ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

FABIEN MOREL

Quelques remarques sur la cohomologie modulo p continue des pro-p-espaces et les résultats de J. Lannes concernant les espaces fonctionnels $\hom(BV, X)$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 26, nº 3 (1993), p. 309-360

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1993_4_26_3_309_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 26, 1993, p. 309 à 360.

QUELQUES REMARQUES SUR LA COHOMOLOGIE MODULO p CONTINUE DES PRO-p-ESPACES ET LES RÉSULTATS DE J. LANNES CONCERNANT LES ESPACES FONCTIONNELS **hom** (BV, X)

PAR FABIEN MOREL ([1])

ABSTRACT. — In this paper we discuss J. Lannes' results ([La1], [La2]) on function spaces **hom** (BV, X). We show how the point of view of Artin-Mazur [AM] and D. Sullivan [Su1] on profinite p-completion together with Dror-Smith method [DS] leads quite naturally to most of J. Lannes' results ([La1], [La2]). This is based on a geometrical interpretation of Lannes' functor T_V generalizing that of [DS].

0. Introduction

Soit p un nombre premier. L'objectif de ce travail est de montrer comment on peut avantageusement remplacer l'usage de la p-complétion de A. K. Bousfield et D. M. Kan [BK] par celui de la p-complétion de M. Artin et B. Mazur [AM] et de D. Sullivan ([Su1], [Su2]) dans l'étude des espaces fonctionnels **hom** (BV, X), dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire V, réalisée par J. Lannes ([La1], [La2]) (rappelons qu'un p-groupe abélien élémentaire est un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z})^k$ pour un certain entier k).

Le point de départ de notre approche est le travail de E. Dror et J. Smith [DS]. Leur méthode conduit en particulier au calcul de la cohomologie modulo p de l'espace fonctionnel **hom** (BV, X) lorsque X est un espace p-π_*-fini à partir des propriétés du foncteur T_V introduit par J. Lannes ([La1], [La2]) et d'un résultat de W. G. Dwyer sur la convergence de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore [Dw] (rappelons [La1] qu'un espace X est dit p-π_*-fini si l'ensemble $\pi_0(X)$ est fini et si pour toute composante connexe de X, que l'on pointe arbitrairement, les groupes d'homotopie sont des p-groupes finis et sont triviaux sauf pour un nombre fini d'entre eux). Appelons pro-p-espace un système projectif filtrant dans la catégorie homotopique formé d'espaces p-π_*-finis. Le résultat précédemment rappelé de [DS] fournit immédiatement (voire « tautologiquement ») un résultat analogue pour l'espace fonctionnel **hom** (BY, $Y_\bullet$) de but un pro-p-espace $Y_\bullet$

[1] U.R.A. 212 du C.N.R.S.

arbitraire. Nous montrons comment un tel résultat permet de retrouver les principaux résultats de J. Lannes moyennant un travail préparatoire sur la théorie des pro-p-espaces. En particulier, nous obtenons un énoncé de la forme générale de la conjecture de Sullivan utilisant la p-complétion de Sullivan; on réhabilite ainsi le point de vue originel de D. Sullivan ([Su1], [Su2]), *voir* aussi [Mi2] pour une discussion à ce sujet.

La solution de la conjecture de Sullivan par H. R. Miller [Mi1] fut un résultat spectaculaire obtenu à l'aide des techniques cosimpliciales mises au point par A. K. Bousfield et D. Kan [BK], en particulier grâce à l'usage de la suite spectrale d'homotopie qu'ils définissent. Le travail de J. Lannes qui suivit, ([La1], [La2]), achevait de démontrer l'efficacité de cette technique dans l'étude des espaces fonctionnels **hom** (BV, X), établissant en particulier une conjecture de Miller [Mi3] ainsi que la conjecture de Sullivan sous sa forme générale. Cette conjecture fut également démontrée par H. R. Miller (non publié), G. Carlsson [Carl] et W. G. Dwyer, H. R. Miller et J. Neisendorfer [DMN], toujours à l'aide de techniques cosimpliciales.

En revanche, la complétion à la Artin-Mazur n'a plus vraiment été utilisée en théorie de l'homotopie une fois obtenue la conjecture d'Adams «façon» Quillen ([Qu3], [Fr]) ou «façon» Sullivan [Su1].

Essentiellement, la différence d'approche entre [BK] et ([AM], [Su1]) est la suivante:

– dans [BK] on «complète» les espaces par rapport aux «phénomènes p-nilpotents»;

– dans ([AM], [Su1]) on «complète» les espaces par rapport aux «phénomènes p-finis».

Lorsque la cohomologie (ou l'homologie) modulo p des espaces en question est finie en chaque degré, les deux «phénomènes» coïncident (*voir* le paragraphe 3.4.1 et plus précisément le corollaire 3.4.1.3). C'est ce qui explique que sous ces hypothèses de finitude (qui reviennent couramment dans ([La1], [La2]) par exemple) on peut indifféremment utiliser l'une ou l'autre des techniques. En revanche c'est le point de vue «pro-p-fini» qui permet une interprétation «géométrique» du foncteur T_V (*voir* le théorème 0.2 ci-dessous) généralisant ainsi celle donnée dans [DS].

Signalons que les méthodes développées dans ce qui suit ne permettent pas *a priori* de retrouver en toute généralité le résultat de H. R. Miller qui établit la contractibilité faible des espaces fonctionnels $\mathbf{hom}_*$ (BV, X) d'applications pointées de BV vers un espace pointé X de dimension finie [Mi1] (il nous faut supposer que $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ est fini en chaque degré). Pour ce résultat, c'est le point de vue «pro-p-nilpotent» de Bousfield et Kan qui est adéquat.

Donnons maintenant quelques détails.

M. Artin et B. Mazur définissent le p-complété d'un espace X comme étant le système projectif filtrant (dans la catégorie homotopique) d'espaces F indexés par la catégorie dont les objets sont les morphismes (de la catégorie homotopique) $X \to F$ dont le but est un espace p-π_*-fini. Comme le remarque D. Sullivan [Su1], pour chaque espace X, le diagramme d'espaces associé au p-complété de X, que l'on $\hat{X}^p_{\bullet}$, possède une limite (dans la catégorie homotopique) que l'on note $|\hat{X}^p_{\bullet}|$; $|\hat{X}^p_{\bullet}|$ est en quelques sortes l'espace «sous-jacent» au p-complété de X. L'existence de cette limite résulte des phénomènes de compacité mis en évidence dans [Su1] et du théorème de représentabilité de E. H. Brown [Br].

Un pro-p-espace arbitraire $Y_{\bullet}$ possède une cohomologie modulo p continue que l'on note $H_c^* Y_{\bullet}$. Par exemple, pour tout espace X l'homomorphisme naturel $H_c^* \hat{X}_{\bullet}^p \to H^* X$ est un isomorphisme.

Soient A l'algèbre de Steenrod modulo p et $\mathscr{K}$ la catégorie des A-algèbres instables (*voir* par exemple [La1], § 1.7). La cohomologie modulo p d'un espace X, que l'on notera $H^* X$, vit naturellement dans la catégorie $\mathscr{K}$. Comme celà est souligné dans [La1] paragraphe 1.13 ce n'est pas tout à fait exact car $H^* X$, comme dual de l'homologie modulo p, possède une structure pro-finie naturelle. En fait, la catégorie $\mathscr{K}$ est la catégorie naturelle dans laquelle vit la cohomologie modulo p continue des pro-p-espaces.

Le résultat suivant est une généralisation «formelle» d'un célèbre théorème de J. Lannes ([La1], [La2]) qui établit une conjecture de Miller:

THÉORÈME 0.1. — *Soient* X *un espace et* V *un p-groupe abélien élémentaire. Alors l'application naturelle*:

$$[BV, |\hat{X}_{\bullet}^p|]' \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^* X, H^* BV)$$

est bijective. (*On note* [X, Y]' *l'ensemble des classes d'homotopie libre d'applications entre les espaces* X *et* Y.)

Plus généralement on obtient l'interprétation géométrique suivante du foncteur T_V qui généralise directement celle donnée dans [DS].

THÉORÈME 0.2. — *Soit* $Y_{\bullet}$ *un pro-p-espace. Alors le* $\mathscr{K}$*-morphisme naturel*:

$$h_c: \quad T_V H_c^*(Y_{\bullet}) \to H_c^*(\mathbf{hom}(BV, Y_{\bullet}))$$

est un isomorphisme. En particulier, pour tout espace X *le* $\mathscr{K}$*-morphisme naturel*:

$$h_c: \quad T_V H^* X \to H_c^*(\mathbf{hom}(BV, \hat{X}_{\bullet}^p))$$

est un isomorphisme.

Nous montrerons au paragraphe 3.4 comment ce résultat implique la plupart des résultats obtenus par J. Lannes sur les espaces fonctionnels **hom** (BV, X).

Voici le plan de ce mémoire:

1. Pro p-espaces

Dans cette partie on rappelle un certain nombre de notions et résultats dus à Artin-Mazur [AM] et Sullivan [Su1] concernant les pro-p-espaces et leurs limites. On y définit en particulier le p-complété d'un espace.

2. Cohomologie continue des pro-p-espaces

Dans la partie 2, on définit la cohomologie continue à coefficients locaux des pro-p-espaces et l'on construit la suite spectrale de Serre associée à certains morphismes de pro-p-espaces. On en tire un certain nombre de résultats dus essentiellement à Artin-Mazur [AM].

3. Cohomologie modulo p-continue des espaces fonctionnels hom (BV, $X_\bullet$) de source le classifiant d'un p-groupe élémentaire et de but un pro-p-espace

Dans la partie 3, on rappelle les résultats algébriques fondamentaux de J. Lannes ([La1], La2]), puis la méthode de E. Dror et J. Smith [DS]. On applique alors les résultats des parties 1 et 2 pour retrouver les résultats de J. Lannes sur les espaces fonctionnels **hom** (BV, X).

Le programme envisagé dans ce travail n'est pas totalement achevé. Il serait souhaitable, par exemple, d'établir une réciproque optimale dans le théorème 3.4.4 (et dans le théorème 3.4.5.2); ceci n'est que partiellement réalisé ici en utilisant des résultats techniques de relèvement de pro-objets de la catégorie homotopique à des pro-objets de la catégorie homotopique pointée.

Comme le signale le referee de cet article, un autre point important de la théorie qui n'est pas abordé ici est son élaboration au niveau de la catégorie des espaces et non pas à celui de la catégorie homotopique. Ceci permettrait d'appliquer cette théorie aux espaces munis d'actions de groupes quelconques; seul le cas des actions de p-groupes finis étant accessible par la méthode développée ci-après. Il s'agirait de disposer d'une théorie raisonnable des pro-p-espaces « rigides » et d'une version rigide de la p-complétion profinie; cette théorie est faite dans le cas des espaces connexes par D. Rector [Re2]. Il est probable d'ailleurs qu'une version rigide de la théorie permette de résoudre le point précédemment soulevé.

Principales notations catégoriques utilisées

– $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}^0_{pt}$) désigne la catégorie des ensembles simpliciaux (resp. pointés connexes); $h\mathscr{S}$ (resp. $h\mathscr{S}^0_{pt}$) désigne la catégorie obtenue en inversant les équivalences faibles de $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}^0_{pt}$); $[X, Y]'$ (resp. $[X, Y]$) désigne l'ensemble (resp. pointé) des $h\mathscr{S}$-morphismes (resp. $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphismes) entre X et Y;

– p-$h\mathscr{S}$ (resp. p-$h\mathscr{S}^0_{pt}$) désigne la sous-catégorie pleine de $h\mathscr{S}$ (resp. $h\mathscr{S}^0_{pt}$) formée des espaces p-π_*-finis (§ 1.2);

– pro-$\mathscr{C}$ désigne la catégorie des pro-objets à valeurs dans la catégorie $\mathscr{C}$ (§ 1.3.1): les objets de pro-p-$h\mathscr{S}$ (resp. pro-p-$h\mathscr{S}^0_{pt}$) s'appellent les pro-p-espaces (resp. pro-p-espaces pointés); $\hat{X}^p_\bullet$ (ou encore $\hat{X}_\bullet$) désigne le p-complété pro-fini d'un espace X (§ 1.3.2);

– H^*X désigne la cohomologie modulo p d'un espace X; $H^*_c(Y_\bullet)$ désigne la cohomologie modulo p continue d'un pro-p-espace $Y_\bullet$ (§ 2.1.2);

– $\mathscr{K}$ désigne la catégorie des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p (§ 3.2.1).

1. Pro-p-espaces

1.1. NOTATIONS ET TERMINOLOGIE. – Soit $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}_{pt}$, $\mathscr{S}^0_{pt}$) la catégorie des ensembles simpliciaux (resp. des ensembles simpliciaux pointés, des ensembles simpliciaux pointés connexes). On dira souvent « espace » au lieu d'ensemble simplicial et « application » au lieu d'application simpliciale. On note $h\mathscr{S}$ (resp. $h\mathscr{S}^0_{pt}$) la catégorie obtenue en inversant les équivalences faibles de la catégorie $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}^0_{pt}$) ([GZ], [Qu1]).

L'ensemble (resp. pointé) des $h\mathscr{S}$-morphismes (resp. $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphismes) entre deux espaces (resp. pointés connexes) X et Y sera noté $[X, Y]'$ (resp. $[X, Y]$); lorsque Y est fibrant, l'ensemble (resp. pointé) $[X, Y]'$ (resp. $[X, Y]$) s'identifie à l'ensemble des classes d'homotopie libre d'applications (resp. l'ensemble pointé des classes d'homotopie d'applications pointées) entre X et Y [Qu1]. Pour toute paire (X, Y) d'espaces pointés connexes l'ensemble pointé $[X, Y]$ est muni d'une action naturelle (à gauche) du groupe fondamental $\pi_1(Y)$; l'ensemble des orbites de cette action s'identifie alors à $[X, Y]'$.

Le symbole $*$ désignera un espace réduit à un point.

Pour tout espace pointé X, on note X_0 la composante connexe du point base de X.

Un $h\mathscr{S}$-diagramme (resp. $h\mathscr{S}^0_{pt}$-diagramme) commutatif $\begin{array}{ccc} Z & \to & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & B \end{array}$ est dit homotopiquement cartésien s'il existe un $\mathscr{S}$-diagramme (resp. un $\mathscr{S}_{pt}$-diagramme) cartésien $\begin{array}{ccc} Z' & \to & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \to & B' \end{array}$ dans lequel l'application $Y' \to B'$ est une fibration et un isomorphisme du $h\mathscr{S}$-diagramme $\begin{array}{ccc} Z' & \to & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \to & B' \end{array}$ resp. du $h\mathscr{S}^0_{pt}$-diagramme $\begin{array}{ccc} Z'_0 & \to & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \to & B' \end{array}$ sur $\begin{array}{ccc} Z & \to & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & B \end{array}$. L'espace (resp. pointé connexe) Z s'appelle alors par abus le produit fibré homotopique de X et Y au-dessus de B. Lorsque Y est faiblement contractile, on dit que le $h\mathscr{S}$-diagramme (resp. $h\mathscr{S}^0_{pt}$-diagramme) $Z \to X \to B$ est une $h\mathscr{S}$-fibration (resp. $h\mathscr{S}^0_{pt}$-fibration) et que Z est la fibre homotopique du $h\mathscr{S}$-morphisme $X \to B$. On définit sans peine les notions duales de $h\mathscr{S}$-diagramme homotopiquement cocartésien et de $h\mathscr{S}$-cofibration.

Nous avons essayé d'utiliser au maximum la terminologie catégorique de [Mac]. Aussi emploierons-nous les termes «limite», «colimite», «produit» et «coproduit» où l'on utilise parfois les termes «limite inverse» (ou encore «limite projective»), «limite directe» (ou encore «limite inductive»), «produit» et «somme». Pour tout foncteur F, le symbole Lim F (resp. Colim F) désignera, si elle existe, la limite (resp. la colimite) du foncteur F. Enfin pour toute famille $\{X_\alpha\}_\alpha$ d'objets d'une catégorie $\mathscr{C}$ le symbole $\prod_\alpha X_\alpha$ (resp. $\coprod_\alpha X_\alpha$) désignera, s'il existe, le produit (resp. le coproduit) dans $\mathscr{C}$ de la famille $\{X_\alpha\}_\alpha$.

Rappelons qu'une petite catégorie $\mathscr{I}$ est dite filtrante si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

(1) pour toute paire (i, j) d'objets de $\mathscr{I}$, il existe un objet k et deux $\mathscr{I}$-morphismes $k \to i$ et $k \to j$;

(2) pour toute paire (i, j) d'objets de $\mathscr{I}$ et toute paire (f, f') d'éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{I}}(i, j)$ il existe un $\mathscr{I}$-morphisme $g : k \to i$ avec $f \circ g = f' \circ g$.

On dit de même qu'une petite catégorie $\mathscr{I}$ est cofiltrante si la catégorie opposée à $\mathscr{I}$ est filtrante.

Nous réserverons le terme « limite filtrante » pour la limite d'un foncteur dont la source est une petite catégorie filtrante et le terme « colimite filtrante » pour la colimite d'un foncteur dont la source est une petite catégorie cofiltrante.

Enfin on notera $\mathscr{E}ns$ (resp. $\mathscr{E}ns_{pt}$) la catégorie des ensembles (resp. pointés).

1.2. ESPACES p-π_*-FINIS. — La terminologie suivante est due à J. Lannes [La1]. Un espace X est dit p-π_*-fini si l'ensemble $\pi_0(X)$ de ses composantes connexes est fini et si pour toute composante connexe de X, que l'on pointe arbitrairement, les groupes d'homotopie sont des p-groupes finis et sont triviaux sauf pour un nombre fini d'entre eux.

Pour un tel espace pointé connexe X, l'action de $\pi_1(X)$ sur $\pi_n(X)$ est p-nilpotente (comme toute action d'un p-groupe fini sur un p-groupe fini).

On en déduit facilement, à l'aide de la décomposition de Postnikov de X, la propriété suivante (d'ailleurs caractéristique des espaces pointés connexes p-π_*-finis):

PROPOSITION 1.2. — *Soit* X *un espace pointé connexe p-π_*-fini. Alors il existe une tour finie d'espaces pointés connexes* $X = X^n \to X^{n-1} \to \ldots \to X^1 \to X^0 = *$ *telle que chacune des applications* $X^k \to X^{k-1}$, $1 \leqq k \leqq n$, *est (à homotopie près) une fibration principale de fibre un espace d'Eilenberg-MacLane* $K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, m(k))$, $m: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *désignant une fonction croissante (et* $\mathbb{N}^*$ *l'ensemble des entiers naturels strictement positifs).*

On note p-$h\mathscr{S}$ (resp. p-$h\mathscr{S}^0_{pt}$) la sous-catégorie pleine de $h\mathscr{S}$ (resp. $h\mathscr{S}^0_{pt}$) dont les objets sont les espaces (resp. pointés connexes) p-π_*-finis. Cette sous-catégorie est stable par produits finis et par produits fibrés homotopiques (pour vérifier le dernier point, on utilise la « suite exacte de Mayer-Vietoris » des groupes d'homotopie dans un $h\mathscr{S}^0_{pt}$-diagramme homotopiquement cartésien).

1.3. LE POINT DE VUE DE ARTIN-MAZUR SUR LA p-COMPLÉTION PROFINIE

1.3.1. *Pro-p-espaces.*

Pro-objets à valeurs dans une catégorie. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Un pro-objet [Gr] à valeurs dans $\mathscr{C}$ est la donnée d'un foncteur covariant $C_\bullet : \mathscr{I}_{C_\bullet} \to \mathscr{C}$ dont la source $\mathscr{I}_{C_\bullet}$ est une petite catégorie filtrante.

On note pro-$\mathscr{C}$ la catégorie dont les objets sont les pro-objets à valeurs dans $\mathscr{C}$ et telle que pour toute paire $(C_\bullet, D_\bullet)$ de pro-objets à valeurs dans $\mathscr{C}$, l'ensemble des pro-$\mathscr{C}$-morphismes de $C_\bullet$ vers $D_\bullet$ est égal à $\mathrm{Lim}_{j \in \mathscr{I}_{D_\bullet}} \mathrm{Colim}_{i \in \mathscr{I}_{C_\bullet}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_i, D_j)$. La composition des morphismes dans pro-$\mathscr{C}$ est induite par celle dans $\mathscr{C}$. Pour tout pro-objet $C_\bullet$ à valeurs dans $\mathscr{C}$ le symbole $\mathscr{I}_{C_\bullet}$ désignera la (petite) catégorie filtrante source du foncteur $C_\bullet : \mathscr{I}_{C_\bullet} \to \mathscr{C}$ et pour tout objet i (resp. tout morphisme $j \to i$) de $\mathscr{I}_{C_\bullet}$, C_i (resp. $C(j \to i)$) désignera $C_\bullet(i)$ (resp. $C_\bullet(k \to i)$). On remarquera que le foncteur covariant évident $\mathscr{C} \to$ pro-$\mathscr{C}$ qui envoie un objet C de $\mathscr{C}$ sur le pro-objet constant C (*i.e.* $\mathscr{I}_F$ est la catégorie ayant un seul objet et un seul morphisme) associé à C est un plongement pleinement fidèle; par la suite on identifiera $\mathscr{C}$ et son image dans pro-$\mathscr{C}$.

Notons que la catégorie pro-$\mathscr{C}$ possède (tautologiquement) des limites filtrantes arbitraires. Par définition même tout pro-objet à valeurs dans $\mathscr{C}$ est limite filtrante d'objets de $\mathscr{C}$. On en déduit :

LEMME 1.3.1. — *Soit* $f: X_{\bullet} \to Y_{\bullet}$ *un morphisme de pro-objets de* $\mathscr{C}$. *Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) f *est un isomorphisme*;

(ii) *pour tout objet* C *de* $\mathscr{C}$, *l'application naturelle induite par* f:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}-\mathscr{C}}(Y_{\bullet}, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}-\mathscr{C}}(X_{\bullet}, C)$$

est bijective.

Un foncteur covariant $X: \mathscr{C} \to \mathscr{E}ns$ est dit pro-représentable [Gr] s'il est isomorphe au foncteur $\mathscr{C} \to \mathscr{E}ns$, $C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}-\mathscr{C}}(X_{\bullet}, C)$ pour un certain pro-objet $X_{\bullet}$ à valeur dans $\mathscr{C}$; un tel $X_{\bullet}$ est unique à l'isomorphisme près et l'on dit qu'il pro-représente X. En fait [Gr] la catégorie des foncteurs covariants $\mathscr{C} \to \mathscr{E}ns$ pro-représentables est anti-équivalente à la catégorie pro-$\mathscr{C}$.

Un foncteur covariant $F: \mathscr{I} \to \mathscr{F}$ entre deux catégories filtrantes est dit final si pour tout objet j de $\mathscr{F}$ il existe un objet i de $\mathscr{I}$ et un $\mathscr{F}$-morphisme $F(i) \to j$. Rappelons que si $C_{\bullet}$ est un pro-objet à valeurs dans $\mathscr{C}$ et $F: \mathscr{I} \to \mathscr{I}_{C_{\bullet}}$ un foncteur final ($\mathscr{I}$ étant implicitement supposée filtrante) le morphisme naturel de pro-objets $C_{\bullet} \to C_{\bullet} \circ F$ induit par F est un isomorphisme (utiliser 1.3.1). On définit de façon duale la notion de foncteur cofinal entre deux petites catégories cofiltrantes.

Pour plus de détails sur les catégories de pro-objets le lecteur est renvoyé à l'appendice de [AM], à [Gr] ou encore à [SGA].

Pro-p-espaces. — Les objets de la catégorie pro-p-$h\mathscr{S}$ (resp. pro-p-$\mathscr{S}^{0}_{pt}$) s'appelleront les pro-p-espaces (resp. les pro-p-espaces pointés). L'ensemble des morphismes de la catégorie pro-p-$h\mathscr{S}$ (resp. pro-p-$h\mathscr{S}^{0}_{pt}$) entre $X_{\bullet}$ et $Y_{\bullet}$ sera noté $[X_{\bullet}, Y_{\bullet}]'_c$ (resp. $[X_{\bullet}, Y_{\bullet}]_c$). Un pro-$p$-espace pointé $X_{\bullet}$ définit de façon évidente un pro-p-espace que l'on notera encore $X_{\bullet}$ et que l'on appellera le pro-p-espace sous-jacent à $X_{\bullet}$.

1.3.2. *p-complétion.*

PROPOSITION-DÉFINITION 1.3.2 (M. Artin et B. Mazur). — *Soit* X *un espace* (*resp. pointé connexe*). *Le foncteur covariant* p-$h\mathscr{S} \to \mathscr{E}ns$, $F \mapsto [X, F]'$ (*resp.* p-$h\mathscr{S}^{0}_{pt} \to \mathscr{E}ns_{pt}$, $F \mapsto [X, F]$) *est pro-représentable. On note* $\hat{X}^{p}_{\bullet}$ (*ou plus simplement* $\hat{X}_{\bullet}$ *lorsqu'il n'y a pas de confusion possible*) *le pro-p-espace* (*resp. pointé*) *qui pro-représente ce foncteur;* $\hat{X}^{p}_{\bullet}$ *s'appelle le p-complété* (*resp. pointé*) *de* X.

Commentaire. — Nous n'avons pas distingué dans les notations le p-complété d'un espace pointé connexe et le p-complété de l'espace sous-jacent. La raison de cette omission est que le pro-p-espace sous-jacent au p-complété pointé d'un espace pointé connexe X est naturellement isomorphe au p-complété de l'espace sous-jacent à X (c'est formel). En conséquence, il nous arrivera souvent d'oublier le qualificatif « pointé » pour le p-complété d'un espace pointé connexe lorsque le contexte (pointé connexe ou non) sera clair.

Démonstration. — Nous indiquons la démonstration dans le cas « pointé », l'autre cas est complètement analogue (*voir* pour plus de détails la démonstration du théorème 1.5.4). Nous reproduisons la démonstration de Sullivan [Su1]. On choisit une petite sous-catégorie pleine $\mathscr{F}_p$ de $p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$ telle que l'inclusion $\mathscr{F}_p \subsetneq p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$ est une équivalence de catégories. On note $\mathscr{F}_p(\mathrm{X})$ la petite catégorie dont les objets sont les $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphismes $f: \mathrm{X} \to \mathrm{F}$, F parcourant $\mathscr{F}_p$ et telle qu'un $\mathscr{F}_p(\mathrm{X})$-morphisme de $f: \mathrm{X} \to \mathrm{F}$ vers $f': \mathrm{X} \to \mathrm{F}'$ est un $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphisme $g: \mathrm{F} \to \mathrm{F}'$ tel que $g \circ f = f'$.

