ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes, et des systèmes orthogonaux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 7 (1878), p. 275-348

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1878_2_7__275_0>

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DES COORDONNÉES CURVILIGNES

ET

DES SYSTÈMES ORTHOGONAUX,

PAR M. G. DARBOUX,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

TROISIÈME PARTIE.

§ XII. — *Extension de la méthode de Lamé aux systèmes orthogonaux à n variables et conséquences nouvelles de cette méthode.*

Dans le travail inséré au tome III de ce Recueil, nous avons étudié la méthode que Lamé a fait connaître dans les *Leçons sur les coordonnées curvilignes* pour la recherche et l'étude des systèmes orthogonaux. Cette méthode nous a conduit à des résultats nouveaux qui ont été consignés soit dans notre travail primitif, soit dans des Notes insérées aux tomes LXVII, LXVIII, LXIX des *Comptes rendus*. Nous nous proposons de reprendre ici cette recherche en l'étendant au cas de n variables et en étudiant d'une manière plus complète les propriétés de chaque groupe d'équations. Il est vrai que, depuis la publication des résultats de nos premières études au tome LXIX des *Comptes rendus,* l'étude des formes quadratiques à n différentielles a fait l'objet de beaux Mémoires de MM. Lipschitz et Christoffel. Mais nous croyons qu'il y a encore intérêt à étudier par une méthode spéciale la question moins générale des systèmes orthogonaux, d'autant plus que, dans ce cas, on peut employer des procédés de calcul qui ne trouvent pas place dans le développement de la théorie générale. Nous indiquerons la méthode qui nous a conduit aux propositions énoncées dans la Note du 9 août 1869, où nous avons montré comment, de la connaissance d'un système orthogonal à n variables, tel que celui des coordonnées elliptiques, on pouvait déduire celle d'un nombre illimité de systèmes orthogonaux à trois variables.

Considérons n fonctions $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ de n variables $x_1, \ldots, x_n$ formant un système orthogonal, c'est-à-dire telles que l'on ait les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations

$$\delta_{\rho_i}\rho_k = 0. \tag{1}$$

Il suit de là que, si l'on pose

$$H_i^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x_n}\right)^2}, \tag{2}$$

les n^2 quantités $H_i \frac{\partial \rho_i}{\partial x_k}$ formeront les coefficients d'une substitution orthogonale, et si l'on considère les équations

$$d\rho_k = \frac{\partial \rho_k}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \rho_k}{\partial x_n} dx_n, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

ces équations, résolues par rapport à $dx_1, \ldots, dx_n$, nous donneront

$$dx_i = H_1^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial x_i} d\rho_1 + \ldots + H_k^2 \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i} d\rho_k + \ldots + H_n^2 \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i} d\rho_n.$$

De ces formules on déduit les équations bien connues de Lamé

$$\frac{1}{H_k} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_k} = H_k \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Nous poserons

$$X_k^i = \frac{1}{H_k} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_k} = H_k \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Les n^2 quantités X_k^i seront les coefficients d'une substitution orthogonale. On aura

$$dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 = H_1^2\, d\rho_1^2 + \ldots + H_n^2\, d\rho_n^2,$$

$$dx_i = X_1^i H_1\, d\rho_1 + X_2^i H_2\, d\rho_2 + \ldots + X_n^i H_n\, d\rho_n,$$

$$X_1^{i^2} + \ldots + X_n^{i^2} = 1,$$

$$X_1^i X_1^k + \ldots + X_n^i X_n^k = 0.$$

Adoptant toutes les notations de Lamé, nous conviendrons de désigner par u l'une quelconque des variables $x_1, \ldots, x_n$ et de poser, quand on la considérera seule,

$$(5) \qquad U_k = \frac{1}{H_k} \frac{\partial u}{\partial \rho_k} = H_k \frac{\partial \rho_k}{\partial u}.$$

Les sommes désignées par la lettre S seront obtenues en remplaçant u successivement par x_1, x_2, ..., x_n. Dans le cas de trois variables, U_1, U_2, U_3 sont les cosinus des angles que font les normales aux trois surfaces avec l'axe des u.

De la formule (3) il résulte que l'opération que nous avons appelée δ_{ρ_i}, et qui est définie par l'équation

$$\delta_{\rho_i} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial \rho_i}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \frac{\partial \rho_i}{\partial x_n},$$

peut s'écrire

$$\delta_{\rho_i} v = \frac{1}{H_i^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \rho_i} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \rho_i} \right),$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad \delta_{\rho_i} v = \frac{1}{H_i^2} \frac{\partial v}{\partial \rho_i}.$$

Par exemple, si l'on différentie l'équation

$$\delta_{\rho_k} \rho_{k'} = 0,$$

on aura

$$\delta_{\rho_k} \left(\frac{\partial \rho_{k'}}{\partial u} \right) + \delta_{\rho_{k'}} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial u} \right) = 0,$$

ou, en tenant compte de la formule (6),

$$(7) \qquad \frac{1}{H_k^2} \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left(\frac{\partial \rho_{k'}}{\partial u} \right) + \frac{1}{H_{k'}^2} \frac{\partial}{\partial \rho_{k'}} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial u} \right) = 0.$$

Cela posé, reprenons la formule qui sert de définition aux U,

(8) $$du = H_1 U_1 d\rho_1 + \ldots + H_n U_n d\rho_n,$$

et écrivons les conditions d'intégrabilité. On doit avoir

(9) $$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_k \partial\rho_{k'}} = H_k \frac{\partial U_k}{\partial\rho_{k'}} + U_k \frac{\partial H_k}{\partial\rho_{k'}} = H_{k'} \frac{\partial U_{k'}}{\partial\rho_k} + U_{k'} \frac{\partial H_{k'}}{\partial\rho_k}.$$

Écrivons de même la formule (7); après y avoir remplacé $\frac{\partial\rho_k}{\partial u}$, $\frac{\partial\rho_{k'}}{\partial u}$ par $\frac{1}{H_k}U_k$, $\frac{1}{H_{k'}}U_{k'}$, nous aurons

(10) $$H_k \frac{\partial U_k}{\partial\rho_{k'}} - U_{k'} \frac{\partial H_{k'}}{\partial\rho_k} + H_{k'} \frac{\partial U_{k'}}{\partial\rho_k} - U_k \frac{\partial H_k}{\partial\rho_{k''}} = 0,$$

et si nous comparons les formules (9) et (10), nous en déduisons

$$\frac{1}{U_{k'}} \frac{\partial U_k}{\partial\rho_{k'}} = \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_{k'}}{\partial\rho_k}, \quad \frac{1}{U_k} \frac{\partial U_{k'}}{\partial\rho_k} = \frac{1}{H_{k'}} \frac{\partial H_k}{\partial\rho_{k'}}.$$

Ces formules rentrent dans le même type. Si, au lieu de garder, comme Lamé, H_k, $H_{k'}$, nous introduisons les variables auxiliaires

(11) $$\beta_{kk'} = \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_{k'}}{\partial\rho_k}, \quad k \lesseqgtr k',$$

elles prennent la forme

(12) $$\frac{\partial U_k}{\partial\rho_{k'}} = \beta_{kk'} U_{k'}, \quad k \lesseqgtr k'.$$

Pour donner plus de netteté aux sommes que nous avons à considérer, nous poserons par définition

(13) $$\beta_{ii} = 0,$$

en sorte que $\beta_{kk'}$ sera défini par la formule (11) si k est différent de k', et par la formule (13) si $k = k'$.

La formule (12) ne nous donne pas toutes les dérivées des fonctions U. Nous aurons celle qui nous manque en différentiant par rapport à ρ_k l'équation

(14) $$U_1^2 + \ldots + U_n^2 = 1,$$

ce qui nous donne

$$(15)\qquad \frac{\partial U_k}{\partial \rho_k} = -\beta_{1k}U_1 - \beta_{2k}U_2 - \ldots - \beta_{nk}U_n.$$

Ainsi les formules (12) et (15) font connaître toutes les dérivées des fonctions U_k.

Ce point étant obtenu, nous aurons des relations entre les fonctions β en exprimant que les différentes valeurs obtenues pour une même dérivée seconde de U_k sont égales. On aura, par exemple,

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial \rho_{k'} \partial \rho_{k''}} = \frac{\partial \beta_{kk'}}{\partial \rho_{k''}} U_{k'} + \beta_{kk'}\beta_{k'k''}U_{k''} = \frac{\partial \beta_{kk''}}{\partial \rho_{k'}} U_{k''} + \beta_{kk''}\beta_{k''k'}U_{k'}.$$

Cette équation devant avoir lieu pour n systèmes de valeurs des U, on en déduit

$$(16)\qquad \frac{\partial \beta_{kk'}}{\partial \rho_{k''}} = \beta_{kk''}\beta_{k''k'}, \quad k \lesseqgtr k' \lesseqgtr k''.$$

Cherchons de même les deux valeurs que l'on peut obtenir pour $\dfrac{\partial^2 U_k}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}}$, et égalons-les; on trouve

$$U_{k'} \frac{\partial \beta_{kk'}}{\partial \rho_k} = -U_{k'}\left(\frac{\partial \beta_{k'k}}{\partial \rho_{k'}} + \beta_{1k}\beta_{1k'} + \beta_{2k}\beta_{2k'} + \ldots + \beta_{nk}\beta_{nk'}\right),$$

et par suite

$$(17)\qquad \frac{\partial \beta_{kk'}}{\partial \rho_k} + \frac{\partial \beta_{k'k}}{\partial \rho_{k'}} + \beta_{1k}\beta_{1k'} + \beta_{2k}\beta_{2k'} + \ldots + \beta_{nk}\beta_{nk'} = 0, \quad k \lesseqgtr k'.$$

Les quantités β doivent donc satisfaire aux deux groupes bien distincts de formules (16), (17). Puis les U seront déterminés par les équations

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U_k}{\partial \rho_{k'}} = \beta_{kk'}U_{k'}, \\[2ex] \dfrac{\partial U_k}{\partial \rho_k} = -\beta_{1k}U_1 - \ldots - \beta_{nk}U_n, \end{cases}$$

qui seront évidemment compatibles si les équations (16), (17) sont satisfaites.

Supposons que l'on ait trouvé des fonctions β satisfaisant aux équations (16) et (17). Je dis que l'on pourra toujours en déduire une infinité de systèmes orthogonaux. En effet, les conditions d'intégrabilité étant satisfaites, le système (18) déterminera les fonctions U, et il est facile de voir avec quel degré de généralité. Les valeurs initiales seules de ces fonctions peuvent être choisies, puisque les équations déterminent toutes leurs dérivées premières.

Or il résulte des équations différentielles (18) que, si l'on a trouvé deux systèmes de solutions U_i, V_i de ces équations, la fonction

$$U_1 V_1 + \ldots + U_n V_n$$

demeure constante. Il suffit de prendre une de ses dérivées, d'y substituer les valeurs de $\frac{\partial U_1}{\partial \rho_k}$, ..., $\frac{\partial V_1}{\partial \rho_k}$, déduites de ces équations; on obtiendra un résultat nul. Cette remarque s'applique évidemment au cas où les deux systèmes coïncident. On a donc

$$\begin{aligned} U_1 V_1 + \ldots + U_n V_n &= \text{const.}, \\ U_1^2 + \ldots + U_n^2 &= \text{const.} \end{aligned}$$

Si donc on a pris les valeurs initiales des fonctions de telle manière que l'on ait

$$\begin{aligned} U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2 &= 1, \\ U_1 V_1 + \ldots + U_n V_n &= 0, \end{aligned}$$

ces relations subsisteront toujours. Il n'y a donc au fond qu'un système de solutions pour les U_i; les autres s'en déduiront par des transformations linéaires orthogonales à coefficients constants (par un changement d'axes dans le cas de $n = 3$).

Il n'en est pas de même pour les équations (11),

$$H_k \beta_{kk'} = \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k},$$

qui déterminent les H quand les β sont connus. A la vérité, ces équations sont compatibles en vertu des équations (16). Mais elles ne déterminent pas les dérivées $\frac{\partial H_k}{\partial \rho_k}$, et, différentiées, elles ne donneront pas $\frac{\partial^n H_k}{\partial \rho_k^n}$. Elles admettront donc une solution avec n fonctions arbitraires d'une seule variable indépendante.

Il suit de là que, si l'on connaît un système orthogonal, on pourra d'abord former les valeurs des fonctions β qui satisferont nécessairement aux équations (16), (17). Si, supposant ensuite ces quantités β données, on veut en déduire tous les systèmes qui y correspondent, les U, à la vérité, seront complétement déterminés; ils seront les mêmes que pour le système proposé, mais les fonctions H pourront recevoir de nouvelles valeurs. Cette remarque, que j'ai développée au tome LVII des *Comptes rendus*, avait déjà été faite, pour le cas de $n=3$, par M. Combescure, dans un Mémoire inséré au tome IV de ce Recueil (1re série).

Dans ce cas, l'interprétation géométrique est bien simple : si l'on considère l'un quelconque des systèmes orthogonaux ainsi déduits du proposé, les normales aux trois surfaces de chaque système aux points correspondants seront parallèles, les surfaces correspondantes auront une même représentation sphérique de leurs lignes de courbure.

On le voit, dans notre méthode, la recherche du système orthogonal repose sur trois opérations distinctes : d'abord l'intégration des équations aux fonctions β, puis celle du système aux fonctions H, enfin celle du système qui détermine les U. Cela fait, l'intégration des expressions

$$du = \mathrm{H}_1 \mathrm{U}_1 d\rho_1 + \ldots + \mathrm{H}_n \mathrm{U}_n d\rho_n$$

donnera les fonctions $x_1, \ldots, x_n$, et la solution du problème sera achevée.

Il importe de remarquer que l'on pourrait, dans le système aux fonctions β, remplacer ces fonctions par les expressions en H_k, qui leur servent de définition. Il est facile de voir qu'alors les deux équations

$$\frac{\partial \beta_{kk'}}{\partial \rho_{k''}} = \beta_{kk''}\beta_{k''k'}, \qquad \frac{\partial \beta_{k'k}}{\partial \rho_{k''}} = \beta_{k'k''}\beta_{k''k}$$

donneraient une seule équation pour les fonctions H.

Il y a très-souvent avantage à former les équations aux dérivées partielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions $x_1, \ldots, x_n$. Il suffit, pour les obtenir, de substituer, dans les équations (18), aux β et U, leurs expressions, ce qui donne

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}} - \frac{1}{\mathrm{H}_k}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial \rho_{k'}}\frac{\partial u}{\partial \rho_k} - \frac{1}{\mathrm{H}_{k'}}\frac{\partial \mathrm{H}_{k'}}{\partial \rho_k}\frac{\partial u}{\partial \rho_{k'}} = 0, \\ &\frac{1}{\mathrm{H}_k}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_k^2} - \frac{1}{\mathrm{H}_k^2}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial \rho_k}\frac{\partial u}{\partial \rho_k} + \frac{\beta_{1k}}{\mathrm{H}_1}\frac{\partial u}{\partial \rho_1} + \frac{\beta_{2k}}{\mathrm{H}_2}\frac{\partial u}{\partial \rho_2} + \ldots + \frac{\beta_{nk}}{\mathrm{H}_n}\frac{\partial u}{\partial \rho_n} = 0. \end{aligned} \right.$$

Mentionnons encore l'équation

$$\frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho_1}\right)^2+\ldots+\frac{1}{H_n^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho_n}\right)^2=1,$$

qui pourra servir à trouver u.

§ XIII. — *Première application à un exemple simple de la méthode précédente.*

Pour montrer, au moins par un exemple, la marche des calculs, traitons le cas où l'on veut que toutes les quantités H_i soient égales, et posons

$$H_i=\frac{1}{h};$$

on aura

$$(20)\qquad dx_1^2+\ldots+dx_n^2=\frac{1}{h^2}(d\rho_1^2+\ldots+d\rho_n^2).$$

On connaît déjà une solution de cette équation, celle qui est fondée sur les formules généralisées de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Nous allons montrer qu'il n'y en a pas d'autre.

On aura ici

$$\beta_{kk'}=-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial \rho_k},$$

et les équations (16) nous donneront

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_k\,\partial \rho_{k'}}=0,$$

ce qui exige que h soit de la forme

$$h=r_1+r_2+\ldots+r_n,$$

la fonction r_i dépendant de la seule variable ρ_i. En substituant les valeurs des β dans le groupe (17), on trouve

$$(21)\qquad h\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_k^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_{k'}^2}\right)=\left(\frac{\partial h}{\partial \rho_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial h}{\partial \rho_n}\right)^2.$$

Le second membre étant toujours le même, il faut donc que toutes les dérivées $\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_k^2}$ soient égales, ce qui donne

$$r''_1 = r''_2 = \ldots = r''_n = 2a,$$

a ne pouvant être qu'une constante, et par suite on aura

$$(22) \qquad h = a(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_n^2) + 2a_1\rho_1 + \ldots + 2a_n\rho_n + b.$$

En exprimant que la relation (21) est satisfaite, on obtient

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 = ab,$$

unique relation à laquelle doivent satisfaire les constantes a, b, a_i.

Examinons d'abord le cas où toutes les constantes sont nulles, sauf b, que l'on prendra égal à l'unité. Alors toutes les fonctions β sont nulles. Les quantités U sont constantes, et l'on voit que la solution la plus générale de l'équation

$$dx_1^2 + \ldots + dx_n = d\rho_1^2 + \ldots + d\rho_n^2$$

s'obtient en prenant pour les x_i des fonctions linéaires des ρ_i.

Il suit de là que, si deux systèmes orthogonaux donnent la même expression pour

$$dx_1^2 + \ldots + dx_n^2,$$

ils ne diffèrent pas essentiellement, et l'on passe de l'un à l'autre par une substitution orthogonale à coefficients constants, ou, pour le cas de $n = 3$, par un changement d'axes coordonnés.

Cette remarque peut dès à présent recevoir son application, et nous dispense des calculs relatifs à l'expression la plus générale de h. Nous savons que, dans ce cas, on a une solution de l'équation (20) où l'on a substitué la valeur de h,

$$h = a(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_n^2) + 2a_1\rho_1 + \ldots + 2a_n\rho_n + b,$$

en prenant

$$x_1 = \frac{\rho_1 + \frac{a_1}{a}}{h}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\rho_n + \frac{a_n}{a}}{h}.$$

On aura donc la solution la plus générale en effectuant une substitution linéaire orthogonale que nous pouvons négliger. En particulier, dans le cas de $n = 3$, on aura la solution la plus générale de l'équation (20) en opérant une transformation par rayons vecteurs réciproques et la faisant suivre d'un déplacement.

Il y a un cas spécial de la transformation précédente que l'on néglige d'habitude, parce qu'il ne peut se rapporter qu'à des points imaginaires, mais dont il nous paraît bon de dire quelques mots: c'est celui où l'on a

$$a = 0,$$

et où l'expression de h devient

$$h = a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + \ldots + a_n\rho_n + b,$$

avec la condition

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 0.$$

Cette dernière condition exige que l'une au moins des constantes soit imaginaire. M. Cremona, croyons-nous, a, le premier, appelé l'attention sur ce cas spécial de l'inversion. Les formules qui s'y rapportent ne se déduisent pas immédiatement de celles qui sont relatives au cas général; mais on les trouve sans difficulté.

