_j$.

2. Si $\lambda_j \in \mathbb{Q}$ alors $(h_1 - h_j)/\mathbb{C}_{t_0} = \sigma_j$ où σ_j est invariant par $H(\tilde{\mathcal{F}}_{t_j}; t_0)$. Le lemme 2.2.2 permet de prolonger σ_j en une intégrale première holomorphe $\bar{\sigma}_j$ sur W_j. Nous modifions alors h_j en $H_j = h_j + \bar{\sigma}_j$ pour obtenir $H_{1,j}$ solution du problème sur $W_1 \cup W_j$.

On construit ainsi $H_{1,2,\ldots,n}$ holomorphe sur $\bigcup_{j=1}^{n} W_j$ vérifiant

$$dH_{1,2,\ldots,n} \wedge \tilde{\omega} = \pi^* \eta \wedge \tilde{\omega}$$

et on conclut de la même façon que dans 2.2. ■

2.4. Démonstration des théorèmes II et III dans $\mathbb{C}^n$ $n \geqq 3$. — Les preuves sont des corollaires triviaux du théorème d'extension I et des théorèmes II et III dans $\mathbb{C}^2$. En effet soient ω, $\eta \in \Omega_n^1$, $\omega \wedge d\omega = 0$ et $d\eta \wedge \omega = 0$: si

$$\int_\gamma \underline{\eta} = 0 \qquad \forall \gamma \in \mathscr{C}(\underline{\omega}; U)$$

en désignant par $i : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^n$ un plongement général on a :

$$\int_{\gamma'} i^* \underline{\eta} = 0 \qquad \forall \gamma' \in \mathscr{C}(\underline{\omega}; V)$$

où $\underline{\omega}$, $\underline{\eta}$ désignent des représentants de ω et η sur U voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^n$ et $V = U \cap i(\mathbb{C}^2)$. Il ne reste qu'a appliquer le théorème 2 ou le théorème 3 dans $\mathbb{C}^2$, puis le théorème d'extension. ■

3. Calculs de H^1_{rel} en présence d'intégrales premières holomorphes

3.1. Cas des croisements ordinaires. — Soit $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_p}$$

avec pgcd $(n_1, \ldots, n_p)=1$. Pour plus de commodité on note $\mathrm{H}^1_{\mathrm{rel}}(x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_p})$ l'espace

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{rel}}\left(x_1 \ldots x_p \sum_{i=1}^{n} n_i \frac{dx_i}{x_i}\right).$$

THÉORÈME 3.1.1. — *L'espace* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{rel}}(x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_p})$ *est naturellement muni d'une structure de* $\mathbb{C}\{\mathrm{F}\}$*-module libre de rang* $(p-1)$. *Les* $x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_p} dx_i/x_i$ *pour* $i=1, 2, \ldots p$ *en forment un système de générateurs.*

Preuve. — Comme nous l'a indiqué le referee elle se déduit de [S] proposition 1.13.

3.2. APPLICATION. — Du théorème précédent nous déduisons un corollaire concernant le comportement des intégrales abéliennes.

Soient U un voisinage ouvert de 0 suffisamment petit et F_t la fibre de F dans U *i.e.*:

$$\mathrm{F}_t=\{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{U},\ x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_p}=t\}.$$

Donnons nous une famille (γ_t) de cycles de F_t dépendant continument de t.

COROLLAIRE 3.2.1. — *Soit* $\eta \in \Omega_p^1$, $d\eta \wedge d(x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_p})=0$; *les intégrales*

$$\mathrm{I}(t)=\int_{\gamma_t} \eta$$

sont bien définies et holomorphes en t.