Cette catégorie est filtrante. On établit le point (1) en utilisant la stabilité de $p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$ par produits finis et le point (2) en utilisant la stabilité de $p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$ par $h\mathscr{S}^0_{pt}$-produits fibrés homotopiques (*voir* le paragraphe 1.2). Précisons le dernier point. Soient g et g' deux $\mathscr{F}_p(\mathrm{X})$-morphismes de $\mathrm{X} \to \mathrm{F}$ vers $\mathrm{X} \to \mathrm{F}'$. On note F″ l'égaliseur homotopique des deux $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphismes g et g' $\mathrm{F} \to \mathrm{F}'$, c'est-à-dire le $h\mathscr{S}^0_{pt}$-produit fibré homotopique:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F}'' & \xrightarrow{h'} & \mathrm{F}' \\ h\downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{F} & \xrightarrow{(g,\, g')} & \mathrm{F}' \times \mathrm{F}' \end{array}$$

(dans lequel le morphisme vertical de droite est la diagonale de F′). Puisque les $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphismes $g \circ f$ et de $g' \circ f$ coïncident on en déduit l'existence d'un $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphisme $f'': \mathrm{X} \to \mathrm{F}''$ tel que $h \circ f''$ est égal à f; ainsi le $\mathscr{F}_p(\mathrm{X})$-morphisme composé de g et de h est égal au composé de g' et de h, ce qui établit le point 2).

On note $\hat{\mathrm{X}}^p_\bullet$ le pro-p-espace défini par le foncteur $\mathscr{F}_p(\mathrm{X}) \to p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$, $(\mathrm{X} \to \mathrm{F}) \mapsto \mathrm{F}$. Il est facile de vérifier que pour tout objet F′ de $p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$ l'application naturelle $\mathrm{Colim}_{\mathscr{F}_p(\mathrm{X})}[\mathrm{F}, \mathrm{F}'] \to [\mathrm{X}, \mathrm{F}']$ est bijective, ce qui établit la proposition. ■

Remarques. — (1) La démonstration précédente met en évidence un critère de pro-représentabilité pour un foncteur covariant $\mathrm{S}: p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt} \to \mathscr{E}ns_{pt}$ (également adaptable au cas non pointé): il faut et il suffit qu'il satisfasse les deux conditions suivantes:

(*a*) pour toute paire (F, F′) d'objets de $p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$ l'application naturelle

$$\mathrm{S}(\mathrm{F} \times \mathrm{F}') \to \mathrm{SF} \times \mathrm{SF}'$$

est bijective;

(*b*) pour toute paire de $p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphismes $\mathrm{F}' \to \mathrm{F}$ et $\mathrm{F}'' \to \mathrm{F}$ l'application naturelle $\mathrm{SE} \to \mathrm{SF}' \times_{\mathrm{SF}} \mathrm{SF}'$ est surjective, E désignant le $h\mathscr{S}^0_{pt}$-produit fibré homotopique de F′ et F″ au-dessus de F.

(2) Il est clair que la correspondance $\mathrm{X} \mapsto \hat{\mathrm{X}}^p_\bullet$ définit un foncteur $h\mathscr{S} \to \text{pro-}p\text{-}h\mathscr{S}$ (resp. $h\mathscr{S}^0_{pt} \to \text{pro-}p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$), que l'on appelle p-complétion (resp. pointée). Ce foncteur induit un foncteur $\text{pro-}h\mathscr{S} \to \text{pro-}p\text{-}h\mathscr{S}$, $\mathrm{X}_\bullet \mapsto (\hat{\mathrm{X}}^p_\bullet)_\bullet$ (resp. $\text{pro-}h\mathscr{S}^0_{pt} \to \text{pro-}p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$, $\mathrm{X}_\bullet \mapsto (\hat{\mathrm{X}}^p_\bullet)_\bullet$) qui est adjoint à gauche de l'oubli $\text{pro-}p\text{-}h\mathscr{S} \to \text{pro-}h\mathscr{S}$ (resp. $\text{pro-}p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt} \to \text{pro-}h\mathscr{S}^0_{pt}$), *voir* [AM] paragraphe 3.4.

Nous verrons au paragraphe 1.4, en suivant D. Sullivan, que le foncteur $h\mathscr{S}^0_{pt} \to \text{pro-}p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$, $\mathrm{X} \mapsto \hat{\mathrm{X}}^p_\bullet$ admet un adjoint à droite.

1.3.3. PRO-p-GROUPES D'HOMOTOPIE DES PRO-p-ESPACES POINTÉS. — Soient $\mathscr{G}$ la catégorie des groupes et p-$\mathscr{G}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{G}$ dont les objets sont les p-groupes finis. Un objet de pro-p-$\mathscr{G}$ s'appelle un pro-p-groupe.

Soient $Y_{\bullet}$ un pro-p-espace pointé et $n \geqq 1$ un entier. On note $\pi_n(Y_{\bullet})$ le pro-p-groupe composé de $Y_{\bullet}$ et du foncteur $\pi_n : p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt} \to p\text{-}\mathscr{G}$, $F \mapsto \pi_n(F)$; $\pi_n(Y_{\bullet})$ s'appelle le n-ième pro-p-groupe d'homotopie de $Y_{\bullet}$ (on dira souvent, par abus, le n-ième groupe d'homotopie de $Y_{\bullet}$). Pour $n \geqq 2$ c'est un pro-p-groupe abélien.

Le foncteur classifiant $B : p\text{-}\mathscr{G} \to p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$, $\pi \mapsto B\pi$ induit en un sens évident un foncteur « pro-p-espace pointé classifiant » $B : \text{pro-}p\text{-}\mathscr{G} \to \text{pro-}p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$; c'est un plongement pleinement fidèle et l'on a des isomorphismes naturels de pro-p-groupes $\pi_1(B\pi) \cong \pi$ et $\pi_n(B\pi) \cong 0$, $n \geqq 2$, pour tout pro-p-groupe π. Le lemme suivant est facile.

LEMME 1.3.3.1. — *Le foncteur classifiant* $B : \text{pro-}p\text{-}\mathscr{G} \to p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$, $\pi \mapsto B\pi$ *est adjoint à droite du foncteur* $\pi_1(-) : p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt} \to \text{pro-}p\text{-}\mathscr{G}$, $X_{\bullet} \mapsto \pi_1(X_{\bullet})$.

Soit G un groupe. On se convainc facilement que le foncteur $p\text{-}\mathscr{G} \to \mathscr{E}ns_{pt}$, $\pi \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(G, \pi)$ est pro-représentable (*voir* [AM] corollaire 3.3). On note $\hat{G}^p_{\bullet}$ le pro-p-groupe qui pro-représente ce foncteur et on l'appelle le p-complété de G. Là encore, le lemme suivant est facile.

LEMME 1.3.3.2. — *Pour tout espace pointé connexe* X, *l'homomorphisme naturel de pro-p-groupes*:

$$\pi_1(X)^p_{\bullet} \to \pi_1(\hat{X}^p_{\bullet})$$

est un isomorphisme.

Soient $n \geqq 2$ un entier et $p\text{-}\mathscr{A}b$ la catégorie des p-groupes finis abéliens. Le foncteur $K(-, n) : p\text{-}\mathscr{A}b \to p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$, $\pi \mapsto K(\pi, n)$ induit un foncteur « pro-p-espace pointé d'Eilenberg-Mac Lane » $K(-, n) : \text{pro-}p\text{-}\mathscr{A}b \to \text{pro-}p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$ (c'est un plongement pleinement fidèle) et l'on a des isomorphismes naturels de pro-p-groupes $\pi_n(K(\pi, n)) \cong \pi$ et $\pi_m(K(\pi, n)) \cong 0$, $m \neq n$, pour tout pro-p-groupe abélien π.

1.3.4. *Décomposition de Postnikov des pro-p-espaces pointés.* — Soit $n \geqq 0$ un entier. On note $h\mathscr{S}^0_{pt}(n)$ la sous-catégorie pleine de $h\mathscr{S}^0_{pt}$ dont les objets sont les espaces pointés connexes X avec $\pi_k(X) = 0$ pour tout entier $k \geqq n+1$. Rappelons que l'inclusion $h\mathscr{S}^0_{pt}(n) \subsetneq h\mathscr{S}^0_{pt}$ admet un adjoint à gauche, la « n-ième troncature de Postnikov », noté $Q^n : h\mathscr{S}^0_{pt} \to h\mathscr{S}^0_{pt}(n)$. Bien sûr si F est un espace pointé connexe p-π_*-fini il en est de même pour $Q^n F$.

Pour tout pro-p-espace pointé $X_{\bullet}$ on note $Q^n X_{\bullet}$ le composé de $X_{\bullet}$ et de Q^n; $Q^n X_{\bullet}$ s'appelle la n-ième troncature de Postnikov de $X_{\bullet}$. On a ainsi défini un foncteur

$$Q^n : \text{pro-}p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt} \to \text{pro-}p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}.$$

PROPOSITION 1.3.4.1. — *Soit* $X_{\bullet}$ *un pro-p-espace pointé. Alors le morphisme canonique de pro-p-espaces pointés* $X_{\bullet} \to \mathrm{Lim}_n Q^n X_{\bullet}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après le lemme 1.3.1 il suffit de vérifier que pour tout espace pointé connexe p-π_*-fini F l'application :

$$[\mathrm{Lim}_n \mathrm{Q}^n \mathrm{X}_\bullet, \mathrm{F}]_c \to [\mathrm{X}_\bullet, \mathrm{F}]_c$$

induite par le morphisme $\mathrm{X}_\bullet \to \mathrm{Lim}_n \mathrm{Q}^n \mathrm{X}_\bullet$ est bijective. Celà découle des propriétés du foncteur Q^n précédemment rappelées et du fait que pour tout espace p-π_*-fini F il existe un entier n tel que le $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphisme $\mathrm{F} \to \mathrm{Q}^n \mathrm{F}$ est un isomorphisme. ■

Remarques. — (1) En général, un espace pointé connexe n'est pas la limite (dans $h\mathscr{S}^0_{pt}$) de sa tour de Postnikov.

(2) La proposition précédente est l'une des motivations principales pour imposer aux espaces p-π_*-finis que leurs groupes d'homotopie soient tous triviaux sauf un nombre fini d'entre eux; si l'on impose seulement que leurs groupes d'homotopie soient des p-groupes finis, l'analogue de la proposition précédente est faux et l'on doit s'encombrer de la notion de $\natural$-isomorphisme [AM] paragraphe 4.

On note $\mathrm{K}_n(-) : h\mathscr{S}^0_{pt} \to h\mathscr{S}^0_{pt}$ le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{K}(\pi_n(\mathrm{X}), n)$. La proposition suivante est classique (*voir* [AM], § 2, p. 22) :

Proposition 1.3.4.2. — *Il existe une transformation naturelle* $\theta_n : \mathrm{K}_n(-) \to \mathrm{Q}^n$ *et une seule telle que pour tout espace pointé connexe* X, *l'homomorphisme* $\pi_n(\theta_n) : \pi_n(\mathrm{X}) \to \pi_n(\mathrm{X})$ *est l'identité et le* $h\mathscr{S}^0_{pt}$*-diagramme* $\mathrm{K}_n(\mathrm{X}) \to \mathrm{Q}^n \mathrm{X} \to \mathrm{Q}^{n-1} \mathrm{X}$ *est une* $h\mathscr{S}^0_{pt}$*-fibration.*

Soit $\mathrm{X}_\bullet$ un pro-p-espace pointé. La proposition précédente permet de définir un morphisme naturel de pro-p-espaces pointés $\theta_n : \mathrm{K}(\pi_n(\mathrm{X}_\bullet), n) \to \mathrm{Q}^n \mathrm{X}_\bullet$; $\mathrm{K}(\pi_n(\mathrm{X}_\bullet), n)$ désignant le pro-p-espace pointé d'Eilenberg-MacLane construit en 1.3.3. Nous verrons au paragraphe 2.2 que la réalisation géométrique, au sens de Sullivan, du diagramme de pro-p-espaces pointés :

$$\mathrm{K}(\pi_n(\mathrm{X}), n) \to \mathrm{Q}^n \mathrm{X} \to \mathrm{Q}^{n-1} \mathrm{X}$$

est une $h\mathscr{S}^0_{pt}$-fibration. En général, il n'y a pas de notion de « fibre homotopique » d'un morphisme $\mathrm{X}_\bullet \to \mathrm{Y}_\bullet$ entre pro-p-espaces pointés (*voir* [AM], § 2, p. 21 pour une discussion à ce sujet). Cependant, ce qui précède montre que le pro-p-espace pointé d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\pi_n(\mathrm{X}_\bullet), n)$ est un bon candidat pour la fibre homotopique du morphisme $\mathrm{Q}^n \mathrm{X}_\bullet \to \mathrm{Q}^{n-1} \mathrm{X}_\bullet$ avec $n \geqq 1$. On définira même en 2.2 la suite spectrale de Serre du diagramme $\mathrm{K}(\pi_n(\mathrm{X}_\bullet), n) \to \mathrm{Q}^n \mathrm{X}_\bullet \to \mathrm{Q}^{n-1} \mathrm{X}_\bullet$.

1.3.5. *Revêtements entre pro-p-espaces pointés.* — La construction des revêtements entre pro-p-espaces pointés repose sur le fait suivant qui résulte immédiatement de la théorie des revêtements :

Lemme 1.3.5.1. — *Soient* $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* $h\mathscr{S}^0_{pt}$*-morphisme et* $\begin{array}{ccc} \mathrm{G} & \to & \mathrm{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1 \mathrm{X} & \to & \pi_1 \mathrm{Y} \end{array}$ *un diagramme commutatif de groupes dans lequel les morphismes verticaux sont des inclusions. On note* $\mathrm{X}_\mathrm{G} \to \mathrm{X}$ (*resp.* $\mathrm{Y}_\mathrm{H} \to \mathrm{Y}$) *le revêtement de* X (*resp. de* Y) *correspondant à* G (*resp.* H). *Alors il existe un unique* $h\mathscr{S}^0_{pt}$*-morphisme* $\mathrm{X}_\mathrm{G} \to \mathrm{Y}_\mathrm{H}$ *tel que le* $h\mathscr{S}^0_{pt}$*-diagramme suivant soit* *commutatif*:

$$\begin{array}{ccc} X_G & \to & Y_H \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}.$$

Soient $X_\bullet$ un pro-p-espace pointé, π un sous-pro-p-groupe de $\pi_1(X_\bullet)$ (on se donne donc un morphisme de pro-p-groupes $\pi \to \pi_1(X_\bullet)$ qui induit un monomorphisme de groupes $\mathrm{Lim}\,\pi \subsetneq \mathrm{Lim}\,\pi_1(X_\bullet)$). Pour tout objet i de $\mathscr{I}_{X_\bullet}$ on note Y_i le revêtement de X_i qui correspond à l'image de π dans $\pi_1 X_i$. D'après le lemme précédent il existe un unique foncteur $Y_\bullet : \mathscr{I}_{X_\bullet} \to p\text{-}\pi_*\text{-}\mathscr{F}$ et une unique transformation naturelle $\theta : Y_\bullet \to X_\bullet$ tels que pour tout objet i de $\mathscr{I}_X$:

(1) $Y_\bullet(i) = Y_i$;

(2) θ_i est le revêtement $Y_i \to X_i$.

Le morphisme de pro-p-espaces pointés $\theta : Y_\bullet \to X_\bullet$ ainsi défini s'appelle le revêtement de $X_\bullet$ correspondant au sous-pro-p-groupe π de $\pi_1(X_\bullet)$. On vérifie la proposition suivante (*voir* [AM], § 2, corollaire 2.8):

PROPOSITION 1.3.5.2 (M. Artin et B. Mazur). — *Soient $X_\bullet$ un pro-p-espace pointé, π un sous-pro-p-groupe de $\pi_1(X_\bullet)$. Alors le morphisme canonique $\theta : Y_\bullet \to X_\bullet$ induit un isomorphisme de $\pi_1(Y_\bullet)$ sur π et de $\pi_n(Y_\bullet)$ sur $\pi_n(X)$ pour tout entier $n \geqq 2$. De plus pour tout pro-p-espace pointé $Z_\bullet$, l'application naturelle $[Z_\bullet, Y_\bullet]_c \to \{ f : Z_\bullet \to X_\bullet / \mathrm{Im}(\pi_1 f) \subseteqq \pi \}$ est bijective.*

1.4. LE POINT DE VUE DE SULLIVAN SUR LA p-COMPLÉTION PROFINIE

1.4.1. *L'objectif du paragraphe* 1.4 *est de rappeler la démonstration du théorème suivant de D. Sullivan* [*Su*1].

THÉORÈME 1.4.1.1 (D. Sullivan). — *Soit $X_\bullet$ un pro-p-espace pointé. Alors le $h\mathscr{S}^0_{pt}$-diagramme associé à $X_\bullet$ possède une limite. On notera $|X_\bullet|$ la limite du foncteur $X_\bullet$.*

Autrement dit pour tout espace pointé connexe W et tout pro-p-espace pointé $X_\bullet$ l'application naturelle $[W, |X_\bullet|] \to \mathrm{Lim}_{\mathscr{I}_{X_\bullet}}[W, X_i]$ est bijective. La correspondance $X_\bullet \mapsto |X_\bullet|$ définit manifestement un foncteur covariant pro-p-$h\mathscr{S}^0_{pt} \to h\mathscr{S}^0_{pt}$ que l'on appelle la réalisation géométrique.

COROLLAIRE 1.4.1.2. — *Le foncteur* pro-p-$h\mathscr{S}^0_{pt} \to h\mathscr{S}^0_{pt}$, $Y_\bullet \mapsto |Y_\bullet|$ *est adjoint à droite du foncteur* $h\mathscr{S}^0_{pt} \to$ pro-p-$h\mathscr{S}^0_{pt}$, $X \mapsto \hat{X}^p_\bullet$.

(Utiliser ce qui précède et le fait que pour tout objet j de $\mathscr{I}_{Y_\bullet}$, $[X, Y_j]$ s'identifie par définition de $\hat{X}^p_\bullet$ à $\mathrm{Colim}_{\mathscr{I}_{\hat{X}^p_\bullet}}[\hat{X}^p_i, Y_j]$.)

COROLLAIRE 1.4.1.3. — *Soient $X_\bullet$ un pro-p-espace pointé et $n \geqq 1$ un entier. Alors l'homomorphisme naturel de groupes*:

$$\pi_n(|X_\bullet|) \to \mathrm{Lim}\,\pi_n(X_\bullet)$$

est un isomorphisme.

C'est la réalisation géométrique $|\hat{X}^p_\bullet|$ du p-complété de Artin-Mazur de X que D. Sullivan appelle le p-complété de X; comme il le remarque, l'espace pointé connexe $|\hat{X}^p_\bullet|$ possède une structure «profinie». Pour préciser cette idée, et pour démontrer le théorème, il nous faut tout d'abord rappeler la notion de foncteur de Brown pro-fini (Sullivan emploie la terminologie «compact brownian functor» [Su1]).

Nous verrons en 1.5.4 que le p-complété d'un espace (non connexe) admet également une limite (dans la catégorie $h\mathscr{S}$ cette fois).

1.4.2. *La catégorie des ensembles pro-finis.* — On note $\mathscr{E}ns$ (resp. $\mathscr{E}ns_{pt}$) la catégorie des ensembles (resp. pointés); $\mathscr{E}ns\text{-}f$ (resp. $\mathscr{E}ns_{pt}\text{-}f$) désignera la sous-catégorie pleine dont les objets sont les ensembles (resp. pointés) finis et $\mathscr{E}ns\text{-}pf$ (resp. $\mathscr{E}ns_{pt}\text{-}pf$) la catégorie des ensembles pro-finis (resp. pointés) c'est-à-dire celle dont les objets sont les espaces topologiques (resp. pointés) compacts totalement discontinus et les morphismes les applications continues. La catégorie $\mathscr{E}ns\text{-}pf$ (resp. $\mathscr{E}ns_{pt}\text{-}pf$) possède des limites arbitraires et le foncteur «Lim»: pro-$\mathscr{E}ns\text{-}f \to \mathscr{E}ns\text{-}pf$ (resp. «Lim»: pro-$\mathscr{E}ns_{pt}\text{-}f \to \mathscr{E}ns_{pt}\text{-}pf$) qui envoie un système filtrant d'ensembles (resp. pointés) finis sur sa limite (on considère un ensemble pointé fini comme muni de sa topologie discrète) est une équivalence de catégories. C'est pourquoi par la suite on s'autorisera à identifier un pro-(ensemble fini) et l'ensemble pro-fini qu'il définit. Le foncteur oubli évident $\mathscr{E}ns\text{-}pf \to \mathscr{E}ns$ possède un adjoint à gauche $\hat{-} : \mathscr{E}ns \to \mathscr{E}ns\text{-}pf$; pour tout ensemble E, l'ensemble pro-fini $\hat{E}$ s'appelle le complété pro-fini de E.

De même la catégorie des pro-p-groupes s'identifie-t-elle à la catégorie des groupes topologiques limites filtrante de p-groupes finis. Soit π un pro-p-groupe; $\operatorname{Lim}\pi$ désignera la limite du système filtrant de groupes finis π. Lorsque l'on interprète π comme un groupe topologique, $\operatorname{Lim}\pi$ n'est autre que le groupe discret sous-jacent à π. Dorénavant, les pro-p-groupes d'homotopie d'un pro-p-espace seront souvent considérés comme des groupes topologiques via l'identification ci-dessus.

Rappelons la proposition suivante, fondamentale à ce qui suit :

PROPOSITION 1.4.2. — *Soient* I *une petite catégorie filtrante*, S *et* T *deux foncteurs covariants* $I \to \mathscr{E}ns_{pt}\text{-}pf$ *et* $\varphi : S \to T$ *une transformation naturelle tels que pour tout objet i de* I, *l'application continue* $\varphi i : Si \to Ti$ *est surjective. Alors l'application continue* $\operatorname{Lim}\varphi : \operatorname{Lim} S \to \operatorname{Lim} T$ *est surjective.* (*En particulier, la limite filtrante d'ensembles finis non vides est un ensemble non vide.*)

Pour une démonstration *voir* [Bo] Chapitre I, paragraphe 9, n° 6. La démonstration donnée dans Bourbaki suppose *a priori* que I est la catégorie associée à un ensemble préordonné filtrant à droite (dans la terminologie de N. Bourbaki). Cette restriction n'est pas essentielle car tout pro-objet à valeur dans une catégorie quelconque est (naturellement) isomorphe à un pro-objet dont la source est un ensemble préordonné filtrant à droite; *voir* pour celà [SGA] Exposé I, proposition 8.1.6, p. 65.

1.4.3. *Foncteurs de Brown pro-finis.* — Un foncteur de Brown pro-fini X est un foncteur contravariant $h\mathscr{S}^0_{pt} \to \mathscr{E}ns_{pt}\text{-}pf$ tel que le foncteur en ensembles pointés $|X|$ sous-jacent à X est représentable; autrement dit le foncteur $|X|$ vérifie les axiomes (W) et

(MW) du théorème de représentabilité de E. H. Brown [Br]:

(W). *Pour toute $h\mathscr{S}^0_{pt}$-famille $\{S_\alpha\}_\alpha$ l'application pointée naturelle*:

$$|X|(\vee_\alpha S_\alpha) \to \prod_\alpha |X|(S_\alpha)$$

est bijective.

(MW). *Pour tout $h\mathscr{S}^0_{pt}$-diagramme homotopiquement cocartésien* $\begin{array}{ccc} S & \to & S'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \to & \Sigma \end{array}$, *l'application naturelle* $|X|(\Sigma) \to |X|(S') \times_{|X|(S)} |X|(S'')$ *est surjective.*

On note $h\mathscr{S}^0_{pt}$-*pf* la catégorie des foncteurs de Brown pro-finis. Ses objets sont les foncteurs de Brown pro-finis et l'ensemble pointé des $h\mathscr{S}^0_{pt}$-*pf*-morphismes entre deux foncteurs de Brown profinis X et Y, que l'on note $[X, Y]_c$, est l'ensemble des transformations naturelles $X \to Y$.

Soit X un foncteur de Brown pro-fini. On note encore $|X|$ l'espace pointé connexe qui représente le foncteur en ensembles sous-jacent à X et on l'appelle la réalisation géométrique de X ou encore l'espace pointé connexe sous-jacent à X. On note $|\ |: h\mathscr{S}^0_{pt}\text{-}pf \to h\mathscr{S}^0_{pt}$, $X \mapsto |X|$ le foncteur ainsi défini; c'est un plongement fidèle. En particulier l'application naturelle $[X, Y]_c \to [|X|, |Y|]$ est injective, ce qui montre que les morphismes entre deux foncteurs de Brown pro-finis forment bien un ensemble. En abrégé, $[X, Y]_c$ est l'ensemble des $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphismes $|X| \to |Y|$ «continus»!

Le lemme qui suit est clair.

LEMME 1.4.3.1. — *Soit $f: X \to Y$ un $h\mathscr{S}^0_{pt}$-pf-morphisme. Les trois conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *f est un isomorphisme*;

(ii) *$|f|: |X| \to |Y|$ est un $h\mathscr{S}^0_{pt}$-isomorphisme*;

(iii) *pour tout entier $n \geqq 1$, l'application* $X(S^n) \to Y(S^n)$ *est bijective* (S^n *désignant la n-sphère*).

PROPOSITION 1.4.3.2 (D. Sullivan). — *La catégorie $h\mathscr{S}^0_{pt}$-pf possède des limites projectives arbitraires.*

Démonstration. — Soit I une petite catégorie filtrante et T un foncteur covariant $I \to h\mathscr{S}^0_{pt}$-*pf*. On considère le foncteur $\operatorname{Lim} T: h\mathscr{S}^0_{pt} \to \mathscr{E}ns_{pt}\text{-}pf$, $X \mapsto \operatorname{Lim} T(X)$. On vérifie facilement à l'aide de la proposition 1.4.2 que le foncteur Lim T vérifie les axiomes de Brown et que le foncteur de Brown pro-fini ainsi défini est limite projective dans la catégorie $h\mathscr{S}^0_{pt}$-*pf* du foncteur T. ■

1.4.4. *Restriction des foncteurs de Brown pro-finis aux espaces pointés connexes finis.* — On note $\mathscr{F}$ la sous-catégorie pleine de $h\mathscr{S}^0_{pt}$ dont les objets sont ceux isomorphes (dans $h\mathscr{S}^0_{pt}$) à un espace pointé connexe fini (*i. e.* un ensemble simplicial ayant un nombre fini de simplexes non dégénérés). On dira par abus que $\mathscr{F}$ est la catégorie des espaces pointés connexes finis. Observons que $\mathscr{F}$ est stable par bouquets finis et par coproduits amalgammés homotopiques au sens suivant :

– le bouquet $F \vee F'$ (c'est-à-dire le coproduit) de deux espaces pointés connexes finis F et F′ est fini;

– pour tout $h\mathcal{S}^0_{pt}$-diagramme homotopiquement cocartésien $\begin{array}{ccc} X & \to & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & S \end{array}$, si X, Y et Z sont dans $\mathcal{F}$, alors S est dans $\mathcal{F}$.

On dit qu'un foncteur contravariant $X : \mathcal{F} \to \mathcal{E}ns_{pt}\text{-}pf$ est un foncteur de Brown pro-fini s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

(W_f). *Pour toute paire* (F, F′) *d'objets de* $\mathcal{F}$, *l'application pointée naturelle* :

$$X(F \vee F') \to X(F) \times X(F')$$

est bijective (*c'est donc un homéomorphisme*).

