ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. TERQUEM

Sur les courbes dues à la coexistence de deux mouvements vibratoires perpendiculaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 7 (1878), p. 349-374

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1878_2_7__349_0>

SUR LES COURBES

DUES A LA COEXISTENCE

DE DEUX MOUVEMENTS VIBRATOIRES PERPENDICULAIRES,

Par M. A. TERQUEM,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

PREMIÈRE PARTIE.

PRÉLIMINAIRES.

Les courbes dues à la coexistence de deux mouvements vibratoires perpendiculaires ont été étudiées par MM. Lissajous et Melde. Le premier physicien, auquel on doit le moyen de les produire facilement à l'aide de diapasons munis de miroirs, a indiqué les propriétés principales de ces courbes.

M. Melde, dans l'ouvrage *die Lehre von den Schwingungscurven* (Leipzig, 1864), a repris cette étude, et l'a étendue aux courbes dues à la coexistence de deux mouvements elliptiques ou d'un mouvement elliptique et d'un mouvement rectiligne. Pour étudier les propriétés géométriques des premières courbes, il est plus commode de conserver les deux équations qui représentent les mouvements composants, et de prendre par suite, comme variable auxiliaire, le temps.

Ces équations sont, comme l'on sait, les suivantes :

$$x = a\cos 2\pi m\,(t+\delta), \tag{1}$$

$$z = b\cos 2\pi nt. \tag{2}$$

L'une des molécules exécute m vibrations suivant l'axe des x, et l'autre n suivant l'axe des z, perpendiculaire au premier, pendant un certain intervalle de temps que l'on prend pour unité. La forme de la courbe que décrit une molécule possédant ces deux mouvements simultanés dépend des trois quantités m, n et δ, la différence de phase δ variant au maximum de o à $\frac{1}{m}$. M. Lissajous a en outre fait remarquer que l'on peut remplacer l'un des deux mouvements pendulaires, celui que représente l'équation (1), par exemple, par un mouvement de rotation uniforme sur une circonférence de rayon a. On sait, en effet, que si une molécule se meut sur une circonférence d'un mouvement uniforme, sa projection sur un diamètre quelconque possède un mouvement pendulaire; la molécule devra donc, dans le cas actuel, décrire m circonférences dans l'unité de temps; l'arc y parcouru pendant le temps t sera exprimé par

$$y = 2\pi m a (t + \delta). \tag{3}$$

L'autre mouvement pendulaire concomitant, $z = b \cos 2\pi n t$, s'exécutera suivant la perpendiculaire au plan de la circonférence menée par le centre de cette dernière. On peut admettre, pour trouver le mouvement résultant, que le mouvement oscillatoire a lieu suivant les génératrices du cylindre ayant la circonférence $2\pi a$ pour base; par suite la molécule vibrante, pendant l'unité de temps, fait m fois le tour du cylindre, tout en exécutant n oscillations sur sa surface [1]. On obtient ainsi une courbe tracée sur la surface du cylindre, que je désignerai sous le nom de *courbe cylindrique,* et dont la projection sur un des plans diamétraux du cylindre reproduit la courbe plane due à la composition des deux mouvements vibratoires perpendiculaires. Grâce à cette construction, on peut éliminer, ainsi que l'a fait remarquer M. Lissajous, l'influence due à la différence de phase δ; la forme de la courbe cylindrique ne dépend plus absolument que des valeurs de m et de n, c'est-à-dire des nombres des vibrations simultanées.

On pourra obtenir, en effet, en projection toutes les courbes planes correspondant aux diverses valeurs de δ, soit en laissant le cylindre

[1] Dans tout le reste de ce travail, la lettre m indiquera le nombre des oscillations exécutées suivant l'axe des x, ou le nombre de rotations suivant la circonférence de la base du cylindre, et n le nombre d'oscillations effectuées suivant l'axe des z ou à la surface du cylindre.

immobile et faisant tourner le plan de projection, soit en laissant ce dernier plan immobile et faisant tourner le cylindre.

On pourra donc, pour trouver l'équation de la courbe cylindrique, poser $\delta = 0$. Si l'on suppose déroulée la surface latérale du cylindre, l'équation de cette courbe devient, en remplaçant t par sa valeur,

$$z = b \cos 2\pi \frac{ny}{m.2\pi a}, \tag{4}$$

ou encore

$$z = b \cos 2\pi \frac{ny}{ml},$$

en posant $2\pi a = l$, longueur de la circonférence de base du cylindre.

Pour construire cette courbe, il suffirait de construire n fois la courbe sinusoïdale :

$$z = b \cos 2\pi \frac{y}{c},$$

avec $c = \frac{ml}{n}$, sur une surface plane indéfinie, puis d'enrouler cette surface avec la courbe tracée sur la surface du cylindre ; les diverses portions de cette courbe se couperont en formant nécessairement une courbe fermée, puisque ces n sinusoïdes sont tracées sur une surface égale à m fois celle du cylindre.

Des propriétés de cette courbe cylindrique on peut déduire plus simplement, que par l'emploi des équations (1) et (2), un certain nombre des propriétés des courbes planes résultant de la composition de deux mouvements vibratoires perpendiculaires. Il faut donc, dans ce but, chercher l'équation de la courbe tracée sur la surface déroulée du cylindre, ou sur cette surface même, en prenant comme coordonnées des portions de génératrices (z) et des arcs de cercles (y). L'équation de la courbe ainsi tracée sur la surface déroulée indéfinie est celle d'une simple sinusoïde, c'est-à-dire

$$z = b \cos 2\pi \frac{ny}{ml}. \tag{5}$$

Supposons que l'on mène des parallèles à l'axe des z, à des distances l,

$2l, 3l, \ldots (m-1)l, ml$ [1]. La courbe représentée par l'équation (5) est divisée ainsi en m parties, et chacune de celles-ci représente une des portions de la courbe enroulée sur la surface du cylindre. Il suffira, pour avoir l'équation de chacune de ces parties isolément, de changer son équation, de telle sorte que y n'y varie plus que de o à l.

L'équation de la première partie est donc

$$z_1 = b \cos 2\pi \frac{ny}{ml};$$

celle de la deuxième partie (on remplace y par $y+l$),

$$z_2 = b \cos 2\pi \left(\frac{ny}{ml} + \frac{n}{m}\right);$$

celle de la troisième partie devient, par la substitution de $y + 2l$ à y,

$$z_3 = b \cos 2\pi \left(\frac{ny}{ml} + \frac{2n}{m}\right),$$

. . . .

et celle de la $m^{\text{ième}}$ partie sera

$$z_m = b \cos 2\pi \left[\frac{ny}{ml} + \frac{(m-1)n}{m}\right].$$

L'équation générale de la courbe tracée sur la surface du cylindre sera donc

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\ldots(z - z_m) = 0, \tag{6}$$

y variant dans les $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$, seulement de o à l; si y, du reste, varie au delà de l, on retombe sur des valeurs de z déjà trouvées.

Je me propose, dans ce travail, d'étudier les propriétés principales des courbes cylindriques représentées par l'équation (6), d'en déduire les propriétés des courbes planes obtenues en projetant les premières sur divers plans diamétraux du cylindre, et enfin de donner la description d'un appareil de démonstration, permettant de vérifier expérimentalement les déductions de la théorie.

