ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes, et des systèmes orthogonaux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 7 (1878), p. 227-260
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1878_2_7__227_0>

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DES COORDONNÉES CURVILIGNES

ET

DES SYSTÈMES ORTHOGONAUX,

PAR M. G. DARBOUX,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

DEUXIÈME PARTIE.

§ X. — *Extension des résultats précédents aux systèmes orthogonaux à n variables.*

On sait toute l'importance que présente en Mécanique l'emploi du système de coordonnées elliptiques à n variables ; je crois donc utile d'étendre les recherches précédentes aux systèmes orthogonaux à n variables. Nous rencontrerons ainsi des problèmes d'Analyse qui méritent d'être étudiés en eux-mêmes, et nous montrerons d'ailleurs que la connaissance d'un système orthogonal à n variables entraîne celle d'un nombre illimité de systèmes orthogonaux ordinaires à trois variables.

Je considère donc n fonctions $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ de n variables $x_1, \ldots, x_n$ qui satisfont aux $\frac{n(n-1)}{2}$ équations

$$(126)\qquad \delta_{\alpha^i}\alpha^k = 0,$$

où nous conservons les notations du § I. Ainsi α_k^i désignera la dérivée de α^i par rapport à x_k. Du reste, pour éviter autant que possible des notations compliquées, toutes les fois que nous aurons à considérer un certain nombre limité de fonctions α^i, nous les désignerons par les lettres u, v, w, t, α, sans indice. Rappelons aussi que nous avons posé comme définition

$$\begin{pmatrix} v & w \\ & u \end{pmatrix} = \Sigma\Sigma\, v_i w_k u_{ik},$$

et il résulte de la formule (11) que ce symbole est nul toutes les fois que v, w, u sont différents.

Le premier point que nous aurons à traiter et le plus important est le suivant :

Éliminer des équations (126), *par des dérivations, toutes les fonctions, moins une, que nous désignerons par la lettre u, et rechercher toutes les équations nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire cette fonction pour que le problème ait une solution.*

Aux équations (126), qui peuvent s'écrire

$$(127) \qquad \delta_v u = 0, \quad \delta_v w = 0, \quad \ldots,$$

nous avons à ajouter les suivantes :

$$(128) \qquad \begin{pmatrix} v & w \\ & u \end{pmatrix} = 0,$$

qui, jointes aux précédentes, constituent un système de $(n-1)^2$ équations ne contenant que les dérivées premières des fonctions v, w, et homogènes d'ailleurs par rapport aux dérivées de chaque fonction. Elles déterminent donc complétement les rapports de ces dérivées en fonction des seules dérivées premières et secondes de u. Du reste, la résolution de ces équations équivaut à la solution du problème d'Algèbre suivant, qui est bien connu :

Ramener les deux formes quadratiques

$$(129) \qquad \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2, \\ \Sigma\Sigma\, u_{ik} y_i y_k \end{cases}$$

à des sommes composées des mêmes carrés, au nombre de $n-1$, *sous la condition que les variables y soient liées par la relation*

$$(130) \qquad u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n = 0.$$

En effet, si l'on propose de résoudre ce dernier problème, on remplacera d'abord les variables y par $n-1$ variables z, qui soient telles que la relation (130) soit satisfaite identiquement, et qui seront celles dont les carrés seuls figureront dans la nouvelle expression des formes quadratiques. On posera

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 z_1 + \beta_1 z_2 + \ldots + \lambda_1 z_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n &= \alpha_n z_1 + \beta_n z_2 + \ldots + \lambda_n z_{n-1}, \end{aligned}$$

et l'on devra avoir d'abord les relations

$$(131) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0, \\ \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Puis, en exprimant que les formes quadratiques (129) ne contiennent plus que les carrés des variables z, on aura

$$(132) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \beta_1 + \ldots = 0, \\ \alpha_1 \gamma_1 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Sigma\Sigma\, u_{ik} \alpha_i \beta_k + \ldots = 0, \\ \Sigma\Sigma\, u_{ik} \alpha_i \gamma_k + \ldots = 0. \end{array} \right.$$

Ce sont, aux notations près, les équations (127), (128) que nous avons à résoudre; c'est ce que nous voulions prouver.

Je n'insiste pas sur ce problème, qui est bien connu. La solution en sera donnée par les formules suivantes.

Les dérivées de l'une quelconque des fonctions v, w, de v par exemple, satisferont à des équations de la forme

$$(133) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_{ik} v_k = \lambda v_i + \mu u_i, \\ u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = 0; \end{array} \right.$$

et, en éliminant les dérivées v_i et μ, on obtiendra pour λ l'équation suivante :

$$(134) \qquad \begin{vmatrix} u_{11} - \lambda & u_{12} & u_{13} & u_{1n} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} - \lambda & \ldots & u_{2n} & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & \ldots & \ldots & u_{nn} - \lambda & u_n \\ u_1 & \ldots & \ldots & u_n & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

de degré $n-1$ en λ, qu'il faudra résoudre, si, supposant la fonction u connue, on veut trouver les rapports des dérivées des $n-1$ autres fonctions.