(MW_f). *Pour tout* $h\mathcal{S}^0_{pt}$*-diagramme homotopiquement cocartésien* $\begin{array}{ccc} F & \to & F'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ F' & \to & S \end{array}$ *avec* F, F′ *et* F″ (*et donc* S) *dans* $\mathcal{F}$, *l'application naturelle* $X(S) \to X(F') \times_{X(F)} X(F'')$ *est surjective.*

On note $\mathcal{F}\text{-}pf$ la catégorie des foncteurs de Brown pro-finis définis sur $\mathcal{F}$, c'est-à-dire celle dont les objets sont les foncteurs de Brown pro-finis $\mathcal{F} \to \mathcal{E}ns_{pt}\text{-}pf$ et dont les morphismes sont les transformations naturelles.

On choisit une petite sous-catégorie pleine $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ telle que l'inclusion $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}$ est une équivalence de catégories (l'existence d'une telle catégorie montre que $\mathcal{F}\text{-}pf$ est une vraie catégorie).

Soit W un espace pointé connexe. On note $\mathcal{F}_W$ la petite catégorie dont les objets sont les $h\mathcal{S}^0_{pt}$-morphismes $F \to W$ dont la source F appartient à $\mathcal{F}'$ et dont les morphismes sont les $h\mathcal{S}^0_{pt}$-diagrammes commutatifs évidents. On pourra noter que la catégorie $\mathcal{F}_W$ dépend fonctoriellement de W en un sens évident. En utilisant la stabilité de $\mathcal{F}$ par bouquets finis et par coproduits amalgammés homotopiques évoquée ci-dessus, on montre que pour tout espace pointé connexe W, la catégorie $\mathcal{F}_W$ est cofiltrante.

LEMME 1.4.4.1 (D. Sullivan). – *Soit* X *un foncteur de Brown pro-fini* $\mathcal{F} \to \mathcal{E}ns_{pt}\text{-}pf$. *Alors le foncteur contravariant* :

$$\bar{X} : \quad h\mathcal{S}^0_{pt} \to \mathcal{E}ns_{pt}\text{-}pf,\ W \mapsto \operatorname{Lim}(\mathcal{F}_W \to \mathcal{E}ns_{pt}\text{-}pf,\ (F \to W) \mapsto XF)$$

est un foncteur de Brown pro-fini.

Démonstration. – Il nous faut vérifier les deux axiomes du théorème de représentabilité de Brown. L'axiome (W) résulte du fait que pour toute famille $(W_\alpha)_\alpha$ d'espaces pointés connexes, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_{\vee_\alpha W_\alpha}$, dont les objets sont les $h\mathcal{S}^0_{pt}$-morphismes de la forme $\bigvee_{i=1}^{k} F_i \to \vee_\alpha W_\alpha$, k un entier strictement positif, induits (de la façon évidente) par $kh\mathscr{S}^0_{pt}$-morphismes $F_i \to W_{\alpha_i}$, est cofinale. Pour vérifier l'axiome (MW) on utilise la proposition 1.4.2 et un raisonnement semblable au précédent. ■

COROLLAIRE 1.4.4.2 (D. Sullivan). — *Soit* X *un foncteur de Brown pro-fini* $h\mathscr{S}^0_{pt} \to \mathscr{E}ns_{pt}$*-pf et* $r\mathrm{X}:\mathscr{F} \to \mathscr{E}ns_{pt}$*-pf sa restriction. Alors le* $h\mathscr{S}^0_{pt}$*-pf-morphisme canonique* $\mathrm{X} \to r\bar{\mathrm{X}}$ *est un isomorphisme. Autrement dit, l'application naturelle :*

$$[\mathrm{W}, |\mathrm{X}|] \to \mathrm{Lim}(\mathscr{F}_{\mathrm{W}} \to \mathscr{E}ns_{pt}\text{-}pf, (\mathrm{F} \to \mathrm{W}) \mapsto \mathrm{XF})$$

est bijective.

Démonstration. — Soit X un foncteur de Brown pro-fini. Alors le $h\mathscr{S}^0_{pt}$-pf-morphisme canonique $\mathrm{X} \to r\bar{\mathrm{X}}$ induit, par définition, une bijection lorsqu'on l'évalue sur tout objet de $\mathscr{F}$ et donc en particulier sur les sphères; c'est donc un isomorphisme d'après le lemme 1.4.3.1. ■

On obtient immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.4.4.3 (D. Sullivan). — *Le foncteur « restriction »* $r: h\mathscr{S}^0_{pt}\text{-}pf \to \mathscr{F}\text{-}pf$ *est une équivalence de catégories, son inverse est le foncteur* $\bar{\ }: \mathscr{F}\text{-}pf \to h\mathscr{S}^0_{pt}\text{-}pf$, $\mathrm{X} \mapsto \bar{\mathrm{X}}$.

Venons en maintenant à la démonstration du théorème 1.4.1.1. Le lemme suivant est classique :

LEMME 1.4.4.4. — *Soient* W *un espace pointé connexe fini et* X *un espace pointé connexe dont les groupes d'homotopie sont finis. Alors l'ensemble pointé* [W, X] *est fini.*

(Utiliser une récurrence sur le squelette de W et la suite de Puppe.)

COROLLAIRE-DÉFINITION 1.4.4.5 (D. Sullivan). — *Soient* W *un espace pointé connexe et* X *un espace* p-π_**-fini. Alors l'application naturelle :*

$$[\mathrm{W}, \mathrm{X}] \to \mathrm{Lim}(\mathscr{F}_{\mathrm{W}} \to \mathscr{E}ns_{pt}\text{-}pf, (\mathrm{F} \to \mathrm{W}) \mapsto [\mathrm{F}, \mathrm{X}])$$

est bijective. En particulier, le foncteur $h\mathscr{S}^0_{pt} \to \mathscr{E}ns_{pt}$, $\mathrm{W} \mapsto [\mathrm{W}, \mathrm{X}]$ *possède une structure naturelle de foncteur de Brown pro-fini et l'on note* $\hat{\mathrm{X}}: h\mathscr{S}^0_{pt} \to \mathscr{E}ns_{pt}$*-pf le foncteur correspondant. On note alors* $\hat{-}: p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt} \to h\mathscr{S}^0_{pt}$*-pf le foncteur ainsi obtenu.*

Démonstration. — Le membre de droite définit un foncteur de Brown pro-fini d'après les lemmes 1.4.4.1 et 1.4.4.4; il est donc représentable par un espace pointé connexe Y; l'application naturelle de l'énoncé induit un $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphisme $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ qui, par construction, induit une bijection $[\mathrm{W}, \mathrm{X}] \cong [\mathrm{W}, \mathrm{Y}]$ pour tout espace pointé connexe fini W. En prenant pour W les sphères, on en déduit que f est un isomorphisme. ■

Démonstration du théorème 1.4.1.1. — Soit $\mathrm{X}_\bullet$ un pro-p-espace pointé. Le foncteur composé $\hat{-} \circ \mathrm{X}_\bullet : \mathscr{I}_{\mathrm{X}_\bullet} \to h\mathscr{S}^0_{pt}\text{-}pf$ possède une limite d'après la proposition 1.4.3.2. Notons $\mathrm{Lim}\,\mathrm{X}_\bullet$ cette limite. Il est clair que la réalisation géométrique $|\mathrm{Lim}\,\mathrm{X}_\bullet|$ du foncteur de Brown pro-fini $\mathrm{Lim}\,\mathrm{X}_\bullet$ est une limite du $h\mathscr{S}^0_{pt}$-diagramme sous-jacent à X. ■

Commentaire. — En général un espace pointé connexe W n'est la $h\mathscr{S}^0_{pt}$-colimite du $h\mathscr{S}^0_{pt}$-diagramme d'espaces finis $\mathscr{F}_W \to \mathscr{F}$, $(F \to W) \mapsto F$. Cela devient vrai (tautologiquement) dans la catégorie dont les morphismes sont les classes d'homotopie « visibles » [Su1]. Le corollaire 1.4.4.2 montre précisément que les classes d'homotopie dont le but est la réalisation géométrique d'un foncteur de Brown pro-fini coïncident avec les classes d'homotopie visibles.

Remarque. — Notons π_*-$\mathscr{F}$ la sous-catégorie pleine de $h\mathscr{S}^0_{pt}$ dont les objets sont les espaces pointés connexes π_*-finis c'est-à-dire ceux dont tous les groupes d'homotopie sont finis et sont triviaux sauf pour un nombre fini d'entre eux. Compte tenu de la démonstration précédente, le théorème 1.4.1.1 reste valable dans le cadre de la catégorie π_*-$\mathscr{F}$: tout π_*-$\mathscr{F}$-diagramme filtrant admet une limite.

En fait, on pourrait probablement montrer que le foncteur canonique

$$\mathrm{Limo}\,\hat{-} : \mathrm{pro}-\pi_*\text{-}\mathscr{F} \to h\mathscr{S}^0_{pt}\text{-}pf$$

ainsi obtenu (en utilisant le lemme 1.4.4.4 et la généralisation du corollaire-définition 1.4.4.5) est une équivalence de catégories. En particulier, si l'on note p-$h\mathscr{S}^0_{pt}$-pf la sous-catégorie pleine de $h\mathscr{S}^0_{pt}$-pf dont les objets sont les foncteurs de Brown pro-finis X tels que pour tout entier $n \geqq 1$ le groupe pro-fini $\pi_n(X) = X(S^n)$ est un pro-p-groupe, le foncteur $\mathrm{Limo}\,\hat{-}$ induirait une équivalence de catégories pro-p-$h\mathscr{S}^0_{pt} \to p$-$h\mathscr{S}^0_{pt}$-$pf$.

1.5. Limites de pro-p-espaces. — Nous avons vu en 1.4.1.1 que le $h\mathscr{S}^0_{pt}$-diagramme associé à un pro-p-espace pointé possède toujours une limite. Dans ce paragraphe nous abordons la question suivante : le $h\mathscr{S}$-diagramme associé à un pro-p-espace arbitraire possède-t-il une limite ?

En général, nous ignorons la réponse. Nous allons montrer comment y répondre dans certains cas. La difficulté vient de ce que l'analogue du théorème de représentabilité de Brown, à la base de 1.4.1.1, est faux dans le cadre non pointé, *voir* [He], paragraphe 2, proposition 2.1.

Lorsqu'un pro-p-espace $X_.$ admet une limite, on note toujours $|X_.|$ l'espace limite.

1.5.1. *Composantes connexes d'un pro-p-espace.* — Soit $X_.$ un pro-p-espace. On note, $\pi_0(X_.)$, l'ensemble pro-fini $\lim_{\mathscr{I}_{X.}} \pi_0(X_i)$. Cet ensemble s'appellera l'ensemble (pro-fini) des composantes connexes de $X_.$. Soit α un élément de $\pi_0(X_.)$; on note $X_{.(\alpha)}$ le foncteur $\mathscr{I}_{X.} \to p$-$h\mathscr{S}$ qui envoie l'objet i sur la composante connexe $X_{i\,(\alpha_i)}$ de X_i correspondant à l'image α_i de α par l'application continue $\pi_0(X_.) \to \pi_0(X_i)$. Le pro-$p$-espace $X_{.(\alpha)}$ s'appellera la composante connexe de $X_.$ associée à α; $\pi_0(X_{.(\alpha)})$ est réduit à un élément et la morphisme naturel de pro-p-espaces $X_{.(\alpha)} \to X_.$ induit l'inclusion $\{\alpha\} \cong \pi_0(X_{(\alpha).}) \subsetneq \pi_0(X_.)$.

Lorsque l'ensemble pro-fini $\pi_0(X_.)$ est réduit au singleton $\{\alpha\}$, ce que nous traduirons en disant que $X_.$ est connexe, on vérifie facilement que le morphisme $X_{.(\alpha)} \to X_.$ est un isomorphisme. En particulier, tout pro-p-espace connexe $X_.$ est isomorphe à un pro-p-espace $Y_.$ tel que Y_i est connexe pour tout objet i de $\mathscr{I}_Y$.

Soit X un espace. On se convainc facilement que le π_0 du p-complété $\hat{X}^p_{\bullet}$ de X s'identifie au complété pro-fini de l'ensemble $\pi_0(X)$ (*voir* 1.4.2). Pour tout élément α de $\pi_0(X)$ la composante connexe $\hat{X}^p_{\bullet(\alpha)}$ s'identifie au p-complété $X^p_{(\alpha)\bullet}$ de la composante connexe de X correspondant à α. En revanche la composante connexe associée à un élément du complémentaire de $\pi_0(X)$ dans $\pi_0(X)$ est plus mystérieuse (*voir* la démonstration du théorème 1.5.4).

Plus généralement, soient $X_{\bullet}$ un pro-p-espace et S un sous-ensemble fermé de $\pi_0(X_{\bullet})$. On définit sans peine comme ci-dessus le localisé $X_{\bullet(S)}$ de $X_{\bullet}$ en S de telle sorte que l'application continue $\pi_0(X_{\bullet(S)}) \to \pi_0(X_{\bullet})$ induite par le morphisme $X_{\bullet(S)} \to X_{\bullet}$ s'identifie à l'inclusion $S \subsetneq \pi_0(X_{\bullet})$.

1.5.2. *Limite du pro-p-espace sous-jacent à un pro-p-espace pointé.* — L'objectif de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1.5.2.1. — *Soit* $X_{\bullet}$ *un pro-p-espace pointé. Alors le morphisme naturel de pro-espaces* $|X_{\bullet}| \to X_{\bullet}$ *définit l'espace sous-jacent à l'espace pointé connexe* $|X_{\bullet}|$ *comme limite du* $h\mathscr{S}$*-diagramme sous-jacent à* X.

Démonstration. — Soit W un espace. On note $\mathscr{F}'_W$ la petite catégorie cofiltrante dont les objets sont les $h\mathscr{S}$-morphismes $F \to W$, F parcourant l'ensemble des espaces dont le π_0 est fini et tels que chacune des composantes connexes (arbitrairement pointée) appartient à la catégorie $\mathscr{F}'$ choisie en 1.4.4. Les morphismes de $\mathscr{F}'_W$ sont les $h\mathscr{S}$-triangles commutatifs évidents.

LEMME 1.5.2.2. — *Soient* $X_{\bullet}$ *un pro-p-espace pointé et* W *un espace. L'application naturelle* :

$$\Phi: \quad [W, |X|]' \to \operatorname{Lim}_{(\mathscr{F}'_W)^{\text{opp}} \times \mathscr{I}_{X.}} [F, X_i]'$$

est alors bijective.

Démonstration. — On se ramène sans problème au cas où W est un espace connexe, que l'on pointe alors. Soit $(x_\alpha)_{\alpha \in (\mathscr{F}_W)^{\text{opp}} \times \mathscr{I}_{X.}}$ un élément de l'ensemble $\operatorname{Lim}_{(\mathscr{F}_W)^{\text{opp}} \times \mathscr{I}_{X.}} [W', X_i]'$. Pour tout objet α de $(\mathscr{F}_W)^{\text{opp}} \times \mathscr{I}_{X.}$, notons S_α l'orbite de $[W', X_i]$ (sous l'action de $\pi_1(X_i)$) correspondant à x_α; c'est un ensemble fini. On obtient ainsi un système projectif $\{S_\alpha\}_\alpha$ d'ensembles finis. Sa limite est un sous-ensemble non vide de $[W, |X_{\bullet}|]$ (proposition 1.4.2). Soit y un élément de cet ensemble; on vérifie immédiatement que l'image de y par l'application $[W, |X_{\bullet}|] \to \operatorname{Lim}_{(\mathscr{F}_W)^{\text{opp}} \times \mathscr{I}_{X.}} [W', X_i]'$ est $(x_\alpha)_\alpha$ ce qui établit la surjectivité de Φ. La démonstration de l'injectivité est analogue et laissée au lecteur. ■

Le lemme 1.5.2.2 implique en particulier que l'application naturelle :

$$\Phi: \quad [W, X]' \to \operatorname{Lim}_{(\mathscr{F}'_W)^{\text{opp}}} [F, X]'$$

est bijective lorsque X est un espace connexe p-π_*-fini. Le lemme 1.5.2.2, à nouveau, et une formule de Fubini appropriée sur les limites montrent que l'application naturelle :

$$\Phi: \quad [W, X]' \to \operatorname{Lim}_{\mathscr{I}_{X.}} [W, X_i]'$$

est bijective ce qui établit le théorème. ■

Remarques. — Compte tenu du lemme 1.4.4.4, le lemme 1.5.2.2 montre que pour tout pro-p-espace pointé $X_{\bullet}$ et tout espace W l'ensemble $[W, |X_{\bullet}|]'$ est muni d'une structure naturelle d'ensemble pro-fini; la projection $[W, |X_{\bullet}|] \twoheadrightarrow [W, |X_{\bullet}|]'$ est continue. On pourra d'ailleurs remarquer que l'action naturelle de Lim $\pi_1(X_{\bullet})$ sur $[W, |X_{\bullet}|]$ est continue (au sens évident).

Achevons ce paragraphe par quelques remarques. On dit qu'un pro-p-espace $X_{\bullet}$ se relève en un pro-p-espace pointé s'il existe un pro-p-espace pointé $Y_{\bullet}$ dont le pro-p-espace sous-jacent est isomorphe à $X_{\bullet}$. Le théorème 1.5.2.1 implique donc qu'un pro-p-espace qui se relève en un pro-p-espace pointé admet une limite (deux pro-p-espaces isomorphes ont des limites isomorphes).

Il est clair qu'un pro-p-espace qui se relève en un pro-p-espace pointé est connexe. Nous ignorons si la réciproque est vraie.

On peut aussi considérer le problème suivant: étant donné un morphisme f entre les pro-p-espaces sous-jacents à des pro-p-espaces pointés, existe-t-il un morphisme de pro-p-espaces pointés qui relève f (en un sens analogue au précédent). De tels résultats seraient très satisfaisants car ils permettraient de formuler des réciproques « optimales » aux résultats du paragraphe 3.4.

Notons que si tel était le cas, tout pro-p-espace connexe admettrait une limite et le théorème 1.5.3.1 que nous démontrerons au prochain paragraphe impliquerait alors que tout pro-p-espace admet une limite.

Nous verrons au paragraphe 2.6 deux cas où l'on sait résoudre les problèmes précédents.

1.5.3. *Une caractérisation de la limite d'un pro-p-espace.*

THÉORÈME 1.5.3.1. — *Soient* $X_{\bullet}$ *un pro-p-espace,* Y *un espace et* $f: Y \to X_{\bullet}$ *un morphisme de pro-espaces. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) f *définit l'espace* Y *comme limite du* $h\mathcal{S}$*-diagramme sous-jacent à* $X_{\bullet}$;

(ii) *l'application naturelle* $\pi_0(Y) \to \pi_0(X_{\bullet})$ *est bijective et pour tout élément* α *de* $\pi_0(Y)$ *le morphisme de pro-espaces* $Y_{(\alpha)} \to X_{\bullet(\alpha)}$ *définit l'espace* $Y_{(\alpha)}$ *comme limite du* $h\mathcal{S}$*-diagramme sous-jacent à* $X_{\bullet(\alpha)}$.

Démonstration. — Elle repose sur le lemme suivant:

LEMME 1.5.3.2. — *Soient* $X_{\bullet}$ *un pro-p-espace,* W *un espace et* α *un élément de* $\pi_0(X_{\bullet})$. *Alors le diagramme d'ensembles suivant est cartésien*:

$$\begin{array}{ccc} \lim_{\mathcal{I}_{X_{\bullet}}} [W, X_{i\,(\alpha_i)}]' & \to & \lim_{\mathcal{I}_{X_{\bullet}}} \Big(\coprod_{\beta_i \in \pi_0(X_i)} [W, X_{i\,(\beta_i)}]' \Big) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\alpha\} & \to & \pi_0(X_{\bullet}) \cong \lim_{\mathcal{I}_{X_{\bullet}}} \pi_0(X_i) \end{array}$$

La démonstration ne pose pas de difficulté majeure; on fait une « chasse » aux éléments dans les limites filtrantes. Les détails sont laissés au lecteur.

Démonstration de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $*$ l'espace réduit à un point. Par hypothèse, l'application $\pi_0(Y) \cong [*, Y]' \to \mathrm{Lim}_{\mathscr{I}_{X.}} [*, X_i]' = \pi_0(X_.)$ est une bijection. Il reste donc à montrer que pour tout espace W l'application

$$\theta_\alpha : \quad [W, Y_{(\alpha)}]' \to \mathrm{Lim}_{\mathscr{I}_{X.}} [W, X_{i\,(\alpha_i)}]'$$

est bijective. Par hypothèse, l'application

$$\Theta : \prod_{\alpha \in \pi_0(Y)} [W, Y_{(\alpha)}]' \to \mathrm{Lim}_{\mathscr{I}_{X.}} \Big(\prod_{\beta_i \in \pi_0(X_i)} [W, X_{i\,(\beta_i)}]' \Big)$$

est bijective pour tout espace W; la bijectivité de θ_α en découle immédiatement compte tenu du lemme 1.5.3.2.

Réciproquement, la bijectivité de l'application Θ découle de celle des applications θ_α et du même lemme 1.5.3.2, ce qui démontre l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). ■

1.5.4. *Existence de la limite du p-complété d'un espace.*

THÉORÈME 1.5.4. — *Soit* X *un espace. Le* $h\mathscr{S}$*-diagramme sous-jacent au p-complété* $\hat{X}^p_.$ *de* X *admet une limite (notée* $|\hat{X}^p_.|$*). L'ensemble pro-fini* $\pi_0(X_.)$ *s'identifie au complété pro-fini de l'ensemble* $\pi_0(X)$ *et pour chaque élément* α *de* $\pi_0(X)$ *l'espace* $|\hat{X}^p_.|_{(\alpha)}$ *s'identifie à la limite du p-complété de la composante connexe de* X *correspondant à* α.

Démonstration. — Il suffit de démontrer la première assertion car les deux autres résultent du théorème 1.5.3.1 et de ce qui a été dit au paragraphe 1.5.1.

Soit X un espace. On pointe une fois pour toutes chacune des composantes connexes de X. On choisit ensuite une petite sous-catégorie pleine $\mathscr{E}$-f de la catégorie $\mathscr{E}ns$-f des ensembles finis telle que l'inclusion $\mathscr{E}$-$f \subsetneq ns$-f est une équivalence de catégories. On considère alors la petite catégorie $\mathscr{F}'_p(X)$ définie de la façon suivante.

Un objet de $\mathscr{F}'_p(X)$ est un triplet $(f, \{F_e\}, \{\varphi_\alpha\})$ formé d'une application surjective $f : \pi_0(X) \to E$, avec E dans $\mathscr{E}$-f, d'une famille $\{F_e\}_E$ indexée par E d'espaces pointés connexes p-π_*-finis appartenant à la petite catégorie $\mathscr{F}_p$ (choisie dans la démonstration de 1.3.2) et pour chaque élément α de $\pi_0(X)$ d'un $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphisme $\varphi_\alpha : X_{(\alpha)} \to F_{f(\alpha)}$.

Un $\mathscr{F}'_p(X)$-morphisme de $(f, \{F_e\}, \{\varphi_\alpha\})$ vers $(f', \{F'_{e'}\}, \{\varphi'_\alpha\})$ est la donnée (avec des notations évidentes) d'une application $g : E \to E'$ telle que $g \circ f = f'$ et pour chaque élément e de E d'un $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphisme $\psi_e : F_e \to F'_e$ tel que pour tout élément α de $\pi_0(X)$ on ait l'égalité $\psi_{f(\alpha)} \circ \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha$.

Cette catégorie $\mathscr{F}'_p(X)$ est filtrante. On doit pour s'en convaincre vérifier les points (i) et (ii) de 1.3.2.

Vérification du point (i). Soient $(f, \{F_e\}, \{\varphi_\alpha\})$ et $(f', \{F'_{e'}\}, \{\varphi'_\alpha\})$ deux objets de $\mathscr{F}'_p(X)$. Notons E″ l'image de l'application naturelle $(f, f') : \pi_0(X) \to E \times E'$. Soit $e'' = (e, e')$ un élément de E″ et notons $F''_{e''}$ le produit $F_e \times F'_{e'}$. Enfin, pour chaque élément α de $\pi_0(X)$ notons $\varphi''_\alpha : X_{(\alpha)} \to F_{f(\alpha)} \times F'_{f'(\alpha)}$ le $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphisme induit par φ_α et φ'_α. Le triplet $(f'', \{F''_{e'}\}, \{\varphi''_\alpha\})$ est un objet de $\mathscr{F}'_p(X)$ et il existe clairement des $\mathscr{F}'_p(X)$-morphismes (induits par les «projections») de $(f'', \{F''_{e'}\}, \{\varphi''_\alpha\})$ vers $(f, \{F_e\}, \{\varphi_\alpha\})$ et de $(f'', \{F''_{e'}\}, \{\varphi''_\alpha\})$ vers $(f', \{F'_{e'}\}, \{\varphi'_\alpha\})$. Celà établit le point (i).

Vérification du point (ii). On procède comme ci-dessus en s'inspirant de la démonstration de 1.3.2 (on utilise encore «l'égaliseur homotopique» de deux $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphismes). Les détails sont laissés au lecteur.

On note $\hat{X}^{p'}_{\bullet}$ le foncteur $\mathscr{F}'_p(X) \to p\text{-}h\mathscr{S}.\ (f, \{F_e\}, [\varphi_\alpha\}) \mapsto \coprod_{e \in E} F_e$; c'est donc un pro-$p$-espace. On a un morphisme naturel de pro-espaces $X \to \hat{X}^{p'}_{\bullet}$ et ce dernier induit un morphisme naturel de pro-p-espaces $\hat{X}^p_{\bullet} \to \hat{X}^{p'}_{\bullet}$ (c'est formel, *voir* la remarque (2) ci-dessous); ce morphisme est manifestement un isomorphisme (utiliser le lemme 1.3.1).

Soit α un élément de $\pi_0(X)$ et notons $\hat{X}^{p'}_{\bullet(\alpha)}$ le pro-p-espace pointé $\mathscr{F}'_p(X) \to p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$, $(f, \{F_e\}, \{\varphi_\alpha\}) \mapsto F_{f(\alpha)}$; le pro-$p$-espace sous-jacent à $\hat{X}^{p'}_{\bullet(\alpha)}$ s'identifie à la composante connexe de $\hat{X}^{p'}_{\bullet}$ correspondant à α. D'après le théorème 1.5.2.1 le $h\mathscr{S}$-diagramme sous-jacent à $\hat{X}^{p'}_{\bullet(\alpha)}$ admet une limite; le morphisme de pro-espaces $\coprod_{\alpha \in \pi_0(X)} |\hat{X}^{p'}_{\bullet(\alpha)}| \to \hat{X}^p_{\bullet}$ vérifie clairement les hypothèses du théorème 1.5.3.1 ce qui achève la démonstration du théorème 1.5.4. ■

Remarques. — (1) Il apparaît dans la démonstration du théorème 1.5.4 que chacune des composantes connexes de $\hat{X}^p_{\bullet}$ se révèle en un pro-p-espace pointé. Nous verrons en 3.1 des exemples de pro-p-espaces connexes possédant une limite et pour lesquels l'auteur ignore s'ils se relèvent en des pro-p-espaces pointés.