---

(1) l est égal, comme on l'a vu, à $2\pi a$, longueur de la circonférence de la base du cylindre.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DES COURBES CYLINDRIQUES.

Les valeurs des $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$, qui entrent dans l'équation (6), peuvent être simplifiées; en effet, dans les nombres fractionnaires, tels que $\frac{pn}{m}$ (n et m étant premiers entre eux, et p un nombre quelconque inférieur à m), on peut supprimer la partie entière et ne conserver que la partie fractionnaire; on sait, en outre, que si l'on multiplie une fraction irréductible ou un nombre fractionnaire $\frac{n}{m}$ par les nombres successifs $1, 2, 3, \ldots, m-1$, les restes de la division sont égaux à ces mêmes nombres rangés dans un autre ordre.

On pourra donc conserver l'équation (6),

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\ldots(z-z_m)=0, \tag{6}$$

pour représenter la courbe cylindrique; seulement les quantités $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$, ont les valeurs suivantes :

$$z_1 = b\cos 2\pi\frac{ny}{ml} = b\cos 2\pi\frac{y}{c},$$

$$z_2 = b\cos 2\pi\left(\frac{ny}{ml}+\frac{1}{m}\right) = b\cos 2\pi\left(\frac{y}{c}+\frac{1}{m}\right),$$

$$z_3 = b\cos 2\pi\left(\frac{ny}{ml}+\frac{2}{m}\right) = b\cos 2\pi\left(\frac{y}{c}+\frac{2}{m}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_m = b\cos 2\pi\left(\frac{ny}{ml}+\frac{m-1}{m}\right) = b\cos 2\pi\left(\frac{y}{c}+\frac{m-1}{m}\right).$$

La courbe représentée par l'équation (6) jouit de certaines propriétés générales, quels que soient m et n; d'autres propriétés particulières, au contraire, varient suivant que m et n sont pairs ou impairs.

THÉORÈME I. — *Si la molécule vibrante fait n oscillations sur la surface du cylindre parallèlement à l'axe de ce dernier, la courbe résultante* *est formée de n parties identiques, quel que soit le nombre m de rotations exécutées pendant le même temps.*

Si, en effet, dans l'équation (6), on y remplace y par $y+\frac{kl}{n}$, k étant un nombre inférieur à n, les quantités constantes ajoutées à la partie variable $\frac{ny}{ml}$, dans les quantités $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$, que je désignerai désormais par le signe z_i, deviennent $\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}, \frac{k+2}{m}, \ldots, \frac{k+m-1}{m}$.

Si k est inférieur à m, on peut poser $k+p=m$, et les restes des divisions sont $k, k+1, \ldots, m-1, 0, 1, 2, \ldots, k-1$, identiques, sauf l'ordre, aux numérateurs des fractions qui figurent dans les z_i. Si k est supérieur à m, on peut écrire $k=mr+q$, supprimer le produit mr et ne garder que q, ce qui ramène au cas précédent.

L'équation (6) ne changeant pas quand on remplace y par $y+\frac{kl}{n}$, les valeurs de z sont par suite les mêmes pour y, $y+\frac{l}{n}$, $y+\frac{2l}{n}, \ldots$, $y+\frac{(n-1)l}{n}$; la courbe que représente cette équation étant formée de n parties identiques, il suffira donc, dans l'équation (6), de faire varier y de 0 à $\frac{l}{n}$ pour avoir l'élément constitutif de la courbe cylindrique, puisque cette figure se trouve répétée n fois sur la surface du cylindre.

Comment construire facilement cette *figure élémentaire?* Dans l'équation (6) ou dans les z_i je pose $c=\frac{ml}{n}$; comme il suffit, ainsi qu'on l'a vu, de faire varier y de 0 à $\frac{l}{n}$, pour avoir ce que j'ai appelé la *figure élémentaire*, cela revient à faire varier cette quantité de 0 à $\frac{c}{m}$, puisque $\frac{l}{n}=\frac{c}{m}$. Or c est la base de la sinusoïde primitive à tracer sur la surface indéfinie du cylindre développé.

On obtiendra donc la figure que représente l'équation (6), quand y varie de 0 à $\frac{l}{n}$ ou à $\frac{c}{m}$, en traçant une sinusoïde quelconque $z=b\cos 2\pi\frac{y}{c}$, coupant la courbe en m parties par des parallèles à l'axe des z équidistantes et faisant glisser les divers tronçons de courbe ainsi obtenus, de manière à les reporter tous entre deux droites parallèles à l'axe des z, séparées par un intervalle égal à $\frac{c}{m}$.

Ainsi, en résumé, le nombre de rotations m exécutées par la molécule vibrante pendant l'unité de temps détermine la forme de la *figure élémentaire* ou de l'*élément constitutif* de la courbe cylindrique, quel que soit le nombre d'oscillations exécutées à la surface du cylindre. Ce nombre d'oscillations n indique combien de fois cette figure élémentaire doit être répétée à la surface du cylindre, quel que soit le nombre m des rotations simultanées. Les *fig.* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 (*Pl. I*) représentent les figures élémentaires correspondant à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 rotations, quel que soit le nombre des oscillations; évidemment les paramètres de la sinusoïde choisie sont complétement arbitraires, et ne changent rien à la forme générale.

Théorème II. — *Dans la figure élémentaire, la parallèle à l'axe des z menée par le milieu est un axe de symétrie.*

Si, en effet, on a, d'une manière générale, deux arcs de courbe symétriques par rapport à une certaine droite, la symétrie subsistera encore si l'on fait glisser ces deux arcs de quantités égales vers cette droite, même si on la dépasse. Or, à cause de la symétrie de la sinusoïde (*fig.* 1), par rapport à la ligne CD, les m tronçons de courbe provenant de la division de la sinusoïde en m parties sont et resteront dans des positions symétriques par rapport à cette ligne CD, si on les fait glisser parallèlement à la ligne EFGHI, de manière que tous se trouvent compris entre deux droites menées de part et d'autre de CD, à des distances égales à $\frac{c}{2m}$; c'est ainsi, en effet, qu'on pourrait procéder à la construction de la figure élémentaire.

Si, du reste, dans l'équation (6), on remplace y successivement par $\frac{l}{2n} + y_1$ et $\frac{l}{2n} - y_1$, on trouve pour z la même valeur.

Théorème III. — *Les parallèles* AB, A_1B_1 *à l'axe des z qui limitent la figure élémentaire sont des axes de symétrie, quand celle-ci est répétée plusieurs fois, ou même si, n étant égal à* 1, *elle se trouve tracée sur la surface du cylindre.*

Cela résulte de ce que chaque figure élémentaire est formée de deux parties symétriques par rapport à une parallèle à l'axe des z. On démontre du reste que, dans l'équation (6), z conserve la même valeur quand on change y en $-y$.