Supposons que, par une substitution linéaire, on ait réduit h à la forme

$$h = \rho_1 + i\rho_2,$$

on pourra prendre

$$x_1 = \frac{a(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_n^2) - \frac{1}{a}}{2h},$$

$$x_2 = \frac{ai(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_n^2) - \frac{i}{a}}{2h}$$

et, pour les autres fonctions x,

$$x_k = \frac{\rho_k}{\rho_1 + i\rho_2}.$$

Les résultats précédents donnent lieu à une remarque importante et qui nous sera très-utile dans la suite. Supposons que, considérant le cas de $n = 3$, on ait trouvé un système orthogonal défini par la relation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2,$$

et que l'on cherche s'il en existe un autre pour lequel

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = ds'^2 = \frac{1}{M^2} ds^2 = \frac{1}{M^2}(H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2).$$

On devra avoir, d'après ce qui précède,

$$M = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2bx + 2cy + 2hz + f,$$

a, b, c, f étant liés par la relation

$$b^2 + c^2 + h^2 - af = 0.$$

Si donc on cherche en fonction des ρ, ρ_1, ρ_2 l'expression la plus générale de M, cette expression se présentera nécessairement sous la forme

$$M = a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3 + a_4 M_4 + a_5 M_5,$$

où les cinq constantes a_i seront liées par une équation du second degré

$$\varphi(a_1 a_2 \ldots a_5) = 0.$$

Supposons que, par une substitution linéaire opérée sur les constantes, on ait ramené cette relation à la forme

$$a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_1 a_5 = 0.$$

Il résulte de l'expression générale de M que l'on aura un système orthogonal pour lequel

$$ds^2 = \frac{1}{M_5^2}(H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2),$$

et

$$2x = \frac{M_2}{M_5}, \quad 2y = \frac{M_3}{M_5}, \quad 2z = \frac{M_4}{M_5}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{M_1}{M_5};$$

en sorte que la détermination de l'unique fonction M fera connaître celle de x, y, z, et même celle de $x^2 + y^2 + z^2$.

Revenons aux systèmes précédemment considérés, ceux qui se rapportent à l'expression (22) de M. Sous leur forme la simple, les formules trouvées sont les suivantes :

$$(23)\quad \begin{cases} H_i = \dfrac{1}{h}, & h = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_n^2, \\ x_i = \dfrac{\rho_i}{h}, & \beta_{ij} = -\dfrac{2\rho_j}{h}, \\ X_i^i = 1 - \dfrac{2\rho_i^2}{h}, & X_k^i = -\dfrac{2\rho_i\rho_k}{h}. \end{cases}$$

Cela étant, si nous appliquons la remarque déjà faite, et si nous cherchons le système orthogonal le plus général pour lequel les β et les X_k^i demeurent les mêmes, nous aurons à déterminer les fonctions H par les équations

$$\beta_{kk'} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k},$$

ce qui se fait sans difficulté. Je n'insiste pas sur cette recherche, dont j'indique seulement les résultats. On trouve

$$H_i = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_n}{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_n^2} - \tfrac{1}{2}R'_i, \tag{24}$$

$R_1, \ldots, R_n$ désignant des fonctions de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ respectivement et R'_i la dérivée de R_i.

Puis les variables x_i s'obtiennent par l'intégration des expressions

$$H_1 U_1 d\rho_1 + \ldots + H_n U_n d\rho_n,$$

et l'on trouvera

$$x_i = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_n}{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_n^2}\rho_i - \frac{1}{2}\int \frac{R'_i\, d\rho_i}{\rho_i}. \tag{25}$$

C'est un système orthogonal contenant n fonctions arbitraires d'une seule variable. Pour le cas de $n = 3$, il a déjà été donné dans le travail antérieur déjà cité.

§ XIV. — *Remarques sur le premier système d'équations auxquelles doivent satisfaire les fonctions β.*

Nous avons vu, dans l'exposé de la méthode de recherche des systèmes orthogonaux, que les fonctions β doivent satisfaire à deux groupes bien distincts d'équations. Il m'a paru intéressant de rechercher la signification du premier de ces deux systèmes considéré isolément. Je vais montrer qu'il se rattache à la recherche des conditions d'intégrabilité d'un système particulier d'équations aux dérivées partielles, système que l'on rencontre dans un grand nombre de recherches.

Considérons les équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k} = \alpha_k^i \frac{\partial u}{\partial \rho_k} + \alpha_i^k \frac{\partial u}{\partial \rho_i} + \gamma_{ik} u, \tag{26}$$

où i et k sont différents et peuvent prendre toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$, et cherchons les conditions non-seulement pour qu'il y ait une fonction satisfaisant à ces équations, mais pour qu'il y en ait $n+1$. En d'autres termes, exprimons que ces équations admettent une intégrale contenant assez de constantes pour qu'on puisse donner à la fonction et à ses dérivées premières des valeurs quelconques pour un système donné de valeurs des variables indépendantes ρ_i.

Pour obtenir ces conditions, nous formerons de trois manières différentes les valeurs des dérivées troisièmes $\frac{\partial^3 u}{\partial\rho_k \partial\rho_{k'} \partial\rho_{k''}}$, et nous écrirons que ces valeurs sont égales. On trouve, par exemple, en prenant la dérivée de l'équation (26) par rapport à $\rho_{k'}$, et en substituant les valeurs des dérivées secondes qu'introduit cette opération,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho_i \partial\rho_k \partial\rho_{k'}} = \frac{\partial u}{\partial\rho_i}\left(\alpha_i^k \alpha_i^{k'} + \frac{\partial\alpha_i^k}{\partial\rho_{k'}}\right) + \frac{\partial u}{\partial\rho_k}\left(\alpha_k^i \alpha_k^{k'} + \frac{\partial\alpha_k^i}{\partial\rho_{k'}}\right) \\ + \frac{\partial u}{\partial\rho_{k'}}\left(\alpha_k^i \alpha_{k'}^k + \alpha_i^k \alpha_{k'}^i + \gamma_{ik}\right) + u\left(\alpha_k^i \gamma_{kk'} + \alpha_i^k \gamma_{ik'} + \frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial\rho_{k'}}\right).\end{aligned}$$

Il faudra, par exemple, qu'en permutant les indices i et k' on retrouve la même valeur, et, comme la fonction et ses dérivées premières doivent pouvoir être prises arbitrairement, par hypothèse, il faudra d'abord que les coefficients des mêmes dérivées soient égaux. Cela nous donne des équations du type suivant :

$$\frac{\partial\alpha_i^k}{\partial\rho_{k'}} = \alpha_k^{k'} \alpha_i^k + \alpha_{k'}^k \alpha_i^{k'} - \alpha_i^k \alpha_i^{k'} + \gamma_{kk'}. \tag{27}$$

Or cette équation montre que l'on doit avoir

$$\frac{\partial\alpha_i^k}{\partial\rho_{k'}} = \frac{\partial\alpha_i^{k'}}{\partial\rho_k},$$

et par conséquent α_i^k, $\alpha_i^{k'}$ sont les dérivées d'une même fonction qu'on peut écrire $\log H_i$, et l'on a

$$\alpha_i^k = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\rho_k}.$$

Les équations proposées (26) prennent alors la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_i \partial\rho_k} - \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\rho_k}\frac{\partial u}{\partial\rho_i} - \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial\rho_i}\frac{\partial u}{\partial\rho_k} - \gamma_{ik} u = 0.$$

Les formules (27), exprimées en introduisant les fonctions H_i, deviennent

$$(28) \qquad \gamma_{kk'} = \frac{H_k}{H_i}\left(\frac{\partial\beta_{ki}}{\partial\rho_{k'}} - \beta_{kk'}\beta_{k'i}\right),$$

en posant, comme nous l'avons déjà fait, pour définition des β,

$$\beta_{iq} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_q}{\partial\rho_i}.$$

Enfin, si nous exprimons que, dans les expressions des troisièmes dérivées $\frac{\partial^3 u}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k\,\partial\rho_{k'}}$, les coefficients de u ont la même valeur pour les trois expressions d'une même dérivée, il faudra joindre aux formules (28) les suivantes :

$$(29) \qquad \frac{\partial}{\partial\rho_{k'}}(\gamma_{ik} + \beta_{ik}\beta_{ki}) = \frac{\partial}{\partial\rho_k}(\gamma_{ik'} + \beta_{ik'}\beta_{k'i}),$$

qui, en y substituant les valeurs de γ, γ' déduites des formules (28), donneraient les équations auxquelles doivent satisfaire les fonctions H_i.

Examinons le cas particulier où les équations proposées ne contiennent pas de terme en u. Nous savons déjà qu'elles seront de la forme

$$(30) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k} - \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial\rho_i}\frac{\partial u}{\partial\rho_k} - \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\rho_k}\frac{\partial u}{\partial\rho_i} = 0.$$

En outre, les fonctions β devront satisfaire aux équations

$$(31) \qquad \frac{\partial\beta_{ki}}{\partial\rho_{k'}} = \beta_{kk'}\beta_{k'i},$$

déduites des formules (28), où l'on a fait $\gamma_{kk'} = 0$. Quant aux équations (29), elles seront satisfaites d'elles-mêmes. Donc, le groupe (31), qui est le premier de ceux que l'on rencontre dans la théorie des systèmes orthogonaux, exprime précisément les conditions d'intégrabilité d'un système d'équations de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k} = a_k^i\frac{\partial u}{\partial\rho_i} + a_i^k\frac{\partial u}{\partial\rho_k}.$$

Nous voyons qu'un tel système, s'il admet une solution avec n constantes permettant de choisir arbitrairement les valeurs initiales des n dérivées, ou, si l'on veut, s'il admet n solutions distinctes, doit pouvoir être ramené à la forme (30), où les fonctions H_i vérifient les équations (31). Du reste, ces équations (31), qui sont nécessaires, sont aussi suffisantes, et, toutes les fois qu'elles seront vérifiées, les équations précédentes admettront une solution plus générale que celle qu'on cherchait, et, contenant n fonctions arbitraires d'une seule variable. Il suffit, pour le reconnaître, de remarquer que les équations obtenues en différentiant jusqu'à un ordre quelconque détermineront toutes les dérivées, moins celles qui sont prises par rapport à une seule variable.

Examinons maintenant les conséquences géométriques des remarques précédentes, et, pour plus de netteté, bornons-nous au cas de trois variables. Désignons par ρ, ρ_1, ρ_2 les trois variables indépendantes, la variable ρ étant supposée affectée de l'indice o, et admettons que le système (31) soit vérifié par trois fonctions H, H_1, H_2 de ρ, ρ_1, ρ_2. Ce système est alors formé de six équations se réduisant à trois, qui sont celles du premier système de Lamé.

Les équations

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho_2}\frac{\partial u}{\partial\rho_1} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho_1}\frac{\partial u}{\partial\rho_2} = 0,\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\rho_2} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho_2} - \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial\rho_2}\frac{\partial u}{\partial\rho} = 0,\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\rho_1} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho_1} - \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial\rho_1}\frac{\partial u}{\partial\rho} = 0\end{aligned}\right.$$

admettront alors une solution avec trois fonctions arbitraires d'une variable. Soient x, y, z trois solutions distinctes de ces équations, et regardons ces variables comme les coordonnées d'un point. Nous formons ainsi un système de coordonnées curvilignes. Je dis qu'il jouit de la propriété que les surfaces des différentes familles s'y coupent suivant des lignes conjuguées.

En effet, considérons l'une quelconque des surfaces du système, la surface $\rho_2 =$ const., par exemple. Si l'on pose, suivant l'usage,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

on aura d'abord

$$(33)\qquad \frac{\partial z}{\partial \rho_1} = p\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + q\frac{\partial y}{\partial \rho_1},\quad \frac{\partial z}{\partial \rho} = p\frac{\partial x}{\partial \rho} + q\frac{\partial y}{\partial \rho}.$$

Si l'on veut que les lignes $\rho = \text{const.}$, $\rho_1 = \text{const.}$ soient conjuguées, on devra avoir

$$\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial q}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \rho_1} = 0,$$

ou, ce qui est identique,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \rho_1} - p\frac{\partial^2 x}{\partial \rho\,\partial \rho_1} - q\frac{\partial^2 y}{\partial \rho\,\partial \rho_1} = 0.$$

La comparaison de ces équations avec les formules (33) nous montre qu'il est possible de trouver deux fonctions a et b, telles que l'on ait

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho\,\partial \rho_1} = a\frac{\partial u}{\partial \rho} + b\frac{\partial u}{\partial \rho_1},$$

lorsqu'on y remplace u successivement par x, y, z. En raisonnant de même pour les deux autres surfaces, on obtiendra des équations

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho\,\partial \rho_1} &= a\frac{\partial u}{\partial \rho} + b\frac{\partial u}{\partial \rho_1},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho\,\partial \rho_2} &= a_1\frac{\partial u}{\partial \rho_2} + b_1\frac{\partial u}{\partial \rho},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1\partial \rho_2} &= a_2\frac{\partial u}{\partial \rho_1} + b_2\frac{\partial u}{\partial \rho_2}, \end{aligned}\right.$$

qui, devant être satisfaites par trois fonctions x, y, z, se ramènent nécessairement à la forme (32).

Ainsi nous obtenons la signification du premier système de Lamé. Si l'on a trouvé trois fonctions H, H_1, H_2 satisfaisant aux équations

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho_2} = \beta_{02}\beta_{21},\quad \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \rho} = \beta_{10}\beta_{02},\quad \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_1} = \beta_{21}\beta_{10},\\ &\frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_2} = \beta_{12}\beta_{20},\quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial \rho} = \beta_{20}\beta_{01},\quad \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho_1} = \beta_{01}\beta_{12}, \end{aligned}\right.$$

qui se réduisent à trois, lorsqu'on y remplace les β par leurs expressions, on obtiendra, en intégrant les équations (32), non pas un système nécessairement orthogonal, mais un système de coordonnées curvilignes dans lequel les surfaces se couperont suivant des lignes conjuguées. Ces lignes conjuguées pourront être les lignes de courbure, et alors le système sera orthogonal, mais elles en différeront en général.

Ces systèmes particuliers, formés de surfaces se coupant suivant des lignes conjuguées, ont une propriété qui les distingue de tous les autres systèmes de coordonnées curvilignes, et que nous allons faire connaître.

Étant donné un système de coordonnées curvilignes, cherchons s'il en existe un autre tel qu'on puisse établir la correspondance entre les deux systèmes, de manière que, aux points correspondants, les plans tangents aux trois surfaces soient parallèles dans les deux systèmes. En d'autres termes, x, y, z étant des fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2, cherchons s'il existe trois fonctions $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$, telles que les expressions

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \lambda_2 \frac{\partial x}{\partial \rho_2} d\rho_2,$$

$$\lambda \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \ldots,$$

$$\lambda \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \ldots$$

soient des différentielles exactes. Il est clair, en effet, que, si cette condition est satisfaite et si x_1, y_1, z_1 sont les intégrales des différentielles précédentes, x_1, y_1, z_1, considérées comme fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2, définiront un système de cordonnées curvilignes jouissant de la propriété indiquée. Or les conditions d'intégrabilité des expressions précédentes nous conduisent immédiatement à un système de la forme (34), ce que démontre le théorème suivant :

Pour que deux systèmes de coordonnées curvilignes puissent se correspondre de telle manière qu'aux points correspondants les plans tangents aux trois surfaces aient la même direction dans les deux systèmes, il est nécessaire que les surfaces de chaque système se coupent mutuellement suivant des systèmes de lignes conjuguées sur chacune de ces surfaces.

Nous allons voir, du reste, que cette condition, qui est nécessaire, est aussi suffisante. Supposons, en effet, qu'on ait trouvé six fonctions β satisfaisant aux équations (35), les fonctions H seront définies par les équations

$$\beta_{ij} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial \rho_i}. \tag{36}$$

Quant aux coordonnées x, y, z, au lieu de les déterminer directement, posons

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_i} = H_i U_i,$$

u désignant l'une quelconque d'entre elles, les équations (32) prendront la forme

$$\frac{\partial U_i}{\partial \rho_k} = \beta_{ik} U_k. \tag{37}$$

De cette manière, le calcul des coordonnées u sera ramené à deux problèmes distincts, au calcul des fonctions H par les formules (36), et à celui des fonctions U par les formules (37). Si, gardant les mêmes valeurs de U, U_1, U_2, on prend différentes valeurs des H satisfaisant aux équations (36), on aura deux systèmes de coordonnées curvilignes à plans tangents parallèles aux points correspondants. Du reste, les systèmes (36), (37) sont toujours intégrables, chacun avec trois fonctions arbitraires, les conditions d'intégrabilité étant remplies en vertu des équations auxquelles satisfont les β. On obtiendra ainsi, avec six fonctions arbitraires d'une variable, des systèmes triples de surfaces à lignes conjuguées.

Tout ce qui précède peut être résumé dans les théorèmes suivants :

Le premier système (35) *de Lamé exprime que les surfaces du système triple se coupent suivant des lignes conjuguées; toutes les fois qu'on aura trouvé les fonctions* β *satisfaisant à ce système, la suite des calculs donnera un système de coordonnées curvilignes à lignes conjuguées avec six fonctions arbitraires d'une variable.*

Si deux systèmes de coordonnées curvilignes se correspondent de telle manière qu'aux points homologues les plans tangents aux trois surfaces soient parallèles dans les deux systèmes, les surfaces de chaque système se coupent suivant des lignes conjuguées.

Réciproquement, *si trois familles de surfaces se coupent suivant des lignes conjuguées, il existera d'autres systèmes de coordonnées curvilignes* *avec trois fonctions arbitraires, tels qu'aux points correspondants dans les deux systèmes les plans tangents aux surfaces correspondantes soient parallèles.*

Les propriétés précédentes sont donc caractéristiques des systèmes que nous étudions ici pour la première fois.

§ XV. — *Étude de quelques systèmes triples de surfaces se coupant suivant des lignes conjuguées.*

L'emploi des systèmes orthogonaux est soumis à de telles restrictions que l'on sera nécessairement conduit, en Physique mathématique, à adopter des systèmes de coordonnées curvilignes obliques. Le groupe particulier que nous avons signalé au paragraphe précédent est évidemment le plus simple après celui des systèmes orthogonaux. Nous croyons donc utile de faire connaître quelques systèmes simples de surfaces se coupant suivant des lignes conjuguées.

Si, dans le système (32), nous faisons $H = H_1 = H_2$, nous avons vu que l'on doit avoir

$$H = \frac{1}{r + r_1 + r_2},$$

r, r_1, r_2 désignant des fonctions de ρ, de ρ_1 et de ρ_2. Cette hypothèse nous conduit au système suivant :

$$x = \frac{s + s_1 + s_2}{r + r_1 + r_2}, \quad y = \frac{t + t_1 + t_2}{r + r_1 + r_2}, \quad z = \frac{u + u_1 + u_2}{r + r_1 + r_2},$$

où s_i, t_i, u_i dépendent seulement de la variable de même indice.

Déterminons, dans le système (32), les quantités H, H_1, H_2, par la condition que ce système admette pour solutions des produits de trois fonctions dépendant l'une de ρ, l'autre de ρ_1, la troisième de ρ_2. Nous obtiendrons la forme

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} (r - r_1) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \, \partial \rho_1} &= \frac{\partial u}{\partial \rho_1} - \frac{\partial u}{\partial \rho}, \\ (r_1 - r_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} &= \frac{\partial u}{\partial \rho_2} - \frac{\partial u}{\partial \rho_1}, \\ (r_2 - r) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \, \partial \rho_2} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\partial u}{\partial \rho_2}, \end{aligned} \right.$$

où r, r_1, r_2 désignent des fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 respectivement, et qui conduit à une infinité de solutions de la forme

$$u = e^{\int \frac{d\rho}{r+h} + \int \frac{d\rho_1}{r_1+h} + \int \frac{d\rho_2}{r_2+h}},$$

h désignant une constante, et par conséquent à une infinité de systèmes à lignes conjuguées. En prenant pour r, r_1, r_2 des quantités proportionnelles à ρ, ρ_1, ρ_2, on sera conduit au système suivant :

$$\begin{aligned}
x &= A(\rho + h)^m (\rho_1 + h)^{m_1} (\rho_2 + h)^{m_2},\\
y &= B(\rho + k)^m (\rho_1 + k)^{m_1} (\rho_2 + k)^{m_2},\\
z &= C(\rho + l)^m (\rho_1 + l)^{m_1} (\rho_2 + l)^{m_2}.
\end{aligned}$$

L'avantage des systèmes à lignes conjuguées consiste en ce qu'on peut les soumettre à des transformations homographiques quelconques, sans leur faire perdre leur propriété essentielle. Dans les équations (34), on peut regarder les variables u comme des coordonnées homogènes par rapport à un tétraèdre de référence quelconque, car de telles coordonnées ne sont que des fonctions linéaires des coordonnées ordinaires, et par conséquent satisfont aux mêmes équations. Ainsi, x, y, z, t désignant maintenant des coordonnées homogènes, les équations

$$(39) \quad \left\{\begin{aligned}
x &= A(\rho + a)^m (\rho_1 + a)^{m_1} (\rho_2 + a)^{m_2},\\
y &= B(\rho + b)^m (\rho_1 + b)^{m_1} (\rho_2 + b)^{m_2},\\
z &= C(\rho + c)^m (\rho_1 + c)^{m_1} (\rho_2 + c)^{m_2},\\
t &= D(\rho + d)^m (\rho_1 + d)^{m_1} (\rho_2 + d)^{m_2}
\end{aligned}\right.$$

définissent un système à lignes conjuguées.