(2) Soit X un espace. Le morphisme de pro-espaces $X \to \hat{X}^p_{\bullet}$ s'interprète aussi (utiliser la remarque (2) de 1.3.2) comme l'objet initial de la catégorie dont les objets sont les morphismes de pro-espaces $X \to Y_{\bullet}$, avec $Y_{\bullet}$ un pro-p-espace. Le $h\mathscr{S}$-morphisme naturel $X \to |\hat{X}^p_{\bullet}|$ induit un morphisme naturel de pro-p-espaces $\varepsilon : \hat{X}^p_{\bullet} \to |\hat{X}^p_{\bullet}|^p_{\bullet}$ et le morphisme naturel de pro-espaces $|\hat{X}^p_{\bullet}| \to \hat{X}^p_{\bullet}$ induit donc par universalité un morphisme de pro-p-espaces $\eta : |\hat{X}^p_{\bullet}|^p_{\bullet} \to \hat{X}^p_{\bullet}$; on vérifie que le composé $\eta \circ \varepsilon$ est le morphisme identique de $\hat{X}^p_{\bullet}$. Ainsi, le p-complété $\hat{X}^p_{\bullet}$ de X est naturellement rétracte de $\widehat{|\hat{X}^p_{\bullet}|}^p_{\bullet}$.

2. Cohomologie continue des pro-p-espaces

2.1. Cohomologie continue à coefficients locaux

2.1.1. Soient $X_{\bullet}$ un pro-p-espace pointé, dont on note π le pro-p-groupe fondamental, et M un π-module discret (*i.e.* le stabilisateur de tout élément m de M est ouvert dans π, *voir* [Se] § 2.1).

Soit U un sous-groupe ouvert distingué de π. On note M^U le sous-π-module de M formé des invariants par U. L'action de π sur M^U est induite par une action du p-groupe fini π/U via la projection $\pi \twoheadrightarrow \pi/U$. On pourra remarquer que M est la réunion des M^U, U parcourant l'ensemble préordonné (par l'inclusion) filtrant à droite des sous-groupes ouverts distingués de π (*voir* [Se] § 2.1).

Soient i un objet de la catégorie $\mathscr{I}_{X_{\bullet}}$ et U_i le sous-groupe ouvert distingué noyau de l'homomorphisme continu $\pi \to \pi_1(X_i)$. Il existe un $\mathscr{I}_{X_{\bullet}}$-morphisme $j \to i$ tel que l'image de $\pi_1(X_j) \to \pi_1(X_i)$ soit contenue dans (en fait égale à) celle de $\pi \to \pi_i(X_i)$, c'est-à-dire

π/U_i. L'homomorphisme $\pi_1(\mathrm{X}_j) \to \pi/\mathrm{U}_i$ ainsi obtenu induit une structure de $\pi_1(\mathrm{X}_j)$-module sur $\mathrm{M}^{\mathrm{U}_i}$.

On note $\mathscr{I}'_{\mathrm{X}.}$ la catégorie filtrante dont les objets sont les $\mathscr{I}_{\mathrm{X}.}$-morphismes $j \to i$ tels que l'image de $\pi_1(\mathrm{X}_j) \to \pi_1(\mathrm{X}_i)$ soit contenue dans celle de $\pi \to \pi_1(\mathrm{X}_i)$ et dont les morphismes sont les carrés commutatifs $\begin{array}{ccc} j' & \to & i' \\ \downarrow & & \downarrow \\ j & \to & i \end{array}$. On a un foncteur oubli évident $\mathscr{I}'_{\mathrm{X}.} \to \mathscr{I}_{\mathrm{X}.}$, $(j \to i) \mapsto i$ et ce qui précède montre qu'il est final.

Soit $n \geqq 0$ un entier. On pose $\mathrm{H}^n_c(\mathrm{X}_.;\, \mathrm{M}) = \mathrm{Colim}_{\mathscr{I}'_{\mathrm{X}.}} \mathrm{H}^n(\mathrm{X}_j, \mathrm{M}^{\mathrm{U}_i})$. Le groupe abélien $\mathrm{H}^n_c(\mathrm{X}_.;\, \mathrm{M})$ s'appelle le n-ième groupe de cohomologie continue de $\mathrm{X}_.$ à coefficients dans M.

Pour tout morphisme $f : \mathrm{X}_. \to \mathrm{Y}_.$ de pro-p-espaces pointés et tout $\pi_1 \mathrm{Y}_.$-module discret M, f induit un homomorphisme naturel :

$$\mathrm{H}^*_c f : \mathrm{H}^*_c(\mathrm{Y}_.;\, \mathrm{M}) \to \mathrm{H}^*_c(\mathrm{X}_.;\, \mathrm{M}).$$

La catégorie (abélienne) π-mod$^\delta$ des π-modules discrets possède des colimites filtrantes arbitraires. Le lemme suivant généralise [Se], paragraphe 2, proposition 8 :

LEMME 2.1.1. — *Soient* $\mathrm{X}_.$ *un pro-p-espace pointé,* π *son pro-p-groupe fondamental,* I *une petite catégorie cofiltrante et* $\mathrm{N}_. : \mathrm{I} \to \pi\text{-mod}^\delta$ *un foncteur covariant. Alors l'homomorphisme naturel de groupes abéliens* :

$$\mathrm{Colim}_{\mathrm{I}}\, \mathrm{H}^*_c(\mathrm{X}_.;\, \mathrm{N}_i) \to \mathrm{H}^*_c(\mathrm{X}_.;\, \mathrm{Colim}_{\mathrm{I}}\, \mathrm{N}_i)$$

est un isomorphisme. En particulier, pour tout π*-module discret* M *l'homomorphisme naturel de groupes abéliens* :

$$\mathrm{Colim}_{\mathrm{U}}\, \mathrm{H}^*_c(\mathrm{X}_.;\, \mathrm{N}^{\mathrm{U}}) \to \mathrm{H}^*_c(\mathrm{X}_.;\, \mathrm{N})$$

est un isomorphisme (U *parcourant l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués de* π).

Démonstration. — L'affirmation du lemme est vraie lorsque $\mathrm{X}_.$ est un espace d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\mathbb{F}_p, n)$, $n \geqq 1$. L'assertion lorsque $\mathrm{X}_.$ est un espace pointé connexe p-π_*-fini en découle en utilisant une récurrence sur la tour de la proposition 1.2 et la suite spectrale de Serre cohomologique. Le cas général s'en déduit aisément. ■

Remarques. — (1) Lorsque l'action de π sur M se factorise par un des homomorphismes continus $\pi \to \pi_1(\mathrm{X}_i)$, on retrouve bien les groupes de cohomologie définis dans [AM], paragraphe 2 en (2.3).

(2) Lorsque $\mathrm{X}_.$ est le classifiant du pro-p-groupe π (*voir* 1.3.3), les groupes $\mathrm{H}^n_c(\mathrm{X}_.;\, \mathrm{M})$ coïncident avec les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^n(\pi;\, \mathrm{M})$ de π à coefficients dans le π-module discret M définis dans [Se] paragraphe 2.2.

(3) Soient G un pro-p-groupe simplicial et M un $\pi_0\,\mathrm{G}$-module discret. On considère le pro-p-espace pointé $\{\mathrm{Q}^n \bar{\mathrm{W}}(\mathrm{G}/\mathrm{U})\}_{\mathrm{U},\, n}$, U parcourant l'ensemble des sous-groupes simpliciaux distingués de G et $\bar{\mathrm{W}}$ désignant le foncteur « espace classifiant » [May]. Pour toute

paire (U, n) l'espace pointé connexe $Q^n \bar{U}(G/U)$ est p-π_*-fini (car G/U est un p-groupe fini simplicial) et le $h\mathcal{S}^0_{pt}$-morphisme $\bar{W}|G| \to |\mathrm{Lim}_{U,n} Q^n \bar{W}(G/U)|$ est un isomorphisme (utiliser [Qu2] (1.1), § 1).

On se convainc que les groupes $H^n_c(\{Q^n \bar{W}(G/U)\}_{U,n}; M)$ définis ci-dessus coïncident avec les groupes de cohomologie $H^n(G; M)$ du pro-p-groupe simplicial G à coefficients dans M définis dans [Qu2].

2.1.2. *Cohomologie modulo p continue des pro-p-espaces.* — Soient $X_\bullet$ un pro-p-espace (non nécessairement pointé) et $n \geqq 0$ un entier. Il est clair que l'on ne peut pas définir la cohomologie continue de $X_\bullet$ à coefficients locaux puisque par exemple on ne dispose pas de groupe fondamental. En revanche on peut définir la cohomologie de $X_\bullet$ à coefficients constants.

On note $H^n_c(X_\bullet; \mathbb{F}_p) = \mathrm{Colim}_{\mathcal{I}_{X_\bullet}} H^n(X_i; \mathbb{F}_p)$ le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel colimite filtrante du foncteur qui à tout objet i de $\mathcal{I}_{X_\bullet}$ associe $H^n(X_i; \mathbb{F}_p)$. Bien sûr, lorsque que $X_\bullet$ est un pro-p-espace pointé, sa cohomologie modulo p continue s'identifie à celle du pro-p-espace sous-jacent et l'on ne distinguera pas ces deux objets.

Puisque pour tout espace Y la cohomologie $H^*(Y; \mathbb{F}_p)$ est de façon naturelle une $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée commutative il en est de même de $H^*_c(X_\bullet; \mathbb{F}_p) = \mathrm{Colim}_{\mathcal{I}_{X_\bullet}} H^*(X_i; \mathbb{F}_p)$. En fait, $H^*_c(X_\bullet; \mathbb{F}_p)$ est même une algèbre instable sur l'algèbre de Steenrod modulo p et l'égalité précédente a lieu dans la catégorie $\mathcal{K}$ des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p (*voir* par exemple [La1], § 1.7 pour une définition de $\mathcal{K}$; la catégorie $\mathcal{K}$ est stable par colimites filtrantes); cette structure de la cohomologie modulo p continue des pro-p-espaces sera fondamentale dans la partie 3.

Relations entre le $H^0_c(-; \mathbb{F}_p)$ *et l'ensemble des composantes connexes d'un pro-p-espace.*

Soit $X_\bullet$ un pro-p-espace. On vient de voir que la cohomologie modulo p continue $H^*_c(X_\bullet; \mathbb{F}_p)$ est une $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée associative, commutative et unitaire. Le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $H^0_c(X_\bullet; \mathbb{F}_p)$ des éléments de $H^*_c(X_\bullet; \mathbb{F}_p)$ de degré zéro est donc une $\mathbb{F}_p$-algèbre associative, commutative et unitaire. En fait c'est même une algèbre p-booléenne.

Rappelons qu'une algèbre p-booléenne est une $\mathbb{F}_p$-algèbre associative, commutative et unitaire pour laquelle le Frobénius (*i.e.* l'élévation à la puissance p) est l'application identique. Par exemple pour tout ensemble S la $\mathbb{F}_p$-algèbre B_S des applications de S vers $\mathbb{F}_p$ est p-booléenne. De plus la colimite filtrante d'algèbres p-booléennes est encore p-booléenne. On en déduit bien que pour tout pro-p-espace $X_\bullet$ la $\mathbb{F}_p$-algèbre $H^0_c(X_\bullet; \mathbb{F}_p)$ est p-booléenne; en effet pour tout espace X la $\mathbb{F}_p$-algèbre $H^0(X_\bullet; \mathbb{F}_p)$ s'identifie à $B_{\pi_0 X}$ et est donc p-booléenne.

Soient $\mathcal{B}$ la catégorie des algèbres p-booléennes et B une algèbre p-booléenne. On note $\pi_0 B$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \mathbb{F}_p)$ des homomorphismes d'algèbres de B vers $\mathbb{F}_p$. Toute algèbre p-booléenne est la réunion de ses sous-algèbres p-booléenne de dimension finie; on en déduit que $\pi_0 B$ s'identifie naturellement à la limite filtrante des ensembles (finis) $\pi_0 B'$, B′ parcourant l'ensemble ordonné filtrant pour l'inclusion des sous-algèbres p-booléenne de dimension finie de B. L'ensemble pro-fini $\pi_0 B$ s'identifie d'ailleurs (comme espace topologique) au spectre Spec B de B (*i.e.* l'ensemble de ses idéaux premiers). On peut montrer que le foncteur $\pi_0 : \mathcal{B} \to \mathcal{E}ns\text{-}pf$ ainsi défini est une équivalence de catégories;

son inverse est le foncteur $\mathscr{E}ns\text{-}pf \to \mathscr{B}$ qui envoie un ensemble profini S sur l'algèbre p-booléenne B_S des applications continue de S vers $\mathbb{F}_p$. Tout se ramène à montrer que lorsque B est une algèbre p-booléenne de dimension finie, l'homomorphisme naturel $B \to B_{\pi_0 B}$ est un isomorphisme.

On déduit formellement de ce qui précède que pour tout ensemble S l'ensemble pro-fini $\pi_0(B_S)$ s'identifie au complété pro-fini de S.

Revenons à notre pro-p-espace X. D'après ce que l'on vient de rappeler, l'ensemble profini $\pi_0(H_c^0(X_\bullet; \mathbb{F}_p))$ s'identifie à l'ensemble pro-fini $\pi_0(X_\bullet)$ défini en 1.5.1 (puisque c'est vrai pour $X_\bullet$ p-π_*-fini).

Soit K une $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée associative, commutative et unitaire. On suppose que la $\mathbb{F}_p$-algèbre K^0 est p-booléenne. Pour tout élément s de $\pi_0 K^0$, on notera $K_{(s)}$ le localisé de K en s (que l'on considère ici comme un idéal premier de K^0); c'est une $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée associative, commutative, unitaire et $K^0_{(s)}$ est naturellement isomorphe à l'algèbre $\mathbb{F}_p$.

Par exemple, on vérifie facilement que pour tout pro-p-espace $X_\bullet$ et tout élément α de $\pi_0(X_\bullet)$, la $\mathbb{F}_p$-algèbre $H_c^*(X_\bullet)_{(s)}$ s'identifie naturellement à $H_c^*(X_{\bullet(s)})$ (*voir* 1.5.1 pour la définition de $X_{\bullet(s)}$; on peut développer des considérations analogues pour tout sous-ensemble fermé de $\pi_0(X_\bullet)$, *voir* [La1] § 1.8).

Cohomologie modulo p continue d'un p-complété. — Soit X un espace. On renvoie le lecteur en 1.3.2 pour la définition du p-complété $\hat{X}^p_\bullet$ de X. On définit un homomorphisme naturel de $\mathbb{F}_p$-algèbres graduées commutatives $\theta: H_c^*(\hat{X}^p_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H^*(X; \mathbb{F}_p)$ de la façon suivante. Pour tout objet $X \to F'$ de la catégorie source de $\hat{X}^p_\bullet$ (*voir* 1.3.2) on a un homomorphisme naturel de $\mathbb{F}_p$-algèbres graduées commutatives:

$$\theta: \quad H_c^*(\hat{X}^p_\bullet; \mathbb{F}_p) = \operatorname{Colim}_{\mathscr{I}} H^*(X_i; \mathbb{F}_p) \to H^*(X; \mathbb{F}_p)$$

(en fait θ est un homomorphisme d'algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p).

PROPOSITION 2.1.2.1. — *Pour tout espace* X, *l'homomorphisme naturel*:

$$\theta: \quad H_c^*(\hat{X}^p_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H^*(X; \mathbb{F}_p)$$

est un isomorphisme.

Remarque. — D'après ce qui précède, le π_0 de la $\mathbb{F}_p$-algèbre $H^0(X; \mathbb{F}_p)$ s'identifie au complété pro-fini de $\pi_0(X)$; la proposition précédente en degré zéro équivaut donc au fait déjà signalé en 1.5.1 que le π_0 de $\hat{X}^p_\bullet$ est le complété pro-fini de $\pi_0(X)$.

Démonstration. — D'après la remarque précédente il suffit d'établir la proposition en tout degré $n \geqq 1$. C'est formel à partir du lemme suivant dont la démonstration est laissée au lecteur. L'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{F}_p, n)$ (considéré comme un pro-p-espace constant) possède une classe «canonique» ι_n dans $H_c^n(K(\mathbb{F}_p, n), \mathbb{F}_p) = H^n(K(\mathbb{F}_p, n), \mathbb{F}_p)$.

LEMME 2.1.2.2. — *Soient* $X_{\bullet}$ *un pro-p-espace et* $n \geqq 0$ *un entier. Alors l'homomorphisme canonique induit par* ι_n :

$$[X_{\bullet}, K(\mathbb{F}_p, n)]_c \to H_c^n(X_{\bullet}, \mathbb{F}_p)$$

est un isomorphisme. ■

On reprend maintenant les notations de la remarque 2 du paragraphe 1.5.4.

COROLLAIRE 2.1.2.3. — *Soient* X *un espace. Alors les morphismes de pro-p-espaces* $\varepsilon : \hat{X}_{\bullet}^p \to \widehat{|\hat{X}_{\bullet}^p|}_{\bullet}^p$ *et* $\eta : \widehat{|\hat{X}_{\bullet}^p|}_{\bullet}^p \to \hat{X}_{\bullet}^p$ *font de la cohomologie* $H^* X$ *un rétracte naturel de la cohomologie* $H^* |\hat{X}_{\bullet}^p|$.

Le phénomène précédent admet un analogue dans le contexte de la p-complétion de Bousfield-Kan [BK].

2.2. LA SUITE SPECTRALE DE SERRE. — Dans ce paragraphe on se propose de définir la suite spectrale de Serre cohomologique pour deux types de morphismes entre pro-p-espaces pointés :

(1) le morphisme canonique $Q^n X_{\bullet} \to Q^{n-1} X_{\bullet}$, $n \geqq 1$, défini pour tout pro-p-espace pointé $X_{\bullet}$, la « fibre » de ce morphisme étant le pro-p-espace pointé d'Eilenberg-Mac Lane $K(\pi_n X_{\bullet}, n)$ (*voir* 1.3.3); (2) le morphisme $X_{\bullet} \to B\pi$ induit par un épimorphisme de pro-p-groupes $\pi_1 X_{\bullet} \to \pi$, la « fibre » de ce morphisme étant le revêtement $Y_{\bullet} \to X_{\bullet}$ correspondant au noyau de l'homomorphisme $\pi_1 X_{\bullet} \to \pi$ (*voir* 1.3.5).

Cette suite spectrale est abondamment employée dans [AM] (*voir* par exemple § 4, p. 38), [Su1] (§ 3 démonstration du théorème 3.1 et addendum p. 44) et dans [Qu2] Proposition 2.2 (*e*) (dans [Qu2] la notion de fibre et de suite spectrale de Serre existe toujours car on manipule des pro-objets à valeurs dans la catégorie des groupes simpliciaux et non pas des pro-objets à valeurs dans la catégorie homotopique comme c'est le cas ici).

En fait nous allons définir la suite spectrale de Serre dans la situation suivante (les cas (1) et (2) étant par construction des cas particuliers, *voir* 1.3.3 et 1.3.5).

Soient $X_{\bullet}$, $Y_{\bullet}$ et $Z_{\bullet}$ des pro-p-espaces pointés indexés par la même catégorie filtrante $\mathscr{I}$ (autrement dit $\mathscr{I}_{X_{\bullet}} = \mathscr{I}_{Y_{\bullet}} = \mathscr{I}_{Z_{\bullet}} = \mathscr{I}$) et $f_{\bullet} : Y_{\bullet} \to X_{\bullet}$ et $g_{\bullet} : Z_{\bullet} \to Y_{\bullet}$ des transformations naturelles de foncteurs tels que pour tout objet i de $\mathscr{I}$, le $h\mathscr{S}_{pt}^0$-diagramme $Z_i \to Y_i \to X_i$ est une $h\mathscr{S}_{pt}^0$-fibration.

En utilisant le théorème 1.4.1.1 on déduit de ces données un $h\mathscr{S}_{pt}^0$-diagramme $|Z_{\bullet}| \to |Y_{\bullet}| \to |X_{\bullet}|$. La possibilité de définir la suite spectrale de Serre pour ces données est motivée par la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2.1. — *Avec les données ci-dessus, le* $h\mathscr{S}_{pt}^0$*-diagramme* $|Z_{\bullet}| \to |Y_{\bullet}| \to |X_{\bullet}|$ *est une* $h\mathscr{S}_{pt}^0$*-fibration.*

Démonstration. — Il existe un $h\mathscr{S}_{pt}^0$-morphisme de $|Z_{\bullet}|$ dans la fibre homotopique de $|Y_{\bullet}| \to |X_{\bullet}|$; il suffit de vérifier que ce morphisme est un isomorphisme sur les groupes d'homotopie. On s'en convainc aisément à l'aide du corollaire 1.4.1.3 et du fait que la limite projective d'une suite exacte de groupes finis est une suite exacte (utiliser la proposition 1.4.2). ■

Remarque. — En particulier, pour tout pro-p-espace pointé $X_\bullet$, la tour d'espaces pointés connexes $\{|Q^n X_\bullet|\}_n$ est naturellement isomorphe à la tour de Postnikov de $|X_\bullet|$.

On conserve les données précédentes et on se donne de plus un $\pi_1 Y_\bullet$-module discret M. On considère la catégorie $\mathscr{I}'_{Y_\bullet}$ utilisée en 2.1 pour la définition des groupes $H^n_c(Y_\bullet, M)$. Pour chaque objet $j \to i$ de cette catégorie est alors définie la suite spectrale de Serre cohomologique $\{E^{p,q}_r\}_r (j \to i)$ de la $h\mathscr{S}^0_{pt}$-fibration $Z_j \to Y_j \to X_j$ à coefficients dans le $\pi_1 Y_j$-module M^{U_i}. Le terme $E^{p,q}_2$ de cette suite spectrale est :

$$E^{p,q}_2 = H^p(X_j; H^q(Z_j; M^{U_i})).$$

Cette suite spectrale dépend fonctoriellement de l'objet $j \to i$ de $\mathscr{I}'_{Y_\bullet}$. On note $\{E^{p,q}_r\}_r (Z_\bullet \to Y_\bullet \to X_\bullet; M)$ la suite spectrale « colimite » sur $\mathscr{I}'_{Y_\bullet}$ des suites spectrales $\{E^{p,q}_r\}_r (j \to i)$ précédemment définies. Autrement dit pour chaque entier $r \geqq 2$ on pose :

$$E^{*,*}_r(Z_\bullet \to Y_\bullet \to X_\bullet; M) = \operatorname{Colim} E^{*,*}_r(j \to i).$$

Chacun des termes $E^{*,*}_r(Z_\bullet \to Y_\bullet \to X_\bullet; M)$ est muni d'une différentielle et l'on appelle la suite spectrale obtenue la suite spectrale de Serre du diagramme $Z_\bullet \to Y_\bullet \to X_\bullet$ à coefficients dans M.

Cette suite spectrale a le « bon » terme $E^{p,q}_2$:

PROPOSITION 2.2.2. — *L'homomorphisme naturel de groupes abéliens* :

$$\operatorname{Colim}_{\mathscr{I}'_{Y_\bullet}} H^p(X_j; H^q(Z_j; M^{U_i})) \to H^p_c(X_\bullet; H^q_c(Z_\bullet; M))$$

est un isomorphisme pour tous entiers p et q, $p \geqq 0$, $q \geqq 0$.

Démonstration. — On remarque tout d'abord que l'homomorphisme naturel $\operatorname{Colim}_{\mathscr{I}'_{Y_\bullet}} H^q(Z_j; M^{U_i}) \to H^q_c(Z_\bullet; M)$ est un isomorphisme. D'après le lemme 2.1.1, l'homomorphisme naturel $\operatorname{Colim}_{\mathscr{I}'_{Y_\bullet}} H^p_c(X_\bullet; H^q(Z_j; M^{U_i})) \to H^p_c(X_\bullet; H^q_c(Z_\bullet; M))$ est un isomorphisme et l'on se convainc que, via les isomorphismes précédents, l'homomorphisme :

$$\operatorname{Colim}_{\mathscr{I}'_{Y_\bullet}} H^p(X_j; H^q(Z_j; M^{U_i})) \to H^p_c(X_\bullet; H^q_c(Z_\bullet; M))$$

s'identifie à la colimite des homomorphismes évidents

$$H^p(X_j; H^q(Z_j; M^{U_i})) \to H^p_c(X_\bullet; H^q(Z_j; M^{U_i})).$$

La fin de la démonstration est un exercice élémentaire de « chasse » aux éléments dans les colimites filtrantes, laissé au lecteur. ■

2.3. Comparaison entre la cohomologie modulo p d'un pro-p-espace pointé et la cohomologie modulo p de l'espace pointé connexe limite.

Soient $X_\bullet$ un pro-p-espace pointé et i un objet de $\mathscr{I}_{X_\bullet}$. Par construction on a un $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphisme naturel $|X_\bullet| \to X_i$ et donc un homomorphisme de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels gradués

$H^*(X_i; \mathbb{F}_p) \to H^*(|X|; \mathbb{F}_p)$. Cette collection d'homomorphismes définit un homomorphisme naturel de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels gradués :

$$\psi_{X_.}: \quad H_c^*(X_.; \mathbb{F}_p) = \mathrm{Colim}_{\mathscr{I}_{X_.}} H^*(X_i; \mathbb{F}_p)) \to H^*(|X_.|; \mathbb{F}_p).$$

(bien sûr, cet homomorphisme est un homomorphisme d'algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod, *voir* 2.1.2).

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

THÉORÈME 2.3.1. — *Soit* $X_.$ *un pro-p-espace pointé dont le groupe fondamental est un p-groupe fini. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *l'homomorphisme naturel* $\psi_{X_.}: H_c^*(X_.; \mathbb{F}_p) \to H^*(|X|; \mathbb{F}_p)$ *est un isomorphisme;*

(ii) *le* $\mathbb{F}_p$*-espace vectoriel gradué* $H_c^*(X_.; \mathbb{F}_p)$ *est fini en chaque degré.*

La première étape vers la démonstration du théorème précédent est le résultat suivant.

THÉORÈME 2.3.2. — *Soit* π *un pro-p-groupe abélien. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *pour tout entier* $n \geqq 1$ *l'homomorphisme*

$$\psi_{K(\pi, n)}: H_c^*(K(\pi, n); \mathbb{F}_p) \to H^*(|K(\pi, n)|; \mathbb{F}_p)$$

est un isomorphisme;

(ii) *il existe un entier* $n \geqq 1$ *tel que l'homomorphisme*

$$\psi_{K(\pi, n)}: H_c^n(K(\pi, n); \mathbb{F}_p) \to H^n(|K(\pi, n)|; \mathbb{F}_p)$$

est un isomorphisme;

(iii) *pour tout entier* $n \geqq 1$, $H_c^*(K(\pi, n); \mathbb{F}_p)$ *est fini en chaque degré;*

(iv) *il existe un entier* $n \geqq 1$ *tel que* $H_c^n(K(\pi, n); \mathbb{F}_p)$ *est fini;*

(v) *le* $\mathbb{F}_p$*-espace vectoriel* $(\mathrm{Lim}\,\pi) \otimes \mathbb{F}_p$ *est fini;*

(vi) *le* $\mathbb{Z}_p$*-module* $\mathrm{Lim}\,\pi$ *est de type fini,* $\mathbb{Z}_p$ *désignant l'anneau des entiers p-adiques.*

La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME 2.3.3. — *Soit* π *un pro-p-groupe abélien. Alors l'homomorphisme naturel de groupes abéliens* :

$$(\mathrm{Lim}\,\pi) \otimes \mathbb{F}_p = (\mathrm{Lim}_{\mathscr{I}_\pi} \pi_i) \otimes \mathbb{F}_p \to \mathrm{Lim}_{\mathscr{I}_\pi} (\pi_i \otimes \mathbb{F}_p)$$

est un isomorphisme ($\mathscr{I}_\pi$ *désigne la petite catégorie filtrante source du foncteur* π).