THÉORÈME IV. — *Si m est pair, la figure est symétrique par rapport à l'axe des y.*

En effet, si m est pair (*Pl. I, fig.* 1), CD étant un axe de symétrie de la sinusoïde, les points de division de la ligne EI, dans chacune des moitiés EG et GI, tombent à la même distance des points E et G. Si l'on fait tourner la courbe DHA_1 de 180 degrés autour de EI, elle devient la courbe CHB_1, identique à AFD. On peut admettre, comme on l'a vu précédemment, que l'on forme la figure demandée en faisant glisser les divers tronçons de courbes parallèlement à EI, jusqu'à ce que le milieu de chacun se trouve sur CD; les divers tronçons de courbe provenant de CHB_1 se superposeront aux tronçons correspondants de AFD; si donc on effectue ensuite la rotation inverse de celle qui a été faite primitivement, ces derniers deviennent les symétriques de ceux avec lesquels ils coïncidaient. On peut démontrer du reste que, dans l'équation (6), les z_i sont égaux deux à deux et de signes contraires.

Les lignes CD, AB, A_1B_1 étant, dans les *fig.* 2, 4, 6, 8, des axes de symétrie ainsi que la ligne EF, les points d'intersection E, F et G sont des centres.

THÉORÈME V. — *Si m est impair, l'axe des y n'est plus un axe de symétrie; mais il y a, sur l'axe des y et dans chaque figure, des centres aux points $y=\frac{c}{4m}$ et $y=\frac{3c}{4m}$.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de faire voir que si, dans l'équation (6), pour $y=\frac{c}{4m}+y_1$, on a $z=z_1$, pour $y=\frac{c}{4m}-y_1$, on aura $z=-z_1$.

Posons, pour abréger, $\frac{2\pi y_1}{c}=\varphi$; les arcs dont on aura à prendre les cosinus pour avoir la valeur des z_i seront, pour $y=\frac{c}{4m}+y_1$,

$$\varphi+\frac{\pi}{2m},\quad \varphi+\frac{5\pi}{2m},\quad \varphi+\frac{9\pi}{2m},\quad \ldots,\quad \varphi+\frac{(4m-3)\pi}{2m}.$$

Les coefficients de la fraction $\frac{\pi}{2m}$ sont donc $1, 5, 9, \ldots, 4m-3$, de la forme $4p+1$, p variant de 0 à $m-1$.

Si m est impair et égal à $2m'+1$, on trouvera parmi ces nombres $4m'+1=2m-1$, et $4m'+5=2m+3$. Les arcs précédents peuvent donc être séparés en deux séries, de la manière suivante :

$$\varphi+\frac{\pi}{2m},\quad \varphi+\frac{5\pi}{2m},\quad \ldots,\quad \varphi+\frac{(2m-1)\pi}{2m},$$
$$\varphi+\pi+\frac{3\pi}{2m},\quad \varphi+\pi+\frac{7\pi}{2m},\quad \ldots,\quad \varphi+\pi+\frac{(2m-3)\pi}{2m}.$$

En remplaçant $\frac{c}{4m}+y_1$ par $\frac{c}{4m}-y_1$, ce qui revient à changer seulement y_1 en $-y_1$, ou φ en $-\varphi$, les arcs précédents deviennent

$$-\varphi+\frac{\pi}{2m},\quad -\varphi+\frac{5\pi}{2m},\quad \ldots,\quad -\varphi+\frac{(2m-1)\pi}{2m},$$
$$-\varphi+\pi+\frac{3\pi}{2m},\quad -\varphi+\pi+\frac{7\pi}{2m},\quad \ldots,\quad -\varphi+\pi+\frac{(2m-3)\pi}{2m}.$$

Si l'on retranche les arcs de la première moitié de π, et ceux de la deuxième moitié de 3π, on aura

$$\varphi+\frac{(2m-1)\pi}{2m},\quad \varphi+\frac{(2m-5)\pi}{2m},\quad \ldots,\quad \varphi+\frac{\pi}{2m},$$
$$\varphi+\pi+\frac{(2m-3)\pi}{2m},\quad \varphi+\pi+\frac{(2m-7)\pi}{2m},\quad \ldots,\quad \varphi+\pi+\frac{3\pi}{2m},$$

c'est-à-dire, dans un autre ordre, les arcs obtenus pour $y=\frac{c}{4m}+y_1$. Les cosinus des arcs correspondant à $y=\frac{c}{4m}-y_1$ seront donc égaux et de signes contraires à ceux que l'on obtient en posant $y=\frac{c}{4m}+y_1$. Les z_i pour ces deux valeurs de y étant égaux et de signes contraires, il en sera évidemment de même pour les valeurs de z. Le point $\left(z=0,\ y=\frac{c}{4m}\right)$ est donc un centre; il en sera de même pour le point $\left(z=0,\ y=\frac{3c}{4m}\right)$, à cause de l'axe de symétrie qui passe par le milieu de la figure. On peut vérifier ce théorème sur les *fig.* 1, 3, 5 et 7.

THÉORÈME VI. — *Valeurs de z pour $y = 0$ et $y = \frac{c}{2m}$.*

Supposons m pair. — Les arcs dont on aura à prendre les cosinus pour avoir les valeurs de z correspondant à $y = 0$ seront les suivants : $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \ldots, \frac{2(m-1)\pi}{m}$.

Admettons que $m = 2m'$, on pourra diviser par 2, et l'on aura ainsi :

$$0,\quad \frac{\pi}{m'},\quad \frac{2\pi}{m'},\quad \ldots,\quad \frac{(m'-1)\pi}{m'},\quad \frac{m'\pi}{m'},\quad \frac{(m'+1)\pi}{m'},\quad \ldots,$$
$$\frac{(2m'-2)\pi}{m'},\quad \frac{(2m'-1)\pi}{m'}.$$

On peut grouper ces arcs de la manière suivante :

$$0 \left| \frac{\pi}{m'},\quad 2\pi - \frac{\pi}{m'} \right| \frac{2\pi}{m'},\quad 2\pi - \frac{2\pi}{m'} \left| \cdots \right| \pi - \frac{\pi}{m'},\quad \pi + \frac{\pi}{m'} \Big| \pi.$$

Il y aura deux points par lesquels il ne passe qu'une seule courbe correspondant aux arcs 0 et π; tous les autres seront l'intersection de deux courbes ou des points doubles, puisque l'on a deux arcs différents dont les cosinus sont égaux; par suite il y a deux points simples $z = \pm b$, et $\frac{m}{2} - 1$ points doubles, correspondant aux intersections des diverses portions de courbes.

On n'aura à prendre que les cosinus des arcs

$$0,\quad \frac{\pi}{m'},\quad \frac{2\pi}{m'},\quad \ldots,\quad \frac{(m'-1)\pi}{m'},\quad \pi.$$

Les cosinus de ces arcs sont égaux deux à deux et de signes contraires, ce qu'il était facile de prévoir, vu la symétrie de la figure par rapport à la ligne EF; de plus, si $\frac{m}{4}$ est un nombre entier, c'est-à-dire si m est doublement pair, le point $z = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ se trouvera sur la ligne EF; il ne s'y trouvera pas si m est simplement pair.