Il est remarquable qu'on puisse déterminer généralement les lignes asymptotiques de toutes les surfaces du système. En formant, en effet, par les procédés connus l'équation des lignes asymptotiques, par exemple, de la surface $\rho_2 =$ const., on trouve

$$\frac{m(m-1)\,d\rho^2}{(\rho+a)(\rho+b)(\rho+c)(\rho+d)} = \frac{m_1(m_1-1)\,d\rho_1^2}{(\rho_1+a)(\rho_1+b)(\rho_1+c)(\rho_1+d)},$$

équation où les variables sont séparées.

Dans le cas particulier où l'on a

$$m = m_1 = m_2 = \frac{1}{p},$$

en prenant

$$f(u) = (u-a)(u-b)(u-c)(u-d),$$

$$A^p = \frac{1}{f'(a)}, \quad B^p = \frac{1}{f'(b)}, \quad \ldots,$$

on trouvera, pour l'équation du système triple,

$$\frac{x^p}{\lambda+a} + \frac{y^p}{\lambda+b} + \frac{z^p}{\lambda+c} + \frac{t^p}{\lambda+d} = 0,$$

où l'on doit prendre pour λ successivement les valeurs ρ, ρ_1, ρ_2. C'est la généralisation du système des surfaces du second degré.

On obtient d'autres séries de systèmes à lignes conjuguées, en faisant, dans les formules (38),

$$r = -\frac{\rho}{h}, \quad r_1 = -\frac{\rho_1}{h}, \quad r_2 = -\frac{\rho_2}{h},$$

h étant une constante. On obtient ainsi les équations simultanées

$$(40) \quad \begin{cases} (\rho_1 - \rho)\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\rho_1} + h\left(\dfrac{\partial u}{\partial\rho} - \dfrac{\partial u}{\partial\rho_1}\right) = 0, \\[2ex] (\rho_2 - \rho_1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} + h\left(\dfrac{\partial u}{\partial\rho_1} - \dfrac{\partial u}{\partial\rho_2}\right) = 0, \\[2ex] (\rho - \rho_2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\rho_2} + h\left(\dfrac{\partial u}{\partial\rho_2} - \dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) = 0, \end{cases}$$

qu'on peut intégrer complétement dans un grand nombre de cas, et qui se rencontrent dans l'étude de plusieurs problèmes.

On en aura d'abord une solution étendue, en prenant

$$u = \Sigma A_i(\rho + a_i)^{-h}(\rho_1 + a_i)^{-h}(\rho_2 + a_i)^{-h},$$

a_i, A_i étant des constantes, et la somme renfermant un nombre quelconque de termes.

L'opération

$$\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\rho_1} + \frac{\partial}{\partial\rho_2},$$

appliquée à une solution quelconque, donne encore une solution, car cette opération n'a aucun effet sur les coefficients.

L'opération

$$\frac{\partial^3}{\partial\rho\,\partial\rho_1\,\partial\rho_2}$$

donne le même système dans lequel h est changé en $h+1$. Si donc on sait l'intégrer pour une valeur de h, et que la dérivation précédente, appliquée à l'intégrale, ne donne pas un résultat nul, on saura l'intégrer pour $h+1$.

Réciproquement, si l'on en connaît l'intégrale pour une valeur de h, V, l'intégrale U pour $h-1$ sera définie par l'équation

$$V = \frac{\partial^3 U}{\partial\rho\,\partial\rho_1\,\partial\rho_2},$$

qui, jointe à celles qui constituent le système, fera connaître U.

Si donc on connaît l'intégrale pour h, on pourra la trouver pour $h \pm n$, n étant entier.

Prenons, par exemple, $h=1$, c'est-à-dire le système

$$(41)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k}(\rho_i-\rho_k) = \frac{\partial u}{\partial\rho_i} - \frac{\partial u}{\partial\rho_k}.$$

On trouve facilement son intégrale, qui est

$$(42)\qquad u = \frac{R}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)} + \frac{R_1}{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)} + \frac{R_2}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)},$$

où R_i dépend seulement de ρ_i, et par suite l'intégrale pour $h=n$, n étant entier positif, sera

$$u = \frac{\partial^{3n}}{\partial\rho^n\,\partial\rho_1^n\,\partial\rho_2^n}\left[\frac{R}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)} + \frac{R_1}{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)} + \frac{R_2}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}\right].$$

Il est, du reste, intéressant de remarquer que la voie précédente conduit à une nouvelle méthode de recherche des systèmes orthogonaux. Imaginons que l'on considère un système de trois équations de la forme de ceux que nous venons d'étudier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\rho_1} = a_1^0\,\frac{\partial u}{\partial\rho_1} + a_0^1\,\frac{\partial u}{\partial\rho_1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} = a_2^1\,\frac{\partial u}{\partial\rho_1} + a_1^2\,\frac{\partial u}{\partial\rho_2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\rho_2} = a_0^2\,\frac{\partial u}{\partial\rho} + a_2^0\,\frac{\partial u}{\partial\rho_2}.$$

Je dis que, pour obtenir un système orthogonal, il suffira de connaître quatre solutions de ce système, entre lesquelles on ait la relation

$$t = x^2 + y^2 + z^2.$$

En effet, exprimons que la valeur précédente de t satisfait à la première équation, en même temps que x, y, z. En éliminant les dérivées secondes de x, y, z, nous trouverons

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \rho_1} = 0.$$

En employant de même les autres équations, nous obtiendrons les relations analogues

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \cdots = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \cdots = 0;$$

donc les équations qui définissent x, y, z comme fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 font connaître un système orthogonal. Réciproquement, dans le cas des systèmes orthogonaux, $x^2 + y^2 + z^2$ sera une solution du système précédent, auquel satisfont x, y, z.

On peut généraliser beaucoup la remarque précédente. Considérons un système d'équations de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k} = a_k^i \frac{\partial u}{\partial \rho_k} + a_i^k \frac{\partial u}{\partial \rho_i} + b_{ik} u, \quad i, k = 0, 1, 2, \tag{43}$$

et supposons que l'on ait trouvé cinq solutions de ces équations, entre lesquelles il existe une relation homogène du second degré, à coefficients constants. Par des substitutions linéaires, à coefficients constants, on pourra ramener cette relation à la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0.$$

Alors $x_1, \ldots, x_5$, considérées comme les coordonnées pentasphériques d'un point, définissent un point de l'espace. Si l'on différentie cette équation successivement par rapport à ρ et à ρ_1, on trouvera, en tenant compte des équations (43),

$$\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \rho}\frac{\partial x_i}{\partial \rho_1} = 0.$$

Cette relation et les deux semblables que l'on obtiendra expriment que l'on a un système orthogonal.

Si l'on ne veut pas employer le système des coordonnées pentasphériques, on pourra remarquer qu'en ramenant la relation homogène entre les solutions à la forme

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - PT = 0,$$

les fonctions

$$x = \frac{X}{P}, \quad y = \frac{Y}{P}, \quad z = \frac{Z}{P}, \quad t = \frac{T}{P}$$

satisfont à des équations semblables à celles du système (43), mais privées du terme en u. Comme on a entre elles la relation

$$t = x^2 + y^2 + z^2,$$

nous voyons, en utilisant la remarque déjà faite précédemment, que, x, y, z étant considérées comme les coordonnées ordinaires d'un point, nous aurons un système orthogonal.

Nous aurons à faire usage de cette remarque; mais, dès à présent, nous pouvons en faire une application. Les fonctions

$$U = A\sqrt{(\rho + a)(\rho_1 + a)(\rho_2 + a)}$$

satisfont, quels que soient A et a, à des équations de la forme (40), où $h = -\frac{1}{2}$.

Si l'on pose

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_5),$$

les cinq fonctions

$$x_i = \frac{\sqrt{(\rho + a_i)(\rho_1 + a_i)(\rho_2 + a_i)}}{\sqrt{f'(a_i)}}$$

sont, d'après un théorème connu sur les fractions rationnelles, liées par l'équation identique

$$x_1^2 + \ldots + x_5^2 = 0.$$

Les formules précédentes définissent donc un système orthogonal. Les trois familles seront données par l'équation

$$\sum \frac{x_i^2}{\lambda + a_i} = 0, \tag{44}$$

où l'on remplacera λ par ρ, ρ_1, ρ_2. C'est le système formé de cyclides homofocales.

§ XVI. — *Indication de différents systèmes orthogonaux que l'on peut déduire d'un système orthogonal à n variables, supposé donné.*

En dehors de leurs applications à la Physique mathématique et à la Mécanique, les systèmes orthogonaux à n variables peuvent, comme je l'ai établi au tome LXIX des *Comptes rendus*, servir à la recherche des systèmes orthogonaux à trois variables. Depuis mes premières études, M. Lie a fait connaître aussi, dans les *Nachrichten* de Goettingue, de nouveaux moyens d'obtenir le même résultat. Je développerai d'abord mes premières recherches, et je ferai connaître ensuite d'autres résultats qui me paraissent nouveaux et différents de ceux de M. Lie.

Reprenons les formules qui donnent les dérivées des fonctions U. On en déduit

$$dU_k = -(\beta_{1k}U_1 + \ldots + \beta_{nk}U_n)\, d\rho_k + \Sigma_{k'}\beta_{kk'}U_{k'}d\rho_{k'}$$

ou, en supposant ρ_k constant,

$$dU_k = \Sigma_{k'}\beta_{kk'}U_{k'}d\rho_{k'}. \tag{45}$$

On déduit de cette formule, en y remplaçant U_k par $X_k^1, X_k^2, \ldots, X_k^n$, et faisant la somme des carrés,

$$(dX_k^1)^2 + (dX_k^2)^2 + \ldots + (dX_k^n)^2 = \Sigma_{k'}\beta_{kk'}^2 d\rho_{k'}^2. \tag{46}$$

Cette équation exprime que les n fonctions $X_k^1, \ldots, X_k^n$, considérées comme dépendant de $n-1$ variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{k-1}, \rho_{k+1}, \ldots, \rho_n$, forment un système orthogonal. Il est vrai que ces fonctions sont en nombre trop grand d'une unité, et qu'elles sont liées par la relation

$$(X_k^1)^2 + \ldots + (X_k^n)^2 = 1. \tag{47}$$

Mais il est facile de ramener ce système au type ordinaire. Pour nous rendre compte de l'opération analytique que nous allons exécuter, voyons quelle est la signification des résultats précédents dans le cas de $n = 3$.

Alors les quantités X_k^1, X_k^2, X_k^3 ou, avec les notations habituelles, X_k, Y_k, Z_k sont les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la surface ρ_k, ou, si l'on veut, les coordonnées du point de la sphère qui sert de représentation sphérique au point correspondant de la surface ρ_k. Notre résultat est donc la proposition connue que les représentations sphériques des lignes de courbure de chaque surface forment un système orthogonal. De ce système sphérique on peut déduire par l'inversion un système plan orthogonal, et l'on a ainsi, d'un système orthogonal à trois variables, déduit un nouveau système à deux variables. C'est une opération analogue que nous allons exécuter avec un nombre quelconque de variables.

A cet effet, posons

$$y_1 = \frac{X_k^1}{1 - X_k^n}, \quad \ldots, \quad y_{n-1} = \frac{X_k^{n-1}}{1 - X^k}. \tag{48}$$

En tenant compte de la relation (46), nous trouverons

$$dy_1^2 + \ldots + dy_{n-1}^2 = \frac{1}{(1 - X_k^n)^2}(\beta_{k1}^2 d\rho_1^2 + \ldots + \beta_{kn}^2 d\rho_n^2), \tag{49}$$

où le second membre est privé du terme en $d\rho_k$. C'est un système orthogonal ordinaire, les fonctions $y_1, \ldots, y_{n-1}$ dépendant de $\rho_1, \ldots, \rho_{k-1}, \rho_{k+1}, \ldots, \rho_n$, et n'étant liées par aucune relation. Les formules (48), (49) le définissent complétement. Ainsi, d'un système orthogonal à n variables, nous avons déduit un autre système à $n - 1$ variables.

Si l'on prend comme point de départ le système des coordonnées elliptiques, on obtiendra ainsi celui des cyclides homofocales. Si l'on emploie ce nouveau système, on obtiendra un nouveau système algébrique également à un nombre quelconque de variables, et l'on pourra répéter indéfiniment cette opération.

Mais on peut indiquer d'autres procédés plus généraux, conduisant au même résultat. Considérons $\rho_h, \rho_{h+1}, \rho_{h+2}, \ldots, \rho_n$ comme des constantes, et définissons n fonctions y par les formules

$$y_i = x_i + A_h X_h^i + A_{h+1} X_{h+1}^i + \ldots + A_n X_n^i, \tag{50}$$

dont le type général est

$$y = u + A_h U_h + \ldots + A_n U_n, \tag{51}$$

et qui dépendent, par conséquent, des n variables

$$\rho_1, \ldots, \rho_{h-1}; A_h, \ldots, A_n.$$

Si nous différentions l'équation (51), nous aurons

$$dy = du + A_h dU_h + \ldots + A_n dU_n + U_h dA_h + \ldots + U_n dA_n,$$

et, en substituant à du, dU_h leurs valeurs,

$$\begin{aligned} dy = {} & U_1 (H_1 + A_h \beta_{h1} + \ldots + A_n \beta_{n1}) d\rho_1 + \ldots \\ & + U_{h-1} (H_{h-1} + A_h \beta_{h,h-1} + \ldots + A_n \beta_{n,h-1}) d\rho_{h-1} + U_h dA_h + \ldots + U_n dA_n. \end{aligned}$$

Remplaçons u, U_i par les n systèmes de valeurs x_k, X_i^k et faisons la somme des carrés des équations ainsi obtenues. Nous trouverons

$$dy_1^2 + \ldots + dy_n^2 = \sum_{k=1}^{k=h-1} d\rho_k^2 (H_k + A_h \beta_{hk} + \ldots + A_n \beta_{nk})^2 + dA_h^2 + \ldots + dA_n^2, \tag{52}$$

et cette formule, ne contenant que les carrés des différentielles, nous montre que $y_1, \ldots, y_n$, considérés comme fonctions de $\rho_1, \ldots, \rho_{h-1}$, $A_h, \ldots, A_n$, constituent un système orthogonal.

Dans le cas de $n = 3$, la signification géométrique des systèmes ainsi obtenus est des plus simples. Le premier, celui où l'on ne prend qu'une fonction A, est formé des surfaces parallèles à l'une des surfaces du système proposé; le second, celui où l'on prend deux fonctions A, est formé des plans normaux à la courbe d'intersection de deux surfaces du système et de deux familles de développables orthogonales à ces plans, que l'on déterminera facilement.

Revenons au cas général. Les formules (50), (51), (52) conviennent à un système orthogonal à n variables. Mais on peut, de bien des manières, diminuer le nombre de ces variables. Supposons, par exemple, qu'on établisse les relations

$$A_h = y_h, \quad \ldots, \quad A_n = y_n,$$

qui déterminent $A_h, \ldots, A_n$ en fonction de $\rho_1, \ldots, \rho_{h-1}$. La formule (52) deviendra

$$(53) \qquad dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_{h-1}^2 = \sum_{k=1}^{k=h-1} (H_k + A_h\beta_{hk} + \ldots + A_n\beta_{nk})^2 d\rho_k,$$

et elle montre que les fonctions $y_1, \ldots, y_{h-1}$ forment un système orthogonal à $h-1$ variables seulement.

Nous allons faire une application des plus simples. Supposons que, pour $n = 3$, on ait constitué un système triple comprenant une famille de surfaces parallèles, on aura

$$(53) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2;$$

ρ, dans cette formule, désigne la distance de chaque surface parallèle à l'une de ces surfaces prise pour origine, (Σ).

Si nous faisons $z = \rho$, ce sera prendre sur la normale à la surface (Σ) un point à égale distance de la surface (Σ) et du plan des xy. Ce point sera donc le centre d'une sphère (S) tangente à (Σ) et au plan des xy. D'ailleurs les coordonnées du point de contact de cette sphère (S) et du plan des xy sont évidemment x, y, et l'on aura, d'après la formule (53),

$$dx^2 + dy^2 = H_1 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2,$$

d'où résulte ce curieux théorème :

Si l'on mène des sphères tangentes à une surface fixe et à un plan, on établira ainsi une correspondance entre les points du plan et ceux de la surface, qui sont les points de contact de la même sphère. Aux lignes de courbure de la surface correspondront sur le plan deux systèmes de lignes orthogonales.

En transformant par l'inversion, on obtient la proposition qui suit, et qu'il serait facile d'établir directement :

Si l'on mène des sphères tangentes à une surface fixe (Σ) *et à une* *sphère fixe* (S), *on établit une correspondance entre les points de la surface et ceux de la sphère. Aux lignes de courbure de la surface correspondent sur la sphère deux systèmes de lignes orthogonales.*

Si l'on suppose que le rayon de la sphère augmente indéfiniment, on retrouve le mode ordinaire de représentation sphérique des surfaces.

Pour terminer ce qui se rapporte à l'emploi des systèmes orthogonaux à n variables, nous remarquerons que, si l'on considère trois quelconques des fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un système comme dépendant uniquement de trois des variables ρ, de ρ_1, ρ_2, ρ_3 par exemple, elles satisfont à des équations de la forme (32), et par conséquent donnent un système à trois dimensions, dans lequel les surfaces se coupent suivant des lignes conjuguées.

§ XVII. — *Application à la recherche d'un système triple orthogonal comprenant comme cas particulier les systèmes isothermes.*

Dans son Mémoire sur les systèmes orthogonaux isothermes (*Journal de Liouville*, t. IX, p. 317), M. Bertrand a fait connaître une belle propriété commune à tous ces systèmes. Chacune des surfaces qui le composent peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure. Mais la réciproque n'est pas vraie, et l'on connaît au moins un système, celui des cyclides homofocales, qui, sans être isotherme, jouit de la même propriété. Dans mon Mémoire de 1866, j'avais eu l'idée de chercher tous les systèmes orthogonaux, nécessairement plus généraux que les systèmes isothermes, pour lesquels toute surface de chacune des trois familles possède cette propriété, c'est-à-dire peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure. Il est facile de trouver quelle doit être dans ce cas l'expression de la distance de deux points infiniment voisins. Posons

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2;$$

sur la surface $\rho_2 =$ const. on trouve

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2,$$

et, pour que le réseau des lignes de courbure jouisse de la propriété indiquée, il faudra que l'on ait

$$\frac{H}{H_1} = \frac{f(\rho)}{f_1(\rho_1)};$$

mais, ρ_2 étant constant pour chaque surface, les expressions des fonctions f, f_1 peuvent contenir ρ_2, et l'on doit écrire

$$\frac{H}{H_1} = \frac{f(\rho, \rho_2)}{f_1(\rho_1, \rho_2)}.$$

Dans tout ce qui va suivre et tant que nous ne ferons pas la convention contraire, nous désignerons par une grande lettre affectée d'indice A_i une fonction ne contenant pas la variable ρ_i, et par une petite lettre affectée d'indice r_i une fonction de la seule variable ρ_i. L'indice zéro correspondant à la variable ρ sera supprimé. L'équation précédente pourra donc s'écrire

$$\frac{H}{H_1} = \frac{S_1}{S}.$$

On devra avoir de même, en considérant les deux autres familles,

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{H_2}{H} = \frac{U}{U_2}.$$

La multiplication des trois équations nous donne

$$\frac{S_1}{S}\frac{T_2}{T_1}\frac{U}{U_2} = 1.$$

Il est facile de voir que la solution la plus générale de cette équation est

$$\frac{U}{S} = \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{S_1}{T_1} = \frac{a_2}{a}, \quad \frac{T_2}{U_2} = \frac{a}{a_1}.$$

En profitant de l'indétermination des fonctions $U, \ldots, T_2$, qui n'entrent que par leurs rapports, on pourra prendre

$$T = U, \quad S_1 = T_1, \quad T_2 = U_2$$

et l'on sera ainsi conduit à la forme

$$H = \frac{S_1 S_2}{M}, \quad H_1 = \frac{SS_2}{M}, \quad H_2 = \frac{SS_1}{M},$$

où M sera une fonction inconnue des trois variables ρ, ρ_1, ρ_2. Pour la commodité des calculs, nous prendrons

$$(55)\qquad H = \frac{1}{M} e^{R_1+R_2}, \quad H_1 = \frac{1}{M} e^{R+R_2}, \quad H_2 = \frac{1}{M} e^{R+R_1},$$

R, R_1, R_2 étant des fonctions de même définition que S, S_1, S_2, c'est-à-dire ne contenant pas, chacune, la variable de même indice.