Démonstration. — Pour tout objet i de la catégorie $\mathscr{I}_\pi$ on a la suite exacte de groupes abéliens finis :

$$\pi_i \xrightarrow{\times p} \pi_i \to \pi_i \otimes \mathbb{F}_p \to 0.$$

Par exactitude du foncteur « Lim » sur les groupes pro-finis (utiliser 1.4.2) on obtient l'exactitude de la suite $\mathrm{Lim}\,\pi \xrightarrow{\times p} \mathrm{Lim}\,\pi \to \mathrm{Lim}_{\mathscr{I}_\pi}(\pi_i \otimes \mathbb{F}_p) \to 0$; c'est le résultat annoncé. ∎

Démonstration du théorème 2.3.2. — Les implications (i) ⇒ (ii) et (iii) ⇒ (iv) sont triviales.

Nous démontrons l'implication (ii) ⇒ (iv). D'après le corollaire 1.4.1.3, $|\mathrm{K}(\pi, n)|$ est naturellement $h\mathscr{S}^0_{pt}$-isomorphe à $\mathrm{K}(\mathrm{Lim}\,\pi, n)$. On note E^* le dual d'un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel E. Le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathrm{H}^n(\mathrm{K}(\mathrm{Lim}\,\pi, n); \mathbb{F}_p)$ s'identifie alors naturellement à $((\mathrm{Lim}\,\pi) \otimes \mathbb{F}_p)^*$; d'après le lemme 2.3.3, $(\mathrm{Lim}\,\pi) \otimes \mathbb{F}_p$ s'identifie au $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel pro-fini $\mathrm{Lim}_{\mathscr{I}_\pi}(\pi_i \otimes \mathbb{F}_p)$, qui s'identifie lui-même, comme $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel pro-fini, à $(\mathrm{Colim}_{\mathscr{I}_\pi}(\pi_i \otimes \mathbb{F}_p)^*)^*$. Ainsi, $\mathrm{H}^n(\mathrm{K}(\mathrm{Lim}\,\pi, n); \mathbb{F}_p)$ s'identifie naturellement, comme $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel pro-fini, au bidual $(\mathrm{Colim}_{\mathscr{I}_\pi}(\pi_i \otimes \mathbb{F}_p)^*)^{**}$. Le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathrm{H}^n_c(\mathrm{K}(\mathrm{Lim}\,\pi, n); \mathbb{F}_p)$ s'identifie quant à lui, par définition, à $\mathrm{Colim}_{\mathscr{I}_\pi}(\pi_i \otimes \mathbb{F}_p)^*$. On vérifie que via ces identifications, l'homomorphisme :

$$\psi_{\mathrm{K}(\pi, n)} : \mathrm{Colim}_{\mathscr{I}_\pi}(\pi_i \otimes \mathbb{F}_p)^* \cong \mathrm{H}^n_c(\mathrm{K}(\mathrm{Lim}\,\pi, n); \mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{K}(\mathrm{Lim}\,\pi, n); \mathbb{F}_p) \cong (\mathrm{Colim}_{\mathscr{I}_\pi}(\pi_i \otimes \mathbb{F}_p)^*)^{**}$$

est l'inclusion naturelle de $\mathrm{Colim}_{\mathscr{I}_\pi}(\pi_i \otimes \mathbb{F}_p)^*$ dans son bidual. Ainsi $\psi_{\mathrm{K}(\pi, n)}$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{H}^n_c(\mathrm{K}(\mathrm{Lim}\,\pi, n); \mathbb{F}_p)$ est de dimension finie. Celà montre l'implication (ii) ⇒ (iv).

Supposons qu'il existe $n \geqq 1$ tel que $\mathrm{H}^n_c(\mathrm{K}(\pi, n); \mathbb{F}_p)$ est de dimension finie. D'après ce qui précède $\mathrm{H}^n(\mathrm{K}(\mathrm{Lim}\,\pi, n); \mathbb{F}_p) \cong ((\mathrm{Lim}\,\pi) \otimes \mathbb{F}_p)^*$ est de dimension finie et donc $(\mathrm{Lim}\,\pi) \otimes \mathbb{F}_p$ aussi, ce qui établit l'implication (iv) ⇒ (v).

Soit π un pro-p-groupe tel que $(\mathrm{Lim}\,\pi) \otimes \mathbb{F}_p$ est de dimension finie. On choisit une base $\{f_\alpha\}_\alpha$ de $(\mathrm{Lim}\,\pi) \otimes \mathbb{F}_p$ et des éléments $\{e_\alpha\}_\alpha$ de $\mathrm{Lim}\,\pi$ tels que e_α se réduit modulo p à f_α. Il est clair que $\mathrm{Lim}\,\pi$ est complet pour la filtration p-adique et l'on en déduit un homomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules $\oplus_\alpha \mathbb{Z}_p \to \mathrm{Lim}\,\pi$; cet homomorphisme est surjectif par construction (utiliser à nouveau la complétude de Lim π pour la filtration p-adique). On a démontré l'implication (v) ⇒ (vi).

Soit π un pro-p-groupe tel que $\mathrm{Lim}\,\pi$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini; $\mathrm{Lim}\,\pi$ est donc isomorphe à une somme directe finie de groupes abéliens isomorphes soit à un groupe cyclique d'ordre une puissance de p soit à $\mathbb{Z}_p$. On en déduit que π est isomorphe au pro-p-groupe $\{\pi/p^n\pi\}_n$ (la structure pro-p-finie de π est donc « intrinsèque » au groupe abélien $\mathrm{Lim}\,\pi$ (*voir* [Su1] §3 corollaire du théorème 3.1). Le calcul par H. Cartan [Cart] de la cohomologie modulo p des espaces d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\mathrm{A}, n)$, avec A un groupe abélien tel que $\mathrm{A} \otimes \mathbb{F}_p$ et $\mathrm{Tor}(\mathrm{A}, \mathbb{F}_p)$ sont finis, permet de vérifier le point (i) (signalons que, pour éviter un recours aux résultats de Cartan, on pourrait aussi commencer par vérifier (i) « à la main » pour $n=1$ et utiliser la suite spectrale de Serre et une récurrence sur n pour montrer (i) (comparer à [Su1] § 3 addendum p. 44). Ceci achève la démonstration du théorème 2.3.2. ∎

Démonstration du théorème 2.3.1

LEMME 2.3.4. — *Soient* $Y_\bullet$ *un pro-p-espace pointé et* $n \geqq 1$ *un entier. Alors l'homomorphisme naturel*:

$$H_c^k(Y_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H_c^k(Q^n Y_\bullet; \mathbb{F}_p)$$

est un isomorphisme pour tout entier k, $n \geqq k \geqq 1$, *et est injectif pour* $k = n+1$.

Démonstration. — C'est vrai pour $Y_\bullet$ un espace pointé connexe p-π_*-fini. Le cas général s'en déduit. ■

LEMME 2.3.5. — *Soit* $Y_\bullet$ *un pro-p-espace pointé; alors pour tout entier* $n \geqq 2$ *la suite spectrale de Serre à coefficients dans* $\mathbb{F}_p$ *pour le morphisme* $Q^n Y_\bullet \to Q^{n-1} Y_\bullet$ (*voir* 2.2) *fournit une suite exacte naturelle* (*en* $Y_\bullet$):

$$0 \to H_c^n(Q^{n-1} Y_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H_c^n(Q^n Y_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H_c^n(K(\pi_n(Y_\bullet), n); \mathbb{F}_p)$$
$$\to H_c^{n+1}(Q^{n-1} Y_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H_c^{n+1}(Q^n Y_\bullet; \mathbb{F}_p).$$

Démonstration. — C'est vrai pour $Y_\bullet$ un espace pointé connexe p-π_*-fini. Le cas général s'en déduit. ■

Nous montrons tout d'abord l'implication (i) ⇒ (ii). Supposons que l'homomorphisme naturel $\psi_{X_\bullet}: H_c^*(X_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H^*(|X_\bullet|; \mathbb{F}_p)$ est un isomorphisme. On montre (ii) par récurrence sur la tour de Postnikov $\{Q^n X_\bullet\}_n$ de $X_\bullet$. On remarque tout d'abord les deux points suivants:

(1_1) le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué $H_c^*(B\pi_1(X_\bullet); \mathbb{F}_p)$ est fini en chaque degré;

(2_1) l'homomorphisme naturel $\psi_{Q^{n-1}X_\bullet}: H_c^*(B\pi_1(X_\bullet); \mathbb{F}_p) \to H^*(|B\pi_1(X_\bullet)|; \mathbb{F}_p)$ est un isomorphisme.

On suppose avoir montré pour l'entier $n \geqq 2$:

(1_{n-1}) le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué $H_c^*(Q^{n-1} X_\bullet; \mathbb{F}_p)$ est fini en chaque degré;

(2_{n-1}) l'homomorphisme naturel $\psi_{Q^{n-1}X_\bullet}: H_c^*(Q^{n-1} X_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H^*(|Q^{n-1} X_\bullet|; \mathbb{F}_p)$ est un isomorphisme.

Remarquons que le point 1_{n-1}) équivaut à:

(1_{n-1})′ pour tout $\pi_1(X_\bullet)$-module discret M dont le groupe abélien sous-jacent est un p-groupe fini, le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué $H_c^*(Q^{n-1} X_\bullet; M)$ est fini en chaque degré.

Par hypothèse sur $\psi_{X_\bullet}$ et d'après le lemme 2.3.4 (et son analogue pour l'espace pointé connexe $|Y_\bullet|$), l'homomorphisme $\psi_{Q^n X_\bullet}: H_c^n(Q^n X_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H^n(|Q^n X_\bullet|; \mathbb{F}_p)$ est un isomorphisme et l'homomorphisme $\psi_{Q_n X_\bullet}: H_c^{n+1}(Q^n X_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H^{n+1}(|Q^n X_\bullet|; \mathbb{F}_p)$ est injectif. En comparant la suite exacte du lemme 2.3.5 et son analogue pour la fibration $K(\operatorname{Lim} \pi_n(X_\bullet), n) \to Q^n |X_\bullet| \to Q^{n-1} |X_\bullet|$, on voit que l'homomorphisme naturel $\psi_{K(\pi, n)}: H_c^n(K(\pi_n(X_\bullet), n); \mathbb{F}_p) \to H^n(|K(\pi_n(X_\bullet), n)|; \mathbb{F}_p)$ est un isomorphisme. D'après le théorème 2.3.2, celà implique que $H_c^*(K(\pi_n(X_\bullet), n); \mathbb{F}_p)$ est fini en chaque degré. Le terme E_2 de la suite spectrale de Serre du morphisme $Q^n X_\bullet \to Q^{n-1} X_\bullet$ construite en 2.2 s'identifie à $H_c^*(Q^{n-1} X_\bullet, H_c^*(K(\pi_n(X_\bullet), n); \mathbb{F}_p))$; c'est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué fini en chaque degré d'après 1_{n-1})′. On en déduit que $H_c^*(Q^n X_\bullet; \mathbb{F}_p)$ est fini en chaque degré.

D'autre part, par construction, il existe un homomorphisme de la suite spectrale de Serre (à coefficients dans $\mathbb{F}_p$) du morphisme $Q^n X_. \to Q^{n-1} X_.$ vers celle du morphisme $Q^n |X_.| \cong |Q^n X_.| \to |Q^{n-1} X_.| \cong Q^{n-1} |X_.|$. On en déduit à l'aide de $2_{n-1})$ et du théorème 2.3.2 que l'homomorphisme de suites spectrales considéré précédemment induit un isomorphisme au terme E_2; l'homomorphisme naturel

$$\psi_{Q^n X_.} : H_c^* (Q^n X_.; \mathbb{F}_p) \to H^* (|Q^n X_.|; \mathbb{F}_p)$$

est un donc isomorphisme. On vient donc de montrer (1_n) et (2_n) pour tout entier $n \geqq 1$.

En utilisant à nouveau le lemme 2.3.4 on voit que $H_c^* (X_.; \mathbb{F}_p)$ est fini en chaque degré.

La démonstration de l'implication réciproque (ii) $\Rightarrow$ (i) est analogue et est laissée au lecteur. ■

Remarque. — Le résultat précédemment démontré est faux, en général, sans hypothèse sur le groupe fondamental de X.

2.4. Caractérisation des isomorphismes entre pro-p-espaces. — Le résultat suivant est une variante du théorème 4.3 de [AM]:

Théorème 2.4.1. — *Soit $f : X_. \to Y_.$ un morphisme de pro-p-espaces pointés. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *f est un isomorphisme*;

(ii) *$|f| : |X_.| \to |Y_.|$ est un $h\mathscr{S}_{pt}^0$-isomorphisme*;

(iii) *$\pi_* (f) : \pi_* (X_.) \to \pi_* (Y_.)$ est un isomorphisme de pro-p-groupes*;

(iv) *$H_c^* (f; \mathbb{F}_p) : H_c^* (Y_.; \mathbb{F}_p) \to H_c^* (X_.; \mathbb{F}_p)$ est un isomorphisme.*

Théorème 2.4.2. — *Soit $f : X_. \to Y_.$ un morphisme de pro-p-espaces. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *f est un isomorphisme*;

(ii) *$H_c^* (f; \mathbb{F}_p) : H_c^* (Y_.; \mathbb{F}_p) \to H_c^* (X_.; \mathbb{F}_p)$ est un isomorphisme.*

Lorsque ces deux conditions sont réalisées, alors le $h\mathscr{S}$-morphisme naturel $|f| : |X_.| \to |Y_.|$ est un isomorphisme.

L'auteur ignore si la conclusion du théorème 2.4.2 implique les conditions (i) et (ii); autrement dit un morphisme de pro-p-espaces qui induit un isomorphisme sur les limites est-il forcément un isomorphisme? Un tel résultat serait très satisfaisant pour formuler des réciproques optimales aux résultats du paragraphe 3.4. En utilisant les résultats de relèvement du paragraphe 2.6 nous réussirons à obtenir (dans le cas où les pro-p-espaces sont connexes) des résultats dans ce sens.

Proposition 2.4.3. — *Soient $f : X_. \to Y_.$ un morphisme de pro-p-espaces pointés induisant un isomorphisme $H_c^* (Y_.; \mathbb{F}_p) \cong H_c^* (X_.; \mathbb{F}_p)$, $n \geqq 1$ un entier, $F' \to F \to K(\mathbb{F}_p, n+1)$ une $h\mathscr{S}_{pt}^0$-fibration avec F' et F dans p-$h\mathscr{S}_{pt}^0$. Alors l'application naturelle*:

$$[Y_., F']_c \to [X_., F']_c \times_{[X_., F]_c} [Y_., F]_c$$

est surjective.

Démonstration

LEMME 2.4.4. — *Soit* $\begin{array}{ccc} E & \to & F'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ F' & \to & F \end{array}$ *un* $h\mathcal{S}^0_{pt}$*-diagramme homotopiquement cartésien avec* F, F′, F″ *et* E *dans* p-$h\mathcal{S}^0_{pt}$. *Alors pour tout pro-p-espace pointé* $X_\bullet$ *l'application naturelle* :

$$[X_\bullet, E]_c \to [X_\bullet, F']_c \times_{[X_\bullet, F]_c} [X_\bullet, F'']_c$$

est surjective.

Démonstration. — L'assertion est vraie lorsque $X_\bullet$ est un espace pointé connexe p-π_*-fini. Le cas général découle immédiatement de la définition des morphismes dans une catégorie de pro-objets et du fait que la colimite filtrante d'applications surjectives est une application surjective. ■

Remarquons que pour tout pro-p-espace pointé $Z_\bullet$ l'action principale (à homotopie près) de $K(\mathbb{F}_p, n)$ sur F′ induit une action du groupe $[Z_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n)]_c$ sur l'ensemble $[Z_\bullet, F']_c$.

COROLLAIRE 2.4.5. — *La suite de Puppe* :

$$(Z_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n)]_c \to [Z_\bullet, F']_c \to [Z_\bullet, F]_c \to [Z_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n+1)]_c$$

est une suite exacte au sens usuel, c'est-à-dire :

(1) *l'image de l'application* $[Z_\bullet, F']_c \to [Z_\bullet, F]_c$ *est l'image réciproque du point base de* $[Z_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n+1)]_c$ *par l'application* $[Z_\bullet, F]_c \to [Z_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n+1)]_c$;

(2) *l'application* $[Z_\bullet, F']_c \to [Z_\bullet, F]_c$ *induit une injection de l'ensemble des orbites de* $[Z_\bullet, F']_c$ *sous l'action de* $[Z_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n)]_c$ *dans l'ensemble* $[Z_\bullet, F]_c$.

Démonstration. — Le point (1) résulte du lemme 2.4.4 appliqué à la $h\mathcal{S}^0_{pt}$-fibration $F' \to F \to K(\mathbb{F}_p, n+1)$ et le point (2) du même lemme appliqué au $h\mathcal{S}^0_{pt}$-diagramme homotopiquement cartésien $\begin{array}{ccc} K(\mathbb{F}_p, n) \times F' & \to & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ F' & \to & F \end{array}$. ■

Revenons à la démonstration de la proposition 2.4.3. On a un diagramme commutatif de suites de Puppe (compatible aux actions) :

$$\begin{array}{ccccccc} [Y_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n)]_c & \to & [Y_\bullet, F']_c & \to & [Y_\bullet, F]_c & \to & [Y_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n+1)]_c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [X_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n)]_c & \to & [X_\bullet, F']_c & \to & [X_\bullet, F]_c & \to & [X_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n+1)]_c \end{array}.$$

Les deux applications verticales

$$[Y_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n)]_c \to [X_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n)]_c \quad \text{et} \quad [Y_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n+1)]_c \to [X_\bullet, K(\mathbb{F}_p, n+1)]_c$$

sont des isomorphismes par hypothèse sur le morphisme $f: X_\bullet \to Y_\bullet$ (utiliser le lemme 2.1.2.2). A l'aide du corollaire 2.4.5 et d'une chasse au diagramme, que nous laissons au lecteur, on obtient facilement la proposition 2.4.4. ■

La proposition suivante est une généralisation facile de la proposition 1.2 (utiliser la décomposition de Postnikov d'une application au lieu de la décomposition de Postnikov d'un espace pointé connexe; *voir* [May] § 8, définition 8.10).

PROPOSITION 2.4.6. — *Soit* $F' \to F$ *un* $h\mathscr{S}^0_{pt}$*-morphisme entre espaces pointés connexes* p-π_**-finis. Alors il existe une tour finie d'espaces pointés connexes*:

$$F' = F^n \to F^{n-1} \to \ldots \to F^1 \to F^0 = F$$

telle que chacune des applications $F^k \to F^{k-1}$, $1 \leqq k \leqq n$, *est* (*à homotopie près*) *une fibration principale de fibre un espace d'Eilenberg-MacLane* $K(\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}, m(k))$, $m: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *désignant une fonction croissante* (*on remarquera que les* F^k, $0 \leqq k \leqq n$ *sont nécessairement* p-π_**-finis*).

COROLLAIRE 2.4.7. — *Soient* $f: X_. \to Y_.$ *un morphisme de pro-p-espaces pointés induisant un isomorphisme* $H^*_c(Y_.; \mathbb{F}_p) \cong H^*_c(X_.; \mathbb{F}_p)$ *et* $F' \to F$ *un* $h\mathscr{S}^0_{pt}$*-morphisme entre espaces pointés connexes* $p-\pi_*$*-finis. Alors l'application naturelle*:

$$[Y_., F']_c \to [X_., F']_c \times_{[X_., F]_c} [Y_., F]_c$$

est surjective.

Démonstration. — On procède par récurrence sur la tour de fibrations principales donnée dans la proposition 2.4.6 en appliquant à chaque étape la proposition 2.4.3. ■

Démonstration du théorème 2.4.1. — L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est facile. L'équivalence (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte du corollaire 1.4.1.3 et du lemme facile suivant:

LEMME 2.4.8. — *Un morphisme de pro-p-groupes est un isomorphisme si et seulement si l'homomorphisme de groupes sous-jacent est un isomorphisme.*

Nous établissons l'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv) par récurrence sur la tour de Postnikov. Soit $n \geqq 1$ un entier. On suppose établit que le morphisme $Q^n(f): Q^n(X_.) \to Q^n(Y_.)$ induit un isomorphisme en cohomologie modulo p continue. A l'aide de la suite spectrale de Serre pour la cohomologie modulo p continue construite en 2.2 et l'hypothèse (qui implique en particulier que l'homomorphisme $H^*_c(K(\pi_{n+1}(Y_.), n+1)) \to H^*_c(K(\pi_{n+1}(X_.), n+1))$ est un isomorphisme) on en déduit aisément que le morphisme

$$Q^{n+1}(f): Q^{n+1}(X_.) \to Q^{n+1}(Y_.)$$

induit un isomorphisme en cohomologie modulo p continue. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv) résulte alors du lemme 2.3.4.

Supposons maintenant la condition (iv) remplie, et montrons que f est un isomorphisme. Il s'agit de montrer, d'après le lemme 1.3.1, que pour tout espace pointé connexe p-π_*-fini F, l'application:

$$[Y_., F]_c \to [X_., F]_c$$

est bijective. Soit F un tel espace. On obtient la surjectivité de l'application $[Y_., F]_c \to [X_., F]_c$ à l'aide du corollaire 2.4.7 appliqué au $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphisme $F \to *$.

L'injectivité s'obtient de même à l'aide du corollaire 2.4.7 appliqué au $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphisme diagonal $F \to F \times F$. ■

Démonstration du théorème 2.4.2. — Elle est formellement identique à celle de l'équivalence (i) $\Rightarrow$ (iv) du théorème 2.4.1 une fois remarqué la variante du lemme 1.3.1 suivante :

LEMME 2.4.9. — *Un morphisme de pro-p-espaces* $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ *est un isomorphisme si et seulement si* $\pi_0(f)$ *est un isomorphisme et pour tout sous-espace fermé* S *de* $\pi_0(X_\bullet)$ *et tout espace connexe p-*π_**-fini* F, *l'application* :

$$[Y_{\bullet f(S)}, F]'_c \to [X_{\bullet(S)}, F]'_c$$

est bijective (voir 1.5.1 *pour la définition des pro-p-espaces* $X_{\bullet(S)}$ *et* $Y_{\bullet f(S)}$).

Les propositions 2.4.3 et 2.4.6 et le corollaire 2.4.7 admettent alors des variantes utilisant des espaces connexes p-π_*-finis; nous laissons au lecteur le soin de s'en convaincre. ■

2.5. REVÊTEMENTS ET p-COMPLÉTION. — Soit X un espace pointé connexe, et $\rho : \pi_1(X) \to \pi$ un épimorphisme de groupes, avec π un p-groupe fini. On note $Y \to X$ le revêtement (principal) associé à ρ; Y est un espace pointé connexe.

On note $Z_\bullet \to \hat{X}^p_\bullet$ le revêtement de pro-p-espaces pointés associé en 1.3.5 au noyau de l'homomorphisme $\hat{\rho}^p_\bullet : \pi_1(X)^p_\bullet \to \hat{\pi}^p_\bullet \cong \pi$. Le morphisme composé $\hat{Y}^p_\bullet \to \hat{X}^p_\bullet \to B\hat{\pi}^p_\bullet \cong B\pi$ est trivial et l'on obtient d'après la proposition 1.3.5.2 un morphisme naturel $\hat{Y}^p_\bullet \to Z_\bullet$.

THÉORÈME 2.5.1 (Artin-Mazur). — *Le morphisme naturel* $\hat{Y}^p_\bullet \to Z_\bullet$ *est un isomorphisme.*

Commentaire. — En abrégé on peut donc dire que la p-complétion (à la Artin-Mazur ou à la Sullivan d'après la proposition 2.2.1) « préserve » les revêtements principaux de groupe un p-groupe fini (*voir* aussi le théorème 2.5.4 ci-dessous).

Démonstration. — D'après le théorème 2.4.1 il suffit de montrer que l'homomorphisme induit :

$$H^*_c(Z_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H^*_c(\hat{Y}^p_\bullet; \mathbb{F}_p)$$

est un isomorphisme. D'après la proposition 2.1.2.1 l'homomorphisme naturel :

$$H^*_c(\hat{Y}^p_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H^*(Y; \mathbb{F}_p)$$

est un isomorphisme. Il suffit donc de démontrer que l'homomorphisme composé :

$$\varphi : \quad H^*_c(Z_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H^*_c(\hat{Y}^p_\bullet; \mathbb{F}_p) \to H^*(Y; \mathbb{F}_p)$$

est un isomorphisme. On utilise à cet effet l'homomorphisme naturel ψ de la suite spectrale de Serre du diagramme $Z_\bullet \to \hat{X}^p_\bullet \to B\hat{\pi}^p_\bullet \cong B\pi$ (définie en 2.2) vers celle du revêtement $Y \to X \to B\pi$. Le terme E_2 de la première s'identifie à $H^*_c(B\hat{\pi}^p_\bullet; H^*_c(Z_\bullet; \mathbb{F}_p))$ qui s'identifie lui-même à $H^*(B\pi; H^*_c(Z_\bullet; \mathbb{F}_p))$, et le terme E_2 de la seconde à $H^*(B\pi; H^*Y)$. L'homomorphisme ψ en question induit un isomorphisme au terme E_∞

d'après la proposition 2.1.2.1 et est induit au terme E_2 par φ. On conclut à l'aide des deux lemmes élémentaires suivants (*voir* [Qu2], § 3, lemmes 3.7 et 3.8):

LEMME 2.5.2. — *Soit* $s_0 \geqq 0$ *un entier tel que* ψ *induit un isomorphisme*:

$$H^*(B\pi;\, H_c^s(Z_\bullet;\, \mathbb{F}_p)) \cong H^*(B\pi;\, H^s(Y;\, \mathbb{F}_p))$$

pour tout entier s *compris entre* 0 *et* s_0. *Alors* ψ *induit un isomorphisme*:

$$H^0(B\pi;\, H_c^{s_0+1}(Z_\bullet;\, \mathbb{F}_p)) \cong H^0(B\pi;\, H^{s_0+1}(Y;\, \mathbb{F}_p))$$

et un monomorphisme $H^1(B\pi;\, H_c^{s_0+1}(Z_\bullet,\, \mathbb{F}_p)) \hookrightarrow H^1(B\pi;\, H^{s_0+1}(Y;\, \mathbb{F}_p))$.

LEMME 2.5.3. — *Soit* π *un p-groupe fini et* $\varphi: M \to N$ *un homomorphisme de* π*-modules annulés par p. Les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) φ *est un isomorphisme*;

(ii) $H^0(\varphi): H^0(\pi;\, M) \to H^0(\pi;\, N)$ *est un isomorphisme et*

$$H^1(\varphi): H^1(\pi;\, M) \to H^1(\pi;\, N)$$

est un monomorphisme. ■

Plus généralement on a le résultat suivant:

THÉORÈME 2.5.4. — *Soient* X *un espace,* $X \to B\pi$ *un* $h\mathcal{S}$*-morphisme, avec* π *un p-groupe fini, et* $Y \to X$ *le revêtement associé. On suppose que pour chaque composante connexe* $X_{(\alpha)}$ *de* X, *que l'on pointe arbitrairement, l'homomorphisme* $\pi_1(X_{(\alpha)}) \to \pi$ *est surjectif. Alors le* $h\mathcal{S}$*-morphisme* $|\hat{Y}_\bullet^p| \to |\hat{X}_\bullet^p|$ *s'identifie au revêtement associé au* $h\mathcal{S}$*-morphisme* $|\hat{X}_\bullet^p| \to |B\hat{\pi}_\bullet^p| \cong B\pi$.