Preuve. — D'après le théorème on a:

$$\mathrm{I}(t)=\int_{\gamma_t} \eta=\sum_j \int_{\gamma_t} \varphi_j(x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_p}) \frac{dx_j}{x_j}$$

où les $\varphi_j \in \mathcal{O}_1(x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_p})(\mathrm{U})$, soit

$$\mathrm{I}(t)=\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_p}) \operatorname{Ind}_{\gamma_t}(x_j=0) \times 2 i \pi$$

où l'on désigne par $\operatorname{Ind}_{\gamma_t}(x_j=0)$ l'indice du cycle γ_t autour de $(x_j=0)$. Puisque la famille de cycles (γ_t) dépend continument de t on a:

$$\mathrm{I}(t)=\sum_{i=1}^{p} \varphi_j(x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_p}) \times c_i=\sum_{i=1}^{p} \varphi_j(t) \times c_i$$

où les c_i sont des entiers relatifs. ■

Conséquence. — On peut calculer explicitement les composantes de la décomposition de η dans la base logarithmique: dx_2/x_2, $dx_3/x_3, \ldots, dx_p/x_p$ en considérant les intégrales

$\int_{\gamma_{j,t}} \eta$ où $(\gamma_{j,t})$ est la famille de cycles dépendant continument de t:

$$\gamma_{j,t}:[0, 2\pi] \to F_t$$
$$\theta \mapsto (x_1 e^{in_j\theta}, x_2, \ldots, x_j e^{-in_1\theta}, x_{j+1}, \ldots x_p)$$

avec $x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_p} = t$.

Les résultats de Malgrange [M2] permettent d'élargir le cadre d'application du théorème 3.1.2.

COROLLAIRE 3.2.2. — *Soit* $f = f_1^{n_1} \ldots f_p^{n_p}$, $f_i \in \mathcal{O}_n$ *irréductibles*, $n_i \in \mathbb{N}$, *pgcd*$(n_1, \ldots, n_p) = 1$. *On suppose* $\operatorname{cod} S(df_1 \wedge \ldots \wedge df_p) \geqq 3$, *alors* $H^1_{\text{rel}}\left(f_1 \ldots f_p \sum_{i=1}^{p} n_i \frac{df_i}{f_i}\right)$ *est un* $\mathbb{C}\{f\}$*-module de rang* $(p-1)$. *Les* $f_1^{n_1} \ldots f_p^{n_p} df_i/f_i$ *en forment un système de générateurs.*

Preuve. — Soit $\eta \in \Omega_n^1$ satisfaisant $d\eta \wedge d(f_1^{n_1} \ldots f_p^{n_p}) = 0$ alors $d\eta \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_p = 0$. D'après Malgrange: $\eta = \sum_{i=1}^{p} a_i n_i \frac{df_i}{f_i} + dh$ où $a_i \in \mathcal{O}_n$ est divisible par f_i et $h \in \mathcal{O}_n$. On peut toujours supposer sans perdre de généralité que $dh = 0$. Par ailleurs puisque η est relativement fermée on a:

$$d(a_i - a_j) \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_p = 0$$

et par Malgrange $a_i - a_j = h_{ij}(f_1, \ldots, f_p)$, $h_{ij} \in \mathcal{O}_p$.

LEMME 3.2.3. — *Sous les hypothèses précédentes*:

$$\eta = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(f_1, \ldots, f_p) n_i \frac{df_i}{f_i} + af_1 \ldots f_p \sum_{i=1}^{p} n_i \frac{df_i}{f_i}$$

les $\alpha_i \in \mathcal{O}_p$ *étant divisibles par* x_i *et* $a \in \mathcal{O}_n$.

Preuve. — Puisque chaque a_i est divisible par f_i on a: $h_{ij}(x_1, \ldots, x_p) \in (x_i, x_j)$, idéal engendré par x_i et x_j. Il suffit de montrer que l'on peut trouver h_i, $h_j \in \mathcal{O}_p$ vérifiant: $h_{ij} = x_i h_i - x_j h_j$.