Pour déterminer les fonctions v, w, on aura donc à intégrer des équations aux différentielles totales de la forme

$$A_1\,dx_1+\ldots+A_n\,dx_n=0. \tag{135}$$

Pour que des équations de cette forme soient exactement intégrables, il faut que certaines conditions soient satisfaites; $A_1, \ldots, A_n$ étant des fonctions des dérivées premières et secondes de u, on voit que la fonction u devra satisfaire à un certain nombre d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre. Ce sont ces équations que nous allons d'abord rechercher.

Mais auparavant nous avons à établir quelques identités qui nous seront indispensables. Désignons, en général, par G_i l'expression

$$G_i=\sqrt{\delta_{\alpha^i}\alpha^i}=\sqrt{(\alpha_1^i)^2+(\alpha_2^i)^2+\ldots+(\alpha_n^i)^2};$$

il est clair que les quotients

$$b_{ik}=\frac{\alpha_k^i}{G_i} \tag{136}$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale; car on a, par la définition de G_i,

$$b_{i1}^2+\ldots+b_{in}^2=1,$$

et les équations (126) peuvent s'écrire

$$b_{i1}b_{k1}+\ldots+b_{in}b_{kn}=0.$$

On aura donc aussi

$$\left\{\begin{array}{l} b_{1i}^2+b_{2i}^2+\ldots+b_{ni}^2=1,\\ b_{1i}b_{1k}+b_{2i}b_{2k}+\ldots+b_{ni}b_{nk}=0,\end{array}\right. \tag{137}$$

en vertu des propriétés connues de ces coefficients,

Cela posé, si nous désignons par α, v, w, u, t cinq fonctions quelconques du groupe considéré, on aura par définition

$$\begin{pmatrix}\alpha & w\\ & u\end{pmatrix}=\Sigma\Sigma\,\alpha_i w_k u_{ik},\quad \begin{pmatrix}\alpha & v\\ & t\end{pmatrix}=\Sigma\Sigma\,\alpha_i v_k t_{ik},$$

et, en multipliant,

$$\frac{1}{G_\alpha^2}\begin{pmatrix}\alpha & w \\ & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & v \\ & t\end{pmatrix} = \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma \frac{\alpha_i \alpha_j}{G_\alpha^2} w_k v_l u_{ik} t_{jl},$$

la somme devant être étendue à toutes les valeurs de i, j, k, l. Si nous remplaçons la fonction α successivement par toutes les fonctions $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$, et que nous fassions la somme des résultats obtenus, alors, en vertu des formules (137), tous les termes du second membre, dans lesquels i et j seront différents, donneront une somme nulle, et pour les autres le coefficient de $v_k w_l u_{ik} t_{il}$ deviendra l'unité. On aura donc.

$$(138) \qquad \sum_\alpha \frac{1}{G_\alpha^2}\begin{pmatrix}\alpha & v \\ & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & w \\ & u\end{pmatrix} = \Sigma\Sigma w_k v_l t_{il} u_{ik},$$

la somme du premier membre se composant de n termes correspondant aux n fonctions $\alpha^1 \ldots \alpha^n$.

Le second membre peut s'écrire

$$\Sigma_i\, \delta_w u_i\, \delta_v t_i.$$

Nous adopterons, pour le désigner, la notation

$$(139) \qquad \Sigma \delta_w u_i \delta_v t_i = \begin{pmatrix} w & v \\ u & t\end{pmatrix}.$$

Supposons d'abord les quatre fonctions t, u, v, w différant les unes des autres. Comme on sait que $\begin{pmatrix} u & v \\ & w\end{pmatrix}$ est nul toutes les fois que les fonctions sont différentes, on verra facilement que tous les termes du premier membre de l'équation (138) sont nuls, car le premier facteur $\begin{pmatrix}\alpha & v \\ & t\end{pmatrix}$ est nul tant que α est différent de v et de t; et, si α est v ou t, le second facteur est nul. On a donc

$$(140) \qquad \begin{pmatrix} w & v \\ u & t\end{pmatrix} = 0,$$

si u, v, w, t sont différents.

On pourrait faire beaucoup d'autres hypothèses. En voici une qui nous conduira à une formule que nous aurons à employer.

Supposons que l'on fasse $t = u$, le premier membre de l'équation

(138) se réduira au seul terme pour lequel $\alpha = u$, et l'on aura

$$\binom{u\ v}{u}\binom{u\ w}{u} = G_u^2\binom{w\ v}{u\ u},$$

ou, en ordonnant par rapport aux dérivées de v, w,

$$(141)\qquad \Sigma\Sigma v_i w_k (G_u^2 \delta_{u_i} u_k - \delta_u u_i \delta_u u_k) = 0.$$

Ces deux identités (140), (141) suffisent au résultat que nous voulons obtenir, et nous allons chercher maintenant les équations du troisième ordre auxquelles satisfait la fonction u.