On est encore conduit à la recherche des mêmes systèmes orthogonaux, si l'on se propose une question intéressante que l'on peut énoncer comme il suit.

Le système des cyclides homofocales n'est pas isotherme; mais, dans un travail récent inséré au *Journal de M. Borchardt*, M. Wangerin a montré que l'on peut encore trouver, au moyen de ce système, une infinité de solutions de l'équation de la chaleur en prenant pour V une fonction de la forme

$$(56)\qquad V = N f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2),$$

où N est tout à fait déterminée, mais où les fonctions f, f_1, f_2 peuvent être choisies d'une infinité de manières. Cherchons tous les systèmes orthogonaux jouissant d'une propriété semblable. L'équation de la chaleur en coordonnées curvilignes est, comme on sait, de la forme

$$(57)\qquad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\alpha\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\beta\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\gamma\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right) = 0,$$

où l'on a posé

$$\alpha = \frac{H_1 H_2}{H}, \quad \beta = \frac{H H_2}{H_1}, \quad \gamma = \frac{H H_1}{H}.$$

Remplaçons, dans l'équation (57), V par Nu, et développons les calculs; nous aurons

$$N\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \left(2\alpha\frac{\partial N}{\partial\rho} + N\frac{\partial\alpha}{\partial\rho}\right)\frac{\partial u}{\partial\rho} + u\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\alpha\frac{\partial N}{\partial\rho}\right) + \ldots = 0,$$

les termes non écrits se déduisant, par des permutations circulaires, des précédents. Si l'on veut que V soit de la forme (56) ou u de la forme $f(\rho_1)$, $f_1(\rho)$, $f_2(\rho_2)$, on aura

$$\text{(58)}\qquad \mathrm{N}\alpha\frac{f''(\rho)}{f(\rho)} + \left(2\alpha\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial\rho} + \mathrm{N}\frac{\partial\alpha}{\partial\rho}\right)\frac{f'(\rho)}{f(\rho)} + \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\alpha\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial\rho}\right) + \ldots = 0.$$

Les fonctions f, f_1, f_2 doivent donc satisfaire à des équations linéaires. Par exemple, si, dans l'équation précédente, on donne à ρ_1, ρ_2 deux valeurs constantes quelconques, on trouvera pour f une équation de la forme

$$af'' + bf' + cf = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions quelconques de ρ.

Réciproquement, si l'on veut que, comme cela a lieu dans le cas des cyclides, les deux solutions d'une telle équation puissent être associées aux fonctions f_1, f_2 pour donner une intégrale de l'équation de la chaleur, il faudra que l'équation (58) soit identiquement vérifiée par l'emploi de trois équations de la forme précédente, l'une pour f, l'autre pour f_1, la troisième pour f_2,

$$\text{(59)}\qquad \begin{cases} f''(\rho) + \varphi(\rho)\, f'(\rho) + \psi(\rho)\, f = 0, \\ f''_1(\rho_1) + \varphi_1(\rho_1) f'(\rho_1) + \psi_1(\rho_1) f_1 = 0, \\ f''_2(\rho_2) + \varphi_2(\rho_2) f'(\rho_2) + \psi_2(\rho_2) f_2 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'en tirant des équations précédentes, où les fonctions φ, ψ seront convenablement choisies, les valeurs de f'', f''_1, f''_2, et les portant dans l'équation (58), celle-ci soit vérifiée, quelles que soient f', f, f'_1, f_1, f'_2, f_2. On obtient ainsi les équations

$$\text{(60)}\qquad \begin{cases} 2\alpha\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial\rho} + \mathrm{N}\dfrac{\partial\alpha}{\partial\rho} = \varphi(\rho)\mathrm{N}\alpha, \\ 2\beta\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial\rho_1} + \mathrm{N}\dfrac{\partial\beta}{\partial\rho_1} = \varphi_1(\rho_1)\mathrm{N}\beta, \\ 2\gamma\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial\rho_2} + \mathrm{N}\dfrac{\partial\gamma}{\partial\rho_2} = \varphi_2(\rho_2)\mathrm{N}\gamma, \\ -\mathrm{N}(\alpha\psi + \beta\psi_1 + \gamma\psi_2) + \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\alpha\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial\rho}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\beta\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial\rho_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\gamma\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial\rho_2}\right) = 0, \end{cases}$$

qui doivent être satisfaites en prenant pour les fonctions φ et ψ des valeurs convenables. La discussion se simplifiera beaucoup si l'on remarque que, les équations (59) étant linéaires, on peut, en remplaçant ρ, ρ_1, ρ_2 par des fonctions convenablement choisies, les ramener à une forme où les fonctions φ, φ_1, φ_2 seront nulles. Alors les trois premières équations (60) se réduiront aux suivantes :

$$\frac{\partial(\alpha^2 N)}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial(\beta^2 N)}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial(\gamma^2 N)}{\partial \rho_2} = 0,$$

ou, en intégrant,

$$\alpha^2 N = S, \quad \beta^2 N = S_1, \quad \gamma^2 N = S_2,$$

S_i ne dépendant pas de ρ_i; on a donc, en se rappelant la signification de α, β, γ,

$$H = \frac{\sqrt{S_1 S_2}}{N}, \quad H_1 = \frac{\sqrt{S S_2}}{N}, \quad H_2 = \frac{\sqrt{S S_1}}{N},$$

ce qui, aux notations près, est la même chose que les formules (55). La première condition à remplir, mais non la seule, est donc que les systèmes orthogonaux appartiennent à ceux que nous voulions déjà chercher. Il restera ensuite à voir si N peut satisfaire, en prenant convenablement ψ, ψ_1, ψ_2, à la dernière équation (60). Nous sommes ainsi ramenés à l'étude de la question que nous nous étions déjà proposée, en nous plaçant à un autre point de vue. Nous allons en reprendre la solution sans rien changer d'essentiel à la méthode suivie dans notre premier travail, mais en la complétant de manière à retrouver tous les systèmes orthogonaux appartenant à cette classe, même les plus simples, déjà connus, que nous avions d'abord négligés.

Nous avons ici, en reprenant les notations (55),

$$H = \frac{1}{M} e^{R_1 + R_2}, \quad H_1 = \frac{1}{M} e^{R + R_2}, \quad H_2 = \frac{1}{M} e^{R + R_1}.$$

Formons d'abord les fonctions β. Nous aurons

$$\beta_{01} = e^{R - R_1}\left(-\frac{x_0}{M} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho}\right), \quad \beta_{10} = e^{R_1 - R}\left(-\frac{x_1}{M} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}\right),$$

$$\beta_{12} = e^{R_1 - R_2}\left(-\frac{x_1}{M} + \frac{\partial R}{\partial \rho_1}\right), \quad \beta_{21} = e^{R_2 - R_1}\left(-\frac{x_2}{M} + \frac{\partial R}{\partial \rho_2}\right),$$

$$\beta_{20} = e^{R_2 - R}\left(-\frac{x_2}{M} + \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}\right), \quad \beta_{02} = e^{R - R_2}\left(-\frac{x_0}{M} + \frac{\partial R_1}{\partial \rho}\right).$$

Nous avons, pour abréger, désigné par x_0, x_1, x_2 les dérivées de M; nous adopterons une notation analogue pour les dérivées d'ordre supérieur.

Les fonctions β doivent satisfaire aux deux groupes d'équations

$$(61)\qquad \frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho_2} = \beta_{02}\beta_{21}, \quad \frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho} = \beta_{10}\beta_{02}, \quad \frac{\partial\beta_{20}}{\partial\rho_1} = \beta_{21}\beta_{10},$$

et

$$(62)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho} + \dfrac{\partial\beta_{10}}{\partial\rho_1} + \beta_{20}\beta_{21} = 0, \\ \dfrac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_1} + \dfrac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho_2} + \beta_{01}\beta_{02} = 0, \\ \dfrac{\partial\beta_{20}}{\partial\rho_2} + \dfrac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho} + \beta_{12}\beta_{12} = 0. \end{cases}$$

Exprimons d'abord qu'elles satisfont au système (61). On trouvera

$$(63)\qquad \begin{cases} x_{12} = x_2\dfrac{\partial R}{\partial\rho_1} + x_1\dfrac{\partial R}{\partial\rho_2} + MU, \\ x_{20} = x_2\dfrac{\partial R_1}{\partial\rho} + x_0\dfrac{\partial R_1}{\partial\rho_2} + MU_1, \\ x_{01} = x_0\dfrac{\partial R_2}{\partial\rho_1} + x_1\dfrac{\partial R_2}{\partial\rho} + MU_2, \end{cases}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1} - \frac{\partial R}{\partial\rho_1}\right)\left(\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2} - \frac{\partial R}{\partial\rho_2}\right) - \frac{\partial R}{\partial\rho_2}\frac{\partial R}{\partial\rho_1}, \\ U_1 &= \left(\frac{\partial R}{\partial\rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\right)\left(\frac{\partial R_2}{\partial\rho} - \frac{\partial R_1}{\partial\rho}\right) - \frac{\partial R_1}{\partial\rho}\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}, \\ U_2 &= \left(\frac{\partial R_1}{\partial\rho} - \frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial\rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\right) - \frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\frac{\partial R_2}{\partial\rho}. \end{aligned}$$

Pour que les équations (63) soient compatibles, il faut qu'en les différentiant elles donnent la même valeur pour

$$\frac{\partial^3 M}{\partial\rho\,\partial\rho_1\,\partial\rho_2} = x_{012}.$$

Or on trouve, en différentiant la première par rapport à ρ et remplaçant x_{20}, x_{10} par leurs valeurs déduites des deux autres,

$$x_{012} = x_0 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} + x_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_2}\frac{\partial R_2}{\partial \rho} + x_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_1}\frac{\partial R_1}{\partial \rho} + M\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + U_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_2}\right).$$

En opérant de même sur les autres équations, on trouvera des valeurs qui, évidemment, ne différeront de la précédente que par le coefficient de M. On doit donc avoir

$$(64)\quad \frac{\partial U}{\partial \rho} + U_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} = \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + U \frac{\partial R_1}{\partial \rho} = \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2} + U \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + U_1 \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}.$$

Or on a identiquement

$$U_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} = U_2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + U \frac{\partial R_1}{\partial \rho} = U \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + U_1 \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1},$$

comme il est facile de le vérifier. Il suit de là que les équations (64) se réduisent aux suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} = \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2},$$

et, comme un calcul direct donne l'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2} = 0,$$

il suit que les équations (64) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} = \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2} = 0.$$

Chacune des fonctions U_i ne doit donc pas dépendre de la variable de même indice. En désignant donc par K, K_1, K_2 trois fonctions de deux variables ne contenant pas la variable de même indice, on pourra donc toujours écrire

$$U = \frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1}\frac{\partial R}{\partial \rho_2},$$

et de même pour U_1, U_2. Nous mettons une dérivée seconde pour la facilité des calculs qui suivront. Nous aurons ainsi le système suivant :

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}-\frac{\partial R}{\partial \rho_1}\right)\left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}-\frac{\partial R}{\partial \rho_2}\right)=\frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2},\\ &\left(\frac{\partial R}{\partial \rho_2}-\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}\right)\left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho}-\frac{\partial R_1}{\partial \rho}\right)=\frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho\, \partial \rho_2},\\ &\left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho}-\frac{\partial R_2}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial \rho_1}-\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}\right)=\frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho\, \partial \rho_1},\end{aligned}\right.$$

qui devra être vérifié, en choisissant pour K, K_1, K_2 des fonctions convenables.

Quant aux équations qui déterminent M, elles seront compatibles si le système précédent est vérifié, et elles deviendront

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} &x_{12}=x_1\frac{\partial R}{\partial \rho_2}+x_2\frac{\partial R}{\partial \rho_1}+M\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}-\frac{\partial R}{\partial \rho_1}\frac{\partial R}{\partial \rho_2}\right),\\ &x_{20}=x_2\frac{\partial R_1}{\partial \rho}+x_0\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}+M\left(\frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho\, \partial \rho_2}-\frac{\partial R_1}{\partial \rho}\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}\right),\\ &x_{01}=x_0\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}+x_1\frac{\partial R_2}{\partial \rho}+M\left(\frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho\, \partial \rho_1}-\frac{\partial R_2}{\partial \rho}\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}\right).\end{aligned}\right.$$

Nous allons d'abord chercher la forme des fonctions R, R_1, R_2, qui peuvent satisfaire aux équations (65). Les équations étant différentiées par rapport à ρ, ρ_1, ρ_2 respectivement, on trouve

$$(67)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}-\frac{\partial R}{\partial \rho_1}\right)\frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho\, \partial \rho_2}+\left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}-\frac{\partial R}{\partial \rho_2}\right)\frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho\, \partial \rho_1}=0,\\ &\left(\frac{\partial R}{\partial \rho_2}-\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}\right)\frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho\, \partial \rho_1}+\left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho}-\frac{\partial R_1}{\partial \rho}\right)\frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}=0,\\ &\left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho}-\frac{\partial R_2}{\partial \rho}\right)\frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}+\left(\frac{\partial R}{\partial \rho_1}-\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}\right)\frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho\, \partial \rho_2}=0.\end{aligned}\right.$$

Supposons d'abord que l'un des binômes

$$\frac{\partial R_2}{\partial \rho}-\frac{\partial R_1}{\partial \rho},\quad \frac{\partial R}{\partial \rho_1}-\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1},\quad \frac{\partial R}{\partial \rho_2}-\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}$$

soit nul, que l'on ait, par exemple,

$$(68)\quad \frac{\partial (R_1-R_2)}{\partial \rho}=0,$$

ce qui donne, en différentiant,

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial\rho\,\partial\rho_2}=0,\quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial\rho\,\partial\rho_1}=0. \tag{69}$$

Alors les équations (67) sont satisfaites. Nous avons donc ainsi une première solution. On déduit facilement des équations précédentes

$$R_1 = a + a_2,\quad R_2 = a + a_1,$$

a_i ne dépendant que de ρ_i. Quant à R, comme il ne doit satisfaire à aucune condition, ce sera une fonction quelconque de ρ_1, ρ_2. Mais on peut simplifier cette première solution.

En effet, reportons-nous aux formules (55), qui donnent les expressions de H, H_1, H_2. Si l'on remplace ρ, ρ_1, ρ_2 par des fonctions quelconques de trois nouveaux paramètres ρ', ρ'_1, ρ'_2, dont les différentielles soient $e^{\alpha}d\rho'$, $e^{\alpha_1}d\rho'_1$, $e^{\alpha_2}d\rho'_2$, et M par $M'e^{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha}$, les expressions de H, H_1, H_2 deviendront

$$H' = \frac{1}{M'}\,e^{R_1+R_2+2\alpha+\alpha_1+\alpha_2},$$

$$H'_1 = \frac{1}{M'}\,e^{R+R_2+2\alpha_1+\alpha+\alpha_2},$$

$$H'_2 = \frac{1}{M'}\,e^{R+R_1+2\alpha_2+\alpha+\alpha_1},$$

et l'on voit que, sans diminuer la généralité du système cherché, on peut toujours remplacer les fonctions R, R_1, R_2 par les suivantes :

$$R+\alpha_1+\alpha_2,\quad R_1+\alpha+\alpha_2,\quad R_2+\alpha+\alpha_1,$$

où α, α_1, α_2 désignent trois fonctions quelconques de ρ, ρ_1, ρ_2.

Appliquons cette remarque à notre première solution. Nous voyons que R_1, R_2 pourront être ramenées à la forme

$$R_1 = 0,\quad R_2 = 0. \tag{70}$$

Tel est le type de notre première solution.

Supposons, en second lieu que, aucun des binômes $\frac{\partial(R_1-R_2)}{\partial\rho}$ n'étant nul, car, sans cela, on retomberait sur la solution précédente, une des trois quantités

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\rho_1 \partial\rho_2}, \quad \frac{\partial^2 R_1}{\partial\rho \partial\rho_2}, \quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial\rho \partial\rho_1}$$

soit nulle. En vertu des équations (67), les deux autres devront être nulles, et l'on aura

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\rho_1 \partial\rho_2} = \frac{\partial^2 R_1}{\partial\rho \partial\rho_2} = \frac{\partial^2 R_2}{\partial\rho \partial\rho_1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$R = a_1 + a_2, \quad R_1 = b + b_2, \quad R_2 = c + c_1.$$

En introduisant les trois fonctions arbitraires α, on pourra donner à cette solution la forme

$$(71) \qquad R = \alpha_1 - \alpha_2, \quad R_1 = \alpha_2 - \alpha, \quad R_2 = \alpha - \alpha_1.$$

En dehors de ces deux solutions exceptionnelles, il en existe pour lesquelles aucune des quantités

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\rho_1 \partial\rho_2}, \quad \frac{\partial R}{\partial\rho_1} - \frac{\partial R}{\partial\rho_2}$$

n'est nulle. Alors la comparaison des équations (65), (67) nous donnera

$$\frac{\dfrac{\partial^2 K}{\partial\rho_1 \partial\rho_2}}{\dfrac{\partial^2 R}{\partial\rho_1 \partial\rho_2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 K_1}{\partial\rho \partial\rho_2}}{\dfrac{\partial^2 R_1}{\partial\rho \partial\rho_2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 K_2}{\partial\rho \partial\rho_1}}{\dfrac{\partial^2 R_2}{\partial\rho \partial\rho_1}}.$$

La valeur commune de ces trois rapports, le premier ne dépendant pas de ρ, le deuxième de ρ_1 et le troisième de ρ_2, ne peut être qu'une constante h. Si l'on en déduit les valeurs des dérivées des fonctions K, et qu'on les porte dans les équations (65), on aura

$$(72) \qquad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1} - \frac{\partial R}{\partial\rho_1}\right)\left(\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2} - \frac{\partial R}{\partial\rho_2}\right) &= h \frac{\partial^2 R}{\partial\rho_1 \partial\rho_2}, \\ \left(\frac{\partial R}{\partial\rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\right)\left(\frac{\partial R_2}{\partial\rho} - \frac{\partial R_1}{\partial\rho}\right) &= h \frac{\partial^2 R_1}{\partial\rho \partial\rho_2}, \\ \left(\frac{\partial R_1}{\partial\rho} - \frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial\rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\right) &= h \frac{\partial^2 R_2}{\partial\rho \partial\rho_1}. \end{aligned} \right.$$

Chacune de ces équations s'intègre sans difficulté. La première, par exemple, donne

$$R - R_1 - R_2 = - h \log(S_1 + S_2),$$

S_1, S_2 étant des fonctions de même définition que R_1, R_2; R ne contenant pas ρ, on peut donner à ρ une valeur constante qui transforme R_1, S_1 en des fonctions de ρ_2; R_2, S_2 en des fonctions de ρ_1. On a donc, pour l'expression générale de R,

$$R = \alpha_1 + \alpha_2 - h \log(a_1 - a_2), \tag{73}$$

α_i, a_i dépendant seulement de ρ_i.