Nous aurons alors:

$$a_i - f_i h_i(f_1, \ldots, f_p) = a_j - f_j h_j(f_1, \ldots, f_p) = A.$$

De plus, puisque chaque a_i est divisible par f_i, alors:

$$A = af_1 \ldots f_p \qquad a \in \mathcal{O}_n.$$

Nous raisonnons par récurrence sur p. Pour $p = 2$ le résultat est trivialement vrai. Admettons le au rang $(p-1)$.

Puisque $H^1(\mathbb{C}^p, \mathcal{O}) = 0$ on a: $h_{ij} = H_i - H_j \qquad \forall i \leqq p, \qquad j \leqq p$

où les H_i sont des éléments de $\mathcal{O}_p$.

Nous pouvons écrire

$$h_{ij}=\sum_{K} H_{i,K}\, x_p^K-\sum_{K} H_{j,K}\, x_p^K;\ H_{i,K},\qquad H_{j,K}\in\mathcal{O}_{p-1}.$$

Comme $h_{ij}\in(x_i, x_j)$, $H_{i,K}-H_{j,K}\in(x_i, x_j)$. Nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$H_{i,K}-H_{j,K}=x_i L_{i,K}-x_j L_{j,K}.$$

Par suite : $h_{ij}=x_i\sum_{K} L_{i,K}\, x_p^K-x_j\sum_{K} L_{j,K}\, x_p^K=x_i L_i-x_j L_j$

ceci pour $i\leqq p-1$, $j\leqq p-1$.

Notons que d'après le théorème d'approximation d'Artin [A], nous pouvons toujours supposer cette décomposition convergente.

Nous en déduisons : $H_i-x_i L_i=H_j-x_j L_j=(x_1\ldots x_{p-1})\,B$, $\quad B\in\mathcal{O}_p$.

Considérons maintenant : $h_{pi}=H_p-H_i\in(x_p, x_i)$, $\quad i\leqq p=1$.

On a : $H_p-(x_1\ldots x_{p-1})\,B-x_i L_i\in(x_p, x_i)\quad \forall\, i\leqq p-1$.

Soit : $H_p\in(x_p, x_i)\quad \forall\, i\leqq p-1$.

Donc $H_p=x_p h_p+(x_1\ldots x_{p-1})\,C$; h_p, $C\in\mathcal{O}_p$.

et par suite : $H_p-x_p h_p=(x_1\ldots x_{p-1})\,B+(x_1\ldots x_{p-1})\,C'$.

Posons alors : $h_i=L_i-(x_1\ldots\hat{x}_i\ldots x_{p-1})\,C'\quad i\leqq p-1$

il vient $H_j-x_j h_j=H_i-x_i h_i\quad i\leqq p,\quad j\leqq p.$ ■

Nous supposons désormais (nous négligeons un cobord relatif) :

$$\eta=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(f_1,\ldots,f_p)\,n_i\frac{df_i}{f_i}.$$

Considérons l'application F définie par :

$$F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^p$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\mapsto(f_1,\ldots,f_p).$$

On a : $f_1\ldots f_p\sum_{i=1}^{p} n_i\frac{df_i}{f_i}=F^*\left(x_1\ldots x_p\sum_{i=1}^{p} n_i\frac{dx_i}{x_i}\right)$

$$\eta=F^*\left(\sum_{i=1}^{p}\underline{\alpha}_i(x_1,\ldots,x_p)\,n_i\frac{dx_i}{x_i}\right)=F^*(\underline{\eta}).$$

Comme $\operatorname{cod} S(df_1 \wedge \ldots \wedge df_p) \geqq 3$, l'application F est génériquement ouverte; par suite on a l'implication:

$$d\eta \wedge \sum_{i=1}^{p} n_i \frac{df_i}{f_i} = 0 \Rightarrow d\eta \wedge \sum_{i=1}^{p} n_i \frac{dx_i}{x_i} = 0$$