Remarquons d'abord que l'équation

$$\binom{v\ w}{u} = \Sigma\Sigma v_i w_k u_{ik} = 0$$

est de la forme de l'équation (15) du § I; en lui appliquant la formule (16), nous aurons

$$(142)\qquad \Sigma\Sigma v_i w_k (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) = 0.$$

Si, dans cette équation, on remplace les dérivées v, w par toutes leurs valeurs possibles, on aura un premier groupe de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations auxquelles devra satisfaire la fonction u. Ce sont les équations analogues à celle que nous avons formée dans le cas de trois variables.

Je dis d'abord que, si l'on pose $H = \frac{1}{G_u}$, ces équations peuvent aussi être mises sous la forme irrationnelle

$$(143)\qquad \Sigma\Sigma v_i w_i \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} = 0.$$

On a effet

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} = H^5 (G_u^2 \delta_u u_{ik} + G_u^2 \delta_{u_i} u_k - 3\delta_u u_i \delta_u u_k),$$

et par suite

$$\Sigma\Sigma v_i w_k \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} = H^3 \Sigma\Sigma v_i w_k (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) + 3H^5 \Sigma\Sigma v_i w_k (G_u^2 \delta_{u_i} u_k - \delta_u u_i \delta_u u_k);$$

ce qui, en vertu de l'équation (141), se réduit à

$$(144)\qquad \Sigma\Sigma v_i w_k(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) = \frac{1}{H^3}\Sigma\Sigma v_i w_k \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k}$$

et justifie le résultat que nous avons annoncé.

Mais les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations que nous avons ainsi formées ne sont pas les seules auxquelles doive satisfaire la fonction u. Appliquons l'opération δ_t, t désignant une des fonctions du système, différente de u, v, w, au symbole

$$\begin{pmatrix} v\ w \\ u \end{pmatrix}.$$

Cette opération, effectuée sur les lettres v, w, donne les termes

$$\Sigma \delta_t v_i \delta_w u_i + \Sigma \delta_t w_i \delta_v u_i;$$

enfin, appliquée à la lettre u, elle donne

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, t_i v_k w_l u_{ikl},$$

somme qui est symétrique par rapport à t, v, w. On a donc, en se rappelant la notation (139),

$$\delta_t \begin{pmatrix} v\ w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\ w \\ v\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\ v \\ w\ u \end{pmatrix} + \Sigma\, t_i v_k w_l u_{ikl}.$$

Toutes les fois que t, v, w seront différents, en se rappelant les formules (128), (140), on aura

$$(145)\qquad \Sigma\Sigma\Sigma\, t_i v_k w_l u_{ikl} = 0;$$

ce qui constitue un nouveau type d'équations du troisième ordre, auxquelles doit satisfaire la fonction u. Remarquons qu'elle peut *être obtenue de trois manières différentes* par la différentiation des trois équations

$$\begin{pmatrix} v\ w \\ u \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} t\ w \\ u \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} v\ t \\ u \end{pmatrix} = 0.$$

L'équation (145) est le type de $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ équations nouvelles du troisième ordre, qui ne se présentaient pas dans le cas de trois variables, et auxquelles doit satisfaire la fonction u. Il y a donc, en général, deux groupes tout à fait différents d'équations pour la fonction u.

Avant de continuer ces recherches, je vais montrer que ces équations, qui sont nécessaires, sont aussi suffisantes, et que, si elles sont satisfaites, on peut trouver les $n-1$ autres fonctions complétant le système orthogonal. En effet, ces fonctions sont définies, nous l'avons vu, par des équations de la forme

$$\frac{v_1}{A_1} = \frac{v_2}{A_2} = \ldots = \frac{v_n}{A_n},$$

et l'on sait que, pour que ces équations soient compatibles, il faut et il suffit que toutes celles qu'on en déduit, en les différentiant, soient des conséquences des précédentes et se réduisent à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, qui ne pourront même pas complétement déterminer les dérivées secondes; car, si les équations précédentes sont vérifiées, elles le seront aussi en remplaçant v par $\varphi(v)$, ce qui permet de prendre arbitrairement une des dérivées secondes de v.