Cela posé, prenons la première des équations (72), et posons

$$S = - h \log(a_1 - a_2),$$
$$R = \alpha_1 + \alpha_2 + S, \quad R_1 = \alpha_2 + S_1, \quad R_2 = \alpha_1 + S_2.$$

Nous avons étudié à part le cas où

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \, \partial \rho_2} = \frac{\partial^2 S_1}{\partial \rho \, \partial \rho_2}$$

est nul; nous pouvons donc supposer que les dérivées $\frac{\partial S_2}{\partial \rho_1}$, $\frac{\partial S_1}{\partial \rho_2}$ ne sont pas nulles, et la première des équations (72) pourra être écrite

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial \rho_1}}{\frac{\partial S_2}{\partial \rho_1}} + \frac{\frac{\partial S}{\partial \rho_2}}{\frac{\partial S_1}{\partial \rho_2}} = 1$$

ou

$$\frac{h a'_1}{\frac{\partial S_2}{\partial \rho_1}} + a_1 = \frac{h a'_2}{\frac{\partial S_1}{\partial \rho_2}} + a_2.$$

Les deux membres de l'équation précédente sont indépendants, l'un de ρ_1, l'autre de ρ_2. Ils sont donc égaux à une même fonction de ρ, a. On a donc

$$\frac{\partial S_2}{\partial \rho_1} = \frac{h a'_1}{a - a_1}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \rho_2} = \frac{h a'_2}{a - a_2},$$

ce qui donne, en intégrant,

$$S_1 = \beta - h \log(a_2 - a),$$
$$S_2 = \alpha - h \log(a - a_1),$$

β, α dépendant seulement de ρ, et par suite

$$R_2 = \alpha_1 + \alpha - h\log(a - a_1),$$
$$R_1 = \beta + \alpha_2 - h\log(a_2 - a).$$

En substituant ces valeurs, ainsi que celles de R, dans les formules (72), on trouve

$$\beta' - \alpha' = 0.$$

On peut supposer $\beta = \alpha$, sans restreindre la généralité, et l'on obtient la forme définitive de la troisième solution

$$(74) \quad \begin{cases} R = \alpha_1 + \alpha_2 - h\log(a_1 - a_2), \\ R_1 = \alpha + \alpha_2 - h\log(a_2 - a), \\ R_2 = \alpha + \alpha_1 - h\log(a - a_1), \end{cases}$$

aucune des trois fonctions a, a_1, a_2 ne pouvant se réduire à une constante; car, sans cela, une des trois quantités

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}, \quad \frac{\partial^2 R_1}{\partial\rho\,\partial\rho_2}, \quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial\rho\,\partial\rho_1}$$

serait nulle, et nous retrouverions une des solutions déjà mises à part.

En résumé, nous avons les trois types de solutions (70), (71), (74). Nous allons les examiner successivement. Mais auparavant indiquons, d'une manière précise, le point où nous sommes parvenus.

La fonction M devra satisfaire aux trois équations (66) qui seront compatibles; mais il nous reste à exprimer que les fonctions β satisfont au système

$$(75) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho} + \dfrac{\partial\beta_{10}}{\partial\rho_1} + \beta_{20}\beta_{21} = 0, \\ \dfrac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_1} + \dfrac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho_2} + \beta_{10}\beta_{21} = 0, \\ \dfrac{\partial\beta_{20}}{\partial\rho_2} + \dfrac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho} + \beta_{10}\beta_{12} = 0, \end{cases}$$

ce qui va donner trois nouvelles équations aux dérivées partielles pour la fonction M. Or ces nouvelles équations ne contiennent que les dérivées secondes x_{00}, x_{11}, x_{22} de M, et il est aisé de les résoudre par rapport à ces dérivées. On trouve ainsi

$$
(76)\quad \left\{
\begin{aligned}
& e^{2R}\left[-\frac{2x_{00}}{M}+\frac{x_0^2}{M^2}+\frac{2x_0}{M}\left(\frac{\partial R_1}{\partial\rho}+\frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right)-3\,\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\,\frac{\partial R_2}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 R_1}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 R_2}{\partial\rho^2}\right]\\
&+e^{2R_1}\left[\left(\frac{x_1}{M}-\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\right)^2+\frac{\partial^2 R_2}{\partial\rho_1^2}-\frac{\partial^2 R}{\partial\rho_1^2}+\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\left(\frac{\partial R}{\partial\rho_1}-\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\right)\right]\\
&+e^{2R_2}\left[\left(\frac{x_2}{M}-\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\right)^2+\frac{\partial^2 R_1}{\partial\rho_2^2}-\frac{\partial^2 R}{\partial\rho_2^2}+\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\left(\frac{\partial R}{\partial\rho_2}-\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\right)\right]=0,
\end{aligned}\right.
$$

et les deux autres équations que l'on obtiendrait en effectuant les permutations des indices 0, 1, 2.

Ces nouvelles équations ne sont pas nécessairement compatibles avec les équations (66). Cherchons d'abord quel est le degré de généralité de la solution commune qu'elles doivent avoir.

S'il existe un système orthogonal répondant à la question, ses transformés par inversion donneront aussi des solutions dans lesquelles M sera remplacé par

$$kM[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2],$$

x, y, z étant les coordonnées rectilignes et a, b, c, k quatre constantes. Il faut donc que la solution commune des équations (66), (76) contienne au moins quatre constantes, c'est-à-dire qu'on puisse prendre arbitrairement la fonction M et ses dérivées premières pour un système donné de valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2 : or, comme ces équations déterminent toutes les dérivées secondes, on voit qu'elles ne peuvent pas admettre une solution plus générale. En différentiant les équations, on en déduira deux ou trois valeurs pour les dérivées troisièmes de M; il faudra que ces valeurs d'une même dérivée soient égales, quels que soient x_0, x_1, x_2, c'est-à-dire qu'elles soient les mêmes, terme pour terme.

On a déjà exprimé, en étudiant le système (66), que les trois valeurs déduites pour x_{012} en différentiant ces équations sont égales; il resterait à exprimer que les deux valeurs que l'on obtient pour x_{001}, soit en différentiant par rapport à ρ la troisième équation (66), soit en différentiant par rapport à ρ_1 la première (76), sont égales terme à terme. Cela fait, les six équations auraient une solution commune avec quatre constantes arbitraires. Les différentiations poussées à un ordre quelconque ne donneraient jamais qu'une valeur pour chaque dérivée.

Le calcul indiqué n'est pas impraticable, mais on peut l'abréger beaucoup et le faire sous une autre forme, en remarquant que les six équations (66), (76) offrent des combinaisons intégrables.

Considérons en effet les deux équations

$$\frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} + \beta_{20}\beta_{21} = 0,$$

$$\frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2} + \beta_{12}\beta_{10} = 0$$

du groupe (75) et multiplions-les respectivement par $\beta_{10}\,d\rho_1$, $\beta_{20}\,d\rho_2$. En vertu des équations (61), elles pourront s'écrire

$$\beta_{10}\frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1}\,d\rho_1 + \beta_{20}\frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_1}\,d\rho_1 + \beta_{10}\frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho}\,d\rho_1 = 0,$$

$$\beta_{20}\frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2}\,d\rho_2 + \beta_{10}\frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_2}\,d\rho_2 + \beta_{20}\frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho}\,d\rho_2 = 0.$$

En les ajoutant et supposant constante la variable ρ, on trouve

$$(78) \qquad d\,\frac{\beta_{10}^2 + \beta_{20}^2}{2} + \beta_{10}\frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho}\,d\rho_1 + \beta_{20}\frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho}\,d\rho_2 = 0.$$

Or on a identiquement

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\beta_{10}\frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\beta_{20}\frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho}\right),$$

et par conséquent, en regardant toujours ρ comme une constante, la différentielle

$$\beta_{10}\frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho}\,d\rho_1 + \beta_{20}\frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho}\,d\rho_2$$

peut être exactement intégrée. On trouve en effet

$$\beta_{10}\frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{x_0}{\mathrm{M}} - \frac{\partial \mathrm{K}_2}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^3}{\partial \rho^2 \partial \rho_1}(\mathrm{K}_2 - \log \mathrm{M}) - \frac{\partial}{\partial \rho_1}\frac{\left(\frac{x_0}{\mathrm{M}} - \frac{\partial \mathrm{R}_2}{\partial \rho_1}\right)^2}{2},$$

et, en intégrant,

$$\int \beta_{10} \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} \partial \rho_1 = \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \left(\frac{x_0}{M} - \frac{\partial K_2}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (K_2 - \log M)$$
$$- \frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{M} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right)^2 - L_1 + \frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho^2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial K_1}{\partial \rho},$$

L_1 désignant une fonction ne dépendant pas de ρ_1, et les deux termes qui suivent et qui ne contiennent pas ρ_1 étant ajoutés pour la symétrie des calculs. On aura de même

$$\int \beta_{20} \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho} d\rho_2 = \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \left(\frac{x_0}{M} - \frac{\partial K_1}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (K_1 - \log M)$$
$$- \frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{M} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right)^2 - L_2 + \frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho^2} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \frac{\partial K_2}{\partial \rho},$$

L_2 ne contenant pas ρ_2. Les deux fonctions L_1, L_2 doivent être telles que ces intégrales soient égales, ce qui donne, en retranchant,

$$(79) \qquad L_1 - L_2 = \frac{\partial (R_2 - R_1)}{\partial \rho} \left(\frac{\partial K_1}{\partial \rho} + \frac{\partial K_2}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right).$$

Il est facile de voir que la dérivée seconde du second membre par rapport à ρ_1, ρ_2 est nulle comme celle du premier. Le second membre est donc de la forme

$$A_1 - A_2,$$

A_i ne contenant pas ρ_i, et l'on a

$$L_1 = A_1 + f(\rho),$$
$$L_2 = A_2 + f(\rho),$$

ce qui détermine L_1, L_2 à une fonction près de ρ.

En substituant, dans l'équation (78), la valeur de l'intégrale, on trouve

$$(80) \left\{ \begin{aligned} & e^{2R} \left[\frac{2x_{00}}{M} - \frac{x_0^2}{M^2} - 2 \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right) \frac{x_0}{M} + 2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial K_2}{\partial \rho} \right. \\ & \qquad \left. - 2 \frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho^2} + \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right)^2 + 2 L_1 - 2 \frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial K_1}{\partial \rho} \right] \\ & \qquad\qquad - e^{2R_1} \left(\frac{x_1}{M} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right)^2 - e^{2R_2} \left(\frac{x_2}{M} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right)^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui donne une nouvelle équation aux dérivées partielles, à laquelle satisfait la fonction M. Si l'on compare cette équation à la formule (76) et qu'on élimine entre elles x_{00}, toutes les dérivées premières disparaissent aussi, et il reste l'équation de condition

$$\left\{\begin{aligned} & e^{2R}\left[2\frac{\partial^2 K_1}{\partial\rho^2}+2\frac{\partial^2 K_2}{\partial\rho^2}-2L_1-\left(\frac{\partial R_2}{\partial\rho}\right)^2-2\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\frac{\partial(K_1+K_2)}{\partial\rho}+3\frac{\partial R_1}{\partial\rho}\frac{\partial R_2}{\partial\rho}-\frac{\partial^2 R_1}{\partial\rho^2}-\frac{\partial^2 R_2}{\partial\rho^2}\right] \\ & \quad +e^{2R_1}\left[\frac{\partial^2(R-R_2)}{\partial\rho_1^2}-\frac{\partial R_2}{\partial\rho_1}\frac{\partial(R-R_2)}{\partial\rho_1}\right]+e^{2R_2}\left[\frac{\partial^2(R-R_1)}{\partial\rho_2^2}-\frac{\partial R_1}{\partial\rho_2}\frac{\partial(R-R_1)}{\partial\rho_2}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Cette formule, où L_1 est défini par l'équation (79), donne une condition nouvelle à laquelle doivent satisfaire les fonctions R, R_1, R_2. En permutant les indices dans les formules (79), (81), on aurait deux autres équations entre les mêmes fonctions.

Maintenant toute difficulté relative à la fonction M a disparu. Il faudra d'abord trouver les fonctions R, R_1, R_2 pouvant vérifier l'équation (81) et les deux équations semblables. Cela fait, il ne restera plus qu'à intégrer les six équations simultanées toujours compatibles auxquelles satisfait M.

Appliquons ces remarques à l'étude de nos trois solutions (70), (71), (74). Pour la première, on a

$$R_1=R_2=0,\quad H=\frac{1}{M},\quad H_1=\frac{e^R}{M},\quad H_2=\frac{e^R}{M},$$

c'est-à-dire

$$ds^2=\frac{1}{M^2}\left[d\rho^2+e^{2R}(d\rho_1^2+d\rho_2^2)\right].$$

La forme même de cette dernière expression nous apprend tout de suite que les surfaces $\rho=$ const. sont des sphères ou des plans; car on peut, en changeant les variables ρ_1, ρ_2 en d'autres ρ'_1, ρ'_2, obtenir, et d'une infinité de manières,

$$d\rho_1^2+d\rho_2^2=\lambda(d\rho_1'^2+d\rho_2'^2),$$

et, par conséquent, les surfaces ρ, ayant une infinité de lignes de courbure, sont des sphères ou des plans. On voit même que les autres surfaces les coupent suivant des lignes isothermes.

Ici l'on a

$$R_1=R_2=K_1=K_2=0.$$

L'équation (79) devient

$$L_1-L_2=0$$

et donne

$$L_1 = f(\rho).$$

La formule (81) devient

$$-2f(\rho)e^{2R} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} = 0,$$

et, comme R ne contient pas ρ, il faut que $f(\rho)$ soit une constante, ce qui donne

$$(82) \qquad C e^{2R} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} = 0.$$

Cette équation nous apprend que la formule

$$ds^2 = e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

convient à une surface de courbure constante et égale à C. Supposons d'abord $C = 0$; alors, en remplaçant ρ_1, ρ_2 par des fonctions nouvelles de ces variables, on pourra toujours ramener

$$e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

à la forme

$$d\rho_1'^2 + d\rho_2'^2,$$

et nous aurons, pour le système orthogonal cherché,

$$ds^2 = \frac{1}{M^2}(d\rho^2 + d\rho_1'^2 + d\rho_2'^2).$$

Or nous savons que cette forme ne peut convenir qu'au système formé de trois familles de plans rectangulaires et à ses transformés par inversion. Si l'on tient compte de la substitution opérée sur ρ_1, ρ_2, on voit que ce premier cas nous donne *les systèmes formés d'une famille de plans parallèles, de deux familles de cylindres isothermes et les systèmes qui en sont les transformés par inversion.*

Traitons maintenant le cas où la constante C est positive et égale à a^2. Alors on pourra ramener

$$e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

à la forme

$$a^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2),$$

ce qui donnera, pour le système orthogonal cherché,

$$ds^2 = \frac{1}{M^2}(d\rho^2 + a^2 \sin\theta\, d\varphi^2 + a^2 d\theta^2),$$

ou, en remplaçant ρ par $a \log \rho$,

$$ds^2 = \frac{1}{N^2}[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin\theta\, d\varphi^2)].$$

Si l'on tient compte de la substitution opérée sur ρ_1, ρ_2, on voit que cette nouvelle solution donne *les systèmes formés d'une famille de sphères concentriques, de deux familles de cônes isothermes et leurs transformés par inversion.*

Enfin supposons la constante C négative et égale à $-a^2$; on pourra ramener

$$e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

à la forme

$$a^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

et, en remplaçant ρ par $a\omega$, on aura, pour le système orthogonal,

$$ds^2 = \frac{1}{M^2}(y^2 d\omega^2 + dx^2 + dy^2).$$

Cette forme convient aux systèmes formés d'une famille ($x =$ const.) de plans parallèles, d'une famille ($\omega =$ const.) de plans passant par une droite, d'une famille ($y =$ const.) de cylindres de révolution ayant cette droite pour axe, et à leurs transformés par inversion. En tenant compte du changement des variables ρ_1, ρ_2, on voit que nous avons ici *tous les systèmes formés d'une famille de plans passant par une droite et de deux familles de surfaces de révolution ayant cette droite pour axe et dont les méridiens forment un système orthogonal isotherme, ainsi que leurs transformés par inversion.*

Étudions maintenant la deuxième solution, pour laquelle on a

$$R = a_1 - a_2, \quad R_1 = a_2 - a, \quad R_2 = a - a_1.$$

On trouve ici

$$K = -4a_1a_2, \quad K_1 = -4aa_2, \quad K_2 = -4aa_1, \quad L_1 - L_2 = -8a'^2(a_1 + a_2),$$

a' désignant la dérivée de a, et, par conséquent,

$$L_1 = -8a'^2 a_2 + f(\rho).$$

L'équation (81) à vérifier devient ici

$$\begin{aligned} &-4(a''+a'^2)(a_1+a_2)+8a'^2a_2+f_1(\rho)\\ &\quad+e^{4a_2-2a-2a_1}(a''_1+a'^2_1)+e^{2a+2a_2-4a_1}(a'^2_2-a''_2)=0. \end{aligned}$$

Si l'on prend la dérivée seconde par rapport à ρ_1, ρ_2, on trouve

$$e^{-2a}\frac{d}{d\rho_2}e^{4a_2}\frac{d}{d\rho_1}e^{-2a_1}(a''_1+a'^2_1)+e^{2a}\frac{d}{d\rho_1}e^{-4a_1}\frac{d}{d\rho_2}e^{2a_2}(a'^2_2-a''_2)=0.$$

Les fonctions a, a_1, a_2 ne peuvent être des constantes, sans quoi on retomberait sur la première solution. L'équation précédente ne peut donc être vérifiée que si l'on a

$$e^{-2a_1}(a''_1+a'^2_1)=C,\quad e^{2a_2}(a'^2_2-a''_2)=C',$$

C, C' étant des constantes. L'équation à vérifier prend donc la forme

$$-4(a''+a'^2)a_1-4(a''-a'^2)a_2+f_1(\rho)+Ce^{4a_2-2a}+C'e^{2a-4a_1}=0.$$

Prenons les deux dérivées du premier membre par rapport à ρ_1 et à ρ_2, nous trouverons

$$\begin{aligned} &-4(a''+a'^2)-4C'e^{2a-4a_1}=0,\\ &-4(a''-a'^2)+4Ce^{4a_2-2a}=0, \end{aligned}$$

équations auxquelles il est impossible de satisfaire; donc la seconde hypothèse ne conduit à rien.

Il nous reste maintenant à étudier la troisième solution (74), et comme, dans les formules qui la définissent, a, a_1, a_2 ne sont jamais des constantes, mais des fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2, nous les prendrons pour les valeurs mêmes de ces paramètres, et nous écrirons, en changeant les notations,

$$(83)\qquad \left\{\begin{aligned} R&=-\tfrac{1}{2}\log a_1-\tfrac{1}{2}\log a_2-h\log(\rho_1-\rho_2),\\ R_1&=-\tfrac{1}{2}\log a_2-\tfrac{1}{2}\log a-h\log(\rho_2-\rho),\\ R_2&=-\tfrac{1}{2}\log a-\tfrac{1}{2}\log a_1-h\log(\rho-\rho_1). \end{aligned}\right.$$

En modifiant un peu la fonction M, et la remplaçant par

$$(84)\qquad \frac{M}{\sqrt{a_1aa_2}},$$

il en résultera, pour H, H_1, H_2, les expressions suivantes :

$$(85)\qquad \left\{\begin{aligned} H &= \frac{(\rho_1-\rho)^{-h}(\rho-\rho_2)^{-h}}{M\sqrt{a}},\\ H_1 &= \frac{(\rho_2-\rho_1)^{-h}(\rho_1-\rho)^{-h}}{M\sqrt{a_1}},\\ H_2 &= \frac{(\rho_1-\rho_2)^{-h}(\rho_2-\rho_1)^{-h}}{M\sqrt{a_2}},\end{aligned}\right.$$

et les équations (66), auxquelles doit satisfaire M, deviendront, en tenant compte de la modification (84) pour M,

$$(86)\qquad \left\{\begin{aligned} &x_{01}(\rho_1-\rho) + h(x_0-x_1) = 0,\\ &x_{12}(\rho_2-\rho_1) + h(x_1-x_2) = 0,\\ &x_{20}(\rho-\rho_2) + h(x_2-x_0) = 0.\end{aligned}\right.$$

Il nous reste à exprimer que R, R_1, R_2 vérifient l'équation (81). Cette équation devient ici

$$(87)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{a}{(\rho_2-\rho_1)^{2h}}\left[F(\rho) + \frac{2h^3-3h^2}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)} - \frac{a'}{2a}(2h^2-h)\left(\frac{1}{\rho_2-\rho}+\frac{1}{\rho_1-\rho}\right) + \frac{h-h^2}{(\rho_1-\rho)^2} + \frac{h-h^2}{(\rho_2-\rho)^2}\right]\\ &+\frac{a_1}{(\rho-\rho_2)^{2h}}\left[-\frac{ha'_1}{2a_1}\frac{\rho_2-\rho}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_1-\rho)} - \frac{h}{(\rho_1-\rho_2)^2} + \frac{h-h^2}{(\rho_1-\rho)^2} + \frac{h^2}{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}\right]\\ &+\frac{a_2}{(\rho_1-\rho)^{2h}}\left[-\frac{ha'_2}{2a_2}\frac{\rho_1-\rho}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho)} - \frac{h}{(\rho_1-\rho_2)^2} + \frac{h-h^2}{(\rho_2-\rho)^2} + \frac{h^2}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}\right] =\end{aligned}\right.$$

On a réuni dans $F(\rho)$, à la fonction inconnue de ρ, tous les termes qui ne dépendent que de ρ. On aurait, en permutant les indices, deux équations semblables.