En appliquant le théorème 3.1.1, il vient:

$$\eta = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_p}) \frac{dx_i}{x_i} + \alpha x_1 \ldots x_p \sum_{i=1}^{p} n_i \frac{dx_i}{x_i} + dh$$

on conclut aisément. ■

Nous nous proposons pour terminer ce paragraphe de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 3.2.3. — *Soit $f = f_1 \ldots f_p \in \mathcal{O}_n$, $f_i \in \mathcal{O}_n$ irréductibles. On suppose que les singularités de f sont du type croisements ordinaires en dehors d'un ensemble analytique X de codimension supérieure ou égale à 3. Alors $H^1_{rel}(df)$ est un $\mathbb{C}\{t\}$-module de rang $(p-1)$; un système de générateurs est donné par les $f_1 \ldots f_p\, df_i/f_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$.*

Preuve. — Il suffit, grâce au théorème d'extension I de l'établir lorsque $n = 3$ et $X = \{0\}$.

Donnons nous un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^3$ où nous supposons les germes f et $\eta \in \Omega^1_3$ tels que $d\eta \wedge df = 0$ réalisés par $\underline{f}$ et η.

Soient $(m_j)_{j=2,\ldots,p}$, $m_j \in (f_j = 0) \cap (\underline{f}_1 = 0) \cap U$, $m_j \neq 0$.

Par hypothèse, il existe un voisinage U_j de m_j et des coordonnées x_j, y_j, $z_j \in \mathcal{O}_3(U_j)$ tels que:

$$\underline{f} = x_j\, y_j \text{ en restriction à } U_j.$$

Introduisons alors les cycles $\gamma_{j,t}$ paramétrés de la façon suivante:

$$[0, 2\pi] \to F_t$$
$$\theta \mapsto (x_j e^{i\theta}, y_j e^{-i\theta}, z_j)$$

avec $x_j\, y_j = t$.

En vertu du corollaire 3.2.1 les intégrales:

$$I_j(t) = \int_{\gamma_{j,t}} \eta$$

sont bien définies et holomorphes en t.

Considérons maintenant la forme holomorphe:

$$\eta_0 = \eta - \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=2}^{p} I_i(f) \frac{df_i}{f_i}.$$

On a: $d\eta_0 \wedge f_1 \ldots f_p \sum_{i=1}^{p} \frac{df_i}{f_i} = 0$ et $\int_{\gamma_{j,t}} \eta_0 = 0 \qquad \forall j = 2, \ldots, p.$

D'après Lê-Saïto ([L, S]), l'homologie de la fibre $f^{-1}(t)$ est engendrée par les cycles $\gamma_{j,t}$. Ainsi

$$\eta_0 \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{top}}\left(f_1 \ldots f_p \sum_{i=1}^{p} \frac{df_i}{f_i}\right)$$

qui est trivial d'après le théorème 2. On en déduit :

$$\eta = \frac{1}{2 i \pi} \sum_{j=2}^{p} \mathrm{I}_j(f) \frac{df_j}{f_j} + a f_1 \ldots f_p \sum_{i=1}^{p} \frac{df_i}{f_i} + dh. \quad \blacksquare$$

4. Calculs de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{rel}}$ en présence d'intégrales premières multiformes

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 4.1.1. — *Soit* $\omega \in \Omega^1_n$, $n \geqq 3$, $\omega = \mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_p \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{d\mathrm{P}_i}{\mathrm{P}_i}$ *où les* P_i *sont des polynômes homogènes et* $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$. *On suppose en outre* :

– *les hypothèses du théorème* 2 *satisfaites i.e.* :

  – ω *est non dicritique*

  – *les* λ_i *satisfont une condition diophantienne*

– *les* P_i *sont à singularités dans un ensemble de codimension* $\geqq 3$

– *les* P_i *sont à croisements ordinaires en dehors d'un ensemble analytique de codimension* $\geqq 3$.

Alors si $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p, 1)$ *sont* $\mathbb{Z}$ *linéairement indépendants* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{rel}}(\omega) = 0$.