Pour $y = \frac{c}{2m}$, on aura pour z les cosinus des arcs

$$\frac{\pi}{m},\quad \frac{3\pi}{m},\quad \frac{5\pi}{m},\quad \ldots,\quad \frac{2(m-1)\pi}{m},$$

qu'on peut grouper de la manière suivante :

$$\frac{\pi}{m},\quad 2\pi - \frac{\pi}{m} \;\Big|\; \frac{3\pi}{m},\quad 2\pi - \frac{3\pi}{m} \;\Big|\; \ldots.$$

Tous les points seront donc doubles, c'est-à-dire l'intersection de deux courbes; ces points correspondent du reste au milieu des arcs dans lesquels la sinusoïde a été décomposée.

En s'arrêtant au milieu, puisque m est supposé pair, on devra prendre les cosinus des arcs

$$\frac{\pi}{m},\quad \frac{3\pi}{m},\quad \frac{5\pi}{m},\quad \ldots,\quad \frac{(m-3)\pi}{m},\quad \frac{(m-1)\pi}{m},$$

cosinus égaux deux à deux et de signes contraires; le nombre des valeurs de z est égal à $\frac{m}{2}$.

Si m est doublement pair, on n'aura pas $z = 0$; si m est simplement pair, on aura $z = \cos\frac{m\pi}{2m} = 0$, parmi ces valeurs.

En résumé, s'il y a m rotations, *et que m soit pair,* il y a dans chaque figure élémentaire, *sur l'axe de symétrie* AB (*fig.* 2, 4, 6, 8), *deux points simples* correspondant aux maxima $z = \pm b$, et $\frac{m}{2} - 1$ *points doubles* ou *intersections des diverses branches de courbes; sur l'axe* CD *il y a* $\frac{m}{2}$ *intersections,* ce qui donne, en somme, dans chaque figure élémentaire, $(m-1)$ *intersections sur les lignes* AB *et* CD. Si m est doublement pair, le point $z = 0$ se trouve sur la droite AB; si m est simplement pair, ce point $z = 0$ se trouve sur la droite CD.

Supposons m impair. — Pour $y = 0$, on a, comme précédemment, à prendre, pour avoir les valeurs de z, les cosinus des arcs

$$0,\quad \frac{2\pi}{m},\quad \frac{4\pi}{m},\quad \ldots,\quad \frac{(2m-1)\pi}{m}.$$

Sauf pour l'arc o, tous les autres points sont doubles, c'est-à-dire que par chacun d'eux passent deux courbes; on devra donc s'arrêter au milieu, et ne prendre que les arcs

$$\text{o},\quad \frac{2\pi}{m},\quad \frac{4\pi}{m},\quad \ldots,\quad \frac{(m-1)\pi}{m},$$

ce qui donne un point simple $z=b$, et $\frac{m-1}{2}$ points doubles.

Pour $y=\frac{c}{2m}$, les arcs dont on prendra les cosinus seront $\frac{\pi}{m}$, $\frac{3\pi}{m}$, $\frac{5\pi}{m}$, ..., $\frac{2(m-1)\pi}{m}$; tous ces points sont doubles, sauf celui qui correspond à l'arc placé au milieu de la série; on n'aura donc à prendre que les cosinus des arcs

$$\frac{\pi}{m},\quad \frac{3\pi}{m},\quad \ldots,\quad \frac{(m-2)\pi}{m}\quad \text{et}\quad \frac{m\pi}{m}\quad \text{ou}\quad \pi.$$

Les cosinus de ces arcs sont égaux et de signes contraires à ceux qui correspondent à $y=\text{o}$.

Si, en effet, on retranche les derniers de π, on obtient

$$\frac{(m-1)\pi}{m},\quad \frac{(m-3)\pi}{m},\quad \ldots,\quad \frac{2\pi}{m},\quad \text{o},$$

arcs identiques à ceux qu'on a obtenus pour $y=\text{o}$, mais rangés en sens inverse.

Donc, si m est impair, il y a *sur la ligne* AB *un point simple correspondant à* $z=b$, *et* $\frac{m-1}{2}$ *intersections;* de même *sur la ligne* CD; seulement les points sont disposés en sens inverse, ce qu'on pouvait prévoir, puisqu'il y a un centre sur l'axe des y, au milieu de la ligne EG. Il y a donc en tout $m-1$ *intersections sur les droites* AB *et* CD, comme dans le cas précédent. Le point $z=\text{o}$ ne se trouve plus sur aucune des deux lignes AB et CD, mais aux centres, c'est-à-dire aux points $y=\frac{c}{4m}$ et $y=\frac{3c}{4m}$.

Pour bien saisir la forme des courbes cylindriques, il est indispensable de répéter au moins deux fois chaque figure élémentaire, comme on l'a fait dans les *fig.* 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

On voit que, si m ou le nombre de rotations est pair, la figure générale est formée d'une série de quadrilatères à côtés courbes, ayant les diagonales perpendiculaires, se touchant par les sommets et se répétant périodiquement; entre ceux-ci sont placés d'autres quadrilatères dont chaque rangée est terminée par deux triangles curvilignes. Il y a sur la première rangée $\frac{m-2}{2}$ quadrilatères, et sur la deuxième $\frac{m-4}{2}$ et 2 triangles.

Si m est impair, il y a sur chaque rangée $\frac{m-3}{2}$ quadrilatères et un triangle; la rangée suivante peut s'obtenir en prenant la symétrique de la première, et la faisant glisser ensuite de la quantité $\frac{c}{2m}$.

TROISIÈME PARTIE.

PROPRIÉTÉS DES COURBES PLANES PROVENANT DE LA PROJECTION DES COURBES CYLINDRIQUES.

Les équations de la courbe due à la composition de deux mouvements vibratoires perpendiculaires sont, comme on l'a vu,

$$x = a\cos 2\pi m(t+\delta), \tag{1}$$
$$z = b\cos 2\pi n t. \tag{2}$$

On peut encore écrire l'équation (1)

$$x = a\cos 2\pi(mt+\Delta),$$

avec $\Delta = m\delta$.

THÉORÈME I. — *La différence de phase δ ne doit varier que de* 0 *à* $\frac{1}{n}$ *ou Δ de* 0 *à* $\frac{1}{mn}$.

Comme la projection de la courbe cylindrique s'effectue sur un des plans diamétraux du cylindre, l'axe des x est la projection du cercle (y) de base du cylindre, et la valeur de z reste la même.

On a vu que la courbe cylindrique se compose de la même figure élémentaire répétée n fois sur la surface du cylindre; il suffira donc que le plan diamétral, sur lequel se fait la projection, tourne d'un angle égal à $\frac{2\pi}{n}$, pour que l'on obtienne toutes les courbes représentées par les équations (1) et (2).

La quantité δ doit donc varier seulement de o à $\frac{1}{n}$ ou Δ de o à $\frac{1}{mn}$. Or comme, dans un temps égal à l'unité, la molécule vibrante fait m rotations et n oscillations, la fraction $\delta = \frac{1}{n}$ de la durée de l'une des m rotations correspond à la fraction $\frac{1}{mn}$ du temps total pris pour unité. Il suffira donc que le temps Δ, qui sert à exprimer la différence de phase des deux vibrations simultanées, varie de o à $\frac{1}{mn}$, pour obtenir toutes les courbes dues à la composition des deux mouvements vibratoires; ce temps $\frac{1}{mn}$ correspond à la fraction $\frac{1}{m}$ de la durée d'une des n vibrations, ou à la fraction $\frac{1}{n}$ de la durée d'une des m vibrations.