Voyons comment on pourra satisfaire à l'équation (87). Remplaçons-y ρ_1, ρ_2 par les expressions

$$\rho_2 = \rho + u, \quad \rho_1 = \rho + \alpha u,$$

et multiplions par u^{2h+2}. Elle deviendra

$$\frac{a(\rho)}{(1-\alpha)^{2h}}\left[F(\rho)u^2 + \frac{2h^3-3h^2}{\alpha} - \frac{a'u}{2a}(2h^2-h)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) + (h-h^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]$$

Si maintenant nous faisons $u = 0$, ρ_1, ρ_2 deviendront égaux à u, quel que soit α, et l'équation précédente se réduira à la suivante :

$$(88)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{a(\rho)}{(1-\alpha)^{h}}\left[\frac{2h^3-3h^2}{\alpha}+(h-h^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]\\
&\quad+(-1)^{2h}a_1(\rho)\left[\frac{h-h^2}{\alpha^2}+\frac{h^2}{\alpha(\alpha-1)}-\frac{h}{(\alpha-1)^2}\right]\\
&\qquad+\frac{a_2(\rho)}{\alpha^{2h}}\left[h-h^2-\frac{h}{(1-\alpha)^2}+\frac{h^2}{1-\alpha}\right]=0,
\end{aligned}\right.$$

qui devra être satisfaite, quels que soient ρ et α.

Supposons d'abord $h < 1$, $2h < 2$. En multipliant par $(1-\alpha)^2$ et faisant ensuite $\alpha = 1$, on trouve

$$a_2(\rho) = (-1)^{2h+1}a_1(\rho),$$

Multipliant par α^2 et faisant $\alpha = 0$, on trouve

$$a(\rho) = (-1)^{2h+1}a_1(\rho).$$

Par suite, on a

$$a(\rho) = a_2(\rho),$$

et, en permutant les indices,

$$a_1(\rho) = a(\rho),$$

ce qui donne

$$(-1)^{2h+1} = 1,\quad a(\rho) = a_1(\rho) = a_2(\rho).$$

Ainsi les symboles a, a_1, a_2 représentent une même fonction. En les supprimant dans l'équation (88), on a une nouvelle équation, qui devra être satisfaite, quel que soit α. En développant suivant les puissances de α, elle prend la forme

$$2h^4 - 5h^3 + h^2 + 2h + A\alpha + B\alpha^2 + \ldots + \alpha^{-2h}[(h^2-2h)\alpha + A'\alpha^2 + \ldots] = 0$$

Il y a à distinguer trois cas : 1° $2h > 1$. Alors le premier terme du développement précédent est

$$\alpha^{1-2h}(h^2-2h),$$

et, comme h est supposé plus petit que 1, il n'est pas nul. Donc l'équation n'est pas satisfaite. 2° $2h = 1$. Alors l'équation (88) est satisfaite.

Voilà donc une première solution possible

$$h = \frac{1}{2}.$$

3° $2h < 1$. Alors le premier terme du développement est le terme constant

$$2h^4 - 5h^3 + h^2 + 2h,$$

qui doit être nul. On a donc

$$2h^4 - 5h^3 + h^2 + 2h = h(2h+1)(h-1)(h-2) = 0.$$

La seule solution compatible avec l'hypothèse est $h = -\frac{1}{2}$. L'hypothèse $h = 0$ ne convient pas, elle nous conduirait à une forme des fonctions R qui a déjà été examinée. Nous avons donc la deuxième solution

$$h = -\frac{1}{2}.$$

Et en effet, dans ce cas également, l'équation (88) est satisfaite.

Jusqu'ici nous avons supposé $h < 1$. Nous avons donc à considérer encore le cas où h est égal ou supérieur à l'unité. Commençons par le supposer plus grand que 1. Si, dans l'équation (88), nous multiplions par $(1-\alpha)^{2h}$, et que nous fassions $\alpha = 1$, il restera

$$a(\rho)(2h^3 - 5h^2 + 2h) = 0,$$
$$h(2h-1)(h-2) = 0.$$

Il faut donc que l'on ait

$$h = 2.$$

En effet, dans ce cas encore, l'équation (88) se réduira à

$$a(\rho) + a_1(\rho) + a_2(\rho) = 0,$$

et sera vérifiée, si cette équation est satisfaite.

Enfin la dernière hypothèse à examiner $h = 1$ nous conduit à la même conclusion. L'équation (88) sera vérifiée, si les trois fonctions a, a_1, a_2 satisfont à la même condition

$$a(\rho) + a_1(\rho) + a_2(\rho) = 0.$$

En résumé, nous avons quatre types de solution possibles, correspondant aux valeurs de h

$$h = -\frac{1}{2}, \quad h = +\frac{1}{2}, \quad h = 1, \quad h = 2.$$

Pour les deux premières solutions, les trois fonctions a, a_1, a_2 sont des valeurs d'une même fonction pour $x = \rho$, $x = \rho_1$, $x = \rho_2$. Pour les deux dernières, lorsqu'on fait $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, les trois fonctions doivent satisfaire à la condition

$$a(\rho) + a_1(\rho) + a_2(\rho) = 0.$$

Une remarque simple va nous guider dans la discussion complète de ces quatre types. Reprenons les valeurs des quantités H, H_1, H_2; on a, par exemple,

$$H = \frac{(\rho - \rho_1)^{-h}(\rho_2 - \rho)^{-h}}{M\sqrt{a(\rho)}},$$

et supposons que $a(\rho)$ soit un polynôme de degré p. Il est facile de trouver une relation entre p et h. En effet, si nous effectuons la substitution

$$\rho = \frac{1}{\rho_1}, \quad \rho_1 = \frac{1}{\rho'_1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{\rho'_2},$$

on verra facilement que la forme (83), qui nous a servi de point de départ, ne sera pas changée. H deviendra

$$\frac{(\rho' - \rho'_1)^{-h}(\rho'_2 - \rho')^{-h}}{M\rho^{-h}\rho_1^{-h}\rho_2^{-h}\sqrt{a'(\rho')}}\rho'^{\frac{p}{2}+h-2},$$

$a'(\rho)$ étant ce que devient $a(\rho)$ lorsqu'on remplace ρ par $\frac{1}{\rho}$ et que l'on multiplie par ρ'^p. Pour que cette forme soit équivalente à la précédente, il faut que

$$\frac{p}{2} + h - 2 = 0, \quad p = 4 - 2h.$$

Ainsi, *si la fonction* $a(\rho)$ *est un polynôme,* il faut qu'elle soit du degré $p - 4h$. Cette remarque nous servira de vérification.

Commençons par l'hypothèse $h=\frac{1}{2}$, nous aurons ici

$$(89)\quad \mathrm{H}=\frac{\sqrt{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}}{\mathrm{M}\sqrt{a(\rho)}},\qquad \mathrm{H}_1=\frac{\sqrt{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}}{\mathrm{M}\sqrt{a(\rho_1)}},\qquad \mathrm{H}_2=\frac{\sqrt{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}}{\mathrm{M}\sqrt{a(\rho_2)}}.$$

Il nous reste à déterminer la fonction $a(\rho)$ et M.

A cet effet, reprenons l'équation (87), remplaçons-y h par sa valeur $-\frac{1}{2}$; multiplions-la par $(\rho-\rho_1)^2(\rho_1-\rho_2)^2$, et prenons la dérivée sixième par rapport à ρ_1, il viendra

$$\frac{(\rho-\rho_2)^2}{4}\frac{\partial^6}{\partial\rho_1^6}\left[a'_1(\rho_2-\rho_1)(\rho_1-\rho)+a_1(5\rho_1-2\rho-3\rho_2)\right]=0,$$

ou, en développant,

$$2\frac{d^7a_1}{d\rho_1^7}(\rho_2-\rho_1)(\rho_1-\rho)+3\frac{d^6a_1}{d\rho_1^6}(\rho_2+2\rho-3\rho_1)=0.$$

Cette équation devant avoir lieu identiquement, il faut que l'on ait

$$\frac{d^6a_1}{d\rho_1^6}=0,$$

ce qui donne, pour la fonction $a(x)$, un polynôme du cinquième degré

$$a(\rho)=\mathrm{A}+\mathrm{B}\rho+\mathrm{C}\rho^2+\mathrm{D}\rho^3+\mathrm{E}\rho^4+\mathrm{F}\rho^5.$$

La question est résolue, et il est inutile de continuer la recherche. On sait, en effet, qu'il existe un système de cyclides homofocales qui conduit à l'expression

$$ds'^2=\frac{1}{\mathrm{M}'^2}\left[\frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\,d\rho^2}{a(\rho)}+\frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)\,d\rho_1^2}{a(\rho_1)}+\frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)\,d\rho_2^2}{a(\rho_2)}\right].$$

Si donc on le compare au système cherché, on aura

$$\mathrm{M}'^2\,ds'^2=\mathrm{M}^2\,ds^2,$$

ce qui exige, comme nous l'avons vu, que les deux systèmes soient les mêmes ou se déduisent l'un de l'autre par une inversion. Nous n'aurons donc ainsi que le système des cyclides homofocales.

Examinons maintenant l'hypothèse $h=2$. Reportons-nous à l'équation (87). Faisons-y $h = 2$ et multiplions par $(\rho_1 - \rho_2)^4$. En posant ensuite $\rho_1 = \rho_2$, il restera

$$F(\rho) - \frac{6a'}{a}\frac{1}{\rho - \rho_1} = 0,$$

équation qui ne peut être vérifiée, quels que soient ρ et ρ_1, que si l'on a

$$a' = 0, \quad F(\rho) = 0.$$

Ainsi les trois fonctions a, a_1, a_2 se réduisent ici à des constantes, et l'équation (87) se réduit à l'unique condition

$$a + a_1 + a_2 = 0,$$

qui doit avoir lieu entre ces constantes. Nous aurons donc une nouvelle solution, pour laquelle on aura

$$(90) \qquad \left\{\begin{aligned} R &= -\tfrac{1}{2}La_1 - \tfrac{1}{2}La_2 - 2\log(\rho_1 - \rho_2), \\ R_1 &= -\tfrac{1}{2}La - \tfrac{1}{2}La_2 - 2\log(\rho_2 - \rho), \\ R_2 &= -\tfrac{1}{2}La - \tfrac{1}{2}La_1 - 2\log(\rho - \rho_1), \end{aligned}\right.$$

les constantes a, a_1, a_2 étant liées par la relation

$$(91) \qquad a + a_1 + a_2 = 0.$$

Traitons maintenant l'hypothèse $h = 1$. Après quelques réductions, l'équation (87) deviendra

$$(92) \qquad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & (a'_1 - a'_2)(\rho_2 - \rho_1) + 2(a + a_1 + a_2) \\ & + a'(\rho_1 + \rho_2 - 2\rho) + (\rho_1 - \rho)(\rho_2 - \rho)F(\rho) = 0, \end{aligned}\right.$$

$F(\rho)$ étant une fonction arbitraire dont on peut disposer de manière à satisfaire à l'équation.

Différentions-la deux fois par rapport à ρ_1, nous aurons

$$a'''_1(\rho_2 - \rho_1) = 0,$$

ce qui exige que a'''_1 soit nul. Donc a_1, et par conséquent a_1 et a_2, sont des polynômes du second degré au plus. On a

$$(93) \qquad \left\{\begin{aligned} a &= m\rho^2 + 2n\rho + p, \\ a_1 &= m_1\rho_1^2 + 2n_1\rho_1 + p_1, \\ a_2 &= m_2\rho_2^2 + 2n_2\rho_2 + p_2. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, si, dans l'équation (92), on prend $\rho = \rho_1 = \rho_2$, il reste

$$a + a_1 + a_2 = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$(94) \qquad \left\{ \begin{array}{l} m + m_1 + m_2 = 0, \\ n + n_1 + n_2 = 0, \\ p + p_1 + p_2 = 0, \end{array} \right.$$

et alors on verra que l'équation (91) est identiquement vérifiée en prenant $F(\rho) = 2m$. On a donc une nouvelle solution, et nous sommes assurés de pouvoir trouver un système orthogonal correspondant. Il nous restera seulement à déterminer la fonction M.

Il n'y a plus qu'à examiner la dernière hypothèse $h = \frac{1}{2}$. Nous savons qu'alors a, a_1, a_2 sont trois valeurs différentes de la même fonction. L'équation (87) devient alors, en chassant les dénominateurs,

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_2 - a)(\rho - \rho_1)^2 (2\rho - 3\rho_2 + \rho_1) + (a_1 - a)(\rho - \rho_2)^2 (3\rho_1 - 2\rho - \rho_2) \\ \quad + a'_1 (\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)^2 - a'_2 (\rho_2 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)(\rho - \rho_1)^2 \\ \qquad\qquad + \varphi(\rho)(\rho_2 - \rho_1)(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) = 0, \end{array} \right.$$

$\varphi(\rho)$ étant une fonction arbitraire provenant de la réunion à $f(\rho)$ de termes en ρ. En prenant la dérivée troisième successivement par rapport à ρ_1 et à ρ_2, on trouve

$$\frac{d^3}{d\rho_1^3} a'_1 (\rho_1 - \rho) - \frac{d^3}{d\rho_2^3} a'_2 (\rho_2 - \rho) + \frac{d^3 a_2}{d\rho_2^3} - \frac{d^3 a_1}{d\rho_1^3} = 0,$$

ou

$$(\rho_1 - \rho) \frac{d^4 a_1}{d\rho_1^4} + 2 \frac{d^3 a_1}{d\rho_1^3} - (\rho_2 - \rho) \frac{d^4 a_2}{d\rho_2^4} - 2 \frac{d^3 a_2}{d\rho_2^3} = 0.$$

Cette équation ne peut être vérifiée que si l'on a

$$\frac{d^4 a_1}{d\rho_1^4} = 0, \quad \frac{d^4 a_2}{d\rho_2^4} = 0,$$

et, par conséquent, a, a_1, a_2 sont des polynômes du troisième degré. On a ici

$$\begin{aligned} a &= m\rho^3 + n\rho^2 + p\rho + q, \\ a_1 &= m\rho_1^3 + n\rho_1^2 + p\rho_1 + q, \\ a_2 &= m\rho_2^3 + n\rho_2^2 + p\rho_2 + q. \end{aligned}$$

Avec ces hypothèses, l'équation (95) est vérifiée en prenant $\varphi = 0$, quelles que soient les constantes m, n, p, q.

Ainsi, nous sommes dès à présent assurés de trouver trois systèmes correspondant aux trois hypothèses

$$h = \tfrac{1}{2}, \quad h = 1, \quad h = 2.$$

Mais aussi nous nous trouvons en présence d'une difficulté nouvelle. Jusqu'ici nous avions rencontré des systèmes connus, et nous n'avions pas eu à achever les calculs qu'exige l'application de la méthode générale. Ici, au contraire, nous devons d'abord intégrer les six équations aux dérivées partielles auxquelles satisfait la fonction M, et qui doivent donner, nous le savons, une solution avec quatre constantes arbitraires. Ensuite, quand M aura été obtenu, il faudra chercher les expressions des coordonnées rectangulaires x, y, z. Mais nous montrerons que ce problème est beaucoup moins difficile que le premier. Je commencerai par l'examen de l'hypothèse $h = 1$.

§ XVIII. — *Examen de la solution correspondant à l'hypothèse* $h = 1$.

Nous savons que, dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} &= \frac{1}{\sqrt{a}\,\mathrm{M}(\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho_1)},\\
\mathrm{H}_1 &= \frac{1}{\sqrt{a_1}\,\mathrm{M}(\rho-\rho_1)(\rho_1-\rho_2)},\\
\mathrm{H}_2 &= \frac{1}{\sqrt{a_2}\,\mathrm{M}(\rho-\rho_2)(\rho_2-\rho_1)}
\end{aligned}$$

et

$$(96)\qquad \left\{\begin{aligned}
a &= m\rho^2 + 2n\rho + p,\\
a_1 &= m_1\rho_1^2 + 2n_1\rho_1 + p_1,\\
a_2 &= m_2\rho_2^2 + 2n_2\rho_2 + p_2,
\end{aligned}\right.$$

avec les conditions

$$(97)\qquad \left\{\begin{aligned}
m + m_1 + m_2 &= 0,\\
n + n_1 + n_2 &= 0,\\
p + p_1 + p_2 &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Quant à la fonction M, elle satisfait d'abord aux trois équations

$$(98)\qquad \begin{cases} x_{01}(\rho-\rho_1)=x_0-x_1,\\ x_{12}(\rho_1-\rho_2)=x_1-x_2,\\ x_{20}(\rho-\rho_2)=x_0-x_2, \end{cases}$$

déduites des formules (86) en y faisant $h=1$.

Dans ce cas particulier, le système (98) peut être complétement intégré, et nous avons vu (§ XV) que la valeur la plus générale de M est de la forme

$$M=\frac{R}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}+\frac{R_1}{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}+\frac{R_2}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)},$$

où chacune des fonctions R_i ne dépend que de la variable de même indice. Tout se réduit donc à la détermination des fonctions d'une seule variable R, R_1, R_2.