Preuve. — On l'établit pour $n=3$. Puisque $\mathrm{H}^1_{\mathrm{top}}(\omega)=0$, il suffit de prouver que les feuilles de

$$\mathscr{F}(\underline{\omega}; \mathrm{U} \setminus \mathrm{S}(\underline{\omega}; \mathrm{U}))$$

sont simplement connexes dans U voisinage de 0 suffisamment petit et $\underline{\omega}$ représentant sur U de ω).

Pour cela nous aurons besoin du théorème suivant ([D]) :

THÉORÈME 4.1.2. — *Soit* $\mathscr{C} \in \mathbb{C}\mathrm{P}_2$ *une courbe plane dont les seules singularités sont des points doubles à tangentes distinctes. Alors le groupe fondamental* $\pi_1(\mathbb{C}\mathrm{P}_2 \setminus \mathscr{C})$ *est abélien.*

Considérons l'application $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^3 \to \mathbb{C}^3$ d'éclatement de l'origine de $\mathbb{C}^3$; $\pi^{-1}(0) \cong \mathbb{C}\mathrm{P}_2$. Soient (x, y, z) des coordonnées de $\mathbb{C}^3$ et (x, t_1, t_2) la carte de $\tilde{\mathbb{C}}^3$ telle que $\pi(x, t_1, t_2) = (x, t_1 x, t_2 x)$.

On a :

$$\mathrm{P}_i \circ \pi = x^{\nu_i} \tilde{\mathrm{P}}_i(x, t_1, t_2) = x^{\nu_i} \mathrm{P}_i(1, t_1, t_2)$$

où ν_i est le degré de P_i.
Par ailleurs:

$$\pi^* \underline{\omega} = P_1 \circ \pi \ldots P_p \circ \pi \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{dP_i \circ \pi}{P_i \circ \pi} = x^\nu \tilde{P}_1 \ldots \tilde{P}_p \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{d\tilde{P}_i}{\tilde{P}_i} + \Lambda \frac{dx}{x} \right)$$

où l'on note $\nu = \sum_{i=1}^{p} \nu_i$, $\Lambda = \sum_{i=1}^{p} \nu_i \lambda_i$.

On pose alors: $\tilde{\omega} = \dfrac{\pi^* \underline{\omega}}{x^\nu}$.

Le feuilletage $\mathscr{F}(\tilde{\omega}; \pi^{-1}(U) \setminus S(\tilde{\omega}; \pi^{-1}(U))) = \mathscr{F}\tilde{\omega}$ est parfaitement caractérisé dans le cas présent par l'holonomie projective $H(\tilde{\omega}; t_0)$ (voir [C; M], $t_0 \in L_\omega = \mathbb{C}P_2 \setminus (\tilde{P}_1 \ldots \tilde{P}_p = 0)$.

Notamment, puisqu'ils se projettent sur L_ω, il est possible de construire tous les cycles contenus dans les feuilles $\mathscr{F}\tilde{\omega}$ à partir des cycles de L_ω, ceci grâce à $H(\tilde{\omega}; t_0)$.

Pour obtenir une base de lacets γ_j engendrant le groupe fondamental de L_ω, on procède comme suit.

Soit $\bar{D}_j$ un petit disque fermé transverse à $\tilde{P}_j = 0$ en un point $a_j \in \tilde{P}_j = 0$. On note

$$\begin{aligned} \alpha_j : [0; 1] &\to L_\omega \text{ une paramétrisation de } C_j = \partial \bar{D}_j. \\ t &\mapsto \alpha_j(t) \end{aligned}$$

Soit δ_j un chemin liant t_0 à $\alpha_j(0)$, γ_j est alors la composée $\delta_j C_j \delta_j^{-1}$.