Remarque. — Lorsque X est un espace pointé connexe, la conclusion du théorème ci-dessus implique bien celle du théorème 2.5.1 en vertu du théorème 2.4.1 (utiliser l'équivalence (i) $\Rightarrow$ (ii)).

Esquisse de démonstration. — Le $h\mathcal{S}$-morphisme $|\hat{Y}_\bullet^p| \to |\hat{X}_\bullet^p|$ induit, par hypothèse, une bijection $\pi_0|\hat{Y}_\bullet^p| \to \pi_0|\hat{X}_\bullet^p|$; il suffit donc de vérifier que pour tout élément α de $\pi_0|\hat{X}_\bullet^p|$, le $h\mathcal{S}$-morphisme $|\hat{Y}_\bullet^p|_{(\alpha)} \to |\hat{X}_\bullet^p|_{(\alpha)}$ s'identifie au revêtement associé au $h\mathcal{S}$-morphisme $|\hat{X}_\bullet^p|_{(\alpha)} \to B\pi$. D'après la démonstration du théorème 1.5.4 chacun des pro-p-espaces $\hat{X}_{\bullet(\alpha)}^p$ et $\hat{Y}_{\bullet(\alpha)}^p$ se relève en un pro-p-espace pointé, notés $\hat{X}_{\bullet(\alpha)}^{p'}$ et $\hat{Y}_{\bullet(\alpha)}^{p'}$ respectivement. On obtient un morphisme naturel de $\hat{Y}_{\bullet(\alpha)}^{p'}$ vers le revêtement $Z_\bullet$ associé en (1.3.5) au morphisme $\hat{X}_{\bullet(\alpha)}^{p'} \to B\pi$ et tout revient à montrer que ce morphisme est un isomorphisme, c'est-à-dire qu'il induit un isomorphisme en cohomologie modulo p (d'après 2.4.1). On procède alors comme dans la démonstration du théorème 2.5.1; on part de la suite spectrale de Serre de la fibration $Y \to X \to B\pi$ puis on la «localise» (au sens de 2.1.2) en α. Cette suite spectrale «reçoit» la suite spectrale de Serre du revêtement $Z_\bullet \to \hat{X}_{\bullet(\alpha)}^p \to B\pi$ et l'on conclut comme ci-dessus. Nous laissons les détails au lecteur. ■

Voici un exemple d'application du théorème précédent qui sera utilisé en 3.4. Soit X un espace muni d'une action d'un p-groupe fini π. On note $E\pi$ le revêtement universel de $B\pi$; c'est un espace contractile muni d'une action principale à droite (et à gauche) de π. On note $X_{h\pi}$ l'espace des coinvariants homotopiques c'est-à-dire la construction de Borel $E\pi\times_{\pi}X$. La projection naturelle $q: X_{h\pi}\to B\pi$ est une fibration, elle possède une section naturelle et sa fibre s'identifie à X. On peut donc appliquer le théorème précédent :

COROLLAIRE 2.5.5. — *Avec les notations précédentes le* $h\mathcal{S}$*-morphisme* $|\hat{X}^p_{\bullet}|\to|\widehat{X_{h\pi\bullet}}^p|$ *s'identifie au revêtement associé au* $h\mathcal{S}$*-morphisme* $|\widehat{X_{h\pi\bullet}}^p|\to B\pi$.

Commentaire. — La conclusion du corollaire précédent signifie que, quitte à remplacer $|\hat{X}^p_{\bullet}|$ par un espace $h\mathcal{S}$-isomorphisme, il existe sur l'espace $|\hat{X}^p_{\bullet}|$ une action principale du groupe π dont la construction de Borel $E\pi\times_{\pi}|\hat{X}^p_{\bullet}|$ est $h\mathcal{S}$-isomorphe à l'espace $|\widehat{X_{h\pi\bullet}}^p|$. Remarquons que si le foncteur $X\mapsto|\hat{X}^p_{\bullet}|$ était un foncteur $\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ (et non pas un foncteur $h\mathcal{S}\to h\mathcal{S}$) l'existence de l'action de π sur $|\hat{X}^p_{\bullet}|$ serait automatique. C'est ce qui se passe lorsque l'on utilise la p-complétion de Bousfield-Kan.

2.6. RELÈVEMENT DE CERTAINS PRO-p-ESPACES. — On revient ici sur les problèmes soulevés au paragraphe 1.5.2. On se propose de décrire deux situations dans lesquelles on peut les résoudre. La première est due à Sullivan [Su1].

On dit qu'un pro-p-espace $X_{\bullet}$ est dénombrable s'il existe un pro-p-espace $Y_{\bullet}$ isomorphe à $X_{\bullet}$ et tel que $\mathcal{I}_{Y_{\bullet}}$ soit la catégorie opposée à celle associée à l'ensemble ordonné des entiers naturels $\mathbb{N}$ (en d'autres termes $X_{\bullet}$ est isomorphe à une tour d'espaces p-π_*-finis).

THÉORÈME 2.6.1 (D. Sullivan [Su1]). — *Soit* $X_{\bullet}$ *un pro-p-espace. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $X_{\bullet}$ *est dénombrable*;

(ii) *pour tout entier* $n\geqq 0$ *le* $\mathbb{F}_p$*-espace vectoriel* $H^n_c(X_{\bullet};\mathbb{F}_p)$ *est de dimension dénombrable. Lorsqu'il en est ainsi,* $X_{\bullet}$ *se relève en un pro-p-espace pointé si et seulement s'il est connexe.*

Démonstration. — La dernière assertion est évidente : il n'y a pas d'obstructions à relever une tour d'espaces connexes en une tour d'espaces pointés connexes !

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est claire. Supposons réciproquement que pour tout entier $n\geqq 0$, le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $H^n_c X_{\bullet}$ est de dimension dénombrable. Choisissons une suite croissante :

$$F_0\subset F_1\subset\ldots\subset H^*_c(X_{\bullet};\mathbb{F}_p)$$

de sous-$\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels gradués finis de $H^*_c(X_{\bullet};\mathbb{F}_p)$ telle que $H^*_c(X_{\bullet};\mathbb{F}_p)$ est réunion des F_n.

On procède de la façon suivante. On construit par récurrence sur n, une suite :

$$\ldots\to i_n\to i_{n-1}\to\ldots\to i_1\to i_0$$

de $\mathcal{I}_{X_{\bullet}}$-morphismes composables tels que :

(1) pour tout entier $n\geqq 0$ l'image de l'homomorphisme $H^*(X_{i_n};\mathbb{F}_p)\to H^*_c(X_{\bullet};\mathbb{F}_p)$ contient F_n;

(2) pour tout entier $n \geqq 0$, soit K_n le noyau de l'homomorphisme

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{X}_{i_n};\, \mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}_c^*(\mathrm{X}_\bullet;\, \mathbb{F}_p)$$

alors le composé $\mathrm{K}_n \to \mathrm{H}^*(\mathrm{X}_{i_n};\, \mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}_c^*(\mathrm{X}_{i_{n+1}};\, \mathbb{F}_p)$ est trivial.

Le foncteur covariant $\mathrm{Y}_\bullet : \mathbb{N} \to p\text{-}h\mathscr{S}$, $n \mapsto \mathrm{X}_{i_n}$ ainsi construit a les propriétés requises. On a un morphisme évident de pro-p-espaces $\mathrm{X}_\bullet \to \mathrm{Y}_\bullet$; par construction il induit un isomorphisme en cohomologie continue modulo p et c'est un isomorphisme d'après le théorème 2.4.2. ■

La seconde situation correspond au cas simplement connexe :

THÉORÈME 2.6.2. — *Soit* $\mathrm{X}_\bullet$ *un pro-p-espace connexe. On suppose que* $\mathrm{H}_c^1(\mathrm{X}_\bullet;\, \mathbb{F}_p)$ *est nul. Alors* $\mathrm{X}_\bullet$ *se relève en un pro-p-espace pointé.*

Démonstration. — Pour chaque objet i de $\mathscr{I}_{\mathrm{X}_\bullet}$ désignons par $\rho_i : \tilde{\mathrm{X}}_i \to \mathrm{X}_i$ le $h\mathscr{S}$-morphisme induit par le revêtement universel de X_i. Le lemme suivant est la clé de la démonstration.

LEMME 2.6.3. — *Pour tout objet i de $\mathscr{I}_{\mathrm{X}_\bullet}$, il existe un $\mathscr{I}_{\mathrm{X}_\bullet}$-morphisme $j \to i$ et un $h\mathscr{S}$-morphisme $\tau_{ij} : \mathrm{X}_j \to \tilde{\mathrm{X}}_i$ tels que le $h\mathscr{S}$-morphisme composé de ρ_i et de τ_{ij} soit le $h\mathscr{S}$-morphisme $\mathrm{X}(j \to i) : \mathrm{X}_j \to \mathrm{X}_i$.*

Démonstration. — Il s'agit de démontrer qu'il existe un $\mathscr{I}_{\mathrm{X}_\bullet}$-morphisme $j \to i$ tel que la représentation $\pi_1(\mathrm{X}_j) \to \pi_1(\mathrm{X}_i)$ induite par le $h\mathscr{S}$-morphisme $\mathrm{X}(j \to i) : \mathrm{X}_j \to \mathrm{X}_i$ est triviale. Rappelons qu'une représentation d'un groupe G dans un groupe H est un élément de l'espace des orbites de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{g}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ sous l'action de H induite par conjugaison au but; en d'autres termes, c'est l'ensemble $[\mathrm{BG}, \mathrm{BH}]'$. Puisque $\pi_1(\mathrm{X}_i)$ est un p-groupe fini il existe une suite $(1) = \Gamma_n \subset \Gamma_{n-1} \subset \ldots \subset \Gamma_0 = \pi_1(\mathrm{X}_i)$ de sous-groupes de $\pi_1(\mathrm{X}_i)$ telle que pour chaque entier k, $1 \leqq k \leqq n$, Γ_k est distingué dans Γ_{k-1} et le quotient Γ_{n-1}/Γ_n est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$. On procède alors par récurrence sur k. On suppose l'existence d'un $\mathscr{I}_{\mathrm{X}_\bullet}$-morphisme $j_k \to i$ tel que la représentation $\pi_1(\mathrm{X}_{j_k}) \to \pi_1(\mathrm{X}_i)$ se factorise (au sens évident) par l'inclusion $\Gamma_k \subset \pi_1(\mathrm{X}_i)$. L'obstruction ι à ce que cette représentation se factorise par l'inclusion $\Gamma_{k+1} \subset \pi_1(\mathrm{X}_i)$ vit dans l'ensemble des représentations de $\pi_1(\mathrm{X}_{j_k})$ dans le quotient $\Gamma_k/\Gamma_{k+1} \cong \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$; cet ensemble s'identifie à $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{j_k};\, \mathbb{F}_p)$. Puisque $\mathrm{H}_c^1(\mathrm{X}_\bullet;\, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Colim}_{\mathscr{I}_{\mathrm{X}_\bullet}} \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_i;\, \mathbb{F}_p)$ est nul, l'obstruction ι « meure » dans un des $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_i;\, \mathbb{F}_p)$; en d'autres termes, il existe un $\mathscr{I}_{\mathrm{X}_\bullet}$-morphisme $j_{k+1} \to j_k$ tel que la représentation $\pi_1(\mathrm{X}_{j_{k+1}}) \to \pi_1(\mathrm{X}_i)$ se factorise par l'inclusion $\Gamma_{k+1} \subset \pi_1(\mathrm{X}_i)$ ce qui achève la récurrence, et la démonstration du lemme 2.6.3. ■

Considérons alors la petite catégorie $\mathscr{I}'_{\mathrm{X}_\bullet}$ suivante. Un objet de $\mathscr{I}'_{\mathrm{X}_\bullet}$ est un couple $(j \to i, \tau_{ij})$ formé d'un $\mathscr{I}_{\mathrm{X}_\bullet}$-morphisme $j \to i$ et d'un $h\mathscr{S}$-morphisme $\tau_{ij} : \mathrm{X}_j \to \tilde{\mathrm{X}}_i$ tels que le $h\mathscr{S}$-morphisme composé $\rho_i \circ \tau_{ij}$ est le $h\mathscr{S}$-morphisme $\mathrm{X}(j \to i) : \mathrm{X}_j \to \mathrm{X}_i$. Un $\mathscr{I}'_{\mathrm{X}_\bullet}$-morphisme de $(1 \to k, \tau_{kl})$ vers $(j \to i, \tau_{ij})$ est la donnée d'un $\mathscr{I}_{\mathrm{X}_\bullet}$-carré commutatif $\begin{matrix} 1 & \to & k \\ \downarrow & & \downarrow \\ j & \to & i \end{matrix}$ et d'un $h\mathscr{S}$-morphisme $\kappa : \tilde{\mathrm{X}}_k \to \tilde{\mathrm{X}}_i$ tel que les deux $h\mathscr{S}$-carrés suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \to & \tilde{X}_k \\ \downarrow & & \downarrow \kappa \\ X_j & \to & \tilde{X}_i \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{X}_k & \to & X_k \\ \kappa\downarrow & & \downarrow \\ \tilde{X}_i & \to & X_i \end{array}.$$

A l'aide du lemme 2.6.3 (et du fait que $\mathscr{I}_{X.}$ est filtrante) on montre facilement que $\mathscr{I}'_{X.}$ est filtrante. On note alors $\tilde{X}_{\bullet}$ le pro-p-espace suivant : c'est le foncteur $\mathscr{I}'_{X.} \to p\text{-}h\mathscr{S}$, $(j \to i, \tau_{ij}) \mapsto \tilde{X}_i$.

Les morphismes τ_{ij} et le foncteur ouli $\mathscr{I}'_{X.} \to \mathscr{I}_{X.}$, $(j \to i, \tau_{ij}) \mapsto j$ définissant un morphisme de pro-p-espaces $X_{\bullet} \to \tilde{X}_{\bullet}$; en utilisant le lemme 1.3.1 et le lemme 2.6.3 on montre facilement que ce morphisme est un isomorphisme. Or chacun des $\tilde{X}_i$ est simplement connexe. Le pro-p-espace connexe $\tilde{X}_{\bullet}$ se relève donc – trivialement, il suffit de choisir un point base dans chacun des $\tilde{X}_i$ – en un pro-p-espace pointé, ce qui achève la démonstration du théorème 2.6.2. ■

Remarque. – Dans chacun des cas précédents on peut également résoudre le problème du relèvement des morphismes. On se donne par exemple un pro-p-espace pointé $Z_{\bullet}$ et un morphisme de pro-p-espaces $f : Z_{\bullet} \to X_{\bullet}$. Si $X_{\bullet}$ vérifie les conditions du théorème 2.6.1 ou du théorème 2.6.2 alors on se convainc facilement que l'on peut trouver un pro-p-espace pointé $Y_{\bullet}$ qui relève $X_{\bullet}$ et un morphisme de pro-p-espaces pointés $g : Z_{\bullet} \to Y_{\bullet}$ qui relève f.

3. Cohomologie modulo p continue des espaces fonctionnels hom (BV, $X_{\bullet}$) de source le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire et de but un pro-p-espace

Dans cette partie, la cohomologie modulo p d'un espace X (resp. d'un pro-p-espace $Y_{\bullet}$) sera notée $H^* X$ (resp. $H_c^*(Y_{\bullet})$).

3.1. Espaces fonctionnels de source un espace et de but un pro-p-espace. – Soient X et W deux espaces. Rappelons que le foncteur $h\mathscr{S} \to \mathscr{E}ns$, $Y \mapsto [Y \times W, X]'$ est représentable par un espace que l'on notera **hom** (W, X). L'ensemble des composantes connexes de cet espace s'identifie par définition à l'ensemble $[W, X]'$. Soit f un élément de $[W, X]'$; on note **hom** (W, X; f) la composante connexe de **hom** (W, X) correspondant à f. L'espace **hom** (W, X) dépend fonctoriellement (en un sens évident) de X et W.

Soit $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, $Y \mapsto$ **Hom** (W, Y) l'adjoint du foncteur $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, $Y \mapsto W \times Y$. Lorsque X est fibrant on sait que l'espace **Hom** (W, X) est naturellement $h\mathscr{S}$-isomorphe à **hom** (W, X).

Lemme 3.1.1 [La1]. – *Soient* X *un espace p-π_*-fini et* W *un espace. Si* $H_*(W; \mathbb{F}_p)$ *est finie en chaque degré alors l'espace* **Hom** (W, X) *est p-π_*-fini.*

Démonstration. — On se ramène au cas où X est connexe puis on procède par récurrence sur la tour donnée par la proposition 1.2 et le fait que le lemme est vrai pour X un espace d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\mathbb{F}_p, n)$. ■

Soient $\mathrm{X}_\bullet$ un pro-p-espace et W un espace. On note $\mathbf{hom}(\mathrm{W}, \mathrm{X}_\bullet)$ le foncteur covariant:

$$(\mathscr{F}'_{\mathrm{W}})^{\mathrm{opp}} \times \mathscr{I}_{\mathrm{X}.} \to h\mathscr{S}$$
$$(\mathrm{F} \to \mathrm{W},\, i) \mapsto \mathbf{hom}(\mathrm{F}, \mathrm{X}_i).$$

D'après le lemme 3.1.1, $\mathbf{hom}(\mathrm{W}, \mathrm{X}_\bullet)$ est un pro-objet à valeurs dans $p\text{-}h\mathscr{S}$. Ce pro-p-espace s'appellera l'espace fonctionnel de source W et de but $\mathrm{X}_\bullet$.

Remarques. — (1) Dans l'étude des espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(\mathrm{W}, \mathrm{X}_\bullet)$ on peut toujours se ramener au cas où W est connexe. Si tel n'est pas le cas en effet, W s'écrit comme la $h\mathscr{S}$-somme $\underset{\pi_0 \mathrm{W}}{\quad} \mathrm{W}_{(\alpha)}$, indexée par $\pi_0 \mathrm{W}$, de ses composantes connexes W_α. On se convainc que le morphisme naturel $\mathbf{hom}(\mathrm{W}, \mathrm{X}_\bullet) \to \prod_{\pi_0 \mathrm{W}} \mathbf{hom}(\mathrm{W}_\alpha, \mathrm{X}_\bullet)$ dont le but est le produit (catégorique) des pro-p-espaces $\mathbf{hom}(\mathrm{W}_\alpha, \mathrm{X}_\bullet)$ est un isomorphisme de pro-p-espaces.

(2) Lorsque l'homologie $\mathrm{H}_*(\mathrm{W}; \mathbb{F}_p)$ est finie en chaque degré, le foncteur covariant:

$$\mathscr{I}_{\mathrm{X}.} \to h\mathscr{S}^{0'}_{pt}$$
$$i \mapsto \mathbf{hom}(\mathrm{W}, \mathrm{X}_i)$$

est un pro-p-espace d'après le lemme 3.1.1. Bien sûr ce pro-p-espace est naturellement isomorphe à $\mathbf{hom}(\mathrm{W}, \mathrm{X}_\bullet)$. Par la suite et sous ces hypothèses, on s'autorisera à identifier implicitement ces deux pro-p-espaces.

(3) Lorsque W est un espace p-π_*-fini, on a une interprétation catégorique de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(\mathrm{W}, \mathrm{X}_\bullet)$. Tout d'abord remarquons que pour tout pro-p-espace $\mathrm{Y}_\bullet$ le foncteur covariant $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}.} \to h\mathscr{S}^{0'}_{pt}$, $i \mapsto \mathrm{W} \times \mathrm{Y}_i$ est un pro-p-espace que l'on notera $\mathrm{W} \times \mathrm{Y}_\bullet$ et que l'on appellera le produit de W et de $\mathrm{Y}_\bullet$ ($\mathrm{W} \times \mathrm{Y}_\bullet$ est effectivement un produit de W et de $\mathrm{Y}_\bullet$ dans la catégorie des pro-p-espaces). Le lecteur se convaincra sans difficulté de la proposition suivante:

PROPOSITION 3.1.2. — *Soit* W *un espace* $p-\pi_*$*-fini. Alors le foncteur* pro-p-$h\mathscr{S} \to$ pro-p-$h\mathscr{S}^\bullet$ $\mathrm{X}_\bullet \mapsto \mathbf{hom}(\mathrm{W}, \mathrm{X}_\bullet)$ *est adjoint à droite du foncteur* pro-p-$h\mathscr{S} \to$ pro-p-$h\mathscr{S}$, $\mathrm{Y}_\bullet \mapsto \mathrm{W} \times \mathrm{Y}_\bullet$.

Soient $\mathrm{X}_\bullet$ un pro-p-espace admettant une limite, et W un espace. Les $h\mathscr{S}$-morphismes canoniques $|\mathrm{X}_\bullet| \to \mathrm{X}_i$ fournissent un morphisme naturel de pro-espaces

$$\Theta_{\mathrm{W}, \mathrm{X}.} : \mathbf{hom}(\mathrm{W}, |\mathrm{X}_\bullet|) \to \mathbf{hom}(\mathrm{W}, \mathrm{X}_\bullet).$$

PROPOSITION 3.1.3. — *Pour tout pro-p-espace* $\mathrm{X}_\bullet$ *admettant une limite, et tout espace* W *le morphisme de pro-espaces*:

$$\Theta_{\mathrm{W}, \mathrm{X}} : \mathbf{hom}(\mathrm{W}, |\mathrm{X}_\bullet|) \to \mathbf{hom}(\mathrm{W}, \mathrm{X}_\bullet)$$

définit l'espace $\mathbf{hom}(W, |X_\bullet|)$ *comme la limite du* $h\mathscr{S}$*-diagramme sous-jacent à* $\mathbf{hom}(W, X_\bullet)$ (*Autrement dit, lorsque celà a un sens, on a l'égalité* $\mathbf{hom}(W, |X_\bullet|) = |\mathbf{hom}(W, X_\bullet)|$)

Démonstration. — Il s'agit de démontrer que pour tout espace W′ l'application naturelle $\Theta_{W, X_\cdot} : [W', \mathbf{hom}(W, |X_\bullet|)]' \to \lim_{(\mathscr{F}_W)^{opp} \times \mathscr{I}_{X_\cdot}} [W', \mathbf{hom}(F, X_i)]'$ est bijective, c'est-à-dire, par définition, que l'application naturelle $[W' \times W, |X_\bullet|]' \to \lim_{(\mathscr{F}_W)^{opp} \times \mathscr{I}_{X_\cdot}} [W' \times F, X_i]'$ est bijective. Pour s'en convaincre on utilise une formule de Fubini analogue à celle de la démonstration du théorème 1.5.2.1. ■

Composantes connexes des espaces fonctionnels. — Soient $X_\bullet$ un pro-p-espace et W un espace. Le π_0 du pro-p-espace $\mathbf{hom}(W, X_\bullet)$ s'identifie à l'ensemble pro-fini $\lim_{\mathscr{I}_{X_\cdot}} [W, X_i]'$; lorsque $X_\bullet$ admet une limite cet ensemble pro-fini s'identifie aussi à l'ensemble pro-fini $[W, |X_\bullet|]'$ d'après la proposition 3.1.3.

Soit f un élément de $\pi_0(\mathbf{hom}(W, X_\bullet))$. On notera $\mathbf{hom}(W, X_\bullet; f)$ la composante connexe de $\mathbf{hom}(W, X_\bullet)$ correspondant à f (*voir* 1.5.1).

Lorsque $X_\bullet$ et W sont connexes et que f est triviale, on retrouve naturellement une situation pointée. Précisons cette idée. Soient X , Y et W des espaces pointés connexes. On note $[Y \times W, X; *]$ l'image réciproque du point base de $[W, X]$ par l'application $[Y \times W, X; *] \to [W, X]$ induite par le $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphisme canonique $* \times W \to Y \times W$. Le foncteur contravariant $h\mathscr{S}^0_{pt} : Y \mapsto [Y \times W, X; *]$ est représentable par un espace pointé connexe noté $\mathbf{hom}_*(W, X)$; l'espace sous-jacent à l'espace pointé connexe $\mathbf{hom}_*(W, X)$ est naturellement $h\mathscr{S}$-isomorphe à $\mathbf{hom}(W, X; *)$, $*$ désignant le $h\mathscr{S}$-morphisme trivial $W \to X$.

Soit $X_\bullet$ un pro-p-espace pointé. On définit le pro-p-espace pointé $\mathbf{hom}_*(W, X_\bullet)$ comme étant le foncteur covariant :

$$(\mathscr{F}_W)^{opp} \times \mathscr{I}_{X_\cdot} \to p\text{-}h\mathscr{S}^0_{pt}$$
$$(W' \to W, i) \mapsto \mathbf{hom}_*(W', X_i).$$

Il est clair que le pro-p-espace sous-jacent à $\mathbf{hom}_*(W, X_\bullet)$ est isomorphe à $\mathbf{hom}(W, X_\bullet; *)$. La proposition 3.1.3 permet d'affirmer dans ce cas que le $h\mathscr{S}^0_{pt}$-morphisme naturel :

$$\mathbf{hom}_*(W, |X_\bullet|) \to |\mathbf{hom}_*(W, X_\bullet)|$$

est un isomorphisme.

3.2. Rappels sur les propriétés du foncteur T_V de J. Lannes. — Soit V un p-groupe abélien élémentaire fixé une fois pour toutes. On note H^*V la cohomologie modulo p du groupe V, c'est-à-dire H^*BV.

Ce paragraphe rappelle les principaux résultats algébriques de ([La1], [La2]).

3.2.1. — Soit A l'algèbre de Steenrod modulo p [SE]. On note $\mathscr{U}$ la catégorie des A-modules (à gauche) instables (*voir* [La1], § 1.7). Par exemple, la cohomologie modulo p d'un espace X est munie d'une action à gauche naturelle de A et fait de H^*X un A-module instable.

Le «cup-produit» munit la cohomologie modulo p d'un espace X d'une structure de $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée commutative; cette structure et celle de A-module instable co-existent en un sens précis et font de $H^* X$ une A-algèbre instable (*voir* [La1], § 1.7). La catégorie des A-algèbres instables est notée $\mathscr{K}$. Le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué colimite filtrante d'un diagramme de A-algèbres instables est muni d'une structure naturelle de A-algèbre instable et la cohomologie modulo p continue d'un pro-p-espace est donc naturellement une A-algèbre instable. On doit d'ailleurs considérer la catégorie $\mathscr{K}$ comme la catégorie naturelle dans laquelle vit la cohomologie modulo p continue des pro-p-espaces plutôt que celle où vit la cohomologie modulo p des espaces (*voir* [La1], § 1.13) : cette dernière est toujours le dual de l'homologie modulo p et possède ainsi une structure pro-finie naturelle, ce qui n'est pas le cas pour la cohomologie modulo p continue.