Posons

$$(99)\qquad N=R(\rho_1-\rho_2)+R_1(\rho_2-\rho)+R_2(\rho-\rho_1).$$

Les quantités H, H_1, H_2 prendront la forme plus simple

$$(100)\qquad H=\frac{\rho_1-\rho_2}{N\sqrt{a}},\quad H_1=\frac{\rho_2-\rho}{N\sqrt{a_1}},\quad H_2=\frac{\rho-\rho_1}{N\sqrt{a_2}}.$$

Si nous calculons les valeurs des quantités β, nous aurons

$$(101)\qquad \begin{cases} \beta_{01}=\dfrac{\sqrt{a}}{N\sqrt{a_1}}\,[R'(\rho-\rho_2)+R_2-R],\\[2ex] \beta_{10}=\dfrac{\sqrt{a_1}}{N\sqrt{a}}\,[R'_1(\rho_2-\rho_1)+R_1-R_2], \end{cases}$$

et les formules analogues que l'on déduirait par des permutations circulaires. Par suite de la forme de N, les équations

$$\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial\rho_k}=\beta_{ik}\beta_{kj},$$

identiques aux formules (98), sont satisfaites, et il reste à vérifier les trois équations telles que les suivantes :

$$\frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1} + \beta_{20}\beta_{21} = 0.$$

En substituant les valeurs des quantités β, nous obtenons le résultat suivant :

$$(102) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{a' \mathrm{N}}{2} [\mathrm{R}'(\rho - \rho_2) + \mathrm{R}_2 - \mathrm{R}] + a\mathrm{N}\mathrm{R}''(\rho - \rho_2) \\ & \quad - a[\mathrm{R}'(\rho - \rho_2) + \mathrm{R}_2 - \mathrm{R}][\mathrm{R}'(\rho_1 - \rho_2) + \mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1] \\ & \quad + \frac{a'_1 \mathrm{N}}{2} [\mathrm{R}'_1(\rho_2 - \rho_1) + \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2] + a_1\mathrm{N}\mathrm{R}''_1(\rho_2 - \rho_1) \\ & \quad - a_1[\mathrm{R}'_1(\rho_2 - \rho_1) + \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2][\mathrm{R}'_1(\rho_2 - \rho) + \mathrm{R} - \mathrm{R}_2] \\ & \quad + a_2[\mathrm{R}'_2(\rho_2 - \rho_1) + \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2][\mathrm{R}'_2(\rho - \rho_2) + \mathrm{R}_2 - \mathrm{R}] = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour trouver les valeurs de R, R_1, R_2 pouvant satisfaire à une telle équation, prenons deux fois la dérivée par rapport à ρ, et deux fois la dérivée par rapport à ρ_1. Nous aurons

$$\begin{aligned} & \mathrm{R}''_1 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\left[\frac{a'}{2}(\rho_2 - \rho)[\mathrm{R}'(\rho - \rho_2) + \mathrm{R}_2 - \mathrm{R}] - a\mathrm{R}''(\rho - \rho_2)^2 + a\mathrm{R}'(\rho - \rho_2) + a\mathrm{R}_2 - a\mathrm{R}\right] \\ & + \mathrm{R}'' \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2}\left[\frac{a'_1}{2}(\rho_1 - \rho_2)[\mathrm{R}'_1(\rho_2 - \rho_1) + \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2] - a_1\mathrm{R}''_1(\rho_1 - \rho_2)^2 - a'_1\mathrm{R}'_1(\rho_2 - \rho_1) + a_1\mathrm{R}_2 - a_1\mathrm{R}_1\right] \\ & \qquad + a_2\mathrm{R}''\mathrm{R}''_1 = 0. \end{aligned}$$

Si nous remarquons que R_2 disparaît de cette équation et qu'en vertu des formules (94) on peut écrire

$$a_2\mathrm{R}''\mathrm{R}''_1 = -\mathrm{R}''_1 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}[(m\rho_2^2 + 2n\rho_2 + p)\mathrm{R}] - \mathrm{R}'' \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2}[(m_1\rho_2^2 + 2n_1\rho_2 + p_1)\mathrm{R}_1],$$

l'équation précédente prendra la forme

$$\begin{aligned} & \mathrm{R}''_1 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\left[\begin{aligned} & -\frac{a'\mathrm{R}'}{2}(\rho - \rho_2)^2 + \frac{\mathrm{R}a'}{2}(\rho - \rho_2) - a\mathrm{R}''(\rho - \rho_2)^2 \\ & + a\mathrm{R}'(\rho - \rho_2) - a\mathrm{R} + (m\rho_2^2 + 2n\rho_2 + p)\mathrm{R} \end{aligned}\right] \\ & + \mathrm{R}'' \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2}\left[\begin{aligned} & -\frac{a'_1\mathrm{R}'_1}{2}(\rho_1 - \rho_2)^2 + \frac{\mathrm{R}_1 a'_1}{2}(\rho_1 - \rho_2) - a_1\mathrm{R}''_1(\rho_1 - \rho_2)^2 \\ & + a_1\mathrm{R}'_1(\rho_1 - \rho_2) - a_1\mathrm{R}_1 + (m_1\rho_2^2 + 2n_1\rho_2 + p_1)\mathrm{R}_1 \end{aligned}\right] = 0, \end{aligned}$$

ou, en égalant à zéro les coefficients de ρ_2, ρ_2^2 et le terme indépendant de ρ_2,

$$R''_1 \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(-\frac{a'R'}{2} - aR'' + mR\right) + R'' \frac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}\left(-\frac{a'_1 R'_1}{2} - a_1 R''_1 + m_1 R_1\right) = 0,$$

$$R''_1 \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(a'R'\rho - \frac{Ra'}{2} + 2aR''\rho - aR' + 2nR\right)$$
$$+ R'' \frac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}\left(a'_1 R'_1 \rho_1 - \frac{R_1 a'_1}{2} + 2a_1 R''_1 \rho_1 - a_1 R'_1 + 2n_1 R_1\right) = 0,$$

$$R''_1 \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(-\frac{a'R'\rho^2}{2} + \frac{Ra'\rho}{2} - aR''\rho^2 + aR'\rho - aR + pR\right)$$
$$+ R'' \frac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}\left(-\frac{a'_1 R'_1 \rho_1^2}{2} + \frac{R_1 a'_1 \rho_1}{2} - a_1 R''_1 \rho_1^2 + a_1 R'_1 \rho_1 - a_1 R_1 + p_1 R_1\right) = 0.$$

Or la forme de ces équations indique comment on pourra y satisfaire. Chacune d'elles, divisée par $R'' R''_1$, prend la forme

$$\varpi(\rho) + \varpi_1(\rho_1) = 0,$$

et, par des permutations circulaires, on aura de même

$$\varpi_1(\rho_1) + \varpi_2(\rho_2) = 0,$$
$$\varpi_2(\rho_2) + \varpi(\rho) = 0;$$

ce qui exige que l'on ait

$$\varpi(\rho) = \varpi_1(\rho_1) = \varpi_2(\rho_2) = 0.$$

On aura donc

$$(103)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\rho^2}\left(-\frac{a'R'}{2} - aR'' + mR\right) = 0,\\
&\frac{d^2}{d\rho^2}\left(a'R'\rho - \frac{Ra'}{2} + 2aR''\rho - aR' + 2nR\right) = 0,\\
&\frac{d^2}{d\rho^2}\left(-\frac{a'R'\rho^2}{2} + \frac{Ra'\rho}{2} - aR''\rho^2 + aR'\rho - aR + pR\right) = 0,
\end{aligned}\right.$$

et des formules semblables pour R_1, R_2. En intégrant les équations précédentes, on trouve

$$(104)\quad \left\{\begin{aligned} & m\mathrm{R} - \frac{a'\mathrm{R}'}{2} - a\mathrm{R}'' = u, \\ & a'\mathrm{R}'\rho - \frac{\mathrm{R}a'}{2} + 2a\mathrm{R}''\rho - a\mathrm{R}' + 2n\mathrm{R} = v, \\ & -\frac{a'\mathrm{R}'\rho^2}{2} + \frac{\mathrm{R}a'\rho}{2} - a\mathrm{R}''\rho^2 + a\mathrm{R}'\rho - a\mathrm{R} + p\mathrm{R} = w, \end{aligned}\right.$$

u, v, w désignant des polynômes en ρ du premier degré. En éliminant R'' entre les deux premières, on trouvera

$$\frac{a'\mathrm{R}}{2} - a\mathrm{R}' = 2u\rho + v,$$

et, en différentiant,

$$\frac{a''\mathrm{R}}{2} - \frac{a'\mathrm{R}'}{2} - a\mathrm{R}'' = 2u + 2u'\rho + 2v'.$$

En retranchant de cette équation la première (104), on trouve

$$u + 2u'\rho + 2v' = 0,$$

ce qui exige que le polynôme u soit une constante. On est donc ainsi conduit à la solution la plus générale des équations (108)

$$(105)\qquad \frac{a'\mathrm{R}}{2} - a\mathrm{R}' = \alpha\rho + \beta,$$

α et β étant deux constantes, d'où l'on déduit par différentiation

$$(106)\qquad \frac{a''\mathrm{R}}{2} - \frac{a'\mathrm{R}'}{2} - a\mathrm{R}'' = \alpha.$$

On pourrait intégrer l'équation (105), mais il m'a paru préférable de se servir des deux formules précédentes et des formules analogues

$$(107)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{a'_1\mathrm{R}_1}{2} - a_1\mathrm{R}'_1 = \alpha_1\rho_1 + \beta, \qquad \frac{a'_2\mathrm{R}_2}{2} - a_2\mathrm{R}'_2 = \alpha_2\rho_2 + \beta_2, \\ & \frac{a''_1\mathrm{R}_1}{2} - \frac{a'_1\mathrm{R}'_1}{2} - a_1\mathrm{R}''_1 = \alpha_1, \qquad \frac{a''_2\mathrm{R}_2}{2} - \frac{a'_2\mathrm{R}'_2}{2} - a_2\mathrm{R}''_2 = \alpha_2, \end{aligned}\right.$$

pour éliminer de l'équation à vérifier (102) les dérivées premières et secondes des fonctions R, R_1, R_2.

Après des calculs nécessairement un peu longs, et où l'on aura à faire usage des relations (97) entre les constantes, on trouvera la forme suivante :

$$(108)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{mp-n^2}{a}R^2+\frac{m_1p_1-n_1^2}{a_1}R_1^2+\frac{m_2p_2-n_2^2}{a_2}R_2^2\\ &\quad-(\alpha\rho+\alpha_1\rho_1+\alpha_2\rho_2+\beta+\beta_1+\beta_2)\left(\frac{R_1-R_2}{\rho_1-\rho_2}+\frac{R-R_2}{\rho-\rho_2}\right)\\ &\quad+N\left(\frac{\alpha}{\rho_2-\rho_1}-\frac{\alpha_1}{\rho_2-\rho}\right)-\frac{(\alpha\rho+\beta)^2}{a}-\frac{(\alpha_1\rho_1+\beta_1)^2}{a_1}-\frac{(\alpha_2\rho_2+\beta_2)^2}{a_2}\\ &\qquad+(\alpha\rho+\beta)\frac{a'R}{a}+(\alpha_1\rho_1+\beta_1)\frac{a'_1R_1}{a_1}+(\alpha_2\rho_2+\beta_2)\frac{a'_2R_2}{a_2}=0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on effectue une permutation circulaire des indices et que l'on retranche l'équation ainsi obtenue de la précédente, on trouvera

$$N(\alpha\rho+\alpha_1\rho_1+\alpha_2\rho_2+\beta+\beta_1+\beta_2)=N[\alpha\rho+\alpha_1\rho_1-(\alpha+\alpha_1)\rho_2],$$

ce qui exige que l'on ait

$$(109)\quad \left\{\begin{aligned}&\alpha+\alpha_1+\alpha_2=0,\\ &\beta+\beta_1+\beta_2=0;\end{aligned}\right.$$

et en effet, si l'on introduit ces hypothèses, l'équation (108) prend la forme tout à fait symétrique

$$\begin{aligned} &\frac{mp-n^2}{a}R^2+\frac{(\alpha\rho+\beta)\,a'R}{a}-2\alpha R+\frac{(\alpha\rho+\beta)^2}{a}\\ &+\frac{m_1p_1-n_1^2}{a_1}R_1^2+\frac{(\alpha_1\rho_1+\beta_1)\,a'_1R_1}{a_1}-2\alpha_1R_1+\frac{(\alpha_1\rho_1+\beta_1)^2}{a_1}\\ &+\frac{m_2p_2-n_2^2}{a_2}R_2^2+\frac{(\alpha_2\rho_2+\beta_2)\,a'_2R_2}{a_2}-2\alpha_2R_2+\frac{(\alpha_2\rho_2+\beta_2)^2}{a_2}=0.\end{aligned}$$

Il est clair que, les termes écrits sur chaque ligne dépendant de variables différentes, il faut que la somme de chaque ligne soit constante et que la somme des trois constantes soit nulle. En posant donc

$$(110)\quad \gamma+\gamma_1+\gamma_2=0,$$

on aura

$$(111) \qquad (mp - n^2)R^2 + 2R[(m\rho + n)(\alpha\rho + \beta) - a\alpha] + a\gamma - (\alpha\rho + \beta)^2 = 0,$$

et des équations semblables pour R_1, R_2.

Mais il est clair que tous les calculs reposent sur l'hypothèse que les équations (105), (107) soient vérifiées par R, R_1, R_2. Il faut donc encore chercher si la condition pour la fonction R, déduite de la formule (111), de vérifier l'équation différentielle (105), n'impose pas de nouvelles limitations aux coefficients arbitraires. Or on déduit de l'équation (111)

$$R = \frac{\alpha p - n\beta + (n\alpha - m\beta)\rho}{mp - n^2} \pm \frac{1}{mp - n^2}\sqrt{a}\sqrt{m\beta^2 - 2n\alpha\beta + p\alpha^2 - \gamma(mp - n^2)},$$

et l'on vérifie facilement que cette fonction R vérifie l'équation différentielle (105).

Les expressions de H, H_1, H_2, M sont donc complétement connues. En changeant les notations pour trouver le résultat final sous sa forme la plus simple, nous avons la proposition suivante :

Soient les fonctions a, a_1, a_2 définies par les équations

$$(112) \qquad \begin{cases} a = m\rho^2 + 2n\rho + p, \\ a_1 = m_1\rho_1^2 + 2n_1\rho_1 + p_1, \\ a_2 = m_2\rho_2^2 + 2n_2\rho_2 + p_2, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(113) \qquad \begin{cases} m + m_1 + m_2 = 0, \\ n + n_1 + n_2 = 0, \\ p + p_1 + p_2 = 0, \end{cases}$$

pour les coefficients. Il y aura un système orthogonal pour lequel on aura

$$(114) \qquad ds^2 = \frac{1}{N^2}\left[\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2 d\rho^2}{a} + \frac{(\rho_2 - \rho)^2 d\rho_1^2}{a_1} + \frac{(\rho - \rho_1)^2 d\rho_2^2}{a_2}\right],$$

N étant défini par la formule

$$(115) \qquad N = R(\rho_1 - \rho_2) + R_1(\rho_2 - \rho) + R_2(\rho - \rho_1),$$

R, R_1, R_2 étant trois fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2, définies par les formules

$$(116)\quad \begin{cases} R = \beta\rho - \alpha + \gamma\sqrt{a}, \\ R_1 = \beta_1\rho_1 - \alpha_1 + \gamma_1\sqrt{a_1}, \\ R_2 = \beta_2\rho_2 - \alpha_2 + \gamma_2\sqrt{a_2}, \end{cases}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ désignent neuf constantes arbitraires, liées par les trois relations

$$(117)\quad \begin{cases} m\alpha + n\beta + m_1\alpha_1 + n_1\beta_1 + m_2\alpha_2 + n_2\beta_2 = 0, \\ n\alpha + p\beta + n_1\alpha_1 + p_1\beta_1 + n_2\alpha_2 + p_2\beta_2 = 0 \end{cases}$$

et

$$(118)\quad \begin{cases} (n^2 - mp)\gamma^2 + (n_1^2 - m_1p_1)\gamma_1^2 + (n_2^2 - m_2p_2)\gamma_1^2 \\ \qquad + m\alpha^2 + 2n\alpha\beta + p\beta^2 + m_1\alpha_1^2 + 2n_1\alpha_1\beta_1 \\ \qquad\qquad + p_1\beta_1^2 + m_2\alpha_2^2 + 2n_2\alpha_2\beta_2 + p_2\beta_2^2 = 0. \end{cases}$$

Il importe de remarquer que, lorsque la forme des fonctions a, a_1, a_2 a été déterminée, et que l'on connaît les constantes m_i, n_i, p_i, les formules qui donnent R_i ne contiennent au fond que sept constantes et non neuf; car, en vertu de l'identité,

$$(h\rho + k)(\rho_1 - \rho_2) + (h\rho_1 + k)(\rho_2 - \rho) + (h\rho_2 + k)(\rho - \rho_1) = 0,$$

on peut ajouter une même quantité, soit aux trois α, soit aux trois β, sans changer la valeur de N. On pourra supposer, par exemple, α et β nuls, et il restera sept constantes liées pár trois relations, deux du premier degré, une du second.

Ce résultat est d'ailleurs conforme aux remarques du § XIII. Tous les systèmes obtenus en faisant varier N sont, comme nous l'avons vu, nécessairement les transformés les uns des autres; par inversion, N' étant l'une des valeurs de N, et x, y, z les coordonnées relatives à ce système, nous avons vu que la valeur la plus générale de N était de la forme

$$N = N'[a(x^2 + y^2 + z^2) + 2bx + 2cy + 2dz + e],$$

où a, b, c, d, e sont liés par la relation

$$b^2 + c^2 + d^2 - ae = 0.$$

L'expression la plus générale de N contient donc cinq constantes, liées par une relation du second degré. C'est ce qui a lieu ici, si l'on se sert des deux équations du premier degré (117) pour éliminer deux constantes.

Pour donner plus de symétrie au calcul, nous allons supposer que, en remplaçant les paramètres ρ par des expressions de la forme $\frac{a\rho + b}{c\rho + a}$, on ait fait disparaître n et n_1 dans a et a_1. Alors n_2 disparaîtra dans a_2, et l'on aura

$$\begin{aligned} a &= m\,\rho^2 + p,\\ a_1 &= m_1\rho_1^2 + p_1,\\ a_2 &= m_2\rho_2^2 + p_2. \end{aligned}$$

On pourra résoudre les équations (117) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - \lambda m_2, \quad & \alpha_2 &= \alpha + \lambda m_1,\\ \beta_1 &= \beta + \mu p_2, \quad & \beta_2 &= \beta - \mu p_1, \end{aligned}$$

λ, μ remplaçant les constantes α, β, α_2, β_2, et l'on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{N} = {} & \gamma(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{a} + \gamma_1(\rho_2 - \rho)\sqrt{a_1} + \gamma_2(\rho - \rho_1)\sqrt{a_2}\\ & + \lambda(p\,\rho_1\rho_2 + p_1\rho\rho_2 + p_2\rho\rho_1) + \mu(m\rho + m_1\rho_1 + m_2\rho_2), \end{aligned}$$

les cinq constantes λ, μ, γ, γ_1, γ_2 étant reliées par l'équation homogène

$$mp\gamma^2 + m_1p_1\gamma_1^2 + m_2p_2\gamma_2^2 + mm_1m_2\mu^2 + pp_1p_2\lambda^2 = 0.$$

Si l'on substitue à ces constantes les suivantes :

$$\begin{gathered} \gamma' = \gamma\sqrt{mp}, \quad \gamma'_1 = \gamma_1\sqrt{m_1p_1}, \quad \gamma'_2 = \gamma_2\sqrt{m_2p_2},\\ \sqrt{mm_1m_2}\,\mu + \sqrt{-pp_1p_2}\,\lambda = \lambda',\\ \sqrt{mm_1m_2}\,\mu - \sqrt{-pp_1p_2}\,\lambda = -\lambda', \end{gathered}$$

la fonction N prendra la forme

$$\mathrm{N} = 2\mathrm{N}'\gamma' + 2\mathrm{N}'_1\gamma'_1 + 2\mathrm{N}'_2\gamma'_2 + \mathrm{P}\lambda' + \mathrm{Q}\mu',$$

et la relation entre les constantes deviendra

$$\gamma'^2 + \gamma'^2_1 + \gamma'^2_2 - \lambda'\mu' = 0.$$

Si l'on applique ici la remarque du § XIII, on verra que le système orthogonal est défini par les formules

$$x = \frac{N'}{P}, \quad y = \frac{N'_1}{P}, \quad z = \frac{N'_2}{P}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{Q'}{P},$$

avec la valeur P attribuée à N dans l'expression de ds^2.

Si l'on emploie les cinq coordonnées pentasphériques x_i, on aura les expressions plus symétriques

$$(119) \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{a}}{\sqrt{mp}}, \quad x_2 = \dfrac{(\rho_2 - \rho)\sqrt{a_1}}{\sqrt{m_1 p_1}}, \quad x_3 = \dfrac{(\rho - \rho_1)\sqrt{a_2}}{\sqrt{m_2 p_2}}, \\ x_4 = \dfrac{m\rho + m_1\rho_1 + m_2\rho_2}{\sqrt{m m_1 m_2}}, \quad x_5 = \dfrac{p\rho_1\rho_2 + p_1\rho\rho_2 + p_2\rho\rho_1}{\sqrt{p p_1 p_2}}, \end{cases}$$

pour les cinq coordonnées.

Le système précédent est très-général, et son étude géométrique serait sans doute intéressante. Je me contenterai de faire remarquer qu'il comprend comme cas particulier un système isotherme imaginaire.