Un énoncé célèbre de Lefschetz nous dit que les γ_j engendrent $\pi_1(L_\omega)$; comme ce dernier est abélien les seuls cycles à prendre en considération sont ceux du type:

$$\gamma = [\gamma_{i_1}]^{n_{i_1}} \ldots [\gamma_{i_k}]^{n_{i_k}} \in \pi_1(L_\omega; \mathbb{Z}).$$

L'évaluation de l'holonomie sur une transversale $\mathbb{C}_{t_0}$ dans une coordonnée linéarisante z montre que le chemin Γ d'origine z relevé de γ dans les feuilles de $\mathscr{F}\tilde{\omega}$ a pour extrémité

$$h_\gamma(z) = z \times e^{2 i \pi (n_{i_1} \lambda_{i_1} + \ldots + n_{i_p} \lambda_{i_p})}.$$

En imposant à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, 1 d'être $\mathbb{Z}$-indépendants, on montre ainsi que les feuilles de $\mathscr{F}\tilde{\omega}$ sont simplement connexes. Celles de $\mathscr{F}(\underline{\omega}; U \setminus S(\underline{\omega}; U))$ le sont aussi. ■

Remarque. — On a un théorème analogue en remplaçant les polynômes homogènes P_i par des $f_i \in \mathcal{O}_n$ satisfaisant: le premier jet non nul de f_i, $j^{\nu_i} f_i$, est P_i.

BIBLIOGRAPHIE

[A] ARTIN, *On the Solutions of Analytic Equations* (*Invent. Math.*, Vol. 5, 1968, pp. 277-291).

[A, I] V. I ARNOLD et YU S. IL'YASHENKO, *Ordinary Differential Equations in Dynamical Systems* I (*Encyclopaedia of Math. Sc.*, Springer-Verlag, Bertin, Heidelberg, New York).

[Be] M. BERTHIER, *Thèse* (en préparation).

[C, C] F. CANO, D. CERVEAU, *Desingularization of Non Dicritical Holomorphic Foliations and Existence of Separatrices*, à paraître dans *Acta. Mathematica.*

[C] H. CARTAN, *Sur le premier problème de Cousin* (*C.R. Acad. Sc.*, Vol. 207, 1938, pp. 558-560).

[Ce] D. CERVEAU, *Cohomologie relative des formes fermées méromorphes* (*C.R.A.S.*, t. 303, série I, 14, 1986, pp. 685-688).

[C, M] D. CERVEAU, J.-F. MATTÉI, *Formes intégrables holomorphes singulières* (*Astérisque n*° 97).

[D] P. DELIGNE, *Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien* (*Séminaire Bourbaki*, Vol. 79/90, novembre 1979).

[L, S] D. T. Lê SK. SAÏTO, *The local* π_1 *of the Complement of an Hypersurface with normal Crossings in Codimension* 1 *is Abelian. Preprint Kyoto.*

[M1] B. MALGRANGE, *Frobenius avec singularités I* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, Vol. 46, 1976, pp. 163-173).

[M2] B. MALGRANGE, *Frobenius singularités II : le cas général* (*Invent. Math.*, Vol. 39, 1, 1977).

[Ma, R] J. MARTINET, J.-P. RAMIS, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre* (*Ann. Soc. Ec. Norm. Sup*,. t. 13, 1983, pp. 571-621).

[M, M] J.-F. MATTÉI, R. MOUSSU, *Holonomie et intégrales premières* (*Ann. Sc. École Norm. Sup.*, Vol. 13, 1980, pp. 469-523).

[P] E. PAUL, *Thèse*, Toulouse, 1987.

[S] K. SAÏTO, *On a Generalization of the Rham Lemma* (*Ann. Inst. Fourier* 2, Vol. 26, 1976, pp. 165-170).

[St] J. STEENBRINK, *Limits of Hodge Structures* (*Invent. Math.*, Vol. 31, 1976, pp. 229-257).

(Manuscrit reçu le 27 janvier 1992
révisé le 23 juillet 1992).

M. BERTHIER
et
D. CERVEAU,
IRMAR,
Université de Rennes-I,
Campus de Beaulieu,
35042 Rennes Cedex
France.