Si le rapport des nombres des vibrations, au lieu d'être exactement $\frac{n}{m}$, en diffère très-peu, on sait que la courbe obtenue présente la forme caractéristique de l'accord exact $\frac{n}{m}$, mais passe successivement par toutes les formes correspondant aux diverses valeurs de Δ. Du temps nécessaire pour obtenir toutes les transformations successives et revenir à la même forme de courbe on peut déduire, ainsi que l'a fait voir M. Lissajous, la différence du nombre des vibrations de l'un des sons à celui qui donnerait exactement l'intervalle $\frac{n}{m}$, l'autre son restant fixe.

En effet, supposons qu'il se produise en une seconde p transformations complètes des courbes correspondant à l'accord exact $\frac{n}{m}$; quel est le rapport des nombres de vibrations faites en une seconde?

On peut admettre qu'en une seconde il y a nk oscillations sur la surface du cylindre, et par suite, dans le temps $\frac{1}{p}$, $\frac{nk}{p}$ oscillations; pendant ce temps, la molécule accomplit $\frac{mk}{p} + \frac{1}{n}$ rotations, puisque l'on peut supposer que, pendant ce temps $\frac{1}{p}$, le plan de projection a tourné dans un angle égal à $\frac{2\pi}{n}$. Le rapport des nombres de vibrations sera donc

$$\frac{\frac{mk}{p}+\frac{1}{n}}{\frac{nk}{p}}=\frac{mk+\frac{p}{n}}{nk}.$$

Le signe de $\frac{p}{n}$ peut être négatif; on ne peut, du reste, s'assurer du signe de cette quantité qu'en haussant ou abaissant le son correspondant à m vibrations par exemple, et voyant si p augmente ou diminue. Supposons que $\frac{p}{n}$ soit positif; on peut écrire le même rapport égal à

$$\frac{mk'}{nk'-\frac{p}{m}}.$$

En égalant l'une à l'autre ces deux valeurs, on trouve $k=k'-\frac{p}{mn}$. Il est donc indispensable de connaître k ou k', c'est-à-dire de connaître le nombre M ou N de vibrations de l'un des deux sons par seconde; on aura alors, pour le rapport des nombres de vibrations, soit

$$\frac{\frac{Nm}{n}\pm\frac{p}{n}}{N},\quad \text{soit}\quad \frac{M}{\frac{Mn}{m}\mp\frac{p}{m}}.$$

La méthode optique, employée pour accorder deux instruments, présente donc cet avantage, que plus le rapport $\frac{n}{m}$ qui exprime l'intervalle des deux sons, est compliqué, plus l'accord peut être établi avec précision, puisqu'une seule vibration en plus ou en moins de l'un des deux sons produit soit n, soit m transformations complètes de la figure caractéristique de l'intervalle $\frac{n}{m}$; le degré de précision que donnerait l'oreille, au contraire, est d'autant moindre que le rapport $\frac{n}{m}$ est plus compliqué.

Théorème II. — *La courbe projetée est enfermée dans un rectangle projection de la surface du cylindre; il y a n contacts sur les côtés parallèles à l'axe des x, et m sur les côtés parallèles à l'axe des z.*

La même figure élémentaire se trouvant répétée n fois sur la surface du cylindre, on a dans chacune $z = \pm b$; il y aura donc n contacts sur les parallèles à l'axe des x; dans chaque figure, il y a m branches de courbes, et par conséquent m contacts sur chacune des parallèles à l'axe des z, qui représente la projection du contour apparent du cylindre.

Théorème III. — *Dans toutes les figures correspondant au même intervalle $\frac{n}{m}$, les ordonnées et les abscisses restent les mêmes; la seule différence est due au mode de groupement de ces coordonnées.*

Puisque les figures dues aux différentes valeurs de Δ peuvent être obtenues par la rotation d'un cylindre ayant pour axe, soit l'axe des x, soit l'axe des z à volonté, et sont la projection de la courbe tracée sur ce cylindre, il en résulte que les coordonnées restent toujours les mêmes en valeur absolue; leur relation seule change d'une figure à l'autre.

Théorème IV. — *Il existe, en général, $2mn - (m+n)$ intersections situées sur des parallèles à l'axe des x et des z; certaines de ces parallèles se déplacent quand Δ varie; d'autres restent fixes.*

Supposons, en premier lieu, le nombre m des rotations pair et le nombre n des oscillations impair; on sait qu'il y a dans ce cas (*fig.* 2, 4, 6, 8), dans chaque figure élémentaire, $\frac{m}{2} - 1$ intersections sur la ligne AB, et $\frac{m}{2}$ sur la ligne CD, en tout $m-1$ intersections. Comme, dans toute la courbe cylindrique, on peut mener n lignes telles que AB et CD, il y aura $\frac{m}{2} - 1$ intersections sur n parallèles à l'axe des z passant par les maxima, et $\frac{m}{2}$ sur n autres parallèles passant par les intersections les plus voisines de ces maxima, en tout $(m-1)n$; ces points sont en outre répartis sur $m-1$ parallèles à l'axe des x, n sur chaque parallèle; ces dernières lignes occuperont toujours la même position, quelle que soit la valeur de Δ. Il y a en outre d'autres intersections qu'on peut supposer dues aux projections sur un même plan des parties antérieures et postérieures à ce plan de la courbe cylindrique. On peut obtenir ces dernières en considérant la courbe plane comme la projection d'une courbe cylindrique tracée sur un cylindre perpendiculaire au premier, et formée par n rotations et m oscillations. Comme le nombre de rotations ici est impair, il y aura, d'après la forme de la figure élémentaire, $\frac{n-1}{2}$ intersections sur $2m$ parallèles à l'axe des x qui se déplacent quand Δ varie; chaque parallèle passe par un maximum, et les points sont disposés en sens inverse sur deux parallèles voisines; ces mêmes points sont distribués aussi à raison de m sur $n-1$ parallèles à l'axe des z, parallèles qui restent fixes, quand Δ varie.

Si m et n sont impairs tous deux, on appliquerait au nombre m ce qui a été dit précédemment du nombre n; mais le nombre des intersections reste toujours le même, et est égal à

$$n(m-1)+m(n-1)=2mn-(m+n),$$

sauf le cas où les projections des parties antérieures et postérieures se superposent.

Comme vérification de ce problème, j'ai disposé dans la *fig.* 9 différentes courbes correspondant au rapport $4:3$ et $5:3$, de manière à mettre en évidence les parallèles aux axes qui restent fixes, quand varie Δ.

La plupart des autres propriétés des courbes acoustiques se démontrant différemment, suivant que l'on a m et n pairs ou impairs, je vais énoncer ces propriétés, dont je donnerai successivement la démonstration.