Au lieu de résoudre les équations

$$\begin{pmatrix} v & w \\ & u \end{pmatrix} = 0, \quad \delta_v u = 0, \quad \delta_w u = 0,$$

nous allons les différentier par rapport à chaque variable, et voir si les équations que l'on obtient, en éliminant toutes les dérivées secondes, sont satisfaites. Or ces équations sont au nombre de $(n-1)^2$; en les différentiant, on trouve donc $n(n-1)^2$ équations. Si l'on retranche de ce nombre celui

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1\right](n-1)$$

des équations qui doivent conserver les dérivées secondes, on trouve un nombre total

$$\frac{(n-1)^2(n-2)}{2}$$

d'équations qui ne contiendront plus que les dérivées premières, et qui devront être satisfaites en vertu des équations qui déterminent ces dérivées. Or nous avons déjà :

1° Les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations

$$\begin{pmatrix} v & w \\ & u \end{pmatrix} = 0,$$

qu'on obtient en différentiant les équations

$$\delta_v u = 0, \quad \delta_w u = 0,$$

et en effectuant des combinaisons qui font disparaître les dérivées secondes des fonctions v, w. Ces équations sont satisfaites, puisqu'elles servent à définir les dérivées v_i, w_k;

2° Les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations (143), qui devront être satisfaites;

3° Les $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ équations (118), qui doivent chacune être comptées pour trois, puisqu'on les obtient de trois manières différentes, chacune par la différentiation de trois équations distinctes. On a donc en tout

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(n-1)^2(n-2)}{2}$$

équations ne contenant pas les dérivées secondes des fonctions v, w, ce qui est bien le nombre que nous devions trouver. Ainsi nos équations du troisième ordre sont à la fois nécessaires et suffisantes.

§ XI. — *Application à un exemple particulier.*

Pour donner au moins une application des résultats précédents, cherchons les systèmes orthogonaux à n variables pour lesquels on aura

$$(146) \qquad u = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

X_i désignant une fonction de la seule variable x_i.

Si nous appliquons les méthodes de l'article précédent, nous trouverons que les équations qui déterminent toute autre fonction faisant partie du système sont les suivantes :

$$(147) \qquad v_i = \frac{\mu X_i'}{\lambda - X_i},$$

où λ est racine de l'équation

$$\Sigma \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i''} = 0 \tag{148}$$

Il faudra donc que les équations

$$\Sigma_i \frac{X_i' dx_i}{\lambda - X_i''} = 0,$$

où λ est racine de l'équation (148), soient exactement intégrables. En écrivant directement les conditions d'intégrabilité et remplaçant les dérivées de λ par leurs valeurs tirées de la formule (148) différentiée, on trouve sans difficulté des équations de la forme

$$2X_i'X_k'X_l' \begin{vmatrix} X_i'X_i''' - 2X_i''^2 & X_k'X_k''' - 2X_k''^2 & X_l'X_l''' - 2X_l''^2 \\ X_i'' & X_k'' & X_l'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

où les indices i, k, l sont quelconques. Ces équations peuvent être remplacées par les suivantes :

$$X'X_i''' - 2X_i''^2 = aX_i'' + b,$$

où a et b devront être considérés comme des constantes. C'est le même résultat que pour le cas de trois variables.

Le cas, de beaucoup le plus intéressant et qui a été examiné avec le plus de détails par M. Serret, dans l'hypothèse de trois variables indépendantes, est celui où l'on suppose $a = b = 0$, et où l'on a

$$u = m_1 \log x_1 + \ldots + m_n \log x_n. \tag{149}$$

Alors l'équation (148) devient, si pour plus d'élégance on y change λ en $\frac{1}{\lambda}$,

$$\frac{m_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}} + \ldots + \frac{m_n}{\lambda + \frac{x_n^2}{m_n}} = 0, \tag{150}$$

et les équations aux différentielles totales qu'il s'agit d'intégrer sont les suivantes :

$$\frac{x_1 dx_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}} + \ldots + \frac{x_n dx_n}{\lambda + \frac{x_n^2}{m_n}} = 0,$$

où il faut remplacer λ par chacune des racines de l'équation (150).

Cette équation (150) étant impossible à résoudre, il semble que l'intégration doit être empêchée. C'est donc un fait analytique très-curieux que l'on puisse intégrer la différentielle précédente.

Posons, en effet,

$$(151)\qquad v=\left(\lambda+\frac{x_1^2}{m_1}\right)^{m_1}\left(\lambda+\frac{x_2^2}{m_2}\right)^{m_2}\cdots\left(\lambda+\frac{x_n^2}{m_n}\right)^{m_n},$$

on trouvera

$$\frac{dv}{2v}=\frac{x_1\,dx_1}{\lambda+\frac{x_1^2}{m_1}}+\ldots+\frac{x_n\,dx_n}{\lambda+\frac{x_n^2}{m_n}},$$

et le coefficient de $d\lambda$ sera nul en vertu de l'équation même qui sert à déterminer λ. Nous obtenons donc le théorème suivant :

Les $n-1$ familles, complétant avec la fonction u le système orthogonal, s'obtiennent en éliminant λ entre l'équation (151) *et sa dérivée par rapport à λ.*

Par exemple, dans le cas de trois variables, si l'on prend la famille

$$u=x^m y^n z^p,$$

les deux autres familles de surfaces qu'on doit lui associer s'obtiennent en éliminant λ entre l'équation

$$(152)\qquad v=\left(\lambda+\frac{x^2}{m}\right)^m\left(\lambda+\frac{y^2}{n}\right)^n\left(\lambda+\frac{z^2}{p}\right)^p$$

et sa dérivée par rapport à λ, c'est-à-dire en cherchant l'enveloppe de ces surfaces.