Le théorème suivant est le résultat algébrique fondamental de ([La1], [La2]) :

THÉORÈME 3.2.1 (J. Lannes). — (i) *Le foncteur* $\mathscr{U} \to \mathscr{U}$, $M \mapsto H^* V \otimes M$ *possède un adjoint à gauche que l'on note* $T_V : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$.

(ii) *Le foncteur* T_V *est exact.*

(iii) *Le foncteur* T_V *préserve les produits tensoriels de* A-*modules instables; autrement dit, pour toute paire* (M, N) *de* A-*modules instables l'homomorphisme* $T_V(M \otimes N) \to T_V M \otimes T_V N$ *induit par la multiplication* $H^* V \otimes H^* V \to H^* V$ *est un isomorphisme.*

Commentaires. — Le point (i) résulte du fait que $H^* V$ est de type fini. Le point (ii) est une reformulation d'un résultat dû à J. Lannes et S. Zarati qui affirme que pour tout objet injectif de la catégorie abélienne $\mathscr{U}$ (en abrégé $\mathscr{U}$-injectif) I le A-module instable $H^* V \otimes I$ est $\mathscr{U}$-injectif [LZ]. Le troisième point est une propriété impliquant en outre la structure de A-algèbre instable de $H^* V$. Pour une démonstration *voir* [La1] chapitre 2.

Remarques. — (1) Le théorème précédent montre que lorsque K est une A-algèbre instable, le produit de K, $K \otimes K \to K$, induit une structure naturelle d'algèbre sur le A-module instable $T_V K$. On montre que $T_V K$ est, pour cette structure, une A-algèbre instable et le foncteur $\mathscr{K} \to \mathscr{K}$, $K \mapsto T_V K$ est adjoint à gauche du foncteur $\mathscr{K} \to \mathscr{K}$, $K \mapsto H^* V \otimes K$ [La1] scholie 2.4.7.

(2) Soit X un espace. Le $h\mathscr{S}$-morphisme naturel $BV \times \mathbf{hom}(BV, X) \to X$ adjoint du morphisme identique de hom (BV, X) induit un $\mathscr{K}$-morphisme

$$H^* X \to H^* V \otimes H^* (\mathbf{hom}(BV, X))$$

et donc d'après la remarque (1) un $\mathscr{K}$-morphisme naturel (*voir* [La1], § 1.11) :

$$h_c : \quad T_V H^* X \to H^* (\mathbf{hom}(BV, X)).$$

Soit $X_\bullet$ un pro-p-espace. De même le morphisme naturel de pro-p-espaces $BV \times \mathbf{hom}(BV, X_\bullet) \to X_\bullet$ adjoint du morphisme identique de $\mathbf{hom}(BV, X)$ (*voir* la proposition 3.1.2) induit un $\mathscr{K}$-morphisme $H_c^*(X_\bullet) \to H^* V \otimes H_c^*(\mathbf{hom}(BV, X_\bullet))$ (on utilise implicitement le fait — trivial — que le $\mathscr{K}$-morphisme naturel $H_c^*(BV \times \mathbf{hom}(BV, X_\bullet)) \to H^* V \otimes H_c^*(\mathbf{hom}(BV, X_\bullet))$ est un isomorphisme). On en déduit comme ci-dessus un $\mathscr{K}$-morphisme naturel:

$$h_c: \quad T_V H_c^*(X_\bullet) \to H_c^*(\mathbf{hom}(BV, X_\bullet)).$$

Nous verrons en 3.4.2.1 que le $\mathscr{K}$-morphisme précédent est toujours un isomorphisme.

(3) Soit K une A-algèbre instable; les axiomes d'instabilité (que nous n'avons pas explicités) implique que la $\mathbb{F}_p$-algèbre K^0 est p-booléenne. Pour tout élément s de $\pi_0 K$, on note $K_{(s)}$ le localisé de K en s; c'est une A-algèbre instable. On a vu en 2.1.2 que pour tout pro-p-espace $X_\bullet$ l'ensemble profini $\pi_0(X_\bullet)$ s'identifie naturellement à $\pi_0(H_c^*(X_\bullet))$ et pour tout élément s de $\pi_0(X_\bullet)$ la A-algèbre instable $H_c^*(X_{\bullet(s)})$ s'identifie naturellement au localisé $H_c^*(X_\bullet)_{(s)}$ (*voir* 1.5.1 pour la définition de $X_{\bullet(s)}$).

Les considérations de la remarque (2) se «localisent» sans difficulté. Soient K une A-algèbre instable. Il résulte de la remarque (1) que l'ensemble pro-fini $\pi_0(T_V K)$ s'identifie à l'ensemble pro-fini $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K, H^* V)$. Soit s un élément de $\pi_0(T_V K)$. La A-algèbre instable $(T_V K)_{(s)}$ s'identifie à $T_V K \otimes_{(T_V K)^0} \mathbb{F}_p$, $\mathbb{F}_p$ étant muni de sa structure de $(T_V K)^0$-module induite par s. Soit L une A-algèbre instable; par construction, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(T_V K_{(s)}, L)$ s'identifie naturellement au sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K, H^* V \otimes L)$ image réciproque de s par l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K, H^* V \otimes L) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K, H^* V).$$

Par exemple, soient $X_\bullet$ un pro-p-espace et f un élément de $[BV, X_\bullet]_c \cong [BV, |X_\bullet|]'$; le morphisme naturel de pro-p-espaces $BV \times \mathbf{hom}(BV, X_\bullet; f) \to X_\bullet$ induit alors un $\mathscr{K}$-morphisme naturel $H_c^*(X_\bullet) \to H^* V \otimes H_c^*(\mathbf{hom}(BV, X_\bullet; f)$ et le composé

$$H_c^*(X_\bullet) \to H^* V \otimes H_c^*(\mathbf{hom}(BV, X_\bullet; f)) \to H^* V$$

est égal à f^*. On obtient donc un $\mathscr{K}$-morphisme naturel:

$$h_{c,f}: \quad (T_V H_c^*(X_\bullet))_{(f^*)} \to H_c^*(\mathbf{hom}(BV, X_\bullet; f)).$$

Nous verrons en 3.4.2.3 que le $\mathscr{K}$-morphisme précédent est toujours un isomorphisme.

3.2.2. *Les foncteurs* $L_{(1)}$ *et Fix.* — Dans ce paragraphe on résume les analogues «équivariants» des considérations précédentes qui seront utilisées en 3.4.4; *voir* [La1] partie 4 pour une discussion précise de ces points.

Soit K une A-algèbre instable. On note K-$\mathscr{U}$ la catégorie dont les objets sont les K-A-modules instables; un objet de K-$\mathscr{U}$ est donc un A-module instable M muni d'une structure de K-module pour laquelle la multiplication $K \otimes M \to M$ est A-linéaire. Soient M et N deux K-A-modules instables; le produit tensoriel $M \otimes_K N$ est encore un K-A-module instable.

La $\mathbb{F}_p$-algèbre booléenne $(T_V H^* V)^0$ s'identifie à l'algèbre $B_{\mathrm{End}(V)}$ des applications ensemblistes de l'anneau End(V) des endomorphismes de V dans $\mathbb{F}_p$ (*voir* 2.1.2). On note 1 l'élément de $\pi_0(B_{\mathrm{End}(V)})$ correspondant à l'application identique. Le $\mathscr{K}$-morphisme $\varphi: T_V H^* V \to H^* V$ adjoint du $\mathscr{K}$-morphisme canonique $H^* V \to H^* V \otimes H^* V$ induit par le produit de BV s'identifie en degré zéro à $1 : \mathrm{B}_{\mathrm{End}(\mathrm{V})} = \mathbb{F}_p^{(\mathrm{End}(\mathrm{V}))} \to \mathbb{F}_p$. On en déduit que ce $\mathscr{K}$-morphisme se factorise via la projection

$$\mathrm{T_V\,H^*\,V} \to \mathrm{T_V\,H^*\,V} \otimes_{\mathbb{F}_p^{(\mathrm{End}(\mathrm{V}))}} \mathbb{F}_p = \mathrm{T_V\,H^*\,V}_{(1)}.$$

LEMME 3.2.2.1 [La1]. — *Le $\mathscr{K}$-morphisme* $\mathrm{T_V\,H^*\,V}_{(1)} \to \mathrm{H^*\,V}$ *induit par* φ *est un isomorphisme.*

Soit M un $\mathrm{T_V\,H^*\,V}$-A-module instable. D'après le lemme précédent

$$\mathrm{M}_{(1)} = \mathrm{M} \otimes_{(\mathrm{T_V\,H^*\,V})^0} \mathbb{F}_p$$

est muni d'une structure naturelle de H* V-A-module instable. On note $\mathrm{L}_{(1)}$ le foncteur $\mathrm{T_V\,H^*\,V}\text{-}\mathscr{U} \to \mathrm{H^*\,V}\text{-}\mathscr{U}$, $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}_{(1)}$. Puis on note Fix le foncteur $\mathrm{H^*\,V} - \mathscr{U} \to \mathscr{U}$, $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{T_V\,M} \otimes_{\mathrm{T_V\,H^*\,V}} \mathbb{F}_p \cong \mathrm{T_V\,M}_{(1)} \otimes_{\mathrm{H^*\,V}} \mathbb{F}_p$.

PROPOSITION 3.2.2.2 [La1]. (Voir proposition 4.5.) — *Pour tout* H* V-A-*module instable* M, *il existe un isomorphisme naturel de* H* V-A-*modules instables*:

$$\bar{\kappa}_{\mathrm{M}} : \quad \mathrm{L}_{(1)}(\mathrm{T_V\,M}) \cong \mathrm{H^*\,V} \otimes \mathrm{Fix\,M},$$

H* V ⊗ Fix M *étant muni de la structure « évidente » de* H* V-A-*module instable* (*qui en fait donc un* H* V-*module libre*).

Ce résultat a une origine géométrique dont nous discuterons brièvement en 3.4.5; nous renvoyons le lecteur à [La1] partie 4 pour plus de détails et en particulier pour la définition précise de $\bar{\kappa}_{\mathrm{M}}$.

Comme toute localisation le foncteur $\mathrm{L}_{(1)}$ est exact, préserve les colimites filtrantes et les produits tensoriels de H* V-A-modules instables. A l'aide du théorème 3.2.1 et de la proposition précédente on déduit :

COROLLAIRE 3.2.2.3 [La1]. *Théorème* 4.6.1.1 *et théorème* 4.6.2.1. — *Le foncteur* Fix *est exact et préserve les produits tensoriels de* H* V-A-*modules instables.*

Remarque. — Notons $\mathrm{H^*\,V}/\mathscr{K}$ la catégorie des objets de $\mathscr{K}$ au-dessous de H* V; un objet K de $\mathrm{H^*\,V}/\mathscr{K}$ est donc une A-algèbre instable munie d'un $\mathscr{K}$-morphisme $\mathrm{H^*\,V} \to \mathrm{K}$ (K est donc en particulier un H* V-A-module instable). Le corollaire précédent montre que le produit de K induit sur Fix K une structure d'algèbre; c'est une A-algèbre instable (*voir* [La1], § 4.6.3). On peut montrer que le foncteur $\mathrm{Fix} : \mathrm{H^*\,V}/\mathscr{K} \to \mathscr{K}$ est l'adjoint à gauche du foncteur $\mathscr{K} \to \mathrm{H^*\,V}/\mathscr{K}$, $\mathrm{L} \mapsto \mathrm{H^*\,V} \otimes \mathrm{L}$ (*voir* [La1], théorème 4.6.3.1).

3.3. LA MÉTHODE DE DROR-SMITH. — Rappelons tout d'abord le résultat suivant dû à W. G. Dwyer.

THÉORÈME 3.3.1 (W. G. Dwyer [Dw]). — *Soient* B *un espace pointé connexe*, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{B}$ *un* $h\mathscr{S}$-*morphisme et* F *sa fibre homotopique. Si l'action de* $\pi_1(\mathrm{B})$ *sur* $\mathrm{H}_*\,\mathrm{F}$ *est nilpotente alors la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de* f *converge fortement vers* $\mathrm{H}_*\,\mathrm{F}$.

E. Dror et J. Smith [DS] ont montré que le théorème suivant, dû à J. Lannes [La1], est une conséquence des théorèmes 3.2.1 et 3.3.1.

THÉORÈME 3.3.2. — *Soit* F *un espace* p-π_*-*fini. Alors l'homomorphisme naturel de* A-*algèbres instables*:

$$h_c: \quad T_V(H^* F) \to H^*(\mathbf{hom}(BV, F))$$

est un isomorphisme.

Préliminaire. — Soient F et F″ deux espaces p-π_*-finis, F″ étant supposé pointé, $f: F \to F''$ une application et F′ sa fibre homotopique (qui est donc p-π_*-fini). On note F''_0 la composante connexe du point base de F″ et F_1 l'image réciproque de F''_0 par f; F′ s'identifie aussi à la fibre homotopique de l'application $g: F_1 \to F''_0$ induite par f. Le groupe fondamental de F''_0, comme tout p-groupe fini, agit de façon nilpotente sur $H_* F'$. La suite spectrale d'Eilenberg-Moore homologique de g converge donc fortement d'après le théorème 3.3.1 et puisque les homologies en jeu sont finies en chaque degré, la suite spectrale cohomologique $\{E_r^{s,t}\}_r$ de g converge elle aussi fortement vers $H^* F'$. Rappelons que le terme $E_2^{s,*}$ de cette suite spectrale s'identifie, comme $\mathbb{F}_p$-algèbre bigraduée, à $\mathrm{Tor}^{s,*}_{H^*(F''_0)}(H^* F_1, \mathbb{F}_p)$. Comme le remarquent E. Dror et J. Smith [DS] l'homomorphisme naturel:

$$\mathrm{Tor}^{s,*}_{H^* F''}(H^* F, \mathbb{F}_p) \to \mathrm{Tor}^{s,*}_{H^*(F''_0)}(H^* F_1, \mathbb{F}_p)$$

est un isomorphisme. Pour s'en convaincre, on remarque tout d'abord que le point base de F″ fournit un élément s du spectre de la $\mathbb{F}_p$-algèbre booléenne $H^0 F''$ et que la A-algèbre instable $H^* F''_0$ (resp. la $H^* F''_0$-algèbre instable $H^* F_1$) s'identifie à $(H^* F'')_{(s)}$ (resp. $(H^* F)_{(s)}$). L'homomorphisme précédent s'identifie alors à l'isomorphisme naturel $\mathrm{Tor}^{s,*}_{H^* F''}(H^* F, \mathbb{F}_p) \cong \mathrm{Tor}^{s,*}_{(H^* F'')_{(s)}}(H^* F_{(s)}, \mathbb{F}_p)$.

Ainsi les suites spectrales d'Eilenberg-Moore cohomologiques pour f et g coïncident-elles (à partir du terme $E_2^{s,*}$). En particulier, la suite spectrale d'Eilenberg-Moore cohomologique pour f converge fortement vers $H^* F$. De plus cette suite spectrale est une suite spectrale de A-modules instables [Re1] au sens suivant:

— pour tout entier $s \geqq 0$, $E_r^{s,*}$ possède une structure naturelle de A-module instable et la différentielle $d_r: E_r^{s,*} \to \Sigma^{r-1} E_r^{s-r+1,*}$ est A-linéaire.

On en déduit l'existence d'une filtration convergente

$$0 = F^*_{-1} \subset F^*_0 \subset F^*_{s-1} \subset F^*_s \subset \ldots \subset H^* F' \text{ de } H^* F'$$

par des sous-A-modules (instables) et pour tout $s \geqq 0$ des suites exactes courtes de A-modules instables:

$$0 \to F^*_{s-1} \to F^*_s \to \Sigma^s E_\infty^{s,*} \to 0.$$

Puisque le foncteur T_V est exact et préserve les colimites (comme tout adjoint à gauche), on obtient une filtration convergente

$$0 = T_V F^*_{-1} \subset T_V F^*_0 \subset T_V F^*_{s-1} \subset T_V F^*_s \subset \ldots \subset T_V H^* F' \text{ de } T_V H^* F'$$

par des sous-A-modules (instables) et pour tout $s \geqq 0$ des suites exactes courtes de A-modules instables :

$$0 \to \mathrm{T_V}\, \mathrm{F}^*_{s-1} \to \mathrm{T_V}\, \mathrm{F}^*_s \to \mathrm{T_V}\, \Sigma^s\, \mathrm{E}^{s,\,*}_\infty \to 0.$$

Le foncteur $\mathrm{T_V}$ commute aux suspensions (c'est un cas particulier de la commutation aux produits tensoriels) et $\mathrm{T_V}\,\Sigma^s\,\mathrm{E}^{s,\,*}_\infty$ s'identifie donc à $\Sigma^s\,\mathrm{T_V}\,\mathrm{E}^{s,\,*}_\infty$. A nouveau par exactitude du foncteur $\mathrm{T_V}$, la suite spectrale $\{\mathrm{E}^{s,\,*}_r\}_r$ fournit en « appliquant » $\mathrm{T_V}$ (en un sens évident) une suite spectrale de A-modules instables $\{\mathrm{T_V}\,\mathrm{E}^{s,\,*}_r\}_r$ et le fait que $\mathrm{T_V}$ à préserve les colimites montre que $\mathrm{T_V}\,\mathrm{E}^{s,\,*}_\infty$ s'identifie au terme « $\mathrm{E}^{s,\,*}_\infty$ » de cette suite spectrale $\{\mathrm{T_V}\,\mathrm{E}^{s,\,*}_r\}_r$. En abrégé la suite spectrale $\{\mathrm{T_V}\,\mathrm{E}^{s,\,*}_r\}_r$ « converge » vers $\mathrm{T_V}\,\mathrm{H}^*\,\mathrm{F}'$.

Démonstration du théorème 3.3.2. — On remarque tout d'abord qu'il est assez élémentaire de vérifier le théorème lorsque F est un espace d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\mathbb{F}_p, n)$, $n \geqq 1$.

PROPOSITION 3.3.3. — *Le théorème* 3.3.2 *est vrai lorsque* F *est un espace d'Eilenberg-MacLane* $\mathrm{K}(\mathbb{F}_p, n)$, $n \geqq 1$.

Le théorème 3.3.2 est maintenant conséquence du théorème suivant et de la proposition 1.2.

THÉORÈME 3.3.4 (E. Dror-Farjoun et J. Smith, *voir* [DS], lemme 3.1). — *Soient* $n \geqq 2$ *un entier*, $f : \mathrm{F} \to \mathrm{K}(\mathbb{F}_p, n)$ *une application avec* F p-π_*-*fini et* F′ *la fibre homotopique de* f. *Si l'homomorphisme naturel* :

$$h_c : \quad \mathrm{T_V}(\mathrm{H}^*\,\mathrm{F}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{hom}(\mathrm{BV},\, \mathrm{F}))$$

est un isomorphisme, alors il en est de même pour l'homomorphisme :

$$h_c : \quad \mathrm{T_V}(\mathrm{H}^*\,\mathrm{F}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{hom}(\mathrm{BV},\, \mathrm{F}')).$$

Démonstration. — On note $\{\mathrm{E}^{s,\,*}_r(1)\}_r$ la suite spectrale d'Eilenberg-Moore cohomologique de l'application $\mathrm{hom}(\mathrm{BV},\mathrm{F}) \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{K}(\mathbb{F}_p, n))$ induite par f et $\{\mathrm{E}^{s,\,*}_r(2)\}_r$ celle de la fibration $\mathrm{F}' \to \mathrm{F} \to \mathrm{K}(\mathbb{F}_p, n)$. Ces deux suites spectrales convergent fortement respectivement vers $\mathrm{H}^*(\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{F}'))$ et $\mathrm{H}^*\,\mathrm{F}'$ (utiliser le préliminaire et le lemme 3.1.1). On remarque alors que le morphisme évident de $h\mathcal{S}$-diagrammes homotopiquement cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BV} \times \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{F}') & \to & \mathrm{BV} \times \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BV} & \to & \mathrm{BV} \times \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{K}(\mathbb{F}_p, n)) \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{F}' & \to & \mathrm{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \to & \mathrm{K}(\mathbb{F}_p, n)) \end{array}$$

induit par fonctorialité un morphisme de la suite spectrale $\{\mathrm{E}^{s,\,*}_r(2)\}_r$ vers la suite spectrale d'Eilenberg-Moore cohomologique du premier diagramme. On se convainc sans peine que cette dernière est précisément le « produit tensoriel » de A-modules instables (au sens évident) de $\mathrm{H}^*\,\mathrm{V}$ et de la suite spectrale $\{\mathrm{E}^{s,\,*}_r(1)\}_r$.

Les propriétés d'adjonction du foncteur T_V permettent d'en déduire un homomorphisme ψ de la suite spectrale $\{T_V E_r^{s,*}(2)\}_r$, construite dans le préliminaire, vers la suite spectrale $\{E_r^{s,*}(1)\}_r$. Le terme $E_2^{s,*}$ de la suite spectrale $\{E_r^{s,*}(1)\}_r$ s'identifie à:

$$\mathrm{Tor}^{s,*}_{H^*(\mathbf{hom}(BV,K(\mathbb{F}_p,n)))}(\mathbb{F}_p, H^*(\mathbf{hom}(BV,F))$$

et, par exactitude et commutation aux produits tensoriels de A-modules instables du foncteur T_V, le terme $E_2^{s,*}$ de la suite spectrale $\{T_V E_r^{s,*}(2)\}_r$ s'identifie à:

$$T_V(\mathrm{Tor}^{s,*}_{H^*(K(\mathbb{F}_p,n))}(\mathbb{F}_p, H^*F)) \cong \mathrm{Tor}^{s,*}_{T_V H^*(K(\mathbb{F}_p,n))}(\mathbb{F}_p, T_V H^*F).$$

Par hypothèses, l'homomorphisme ψ induit un isomorphisme sur les termes $E_2^{s,*}$ (on utilise ici la proposition 3.3.5); ψ est donc un isomorphisme de suites spectrales, d'où le résultat. ■

3.4. A PROPOS DES RÉSULTATS DE J. LANNES SUR LES ESPACES FONCTIONNELS **hom** (BV, X).

3.4.1. *p-complétion «pro-finie» et p-complétion «pro-nilpotente»*. — Les résultats du paragraphe 3.4 seront énoncés dans le cadre des pro-p-espaces que l'on a développé dans les parties 1 et 2. L'objet de ce paragraphe est de montrer le lien qui existe entre ce cadre et celui de [BK]. On commence par comparer la p-complétion définie en 1.3.2 et la complétion pro-p-nilpotente dont nous allons rappeler la définition, puis à l'aide des résultats de Dror [Dr] avec la p-complétion construite par Bousfield et Kan [BK].

On dit qu'un espace pointé connexe F est p-nilpotent d'ordre n s'il existe une tour finie d'espaces pointés connexes $F = F^n \to F^{n-1} \to \ldots \to F^1 \to F^0 = *$ telle que chacune des applications $F^k \to F^{k-1}$, $1 \leqq k \leqq n$, est (à homotopie près) une fibration principale de fibre un espace d'Eilenberg-MacLane $K(V_m, k(m))$ avec V_m un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel et $m: N^* \to \mathbb{N}^*$ une application croissante. On note p-nil-$h\mathscr{S}^0_{pt}$ la sous-catégorie pleine de $h\mathscr{S}^0_{pt}$ dont les objets sont les espaces pointés connexes p-nilpotents. Un objet de la catégorie des pro-objets à valeur dans p-nil-$h\mathscr{S}^0_{pt}$ s'appellera un pro-espace p-nilpotent.

On note $\mathscr{E}$ la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels. Soient $Y_\bullet$ un pro-espace p-nilpotent et $n \geqq 0$ un entier. On note $H_n(Y_\bullet)$ le pro-objet de $\mathscr{E}$ $\mathscr{I}_{Y_\bullet} \to \mathscr{E}$; $i \mapsto H_n(Y_i)$ et on l'appelle le n-ième pro-groupe d'homologie modulo p de $Y_\bullet$.

THÉORÈME 3.4.1.1. — *Soit* $f: X_\bullet \to Y_\bullet$ *un morphisme de pro-espaces p-nilpotents. Les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *f est un isomorphisme*;

(ii) *pour tout entier* $n \geqq 0$, *f induit un isomorphisme* $H_n X_\bullet \cong H_n Y_\bullet$.

La démonstration du résultat précédent est analogue à celle du théorème 2.4.1 et est laissée au lecteur.

THÉORÈME-DÉFINITION 3.4.1.2 (A. K. Bousfield et D. M. Kan [BK]). — *Soit* X *un espace pointé connexe. Alors le foncteur covariant*:

$$p\text{-nil-}h\mathscr{S}^0_{pt} \to \mathscr{E}ns_{pt};\ E \mapsto [X, F]$$

est pro-représentable par une tour d'espaces pointés connexes p-nilpotents que l'on appelle le complété p-nilpotent de X *et que l'on note* $\hat{X}_{\bullet}^{p-\mathrm{nil}}$.

Remarque. — On se convainc que l'homomorphisme de pro-espaces $X \to \hat{X}_{\bullet}^{p-\mathrm{nil}}$ induit nécessairement, pour tout entier $n \geqq 0$, un pro-isomorphisme $H_n X \cong H_n \hat{X}_{\bullet}^{p-\mathrm{nil}}$.

Esquisse de démonstration. — On construit ensuite par récurrence sur n, une tour d'espaces p-nilpotents $\{X_n\}_n$ un morphisme de pro-espaces $X \to \{X_n\}_n$ induisant un pro-isomorphisme $H_k X \cong H_k \hat{X}_{\bullet}^{p-\mathrm{nil}}$, $k \geqq 0$, en procédant de façon analogue à la démonstration du théorème 2.6.1. On se convainc ensuite qu'une telle tour d'espaces est solution du problème (*voir* [BK], chap. III, proposition 6.7). ■

Ce résultat montre que l'homomorphisme de pro-espaces $X \to \hat{X}_{\bullet}^{p-\mathrm{nil}}$ est initial dans la catégorie des homomorphismes de pro-espaces de source X et de but un pro-espace p-nilpotent. On en déduit pour tout espace pointé connexe X un homomorphisme naturel de pro-espaces $\eta : \hat{X}_{\bullet}^{p-\mathrm{nil}} \to \hat{X}_{\bullet}^{p}$.