Théorème V. — *Si l'on a m pair et n impair, l'axe des x est un axe de symétrie; si l'on a n pair et m impair, l'axe des z est un axe de symétrie, quel que soit* Δ; *l'autre axe n'est pas, en général, un axe de symétrie.*

Théorème VI. — *Si m et n sont impairs, la courbe n'a plus en général d'axe de symétrie; mais l'origine des coordonnées en est le centre.*

THÉORÈME VII. — *Pour* $\Delta = 0$ *et* $\Delta = \frac{1}{2mn}$, *la figure est simplifiée par la superposition des projections.*

THÉORÈME VIII. — *Pour* $\Delta = \frac{1}{4mn}$ *ou* $\frac{3}{4mn}$, *la figure est symétrique par rapport aux deux axes, quels que soient* m *et* n.

THÉORÈME IX. — *Pour* $\Delta = \Delta_1$ *et* $\Delta = \frac{1}{mn} - \Delta_1$, *on a les mêmes courbes, mais parcourues en sens contraires.*

THÉORÈME X. — *Pour* $\Delta = \frac{1}{4mn} \pm \Delta_1$, *les deux courbes sont différentes : si* m *est pair et* n *impair, elles sont disposées symétriquement par rapport à l'axe des* z ; *si* m *est impair et* n *pair, elles sont symétriquement placées par rapport à l'axe des* x ; *si* m *et* n *sont impairs tous deux, elles sont symétriquement placées par rapport aux deux axes à la fois.*

Pour la démonstration de ces divers énoncés, j'emploierai des figures schématiques différentes, suivant que m sera supposé pair ou impair, puisque le nombre de rotations détermine la forme de la figure élémentaire qui, en se répétant, constitue la courbe cylindrique dont on étudie la projection.

SUPPOSONS DONC D'ABORD QUE m SOIT PAIR ET n IMPAIR, c'est-à-dire qu'il y ait, suivant les conventions établies, m rotations et n oscillations sur la surface du cylindre. Pour tracer la figure schématique, nous admettrons, par exemple, que $n = 3$, avec m quelconque, mais pair (*Pl. I, fig.* 10). Les plans diamétraux OA_1, OA_2, OA_3 (représentés ici par leurs traces sur la base du cylindre) séparent les parties répétées identiquement sur le cylindre, et sont en même temps des plans de symétrie. Les plans diamétraux OB_1, OB_2, OB_3 sont également des plans de symétrie alternant avec les premiers, et divisant en deux parties égales l'angle des deux plans voisins. La courbe cylindrique étant, dans le cas actuel, symétrique par rapport à l'axe des y, je la représenterai par deux courbes tracées de part et d'autre de la circonférence de base, afin de rappeler sa forme générale. On peut d'abord faire les remarques suivantes :

α. Comme la figure élémentaire se trouve répétée un nombre impair de fois sur la surface du cylindre, *un plan diamétral passant par un* *des axes* A *passe par un des axes* B, puisque, si $n = 2n' + 1$, dans une demi-circonférence, la même figure se trouve répétée un nombre de fois égal à $\frac{2n'+1}{2}$ ou $n' + \frac{1}{2}$.

β. *Le plan perpendiculaire à un plan diamétral de symétrie (passant par un axe* A *et un axe* B) *passe lui-même par la génératrice située au quart ou aux trois quarts d'une figure élémentaire.* Dans un quart de circonférence, en effet, il y a $\frac{2n'+1}{4}$ ou $\frac{n'}{2} + \frac{1}{4}$ divisions, ce qui donne le point $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ pour la division à laquelle aboutit la perpendiculaire à un plan de symétrie, suivant que n' est lui-même pair ou impair.

γ. *Si l'on mène un plan diamétral quelconque, les* z *correspondant à ses deux intersections avec la courbe cylindrique seront différents en général sur les deux parties opposées du cylindre;* les deux génératrices qui y correspondent sont, en effet, équidistantes, l'une d'un axe A, l'autre d'un axe B.

Ces remarques générales faites, la démonstration des théorèmes précédents devient très-facile et presque intuitive.

Théorème V. — *L'axe des* x *est seul un axe de symétrie.*

Chaque figure élémentaire est, en effet, symétrique par rapport à la ligne des y sur la surface du cylindre; la projection le sera donc par rapport à l'axe des x; l'axe des z, en général, n'est pas un axe de symétrie, puisque aux deux extrémités d'un plan diamétral quelconque les z sont différents.

Théorème VII. — *Pour* $\Delta = 0$ *et* $\Delta = \frac{1}{2mn}$, *on a la figure simplifiée.*

Pour $\Delta = 0$, en effet (*Pl. I, fig.* 10), le plan diamétral passe par deux axes de symétrie A_1 et $B_{n'+1}$ $(n = 2n' + 1)$: les projections de la partie antérieure et de la partie postérieure de la courbe cylindrique se superposeront; en outre, pour $x = 0$, on a $z = \pm b$; ce contact avec les côtés du rectangle où la courbe est renfermée compte comme simple, les autres comptent comme étant doubles.

Pour $\Delta = \frac{1}{2mn}$, on a également une courbe simplifiée; mais elle est symétrique de la précédente par rapport à l'axe des z, puisqu'à l'intersection du plan de projection et de la surface du cylindre l'axe A est remplacé par un axe B, et réciproquement.

THÉORÈME VIII. — *Pour* $\Delta = \frac{1}{4mn}$ et $\Delta = \frac{3}{4mn}$, *l'axe des z devient également un axe de symétrie.*

Soit MN (*Pl. I, fig.* 10) le plan de projection; le plan perpendiculaire à ce plan A_2B_3 passe, dans ce cas, par les axes A et B. En effet, quand le plan de projection passe par les axes A et B ($A_1B_{n'+1}$), le plan perpendiculaire OP passe au contraire par le point $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ d'une figure élémentaire. Dans le cas actuel, la courbe cylindrique est donc symétriquement placée par rapport à ce plan perpendiculaire au plan de projection, et, par suite, l'axe des z sera un axe de symétrie de la projection, puisque, pour $+x$ et $-x$, on aura le même z. La partie antérieure et la partie postérieure donnent des projections différentes.

THÉORÈME IX. — *Pour* $\Delta = \Delta_1$ *et* $\Delta = \frac{1}{mn} - \Delta_1$, *on a la même courbe, mais les deux mouvements ont lieu en sens contraires.*

Au lieu de prendre deux plans faisant, avec le plan primitif correspondant à $\Delta = 0$, les angles $2\pi\Delta_1$ et $2\pi\left(\frac{1}{mn} - \Delta_1\right)$, on peut prendre deux plans faisant, avec le premier, les angles $\pm 2\pi\Delta_1$, puisque la courbe est la même identiquement, si l'on augmente ou diminue Δ de $\frac{1}{mn}$. Je démontrerai donc que, sur les deux plans, OM_1 et OM_2, faisant avec OA_1 (*Pl. I, fig.* 11) des angles égaux, les projections seront identiques. Soient, en effet, deux lignes OC et OD correspondant aux arcs $+y$ et $-y$, menées de part et d'autre du plan OA_1; comme le plan $A_1OB_{n'+1}$ est un plan de symétrie de la courbe cylindrique, les z correspondant aux points C et D ou à $+y$ et $-y$ (quel que soit y) seront égaux.