Traitons, par exemple, le cas de $m=n=1$, $p=-1$. La première famille de surfaces sera composée des paraboloïdes

$$xy=uz.$$

Les deux autres seront les enveloppes des surfaces

$$v=\frac{(\lambda+x^2)(\lambda+y^2)}{\lambda-z^2}.$$

En cherchant cette enveloppe, l'équation qui définira λ sera

$$\frac{1}{\lambda+x^2}+\frac{1}{\lambda+y^2}-\frac{1}{\lambda-z^2}=0,$$

et elle donne

$$\lambda = z^2 \pm \sqrt{(z^2+y^2)(z^2+x^2)},$$
$$\lambda + x^2 = \sqrt{z^2+x^2}\left(\sqrt{z^2+x^2} \pm \sqrt{z^2+y^2}\right),$$
$$\lambda + y^2 = \sqrt{z^2+y^2}\left(\sqrt{z^2+y^2} \pm \sqrt{z^2+x^2}\right);$$

d'où résulte pour v l'expression

$$\sqrt{v} = \sqrt{z^2+x^2} \pm \sqrt{z^2+y^2}.$$

C'est le résultat connu de M. Serret.

Traitons encore le cas où le premier système est donné par l'équation

$$u = xyz.$$

Les deux autres familles sont les enveloppes des surfaces

$$v = (\lambda + x^2)(\lambda + y^2)(\lambda + z^2). \tag{153}$$

Posons

$$x^2 = \alpha + \beta + \gamma,$$
$$y^2 = \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma,$$
$$z^2 = \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma,$$

ω désignant une racine cubique imaginaire de l'unité. On aura

$$\alpha = \frac{x^2+y^2+z^2}{3}, \quad \beta = \frac{x^2+\omega^2 y^2+\omega z^2}{3}, \quad \gamma = \frac{x^2+\omega y^2+\omega^2 z^2}{3},$$

et l'équation (153) prendra la forme

$$v = (\lambda+\alpha)^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3(\lambda+\alpha)\beta\gamma.$$

En prenant la dérivée par rapport à λ, on trouve

$$(\lambda+\alpha)^2 = \beta\gamma, \quad \lambda + \alpha = 2\sqrt{\beta\gamma},$$

ce qui donne

$$v = \beta^3 + \gamma^3 \pm 2\beta\gamma\sqrt{\beta\gamma} = \left(\beta^{\frac{3}{2}} \pm \gamma^{\frac{3}{2}}\right)^2,$$

ou

$$3\sqrt{3}\sqrt{v} = (x^2+\omega^2y^2+\omega z^2)^{\frac{3}{2}} \pm (x^2+\omega y^2+\omega^2 z^2)^{\frac{3}{2}},$$

ce qui est conforme à un résultat énoncé sans démonstration par M. Cayley.

Mais on peut faire beaucoup d'autres applications du résultat général que nous avons trouvé.

Rappelons-nous les remarques relatives aux coordonnées pentasphériques. Nous avons vu que les conditions d'orthogonalité dans ce système s'expriment comme dans le système ordinaire, si les équations sont homogènes; $x_1, \ldots, x_5$ *désignant les coordonnées d'un point, nous considérerons encore la famille*

$$u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_5^{\alpha_5}; \tag{154}$$

mais, pour que l'équation précédente soit homogène, nous poserons

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_5 = 0. \tag{155}$$

Avec cette hypothèse, nous allons obtenir de nouveaux systèmes orthogonaux.

Les deux familles complétant le système seront les enveloppes des surfaces représentées par les équations

$$v = \left(\lambda + \frac{x_1^2}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \left(\lambda + \frac{x_2^2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\lambda + \frac{x_5^2}{\alpha_5}\right)^{\alpha_5}, \tag{156}$$

et il est facile de vérifier : 1° *que l'équation qui détermine* λ,

$$\frac{\alpha_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{\alpha_1}} + \ldots = 0,$$

se réduit, comme cela doit être, au second degré, en vertu de la relation homogène

$$x_1^2 + \ldots + x_5^2 = 0;$$

2° *que l'équation* (156), *après qu'on y a substitué à la place de* λ *sa valeur, devient homogène par rapport aux cinq quantités* x_i.

Le nouveau système orthogonal obtenu est, comme on le voit, très-général, puisqu'il contient, en dehors des exposants, les dix constantes qui figurent dans les équations des cinq sphères orthogonales.