COROLLAIRE 3.4.1.3. — *Soit* X *un espace pointé connexe. Les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *l'homomorphisme* $\eta : \hat{X}_{\bullet}^{p-\mathrm{nil}} \to \hat{X}_{\bullet}^{p}$ *est un isomorphisme de pro-espaces;*

(ii) $H^* X$ *est fini en chaque degré.*

La démonstration du lemme suivant est facile et laissée au lecteur :

LEMME 3.4.1.4. — *Soient* $X_{\bullet}$ *un pro-p-espace et* $n \geqq 0$ *un entier. Alors l'homomorphisme naturel de pro-*($\mathbb{F}_p$*-espaces vectoriels*) $H_n(X_{\bullet}) \to (H_c^n X)^*$ *de l'homologie modulo p de* $X_{\bullet}$ *vers le* $\mathbb{F}_p$*-espace vectoriel pro-fini* $(H_c^n X)^*$ *dual du* $\mathbb{F}_p$*-espace vectoriel* $H_c^n X$, *est un isomorphisme.*

Démonstration du corollaire 3.4.1.3. — L'équivalence entre les points (i) et (ii) résulte immédiatement du théorème 3.4.1.1, du lemme 3.4.1.4 et de la proposition 2.1.2.1. ■

Commentaire. — Soit X un espace pointé connexe. Il résulte des travaux de E. Dror [Dr] et de Bousfield-Kan [BK] que la limite homotopique de « la » tour d'espaces $\hat{X}_{\bullet}^{p-\mathrm{nil}}$ a le type d'homotopie (non canoniquement) de la p-complétion de Bousfield-Kan. D'après le corollaire 3.4.1.3, lorsque $H^* X$ est fini en chaque degré, le morphisme $\eta : \hat{X}_{\bullet}^{p-\mathrm{nil}} \to \hat{X}_{\bullet}^{p}$ induit un $h\mathscr{S}$-isomorphisme de la limite homotopique de « la » tour d'espaces $\hat{X}_{\bullet}^{p-\mathrm{nil}}$ et de l'espace $|\hat{X}_{\bullet}^{p}|$. Ainsi, dans ce cas l'espace sous-jacent au p-complété $\hat{X}_{\bullet}^{p}$ est $h\mathscr{S}$-isomorphe au p-complété de Bousfield-Kan (en utilisant le fait que la p-complété de Bousfield-Kan d'une somme d'espaces a le type d'homotopie de la somme des p-complétés, on voit que pour tout espace X (connexe ou non) avec $H^* X$ fini en chaque degré, l'espace $|\hat{X}_{\bullet}^{p}|$ a le type d'homotopie de son p-complété de Bousfield-Kan).

Nous allons montrer que le cadre des pro-p-espaces est très naturel pour énoncer les résultats de ([La1], [La2]); la présence des hypothèses de finitude sur la cohomologie dans ([La1], [La2]) s'explique donc par le corollaire 3.4.1.3.

Dans les paragraphes 3.4.2, 3.4.3, 3.4.4 et 3.4.5, pour tout espace X le p-complété profini de X sera noté simplement $\hat{X}_{\bullet}$ (au lieu de $\hat{X}_{\bullet}^{p}$).

3.4.2. *Cohomologie modulo p continue des espaces fonctionnels* **hom**(BV, $Y_\bullet$). — Le résultat qui suit donne l'interprétation géométrique du foncteur T_V; c'est la généralisation directe de l'interprétation donnée dans [DS].

THÉORÈME 3.4.2.1. — *Soit* $Y_\bullet$ *un pro-p-espace. Alors le* $\mathcal{K}$*-morphisme naturel* (*défini dans la remarque* 2) *de* 3.2.1):

$$h_c: \quad T_V H_c^*(Y_\bullet) \to H_c^*(\mathbf{hom}(BV, Y_\bullet))$$

est un isomorphisme. En particulier, pour tout espace X *le* $\mathcal{K}$*-morphisme naturel*:

$$h_c: \quad T_V H^* X \to H_c^*(\mathbf{hom}(BV, \hat{X}_\bullet))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Ce théorème est vrai pour $Y_\bullet$ un espace p-π_*-fini d'après le théorème 3.3.2; il est donc vrai pour $Y_\bullet$ quelconque puisque le foncteur T_V, comme tout adjoint à gauche, commute aux colimites filtrantes. La seconde assertion résulte de la proposition 2.1.2.1. ■

Les deux corollaires suivants sont des conséquences immédiates du théorème 3.4.2.1 et des remarques de 3.2.1. Le premier de ces corollaires est une généralisation « formelle » dans le contexte des pro-p-espaces du célèbre théorème de J. Lannes ([La1], [La2]) (à l'aide du corollaire 3.4.1.3 et du commentaire qui suit on retrouve bien le théorème 3.1.1 de [La1]).

COROLLAIRE 3.4.2.2. — *Soit* $Y_\bullet$ *un pro-p-espace* (*resp. admettant une limite*). *Alors l'application naturelle*:

$$\pi_0(\mathbf{hom}(BV, Y_\bullet)) \cong [BV, Y_\bullet]'_c \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H_c^*(Y_\bullet), H^* V)$$
$$(\text{resp. } [BV, |Y_\bullet|]' \cong \pi_0(\mathbf{hom}(BV, Y_\bullet)) \cong [BV, Y_\bullet]'_c \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H_c^*(Y_\bullet), H^* V))$$

est bijective (*c'est donc un homéomorphisme d'ensembles pro-finis*). *En particulier, pour tout espace* X *l'application naturelle*:

$$[BV, |\hat{X}_\bullet|]' \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^* X, H^* V)$$

est bijective.

COROLLAIRE 3.4.2.3. — *Soient* $Y_\bullet$ *un pro-p-espace et f un élément de* $[BV, Y_\bullet]'_c$. *Alors le* $\mathcal{K}$*-morphisme naturel* (*défini dans la remarque* 3) *de* 3.2.1):

$$h_{c,f}: \quad (T_V H_c^*(Y_\bullet))_{(f^*)} \to H_c^*(\mathbf{hom}(BV, Y_\bullet; f))$$

est un isomorphisme.

3.4.3. *Sur la cohomologie modulo p de l'espace fonctionnel* **hom**(BV, $|\hat{X}_\bullet|; f$).

THÉORÈME 3.4.3. — *Soient* $Y_\bullet$ *un pro-p-espace et f un élément de l'ensemble* (*pro-fini*) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H_c^*(Y_\bullet), H^* V)$. *On suppose que* $(T_V H_c^*(Y_\bullet))_{(f^*)}$ *est nul en degré* 1. *Alors le pro-p-espace* **hom**(BV, $Y_\bullet; f$) *admet une limite et, de plus, les conditions suivantes sont* *équivalentes*:

(i) *le* $\mathcal{K}$*-morphisme naturel* $h_{c,f}:(\mathrm{T_V}\,\mathrm{H}_c^*(\mathrm{Y}_\bullet))_{(f^*)} \to \mathrm{H}^*\,|\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}_\bullet; f)|$ *est un isomorphisme;*

(ii) $(\mathrm{T_V}\,\mathrm{H}_c^*(\mathrm{Y}_\bullet))_{(f^*)}$ *est fini en chaque degré.*

En particulier, soient X *un espace et* f *un élément de l'ensemble*

$$[\mathrm{BV}, |\hat{\mathrm{X}}_\bullet|]' \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathrm{H}^*\mathrm{X}, \mathrm{H}^*\mathrm{V}).$$

On suppose que $(\mathrm{T_V}\,\mathrm{H}^*\mathrm{X})_{(f^*)}$ *est nul en degré* 1. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *le* $\mathcal{K}$*-morphisme naturel* $h_{c,f}:(\mathrm{T_V}\,\mathrm{H}^*\mathrm{X})_{(f^*)} \to \mathrm{H}^*\,\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, |\hat{\mathrm{X}}_\bullet|; f)$ *est un isomorphisme;*

(ii) $(\mathrm{T_V}\,\mathrm{H}^*\mathrm{X})_{(f^*)}$ *est fini en chaque degré.*

Le lecteur pourra comparer ce théorème et le théorème 3.2.1 de [La1]. On remarquera également en observant la démonstration que l'on pourrait énoncer une variante du théorème 3.4.3 analogue au théorème 3.2.4 de [La1].

Démonstration du théorème 3.4.3. — Le pro-p-espace $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}_\bullet; f)$ est connexe et vérifie l'hypothèse du théorème 2.6.2 (d'après le théorème 3.4.2.1 en degré un); il est donc isomorphe au pro-p-espace sous-jacent à un pro-p-espace pointé $\mathrm{Z}_\bullet$ qui est simplement connexe (d'après la démonstration de 2.6.2) et en particulier, admet une limite d'après le théorème 1.5.2.1. Le $h\mathcal{S}$-morphisme naturel $|\mathrm{Z}_\bullet| \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, |\mathrm{Y}_\bullet|; f)$ est un isomorphisme d'après la proposition 3.1.3. On peut donc appliquer le théorème 2.3.1 à $\mathrm{Z}_\bullet$ ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème. La seconde découle de la proposition 2.1.2.1. ■

3.4.4. *Sur le type d'homotopie de l'espace fonctionnel* $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, |\hat{\mathrm{X}}_\bullet|; f)$

THÉORÈME 3.4.4. — *Soient* X *un espace,* f *un élément de l'ensemble* $[\mathrm{BV}, |\hat{\mathrm{X}}_\bullet|]'$, Z *un espace et* $g:\mathrm{Z} \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{X}; f)$ *un* $h\mathcal{S}$*-morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *le morphisme* $\hat{\mathrm{Z}}_\bullet \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{X}}_\bullet; f)$, *induit par* g, *est un isomorphisme de pro-p-espaces;*

(ii) *le* $\mathcal{K}$*-morphisme induit par* g, $(\mathrm{T_V}\,\mathrm{H}^*\mathrm{X})_{(f)} \to \mathrm{H}^*\mathrm{Z}$, *est un isomorphisme;*

Lorsque ces conditions sont réalisées alors la condition suivante l'est aussi:

(iii) *le* $h\mathcal{S}$*-morphisme limite* $|\hat{\mathrm{Z}}_\bullet| \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, |\hat{\mathrm{X}}_\bullet|; f)$ *est un isomorphisme.*

De plus le point (iii) *implique les points* (i) *et* (ii) *dans chacun des cas suivants*: (1) X *est connexe et* f *est trivial;*

(2) $(\mathrm{T_V}\,\mathrm{H}^*\mathrm{X})_{(f)}$ *est trivial en degré un;*

(3) $(\mathrm{T_V}\,\mathrm{H}^*\mathrm{X})_{(f)}$ *est fini en chaque degré.*

Remarques. — (1) Le théorème 3.4.4 et le commentaire de 3.4.1 impliquent le théorème 3.3.1 de [La1] ainsi que ses versions « avec réciproque ».

(2) Dans l'énoncé du point (i), on a implicitement admis le fait que le p-complété du produit de BV et de Z est naturellement isomorphe au produit (*voir* 3.1) de BV et du p-complété de Z (pour s'en convaincre on peut par exemple remarquer que l'homomorphisme naturel $H^* BV \otimes H^* Z \to H_c^*(BV \times \hat{Z})$ est un isomorphisme et utiliser la proposition 2.1.2.1 et le théorème 2.4.2). Le $h\mathcal{S}$-morphisme $BV \times Z \to X$ adjoint de g induit alors un morphisme de pro-p-espaces $BV \times \hat{Z}_{\bullet} \to \hat{X}_{\bullet}$ qui induit le morphisme $\hat{Z}_{\bullet} \to \mathbf{hom}(BV, \hat{X}_{\bullet}; f)$ considéré au point (ii).

(3) On notera que d'après le paragraphe 3.1, dans le cas (1) ci-dessus le pro-p-espace $\mathbf{hom}(BV, \hat{X}_{\bullet}; f)$ se relève en un pro-p-espace pointé. De même d'après le paragraphe 2.6, dans les cas (2) et (3) ci-dessus $\mathbf{hom}(BV, \hat{X}_{\bullet}; f)$ se relève en un pro-p-espace pointé. De plus dans chacun de ces cas tout morphisme du pro-p-espace pointé $\hat{Z}_{\bullet}$ vers le pro-p-espace $\mathbf{hom}(BV, \hat{X}_{\bullet}; f)$ se relève en un morphisme de pro-p-espaces pointés (*voir* la remarque en 2.6).

L'implication (iii) $\Rightarrow$ ((i) et (i)) dans les cas (1), (2) et (3) résulte alors du théorème 2.4.1 (utiliser l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i)).

C'est pour avoir cette implication en toute généralité qu'il serait intéressant d'avoir une réponse affirmative aux problèmes posés au paragraphe 1.5.2.

Démonstration du théorème 3.4.4. — La première partie de ce théorème est une conséquence facile du corollaire 3.4.2.3 et du théorème 2.4.2. La dernière affirmation découle de la remarque (3) précédente. ■

3.4.5. *La conjecture de Sullivan généralisée.* — La conjecture de Sullivan généralisée a été démontrée par J. Lannes ([La1], [La2]), H. R. Miller (non publié), W. G. Dwyer, H. R. Miller et J. A. Neisendorfer [DMN] et G. Carlsson [Carl]. Leurs démonstrations s'effectuent à l'aide des techniques cosimpliciales de Bousfield et Kan. Nous nous proposons de l'énoncer dans le cadre des pro-p-espaces.

Nous commençons par résumer les paragraphes 4.1 et 4.2 de [La1]. Dans ce paragraphe, X désigne un $\mathbb{Z}/p$-espace (*i.e.* un $\mathbb{Z}/p$-ensemble simplicial), le cas des $\mathbb{Z}/p$-C.W. complexes pouvant se ramener à ce cas. Les espaces seront implicitement supposés fibrants et $\mathbf{Hom}(B\mathbb{Z}/p, Y)$ désignera le modèle « standard » de l'espace fonctionnel simplicial qui est fibrant dès que l'espace Y l'est (rappelons — *voir* 3.1 — que l'on peut définir le foncteur $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $Y \mapsto \mathbf{Hom}(B\mathbb{Z}/p, Y)$ comme l'adjoint à droite du foncteur $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $Z \mapsto B\mathbb{Z}/p \times Z$).

On note $E\mathbb{Z}/p$ le revêtement universel de $B\mathbb{Z}/p$; c'est un espace contractile muni d'une action principale à droite (et à gauche) de $\mathbb{Z}/p$. On note $X_{h\mathbb{Z}/p}$ l'espace des coinvariants homotopiques c'est-à-dire la construction de Borel $E\mathbb{Z}/p \times_{\mathbb{Z}/p} X$; la projection naturelle $X_{h\mathbb{Z}/p} \to B\mathbb{Z}/p$ possède une section naturelle. Enfin on note $X^{h\mathbb{Z}/p}$ l'espace des points fixes homotopiques c'est-à-dire la fibre en l'identité de la fibration :

$$q:\quad \mathbf{Hom}(B\mathbb{Z}/p, X_{h\mathbb{Z}/p}) \to \mathbf{Hom}(B\mathbb{Z}/p, B\mathbb{Z}/p) \qquad (\textit{voir}\ [\text{La1}],\ \S\, 4.1).$$

On note $\mathbf{Hom}_{(1)}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, \mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p})$ l'image réciproque de $\mathbf{Hom}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, \mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p; \mathrm{Id})$; il est clair que $\mathrm{X}^{h\,\mathbb{Z}/p}$ est également la fibre en l'identité de la fibration induite

$$q : \mathbf{Hom}_{(1)}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, \mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p}) \to \mathbf{Hom}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, \mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p; \mathrm{Id}).$$

La composition des applications munit l'espace $\mathbf{Hom}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, \mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p; \mathrm{Id})$ d'une structure de monoïde qui s'identifie (comme monoïde) au groupe abélien simplicial $\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p$ ([La1], § 4.2). Ainsi la composition à la source munit l'espace $\mathbf{Hom}_{(1)}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, \mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p})$ d'une action de $\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p$. La proposition suivante est l'analogue géométrique de la proposition 3.2.2.2:

Proposition 3.4.5.1 [La1], proposition 4.2. — *L'application naturelle* (*induite par l'action de* $\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p$):

$$\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p \times \mathrm{X}^{h\,\mathbb{Z}/p} \to \mathbf{Hom}_{(1)}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, \mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p})$$

est un $\mathcal{S}$*-isomorphisme.*

On peut aussi appliquer ceci au $\mathbb{Z}/p$-espace $|\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|$. Rappelons en effet (*voir* 2.5) que l'on peut munir l'espace $|\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|$ (quitte à le remplacer par un espace $h\mathcal{S}$-isomorphe) d'une action du groupe $\mathbb{Z}/p$; la construction de Borel $|\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|_{h\,\mathbb{Z}/p}$ s'identifiant à l'espace $|\mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p\bullet}|$. D'après la proposition précédente, on a un $h\mathcal{S}$-isomorphisme naturel:

$$\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p \times |\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|^{h\,\mathbb{Z}/p} \to \mathbf{Hom}_{(1)}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, |\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|_{h\,\mathbb{Z}/p}).$$

On note $\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}$ le sous-espace de X des invariants sous l'action de $\mathbb{Z}/p$. L'inclusion équivariante naturelle $\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p} \to \mathrm{X}$ induit une application

$$f : \mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p \times \mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p} \cong \mathrm{E}\,\mathbb{Z}/p \times_{\mathbb{Z}/p} \mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p} \to \mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p}$$

et par adjonction une application naturelle $\iota : \mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p} \to \mathrm{X}^{h\,\mathbb{Z}/p}$. On note $\hat{\iota} : |\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}{}_{\bullet}| \to |\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|^{h\,\mathbb{Z}/p}$ le morphisme composé du p-complété de ι et du morphisme naturel $|\mathrm{X}^{h\,\mathbb{Z}/p}{}_{\bullet}| \to |\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|^{h\,\mathbb{Z}/p}$.

L'application f induit un $\mathrm{H}^*\,\mathbb{Z}/p/\mathcal{K}$-morphisme:

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p}) \to \mathrm{H}^*\,\mathbb{Z}/p \otimes \mathrm{H}^*(\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p})$$

et d'après la remarque de 3.2.2, un $\mathcal{K}$-morphisme naturel:

$$k : \quad \mathrm{Fix}\,\mathrm{H}^*(\mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}).$$

D'autre part, l'application f induit un morphisme de pro-p-espaces (utiliser la remarque (2) de 3.4.4) $\hat{f} : \mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p \times \mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}{}_{\bullet} \cong \mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p \times \mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}{}_{\bullet} \to \mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p\bullet}$. Le morphisme composé du morphisme $\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p \times \mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p \times \mathrm{X}_{\bullet}^{\mathbb{Z}/p^p} \to \mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p \times \mathrm{X}_{\bullet}^{\mathbb{Z}/p^p}$ induit par le produit de $\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p$ et du morphisme $\hat{f}$ induit par adjonction (*voir* la proposition 3.1.2) un morphisme naturel de pro-p-espaces:

$$g : \quad \mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p \times \mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}{}_{\bullet} \to \mathbf{Hom}_{(1)}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, \mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p\bullet}).$$

Les deux énoncés suivants constituent la forme générale de la conjecture de Sullivan dans le cadre des pro-p-espaces:

THÉORÈME 3.4.5.2. — *Soit* X *un* $\mathbb{Z}/p$*-espace. Les conditions suivantes sont équivalentes*:
(i) *le morphisme naturel* $g: \mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p \times \mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}_{\bullet} \to \mathbf{Hom}_{(1)}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, \mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p\bullet})$ *est un isomorphisme*;
(ii) *le* $\mathscr{K}$*-morphisme naturel* $k: \mathrm{Fix}\,\mathrm{H}^*(\mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p})$ *est un isomorphisme.*

Lorsque ces conditions sont réalisées le $h\mathscr{S}$*-morphisme naturel* $\hat{\iota}: |\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}_{\bullet}| \to |\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|^{h\,\mathbb{Z}/p}$ *est un isomorphisme.*

THÉORÈME 3.4.5.3 [La1], proposition 4.7. — *L'application naturelle*

$$k: \quad \mathrm{Fix}\,\mathrm{H}^*(\mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p})$$

est un isomorphisme si X *est un* $\mathbb{Z}/p$*-espace de dimension finie.*

COROLLAIRE 3.4.5.4. — *Soit* X *un* $\mathbb{Z}/p$*-espace* (*ou un* $\mathbb{Z}/p$-C.W.*-complexe*) *de dimension finie. Alors le* $h\mathscr{S}$*-morphisme naturel*:

$$\hat{\iota}: \quad ||\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}_{\bullet}| \to |\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|^{h\,\mathbb{Z}/p}$$

est un isomorphisme. En particulier l'application naturelle $\pi_0(\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}) \to \pi_0(|\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|^{h\,\mathbb{Z}/p})$ *de l'ensemble des composantes connexes de* $\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}$ *vers l'ensemble pro-fini*

$$\pi_0(|\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|^{h\,\mathbb{Z}/p}) \cong \pi_0(\mathbf{Hom}_{(1)}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, \mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p\bullet}))$$

induit un homéomorphisme du complété pro-fini de $\pi_0(\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p})$ *sur* $\pi_0(|\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|^{h\,\mathbb{Z}/p})$ *et le* $h\mathscr{S}$*-morphisme naturel* $|\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}_{\alpha\,\bullet}| \to |\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|^{h\,\mathbb{Z}/p}_{\alpha}$ *est un isomorphisme pour tout élément* α *de* $\pi_0(\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p})$.

Démonstration du théorème 3.4.5.2. — On remarque tout d'abord que la cohomologie modulo p continue de $\mathbf{Hom}_{(1)}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, \mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p\bullet})$ s'identifie à $\mathrm{L}_{(1)}\mathrm{H}^*_c(\mathbf{Hom}_{(1)}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, \mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p\bullet})$; l'équivalence entre les points (i) et (ii) du théorème résulte alors du théorème 2.4.2 et de la proposition 3.2.2.2 (on doit vérifier que le $\mathscr{K}$-morphisme induit par g est bien l'isomorphisme de la proposition 3.2.2.2).

Lorsque les conditions (i) et (ii) sont réalisées, on en déduit que le $h\mathscr{S}$-morphisme $\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p \times |\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}_{\bullet}| \to \mathbf{Hom}_{(1)}(\mathrm{B}\,\mathbb{Z}/p, |\mathrm{X}_{h\,\mathbb{Z}/p\bullet}|;)$ est un isomorphisme et il résulte de la proposition 3.4.5.1 que le morphisme naturel $\hat{\iota}: |\mathrm{X}^{\mathbb{Z}/p}_{\bullet}| \to |\hat{\mathrm{X}}_{\bullet}|^{h\,\mathbb{Z}/p}$ est un isomorphisme ce qui achève la démonstration du théorème 3.4.5.2. ■

Esquisse de démonstration du théorème 3.4.5.3. — On raisonne par récurrence sur la dimension du $\mathbb{Z}/p$-squelette de X, en utilisant les propriétés du foncteur Fix (*voir* le corollaire 3.2.2.3). *Voir* [La1] pour la démonstration détaillée. ■

BIBLIOGRAPHIE

[AM] M. ARTIN et B. MAZUR, *Etale Homotopy* (*Lecture Notes in Math.*, N° 100, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1969).

[Bo] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique*, *Topologie générale*, Hermann.

[Br] E. H. BROWN, *Cohomologie Theories* (*Annals of Math.*, vol. 2, n° 75, 1962, pp. 467-484).

[BK] A. K. BOUSFIELD et D. M. KAN, *Homotopy Limits, Completions and Localizations* (*Lecture notes in math.*, n° 304, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1972).

[Cart] H. CARTAN, *Séminaire H. Cartan* 1954/1955, *Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie*, exposés 1-11 et 13-16, New-York, Benjamin, 1967.

[Carl] G. CARLSSON, *Equivariant Stable Homotopy and Sullivan's Conjecture* (*Inventiones Math.*, n° 103, 1991, pp. 497-525).

[Dr] E. DROR, *Pro-Nilpotent Representation of Homology Types* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, n° 38, 1973, pp. 657-660).

[DMN] W. G. DWYER, H. R. MILLER et J. A. NEISENDORFER, *Fiberwise Completion and Unstable Adams Spectral Sequence* (*Israël J. Math.*, n° 66, 1989, pp. 160-178).

[DS] E. DROR FARJOUN et J. SMITH, *A Geometric Interpretation of Lannes' Functor T*, *Théorie de l'homotopie* (H. R. Miller, J.-M. Lemaire, L. Schwartz éd., *Astérisque* n° 191, 1990).

[Dw] W. G. DWYER, *Strong Convergence of the Eilenberg-Moore spectral sequence* (*Topology* n° 13, 1974, pp. 255-265).

[Fr] E. M. FRIEDLANDER, *Fibrations in Etale Homotopy* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 42, 1972, pp. 5-49).

[Gr] A. GROTHENDIECK, *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique*, *Séminaire Bourbaki*, exposé 195, 1959-1960.

[GZ] P. GABRIEL et M. ZISMAN, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory* (*Ergebnisse der Math.*, n° 35, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1967).

[He] A. HELLER, *On the Representability of Homotopy Functors* (*J. London Math. Soc.*, vol. 2, n° 23, 1981, pp. 551-562).

[La1] J. LANNES, *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 75, 1992, pp. 135-244).

[La2] J. LANNES, Sur la cohomologie modulo p des p-groupes abéliens élémentaires, *Proc. Durham Symposium on homotopy theory* 1985, L.M.S., Cambridge Univ. Press, 1987, pp. 97-116.

[LZ] J. LANNES et S. ZARATI, *Sur les $\mathcal{U}$-injectifs* (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 1986, vol. 19, pp. 1-31).

[Mac] S. MACLANE, *Categories for the Working Mathematician* (*Graduate Texts in Math.*, n° 5, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1971).

[May] J. P. MAY, *Simplicial Objects in Algebraic Topology* (*Van Nostrand Math. Studies*, n° 11, 1967).

[Mi1] H. R. MILLER, The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces (*Annals of Math.*, n° 120, 1984, pp. 39-87 et corrigendum, *Annals of Math.*, n° 121, 1985, pp. 605-609).

[Mi2] H. R. MILLER, *The Sullivan Conjecture and Homotopical Representation Theory* (*Proc. Inter. Congr. Math. Berkeley*, 1986, pp. 580-589).

[Mi3] H. R. MILLER, *Massey-Peterson Towers and Maps from Classifying Spaces*, Algebraic Topology, Aarhus 1982 (proceedings), [*Lecture Notes in Math.*, n° 1051, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984, pp. 401-417].

[Qu1] D. QUILLEN, *Homotopical Algebra* (*Lecture Notes in Math.*, n° 43, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967).

[Qu2] D. QUILLEN, *An Application of Simplicial Profinite Groups* (*Com. Math. Helv.*, n° 44, 1969, pp. 45-60).

[Qu3] D. QUILLEN, *Some Remarks on Etale Homotopy and a Conjecture of Adams* (*Topology*, n° 7, 1968, pp. 111-116).

[Re1] D. RECTOR, *Steenrod Operations in the Eilenberg-Moore Spectrale Sequence* (*Com. Math. Helv.*, n° 45, 1970, pp. 540-552).

[Re2] D. RECTOR, *Homotopy Theory of Rigid Profinite Spaces I* (*Pac. J. of Math.*, vol. 85, n° 2, 1979, pp. 413-445).

[SE] N. E. STEENROD et D. B. A. EPSTEIN, *Cohomology Operations*, *Princeton Univ. Press*, 1962.

[Se] J.-P. SERRE, *Cohomologie galoisienne* (*Lecture Notes in Math.*, n° 5, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1965).

[SGA] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, tome 1 (*Lecture Notes in Math.*, n° 269, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972).

[Su1] D. SULLIVAN, *Genetics of Homotopy Theory and the Adams Conjecture* (*Annals of Math.*, n° 100, 1974, pp. 1-79).

[Su2] D. SULLIVAN, *Geometric topology, part* I: *localisation, periodicity and Galois symmetry*, M.I.T. Press, 1970.

(Manuscrit reçu le le 28 novembre 1991
révisé le 11 septembre 1992).

F. MOREL,
U.R.A. 212,
U.F.R. de Mathématiques,
Université Paris 7,
Couloir 45-55, 5^e étage,
2 place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05, France.