Par rapport au plan OM_1, les y des deux points C et D deviendront $y - 2\pi\Delta_1$ et $-y - 2\pi\Delta_1$, et par suite, pour le même z, on aura en projection les deux abscisses x_1 et x_2. Par rapport au plan OM_2, les y des deux points C et D seront $y + 2\pi\Delta_1$ et $-y + 2\pi\Delta_1$, qui, en projection, donneront les mêmes abscisses x_1 et x_2; seulement l'abscisse x_1, correspondant à la partie antérieure pour le plan OM_1, correspond à la partie postérieure pour OM_2, et réciproquement; donc, les z restant les mêmes dans la projection, les courbes projetées sur OM_1 et OM_2 seront identiques, mais parcourues en sens contraires par la molécule vibrante.

Il en sera, par suite, de même si l'on compare les projections effectuées sur les plans correspondant aux valeurs $\Delta = \Delta_1$ et $\Delta = \frac{1}{mn} - \Delta_1$.

On conclut de là que, pour $\Delta = \frac{3}{4mn}$, on doit avoir la même courbe que pour $\Delta = \frac{1}{4mn}$, courbe qui est symétrique par rapport aux deux axes; si Δ varie de o à $\frac{1}{mn}$, on a donc deux fois chaque courbe, sauf celles qui correspondent à $\Delta = 0$ et $\Delta = \frac{1}{2mn}$ et qui sont les courbes simplifiées.

Théorème X. — *Pour* $\Delta = \frac{1}{4mn} \pm \Delta_1$, *les deux courbes sont symétriquement placées par rapport à l'axe des* z; *de même pour* $\Delta = \frac{3}{4mn} \pm \Delta_1$.

Quand le plan de projection a, en effet, la position OM (*Pl. I, fig.* 10) correspondant à $\Delta = \frac{1}{4mn}$, le plan perpendiculaire est, comme on l'a vu, un des plans de symétrie de la courbe cylindrique, qui est le plan A_2OB_3 dans le cas de la *fig.* 10, *Pl. I;* en répétant exactement le raisonnement qui a servi dans la démonstration précédente, on reconnaîtra facilement que les projections sur deux plans, faisant des angles $+2\pi\Delta_1$ et $-2\pi\Delta_1$ avec le plan MON, seront symétriquement placés par rapport à l'axe des z.

Supposons m et n impairs tous les deux. — La figure élémentaire n'est plus, dans ce cas, symétrique par rapport à l'axe des y; mais, comme on l'a vu, il y a des centres aux points $y = \frac{c}{4}$ et $y = \frac{3c}{4}$. On pourra donc représenter la courbe cylindrique comme on l'a fait dans la *fig.* 12, *Pl. I,* où, avec m impair et quelconque, on suppose encore $n = 3$; A_1, A_2, A_3 sont les projections des axes de symétrie passant par les points $y = 0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \ldots$, B_1, B_2, B_3, ... les projections des axes passant par les points $y = \frac{l}{2n}, \frac{3l}{2n}, \frac{5l}{2n}, \dots$; $C_1, C_2, C_3, \dots$ sont les centres de la courbe cylindrique rectifiée; par suite, pour des valeurs égales de y comptées de part et d'autre de l'un de ces points, on trouve des valeurs de z égales et de signes contraires.

On peut faire d'abord les remarques suivantes :

α. *Un plan diamétral passant par un des axes* A *passe également par un axe* B, *puisque* n *est impair.*

β. *Le plan perpendiculaire à un plan diamétral passant par un des points* $C_1, C_2, \dots$ ($\frac{1}{4}$ *ou* $\frac{3}{4}$), *passe par un axe* A *et* B, *et se trouve être un plan de symétrie de la courbe cylindrique*

γ. *Si l'on mène un plan diamétral quelconque* MN, *les* z *correspondant à son intersection avec la courbe cylindrique seront égaux et de signes contraires à ses deux extrémités.* Si, en effet, on pose $A_1M = y$, $NB_{n'+1} = y$, $(n = 2n' + 1)$ également; or, à des distances égales d'un axe A et B, les z sont égaux et de signes contraires, puisque le milieu de la distance d'un axe A à un axe B le plus voisin se trouve un centre C.

Il y a, dans le cas actuel, à démontrer en particulier les théorèmes suivants, en laissant de côté ceux dont la démonstration est la même que précédemment.

Théorème VI. — *La courbe projetée n'a plus, en général, d'axe de symétrie; l'origine des coordonnées en est le centre.*

Deux points diamétralement opposés sur le cylindre ont des z égaux et de signes contraires, et, projetés sur un plan quelconque, donnent des points dont les abscisses sont $+x$ et $-x$.

Théorème VIII. — *Pour* $\Delta = \frac{1}{4mn}$ *ou* $\frac{3}{4mn}$, *la figure est symétrique par rapport aux deux axes.*

On démontrerait exactement, de la même manière qu'on l'a fait précédemment, que la figure projetée est symétrique par rapport à l'axe des z, puisque le plan perpendiculaire au plan de projection est un plan de symétrie de la courbe cylindrique. Cet axe passant par le centre de la courbe, il en résulte que la droite perpendiculaire est également un axe de symétrie; car on a les points $(+x_1, +z_1)$ et $(-x_1, +z_1)$, l'axe des z étant un axe de symétrie. L'origine étant un centre, on aura aussi les points $(-x_1, -z_1)$ et $(+x_1, -z_1)$; donc, en groupant ainsi ces points $(+x_1, +z_1)$, $(+x_1, -z_1)$ et $(-x_1, +z_1)$, $(-x_1, -z_1)$, on reconnaît que l'axe des x est également un axe de symétrie.

Théorème IX. — *Pour* $\Delta = \Delta_1$ *et* $\Delta = \frac{1}{mn} - \Delta_1$, *on a les mêmes courbes, mais parcourues en sens contraires.*

Même démonstration.

Théorème X. — *Pour* $\Delta = \frac{1}{4mn} \pm \Delta_1$, *les courbes sont symétriquement placées par rapport aux axes des x et des z.*

On démontrerait, comme précédemment, que les deux courbes sont symétriquement placées par rapport à l'axe des z, et l'on en conclut, comme pour le théorème VIII, qu'elles sont de même placées symétriquement par rapport à l'axe des x.

Supposons enfin m impair et n pair. — Il serait presque superflu d'examiner ce dernier cas, puisque la considération de la courbe cylindrique n'est destinée qu'à simplifier les démonstrations, et qu'il suffirait de considérer un cylindre perpendiculaire au premier, sur lequel il y aurait n rotations accompagnées de m oscillations. Cependant, pour compléter l'emploi de la méthode précédente, j'indiquerai rapidement la démonstration des théorèmes relatifs à ce dernier cas; on doit arriver à démontrer que toutes les propriétés des courbes projetées relatives à l'axe des z se rapportent actuellement à l'axe des x et réciproquement.

La *fig.* 13 représente d'une manière schématique le cas actuel, avec m quelconque, mais impair, et n égal à 4.

On reconnaît facilement :

α. *Qu'un plan diamétral passant par un axe de symétrie* A *passe à son autre extrémité par un axe de même nature; de même pour un plan diamétral passant par un axe* B.