Le système de ce genre qui se rapproche le plus de celui de M. Serret est celui pour lequel l'équation (154) prend la forme simple

$$u = \frac{x_1 x_2}{x_3 x_4}.$$

On verra facilement que les surfaces algébriques qui complètent le système ont une équation qu'on peut mettre sous la forme

$$\text{arc sin}\,\frac{\sqrt{x_1^2+x_3^2}}{ix_5}\pm\text{arc sin}\,\frac{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}{ix_5}=\text{const.}$$

Si, par exemple, on prend pour les cinq fonctions x_i

$$x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z,\quad x_4=\frac{x^2+y^2+z^2-\mathrm{R}^2}{2\mathrm{R}},\quad x_5=\frac{x^2+y^2+z^2+\mathrm{R}^2}{2i\mathrm{R}},$$

on aura le système orthogonal défini par les équations

$$\frac{xy}{z(x^2+y^2+z^2-\mathrm{R}^2)}=u,$$

$$\text{arc sin}\,\frac{2\mathrm{R}\sqrt{x^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2+\mathrm{R}^2}\pm\text{arc sin}\,\frac{2\mathrm{R}\sqrt{y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2+\mathrm{R}^2}=\text{const.}$$

Pour $\mathrm{R}=\infty$, on retrouve le système comprenant une famille de paraboloïdes et les surfaces

$$\sqrt{x^2+z^2}\pm\sqrt{y^2+z^2}=\text{const.}$$

La forme très-symétrique des résultats obtenus précédemment nous conduit, en outre, à plusieurs généralisations qui ne nous paraissent pas dépourvues d'intérêt.

Considérons d'abord les n fonctions obtenues en éliminant λ *entre l'équation*

$$u=\left(\lambda+\frac{x_1^2}{m_1}\right)^{m_1}\cdots\left(\lambda+\frac{x_n^2}{m_n}\right)^{m_n}\lambda^{\alpha} \tag{157}$$

et sa dérivée par rapport à λ

$$\frac{m_1}{\lambda+\frac{x_1^2}{m_1}}+\cdots+\frac{m_n}{\lambda+\frac{x_n^2}{m_n}}+\frac{\alpha}{\lambda}=0. \tag{158}$$

On aura n fonctions $u_1,\ldots,u_n$ *correspondant aux n valeurs de* λ. *Je dis que ces n fonctions forment un système orthogonal.* En effet, pour deux fonctions u_1, u_2, correspondant aux racines λ_1, λ_2, la relation d'orthogonalité sera

$$\frac{x_1^2}{\left(\lambda_1+\frac{x_1^2}{m_1}\right)\left(\lambda_2+\frac{x_2^2}{m_1}\right)}+\ldots+\frac{x_n^2}{\left(\lambda_1+\frac{x_n^2}{m_n}\right)\left(\lambda_2+\frac{x_n^2}{m_n}\right)}=0.$$

Il est facile de vérifier cette relation. Il suffit d'exprimer que λ_1, λ_2 vérifient l'équation (158), et d'éliminer α entre les deux équations ainsi obtenues. On retombe sur l'équation qu'il s'agit de vérifier.

Dans le cas de trois variables, on a le théorème suivant :

Les enveloppes des surfaces, représentées par l'équation

$$u=\left(\lambda+\frac{x^2}{m}\right)^m\left(\lambda+\frac{y^2}{n}\right)^n\left(\lambda+\frac{z^2}{p}\right)^p\lambda^q,$$

où l'on fait varier λ, forment un système triplement orthogonal.

Remarquons que ce système triple jouit toujours de la propriété si remarquable du système des surfaces du second degré. Les trois familles qui le composent sont représentées par la même équation, et il donne d'ailleurs des surfaces algébriques toutes les fois que les rapports de m, n, p, q sont commensurables.

Toutefois il y a un cas singulier qui se présente quand la somme des exposants

$$m+n+p+q=0$$

est nulle. Alors il n'y a que deux familles orthogonales qui sont composées de cônes ayant pour sommet l'origine. La troisième famille est évidemment formée des sphères ayant pour centre le sommet commun des cônes.

Il est clair qu'on peut aussi appliquer la proposition générale au cas de cinq variables et en déduire des théorèmes pour le cas de trois dimensions, en employant les coordonnées pentasphériques. Il suffira de disposer des constantes de telle manière que les équations obtenues soient homogènes.