Supposons, en effet, que l'on réduise les trois polynômes a, a_1, a_2, qui sont en général du second degré, à des constantes dont la somme sera nulle. On verra facilement que l'on peut prendre

$$R = \rho^2, \quad R_1 = \rho_1^2, \quad R_2 = \rho_2^2,$$

et l'expression de M correspondante

$$M = \frac{\rho^2}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)} + \frac{\rho_1^2}{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)} + \frac{\rho_2^2}{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}$$

se réduira à l'unité. Je n'insiste pas sur la recherche de ce système, qui est comprise comme cas particulier dans les recherches précédentes. Le système est imaginaire, parce que les constantes a, a_1, a_2, dont la somme est nulle, étant engagées sous des radicaux carrés, l'un au moins de ces radicaux sera imaginaire.

§ XIX. — *Recherche de la solution correspondant à l'hypothèse $h = 2$.*

Nous avons maintenant à examiner la solution pour laquelle $h = 2$. Nous savons que, dans ce cas, les fonctions a, a_1, a_2 se réduisent à des constantes dont la somme est nulle. On a

$$a + a_1 + a_2 = 0. \tag{120}$$

Nous supposerons en outre que l'on ait multiplié ces trois constantes de telle manière que leur produit soit égal à 1

$$a a_1 a_2 = 1. \tag{121}$$

Cette hypothèse, qui remplace le système par un système semblable, a pour but de nous permettre de ne pas tenir compte de la modification que nous avons fait subir à M par la formule (84) et d'appliquer les formules précédemment obtenues. De plus, nous ne ferons aucune hypothèse au début sur h, afin que nos formules s'appliquent à l'examen d'un cas particulier de la dernière solution $h = \frac{1}{2}$, qui nous reste à examiner.

Ces points étant admis, les équations auxquelles satisfait la fonction M sont les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} x_{01}(\rho - \rho_1) &= h(x_0 - x_1), \\ x_{12}(\rho_2 - \rho_1) &= h(x_2 - x_1), \\ x_{20}(\rho - \rho_2) &= h(x_0 - x_2), \end{aligned}\right. \tag{121}$$

et, en les employant, on peut mettre, quel que soit h, les équations qui donnent x_{00}, x_{11}, x_{22} sous une forme très-simple.

Introduisons la variable u définie par la formule

$$\mathrm{M}u = x_0^2 e^{-2\mathrm{R}_1 - 2\mathrm{R}_2} + x_1^2 e^{-2\mathrm{R} - 2\mathrm{R}_2} + x_2^2 e^{-2\mathrm{R} - 2\mathrm{R}_1}. \tag{122}$$

Les trois équations qui donnent x_{ii} pourront se mettre sous la forme très-simple

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 2\alpha_0 x_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho_1} = 2\alpha_1 x_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho_2} = 2\alpha_2 x_2, \tag{123}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned} 2\alpha_0 = e^{-2\mathrm{R}_1 - 2\mathrm{R}_2} & \left[\frac{\partial^2 \mathrm{R}_1}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{R}_2}{\partial \rho^2} - 3\frac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial \rho}\frac{\partial \mathrm{R}_2}{\partial \rho}\right] \\ &+ e^{-2\mathrm{R} - 2\mathrm{R}_2}\left[\frac{\partial^2(\mathrm{R}_2 - \mathrm{R})}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \rho_1}\frac{\partial \mathrm{R}_2}{\partial \rho_1}\right] \\ &+ e^{-2\mathrm{R} - 2\mathrm{R}_1}\left[\frac{\partial^2(\mathrm{R}_1 - \mathrm{R})}{\partial \rho_2^2} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \rho_2}\frac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial \rho_2}\right]; \end{aligned}\right. \tag{124}$$

α_1, α_2 se déduiront de l'équation précédente par des permutations circulaires. La forme (123) sera valable toutes les fois que les fonctions a, a_1, a_2 seront des constantes dont on aura ramené, en remplaçant le système par un système semblable, le produit à l'unité.

On a alors

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{1}{2}\mathrm{L}\,a - 2\,\mathrm{L}(\rho_1 - \rho_2), \\ R_1 &= \tfrac{1}{2}\mathrm{L}\,a_1 - 2\,\mathrm{L}(\rho_2 - \rho), \\ R_2 &= \tfrac{1}{2}\mathrm{L}\,a_2 - 2\,\mathrm{L}(\rho - \rho_1), \end{aligned}$$

et l'on trouve sans aucune difficulté les valeurs de α_0, α_1, α_2. Si l'on pose

$$(125) \qquad \varpi = a(\rho - \rho_1)^2(\rho - \rho_2)^2 + a_1(\rho_1 - \rho_2)^2(\rho_1 - \rho)^2 + a_2(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)^2,$$

on aura

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2\varpi(\rho_1 - \rho_2)^2 - 4a\,(\rho - \rho_1)^3(\rho - \rho_2)^3, \\ \alpha_1 &= 2\varpi(\rho_2 - \rho)^2 - 4a_1(\rho_1 - \rho)^3(\rho_1 - \rho_2)^3, \\ \alpha_2 &= 2\varpi(\rho - \rho_1)^2 - 4a_2(\rho_2 - \rho)^3(\rho_2 - \rho_1)^3. \end{aligned}$$

Ces expressions sont, comme on voit, assez compliquées. Mais la forme si simple des formules (123) nous met sur la voie de plusieurs propriétés de α_0, α_1, α_2. Ainsi l'on doit avoir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\rho_1} = \frac{\partial(x_0\alpha_0)}{\partial\rho_1} = \frac{\partial(x_1\alpha_1)}{\partial\rho}$$

ou

$$x_0\frac{\partial\alpha_0}{\partial\rho_1} - x_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial\rho} + (\alpha_0 - \alpha_1)x_{01} = 0,$$

et, comme cette équation doit être vérifiée par la fonction M, qui contient quatre constantes arbitraires, et dont les dérivées premières sont arbitraires, elle doit être identique à la première des équations (121), ce qui exige que l'on ait

$$(126) \qquad \frac{\partial\alpha_0}{\partial\rho_1} = \frac{\partial\alpha_1}{\partial\rho}, \quad \frac{\partial\alpha_0}{\partial\rho_1}(\rho - \rho_1) + 2(\alpha_0 - \alpha_1) = 0.$$

En vertu de ces équations et de celles qu'on obtiendrait en permutant les indices, on reconnaît que α_0, α_1, α_2 sont les dérivées d'une même fonction ψ. On a

$$\alpha_0 = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \qquad = \frac{\partial\psi}{\partial\rho_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial\psi}{\partial\rho_2},$$

et cette fonction ψ vérifie les équations

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\,\partial\rho_1}(\rho-\rho_1)+2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}-\frac{\partial\psi}{\partial\rho_1}\right)=0,$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}(\rho_1-\rho_2)+2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho_1}-\frac{\partial\psi}{\partial\rho_2}\right)=0,$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\,\partial\rho_2}(\rho-\rho_2)+2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}-\frac{\partial\psi}{\partial\rho_2}\right)=0.$$

Cette fonction ψ, que nous ne calculerons pas, ne dépend que de $\rho-\rho_1$, $\rho-\rho_2$. On a donc, comme on peut le vérifier,

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=0. \tag{127}$$

Nous désignerons les dérivées premières de ψ par α_i et les dérivées secondes par α_{ij}. On déduit de la relation précédente

$$\alpha_{01}+\alpha_{11}+\alpha_{21}=0. \tag{128}$$

Ces remarques préliminaires étant faites, nous pouvons effectuer d'une manière assez simple l'intégration des équations qui donnent M et qui sont les six équations (121), (123).

Toutes les valeurs de M correspondant à des systèmes qui sont les inverses les uns des autres, il suffira évidemment de trouver une seule valeur de M. A cet effet, nous chercherons s'il existe une valeur de M qui ne dépende que de $\rho-\rho_1$, $\rho-\rho_2$, et pour laquelle on ait, par conséquent,

$$x_0+x_1+x_2=0. \tag{129}$$

Dans ce cas, la fonction que nous avons désignée par u ne dépendra, elle aussi, que des différences de ρ, ρ_1, ρ_2, et l'on aura par conséquent

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial u}{\partial\rho_1}+\frac{\partial u}{\partial\rho_2}=0,$$

ou

$$x_0\alpha_0+x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=0. \tag{130}$$

Les équations (130), (129) définissent les rapports des dérivées de

M, et l'on peut poser

$$(131)\qquad \begin{cases} x_0 = \lambda(\alpha_1 - \alpha_2), \\ x_1 = \lambda(\alpha_2 - \alpha), \\ x_2 = \lambda(\alpha - \alpha_1), \end{cases}$$

λ étant une fonction à déterminer.

Calculons, au moyen de la première de ces formules, x_{01}, et substituons la valeur ainsi trouvée, ainsi que celles de x_0, x_1, dans la première des équations (121). Nous aurons

$$\lambda(\rho - \rho_1)(\alpha_{11} - \alpha_{21}) + (\rho - \rho_1)\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\lambda(\alpha_1 + \alpha_0 - 2\alpha_2).$$

Si nous éliminons α_{11} au moyen de la formule (128), et si nous employons les formules (126), nous trouverons

$$\frac{\partial\lambda}{\lambda\partial\rho_1} = -\frac{4}{\rho_1 - \rho} - \frac{4}{\rho_1 - \rho_2}.$$

On aura de même

$$\frac{\partial\lambda}{\lambda\partial\rho_2} = -\frac{4}{\rho_2 - \rho_1} - \frac{4}{\rho_2 - \rho},$$

$$\frac{\partial\lambda}{\lambda\partial\rho} = -\frac{4}{\rho - \rho_1} - \frac{4}{\rho - \rho_2}.$$

Ces formules ne sont pas incompatibles, et elles nous donnent

$$\lambda = \frac{C}{(\rho - \rho_1)^4(\rho_1 - \rho_2)^4(\rho_2 - \rho)^4}.$$

Nous poserons, pour abréger,

$$(132)\qquad \zeta = (\rho - \rho_1)(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho),$$

et nous aurons

$$(133)\qquad \lambda = \frac{C}{\zeta^4}.$$

Avec cette valeur de λ, les dérivées de M définies par les formules (131) sont déterminées, et l'on trouve facilement

$$dM = \frac{2C}{\zeta^4}(\zeta\, d\varpi - 3\varpi\, d\zeta),$$

ou, en intégrant,

$$M = 2C\frac{\varpi}{\zeta^3} + 2C_1.$$

Cette valeur satisfait aux équations (121). En exprimant qu'elle doit satisfaire aux équations (123), on trouve

$$C_1 = 0.$$

On a donc, en posant $2C = 1$, ce qui ne fait que remplacer le système par un système semblable,

$$M = \frac{\varpi}{\zeta^3}, \tag{134}$$

ce qui donne, pour le système orthogonal correspondant, l'expression

$$ds^2 = \frac{\zeta^6}{\varpi^2}\left[\frac{1}{a}\frac{d\rho^2}{(\rho-\rho_1)^4(\rho-\rho_2)^4} + \frac{1}{a_1}\frac{d\rho_1^2}{(\rho_1-\rho)^4(\rho_1-\rho_2)^4} + \frac{1}{a_2}\frac{d\rho_2^2}{(\rho_2-\rho)^4(\rho_2-\rho_1)^4}\right], \tag{135}$$

ou

$$ds^2 = \frac{\zeta^2}{\varpi^2}\left[\frac{1}{a}(\rho_1-\rho_2)^4 d\rho^2 + \frac{1}{a_1}(\rho_2-\rho)^4 d\rho_1^2 + \frac{1}{a_2}(\rho-\rho_1)^4 d\rho_2^2\right], \tag{136}$$

avec la condition

$$a + a_1 + a_2 = 0.$$

Il resterait à trouver les coordonnées x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2. Ce calcul assez long, qui exigerait l'intégration de six nouvelles équations aux dérivées partielles, peut être évité par l'emploi de l'artifice suivant :

Si, dans l'expression (135) de ds^2, on remplace chacune des variables ρ_i par $\frac{1}{(\rho_i + h)}$, on aura pour ds^2 une forme toute semblable, dans laquelle le multiplicateur seul $\frac{1}{M^2} = \frac{\zeta^6}{\varpi^2}$ sera changé et multiplié par $(\rho + h)^4(\rho_1 + h)^4(\rho_2 + h)^4$. Il suit de là que, si l'on effectue, dans l'expression de M(134), la même substitution, et si l'on divise le résultat obtenu par $(\rho + h)^2(\rho_1 + h)^2(\rho_2 + h)^2$, on aura une nouvelle solution M′ contenant une constante arbitraire h. On trouve ainsi

$$M' = \frac{a(\rho-\rho_1)^2(\rho-\rho_2)^2(\rho_1+h)^2(\rho_2+h)^2}{\zeta^3} + \ldots, \tag{137}$$

les deux termes non écrits se déduisent du premier par des permutations d'indices.

Or toute nouvelle solution pour M est de la forme

$$kM[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2],$$

a, b, c, k étant des constantes convenablement choisies, et x, y, z les valeurs des coordonnées correspondant à la valeur M. Il suit de là que, si l'on pose, en ordonnant, par rapport à h, la valeur de M',

$$\frac{M'}{M} = h^4 + Ph^3 + Qh^2 + Rh + S;$$

P, Q, R, S seront des fonctions linéaires de x, y, z, $x^2+y^2+z^2$. On a

$$(138)\quad \left\{\begin{aligned} M\zeta &= \frac{a}{(\rho_1-\rho_2)^2} + \frac{a_1}{(\rho_2-\rho)^2} + \frac{a_2}{(\rho-\rho_1)^2}, \\ MP\zeta &= \frac{a(\rho_1+\rho_2)}{(\rho_1-\rho_2)^2} + \ldots, \\ MQ\zeta &= \frac{a\rho_1\rho_2}{(\rho_1-\rho_2)^2} + \ldots, \\ MR\zeta &= \frac{a\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)}{(\rho_1-\rho)^2} + \ldots, \\ MS\zeta &= \frac{a\rho_1^2\rho_2^2}{(\rho_1-\rho_2)^2} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

P, Q, R, S étant des fonctions linéaires de x, y, z, $x^2+y^2+z^2$, il faut qu'il y ait une relation du second degré entre ces quatre quantités. Nous allons d'abord chercher cette relation.

Introduisons la fonction Q' définie par l'égalité

$$Q' = 4Q,$$

ou

$$4MQ\zeta = \frac{4a\rho_1\rho_2}{(\rho_1-\rho_2)^2} = \cdots = \frac{a(\rho_1+\rho_2)^2}{(\rho_1-\rho_2)^2} + \ldots = MQ'\zeta.$$

On établira facilement la relation

$$(MP\zeta)(MR\zeta) - (MQ\zeta)(MQ'\zeta) = M\zeta(MS\zeta) - (MQ\zeta)^2,$$

ou

$$PR - 4Q^2 = S - Q^2,$$

ou

$$S = PR - 3Q^2;$$

ce qu'on peut écrire

$$S = \left(\frac{P+R}{2}\right)^2 + \left(\frac{i(P-R)}{2}\right)^2 + (Q\sqrt{-3})^2.$$

La forme de cette identité nous montre que l'on a, k désignant une constante,

$$(139)\quad \left\{\begin{array}{l} x = k\dfrac{P+R}{2}, \quad y = k\dfrac{i(P-R)}{2}, \quad z = kQ\sqrt{-3}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = Sk^2. \end{array}\right.$$

Telles sont les expressions des coordonnées du système cherché.

On voit que, si l'on voulait avoir des surfaces réelles, il faudrait remplacer y, z par iy, iz, et la formule (135) donnerait, pour les surfaces ainsi obtenues, non plus ds^2, mais

$$dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

§ XX. — *Indications sur la solution correspondante à l'hypothèse $h = \frac{1}{2}$.*

Il ne nous reste plus qu'à traiter la quatrième solution $h = \frac{1}{2}$, pour laquelle les fonctions a, a_1, a_2 sont les valeurs, pour ρ, ρ_1, ρ_2, d'un même polynôme du troisième degré. Les trois équations qui déterminent M deviennent ici

$$(140)\quad \left\{\begin{array}{l} x_{01}(\rho - \rho_1) = \frac{1}{2}(x_0 - x_1), \\ x_{12}(\rho_1 - \rho_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), \\ x_{20}(\rho - \rho_2) = \frac{1}{2}(x_0 - x_2), \end{array}\right.$$

et l'on ne peut les intégrer qu'en employant des intégrales définies assez compliquées.

Pour me rendre compte de la nature de la solution finale, j'ai commencé par étudier le cas où les trois polynômes a, a_1, a_2 se réduisent à une même constante, qu'on peut alors supposer égale à l'unité. Même dans ce cas si simple, la valeur de M ne peut être obtenue que par le moyen des intégrales elliptiques.

Dans cette hypothèse, les formules (123) du paragraphe précédent s'appliquent encore, et, en calculant les valeurs de α_0, α_1, α_2, on trouve

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = -\tfrac{1}{4};$$

les équations (123) deviennent donc

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{1}{4}x_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho_1} = -\frac{1}{4}x_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho_2} = -\frac{1}{4}x_2,$$

et elles sont immédiatement intégrables. On obtient ainsi l'équation du premier ordre

$$(141)\quad \left\{\begin{aligned} &(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)x_0^2 + (\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)x_1^2 \\ &\qquad + (\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)x_2^2 - \tfrac{1}{4}M^2 + 2CM = 0, \end{aligned}\right.$$

qu'il faudra combiner avec les équations (140). Cherchons s'il y aura une solution commune ne dépendant que de $\rho-\rho_1$, $\rho-\rho_2$, et pour laquelle on aura, par conséquent,

$$(142)\quad \left\{\begin{aligned} &x_0 + x_1 + x_2 = 0, \\ &x_{00} + x_{10} + x_{12} = 0. \end{aligned}\right.$$

Différentions l'équation (141), et remplaçons x_{00}, x_{01}, x_{02} par leurs valeurs déduites des équations (142), (140). Nous aurons

$$-\frac{M}{2} + 2C - \rho x_0 - \rho_1 x_1 - \rho_2 x_2 = 0.$$

Si de cette équation nous tirons M pour le porter dans l'équation (141), et que nous tenions compte de l'équation (142) entre les dérivées premières, il restera

$$C^2 = 0.$$

Ainsi une au moins des valeurs de M satisfera aux deux équations

$$-\frac{M}{2} = \rho x_0 + \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2,$$
$$0 = x_0 + x_1 + x_2,$$

dont la première exprime que M est homogène et de degré $-\frac{1}{2}$. Prenons

$$M = \frac{1}{\sqrt{\rho - \rho_2}} \varphi\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_2}\right),$$

ou, en posant $\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_2} = t$,

$$M = \frac{1}{\sqrt{\rho - \rho_2}} \varphi(t).$$

En portant cette valeur de M dans l'une quelconque des équations (140), on trouvera pour φ l'équation

$$(t^2 - t)\varphi'' - (1 - 2t)\varphi' + \frac{\varphi}{4} = 0. \tag{143}$$

Or cette équation est bien connue : c'est celle à laquelle satisfait l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - tx^2)}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(1 - tx)}}.$$

On aura donc pour M la valeur

$$M = \frac{1}{\sqrt{\rho - \rho_2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)\left(1 - x\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_2}\right)}},$$

à laquelle on peut donner la forme beaucoup plus élégante

$$M = \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{dx}{\sqrt{(x - \rho)(x - \rho_1)(x - \rho_2)}}. \tag{144}$$

On aperçoit donc deux solutions pour M, la précédente et celle qu'on en déduirait en remplaçant la limite ρ_2 de l'intégrale par ρ.

L'examen de ce cas particulier et la forme qu'on peut donner à une intégrale assez complète du système (140),

$$M = \int \frac{\varpi(a)\, da}{\sqrt{(a-\rho)(a-\rho_1)(a-\rho_2)}},$$

me portent à penser que, dans le cas général, on aura encore des intégrales elliptiques; mais, assuré de ne pas obtenir un système algébrique, je n'ai pas cherché à compléter la solution.

Le 2 mars 1877.