β. *Deux points diamétralement opposés,* M *et* N, *ont des z égaux et de mêmes signes.*

Théorème V. — *L'axe des z est un axe de symétrie, quel que soit* Δ.

Deux points diamétralement opposés de la courbe cylindrique ont, en effet, des z égaux et de mêmes signes, et donnent en projection des points ayant pour abscisses $+x$ et $-x$.

THÉORÈME VII. — *Pour* $\Delta = 0$ *et* $\Delta = \frac{1}{2mn}$, *on a les courbes simplifiées.*

Ceci résulte, comme on l'a déjà vu, de ce que le plan de projection est un plan de symétrie de la courbe cylindrique; dans ce cas, les deux courbes seront disposées symétriquement par rapport à l'axe des x. Si l'on prend deux points, M et P, équidistants l'un de l'axe A, l'autre de l'axe B, à ces deux points projetés l'un sur OA_1 et l'autre sur OB_1 correspondront le même x et des z égaux et de signes contraires.

THÉORÈME VIII. — *Pour* $\Delta = \frac{1}{4mn}$ *et* $\Delta = \frac{3}{4mn}$, *la figure est symétrique par rapport aux deux axes.*

Dans ce cas, en effet, le plan de projection passe par un des centres de la figure élémentaire; donc, à deux arcs $+y$ et $-y$, donnant en projection le même x, correspondent des z égaux et de signes contraires; la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des x, et elle l'est, comme on le sait, par rapport à l'axe des z.

THÉORÈME IX. — *Pour* $\Delta = \Delta_1$ *et* $\Delta = \frac{1}{mn} - \Delta_1$, *on a les mêmes courbes parcourues en sens contraires.*

Même démonstration.

THÉORÈME X. — *Pour* $\Delta = \frac{1}{4mn} \pm \Delta_1$, *on a deux courbes placées symétriquement par rapport à l'axe des* x.

La démonstration est analogue aux précédentes. Si le plan de projection était OC_1 (*fig.* 13), deux points P et P_1 correspondant à $+y$ et $-y$, ayant des z égaux et de signes contraires, donneraient en projection deux points ayant le même x.

Pour un plan faisant un angle α avec le premier, les arcs $+y$ et $-y$ deviennent $y-\alpha$ et $-y-\alpha$, correspondant aux abscisses x_1 et x_2. On a donc les deux points, en projection, $(+x_1, +z)$ et $(+x_2, -z)$.

Pour le plan qui ferait un angle $-\alpha$ avec OC_1, les arcs y et $-y$ deviennent $y+\alpha$ et $-y+\alpha$, auxquels correspondent en projection les abscisses $+x_2$ et $+x_1$; on aura donc sur ce second plan les points $(+x_2, +z)$ et $(+x_1, -z)$.

Les deux figures sont donc placées symétriquement par rapport à l'axe des x.

QUATRIÈME PARTIE.

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE.

On a pu vérifier toutes les propriétés des courbes dues à la composition de deux mouvements vibratoires perpendiculaires en les produisant à l'aide de diapasons portant des miroirs. En se servant de diapasons munis de curseurs, d'après le système imaginé par M. Mercadier, on peut obtenir une fixité absolue de l'accord, et même arriver à maintenir la phase presque fixe également.

Mais on peut aussi, pour cette étude spéciale, construire en carton les courbes cylindriques. J'ai exécuté les reliefs des courbes cylindriques correspondant aux intervalles 1 : 1, 1 : 2, 2 : 1, 2 : 3, 3 : 2, 3 : 4, 4 : 3. (Le premier chiffre indique le nombre des rotations, et le second celui des oscillations.)

Je me suis servi, dans ce but, d'un cylindre de bois parfaitement tourné, ayant un diamètre de $52^{mm},2$; la longueur l de la circonférence développée est égale à 164 millimètres. Ensuite j'ai tracé par points, sur du carton ayant une épaisseur de $0^{mm},6$, des demi-sinusoïdes ayant toutes une ordonnée maxima égale à 27 millimètres, et pour base de la sinusoïde entière l, $2l$, $\frac{l}{2}$, $\frac{3l}{2}$, $\frac{2l}{3}$, $\frac{4l}{3}$, $\frac{3l}{4}$. J'ai découpé le carton suivant la courbe tracée, en ajoutant une petite portion de part et d'autre de l'axe des abscisses, et j'ai obtenu ainsi des patrons permettant de tracer, avec une grande netteté, les courbes cylindriques développées.

J'ai dessiné de cette façon ces courbes sur du carton mince, et tracé ensuite deux traits équidistants de cette première courbe, de manière à obtenir une bande de 4 millimètres environ. Puis j'ai fait découper en cuivre mince les bandes ainsi obtenues. Les *fig.* 14 et 15 représentent deux de ces bandes découpées, correspondant aux nombres 4 : 3 et 3 : 4. Avec ces bandes de cuivre posées sur une feuille de carton mince ou de papier bristol, et fixées à l'aide de poids, on peut, avec un crayon fin, tracer rapidement les courbes cylindriques développées; on découpe ce dessin avec un canif ou des ciseaux, et l'on amincit, à l'aide d'un canif, les bords des bandes qui doivent être superposés. Le carton découpé ayant été mouillé et placé sur le cylindre de bois dont il prend la forme, on le maintient à l'aide d'un cordon fortement serré; on colle ensuite les parties qui se superposent. Quand le carton est bien sec et bien collé, on l'enlève du cylindre, dont il conserve la forme, et, dans le cercle de base, on colle un cercle de carton égal à la base du cylindre. La *fig.* 16 représente les divers reliefs correspondant aux accords indiqués précédemment.

On consolide ces reliefs en les encollant avec de la colle forte et les vernissant avec le vernis noir dit *japonais*.

Pour démontrer, à l'aide de ces reliefs, les propriétés des courbes projetées sur divers plans diamétraux du cylindre, on les place sur un support représenté *fig.* 17. Il se compose d'une tige creuse AB, terminée par un cadran divisé EE′ et supporté par un pied CC′. Un disque DD′ est fixé sur une tige qui pénètre dans la tubulure centrale de la tige AB et y peut tourner facilement. Sur le disque DD′ on peut placer successivement les divers reliefs de carton; une aiguille fixée sur le disque parcourt les divisions du cadran EE′ et indique les angles dont on a fait tourner le relief pour le projeter. On peut observer directement la projection de la courbe cylindrique sur un des plans diamétraux, en plaçant l'œil à la même hauteur et à une certaine distance, et mettant de l'autre côté une feuille de papier blanc.

Pour effectuer la projection même de la courbe, on place le relief dans un faisceau cylindrique de rayons lumineux, un peu plus large que le relief; au-devant de ce dernier, on met une lentille convergente à foyer assez long (20 à 25 centimètres) et d'une grande ouverture. Un objectif de photographie (plaque entière) convient parfaitement dans ce but. Afin de faire voir facilement l'influence de l'angle dont on a tourné le cylindre, sur la forme de la courbe projetée, on peut fixer une petite tige verticale sur l'un des sommets de la courbe cylindrique; la position de cette tige sur la projection indique suffisamment l'angle dont on a fait tourner la courbe cylindrique.