Appelons encore $x_1, \ldots, x_5$ les cinq coordonnées pentasphériques d'un point et considérons l'équation

$$u=\left(\lambda+\frac{x_1^2}{m_1}\right)^{m_1}\left(\lambda+\frac{x_2^2}{m_2}\right)^{m_2}\left(\lambda+\frac{x_3^2}{m_3}\right)^{m_3}\left(\lambda+\frac{x_4^2}{m_4}\right)^{m_4}\left(\lambda+\frac{x_5^2}{m_5}\right)^{m_5}\lambda^{m_6}. \tag{159}$$

Si l'on élimine λ entre cette équation et sa dérivée par rapport à λ,

$$(160)\qquad \frac{m_1}{\lambda+\frac{x_1^2}{m_1}}+\ldots+\frac{m_6}{\lambda}=0,$$

on obtiendra une fonction u qui sera homogène et de degré zéro toutes les fois que la somme

$$(161)\qquad m_1+m_2+\ldots+m_5+m_6=0$$

sera nulle. D'ailleurs, avec cette hypothèse, l'équation (160) se réduira au troisième degré par rapport à λ. En substituant les trois racines dans l'équation (159), on aura trois fonctions u_1, u_2, u_3 qui, égalées à des constantes, donneront encore trois familles d'un système orthogonal. Ces systèmes orthogonaux jouiront, comme les précédents, de la propriété remarquable que les trois familles seront représentées par une même équation.

Les résultats précédents sont encore susceptibles de plusieurs généralisations que nous allons indiquer successivement et qui nous ont conduit à la détermination des lignes de courbure d'un grand nombre de surfaces.

Je présenterai sous une forme synthétique la première de ces généralisations. Considérons les $n-1$ fonctions u obtenues en éliminant λ entre l'équation

$$(161)\qquad u=\left(\lambda+\frac{x_1+\alpha_1}{\sqrt{m_1}}\right)^{m_1},\quad \left(\lambda+\frac{x_n+\alpha_n}{\sqrt{m_n}}\right)^{m_n}$$

et sa dérivée par rapport à λ

$$(162)\qquad \frac{m_1}{\lambda+\frac{x_1+\alpha_1}{\sqrt{m_1}}}+\ldots+\frac{m_n}{\lambda+\frac{x_n+\alpha_n}{\sqrt{m_n}}}=0.$$

Je dis que ces $n-1$ fonctions forment un système orthogonal. Soit en effet u l'une des fonctions, correspondant à une des racines λ de l'équation précédente, on aura

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{u\sqrt{m_1}}{\lambda+\frac{x_1+\alpha_1}{\sqrt{m_1}}}.$$

Désignons de même par u' la fonction correspondant à une autre racine λ', on aura

$$\frac{\partial u'}{\partial x_1} = \frac{u' \sqrt{m_1}}{\lambda' + \frac{x_1 + \alpha_1}{\sqrt{m_1}}},$$

et la condition d'orthogonalité prendra la forme

$$\sum \frac{m_1}{\left(\lambda + \frac{x_1 + \alpha_1}{\sqrt{m_1}}\right)\left(\lambda' + \frac{x_1 + \alpha_1}{\sqrt{m_1}}\right)} = 0.$$

Or cette relation est satisfaite, car elle est équivalente à celle qu'on obtient en substituant les deux racines λ, λ' dans l'équation (162) et retranchant les résultats obtenus.

On obtient ainsi un système orthogonal incomplet, puisqu'il ne contient que $n - 1$ fonctions, correspondant aux $n - 1$ racines de l'équation (162). On peut trouver facilement une dernière fonction complétant le système, qui sera

$$(163) \qquad u = \sqrt{m_1}\, x_1 + \sqrt{m_2}\, x_2 + \ldots + \sqrt{m_n}\, x_n,$$

comme il est aisé de le vérifier.

Par exemple, dans le cas de $n = 3$, les enveloppes des surfaces

$$u = \left(\lambda + \frac{x}{\sqrt{m}}\right)^m \left(\lambda + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \left(\lambda + \frac{z}{\sqrt{p}}\right)^p$$

constituent un système double orthogonal auquel on peut adjoindre la famille de plans parallèles

$$u' = x\sqrt{m} + y\sqrt{n} + z\sqrt{p}.$$

On voit donc que les deux premières familles seront composées de cylindres, et l'on a par conséquent un système trop particulier. Mais on peut éviter cet inconvénient et obtenir un système dont aucune des familles n'est composée de plans, en revenant au cas général et raisonnant comme il suit.

Considérons le système orthogonal formé des $n - 1$ familles obtenues en éliminant λ entre les équations (161), (162) et de la famille (163). Effectuons une substitution linéaire *orthogonale* définie par les équations

$$
(164) \qquad \left\{\begin{array}{l}
\sqrt{m_1}\,x_1 + \sqrt{m_2}\,x_2 + \ldots + \sqrt{m_n}\,x_n = \sqrt{\sigma}\,y_n, \\
\beta'_1 x_1 + \beta'_2 x_2 + \ldots + \beta'_n x_n = y_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\beta_1^{n-1} x_1 + \beta_2^{n-1} x_2 + \ldots + \beta_n^{n-1} x_n = y_{n-1}, \\
\sigma = m_1 + m_2 + \ldots + m_n,
\end{array}\right.
$$

substitution qui ne fera pas perdre aux fonctions leur caractère de former un groupe orthogonal, et qui est d'ailleurs caractérisée par les deux équations

$$
(165) \qquad \left\{\begin{array}{l}
\sqrt{m_1}\,x_1 + \ldots + \sqrt{m_n}\,x_n = \sqrt{\sigma}\,y_n, \\
x_1^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2.
\end{array}\right.
$$

Après cette substitution, l'une des fonctions du système, celle qui est définie par l'équation (163), ne contiendra que y_n, et les relations d'orthogonalité, qui sont toujours satisfaites, nous montrent que les $n-1$ autres fonctions définies par les équations (161), (162) ne contiendront plus y_n et formeront par conséquent un système complet de $n-1$ fonctions orthogonales de $n-1$ variables.

En changeant les notations et remplaçant n par $n+1$, nous avons donc le théorème suivant :

Les n fonctions obtenues en éliminant λ entre l'équation

$$
u = \left(\lambda = \frac{z_1 + \alpha_1}{\sqrt{m_1}}\right)^{m_1} \ldots \left(\lambda + \frac{z_{n+1} + \alpha_{n+1}}{\sqrt{m_{n+1}}}\right)^{m_{n+1}}
$$

et sa dérivée par rapport à λ forment un système orthogonal, si les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ sont des fonctions linéaires de $x_1, \ldots, x_n$ assujetties à vérifier les deux identités

$$
\begin{gathered}
\sqrt{m_1}\,z_1 + \sqrt{m_2}\,z_2 + \ldots + \sqrt{m_n}\,z_n + \sqrt{m_{n+1}}\,z_{n+1} = 0, \\
z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{n+1}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.
\end{gathered}
$$

L'application au cas de $n = 3$ est évidente.

J'ajouterai encore le théorème suivant, qui se démontre comme les précédents, mais sur lequel je n'insiste pas, parce qu'il donne des fonctions transcendantes.

Les n fonctions obtenues en éliminant λ entre l'équation

$$u = \left(\lambda + \frac{x_1}{\sqrt{m_1}}\right)^{m_1} \cdots \left(\lambda + \frac{x_n}{\sqrt{m_n}}\right)^{m_n} e^{a\lambda}$$

et sa dérivée par rapport à λ forment un système orthogonal.

Les mêmes résultats sont évidemment applicables au système des coordonnées pentasphériques, et l'on obtient alors la proposition qui suit :

Les enveloppes des surfaces représentées par l'équation

$$u = \left(\lambda + \frac{x_1}{\sqrt{m_1}}\right)^{m_1} \left(\lambda + \frac{x_2}{\sqrt{m_2}}\right)^{m_2} \cdots \left(\lambda + \frac{x_6}{\sqrt{m_6}}\right)^{m_6}, \tag{166}$$

où l'on a

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_6 = 0,$$

et où $x_1, \ldots, x_6$ sont des fonctions linéaires de $x^2 + y^2 + z^2$, x, y, z, assujetties à vérifier les deux identités

$$x_1\sqrt{m_1} + \ldots + x_6\sqrt{m_6} = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 = 0,$$

forment un système triple orthogonal.

Il est d'ailleurs aisé de reconnaître que la dérivée par rapport à λ de l'équation (166) se réduit au troisième degré ; à chacune des trois racines correspond une des familles du système.

§ XI *bis.* — *Généralisation des résultats précédents et détermination des lignes de courbure d'une classe étendue de surfaces.*

La méthode que nous avons suivie dans l'étude des questions précédentes avait pour point de départ l'examen du cas où l'une des fonctions du système orthogonal est de la forme

$$u = m \log x_1 + \ldots + m_n \log x_n.$$

Nous allons voir maintenant qu'elle est susceptible de s'appliquer au cas le plus général où u est de la forme

$$u = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

les fonctions $X_1, \ldots, X_n$ étant choisies d'une manière arbitraire parmi celles qui vérifient les équations déjà trouvées

$$X'_i X'''_i - 2 X''^2_i = \lambda X''_i + \mu,$$

que l'on peut écrire

$$(167) \qquad X'_i X'''_i = 2(X''_i - a)(X''_i - b).$$

Dans le Mémoire déjà cité, M. Serret a montré comment on pouvait intégrer complétement cette équation. La solution la plus générale, pour l'une quelconque des fonctions, que nous désignerons par X, s'obtiendra en éliminant X'' entre les deux équations

$$(168) \qquad \begin{cases} x - x_0 = \dfrac{m}{2} \displaystyle\int (X'' - a)^{\frac{a}{2(a-b)} - 1} (X'' - b)^{\frac{b}{2(b-a)} - 1} dX'', \\ X - X_0 = \dfrac{m^2}{2} \displaystyle\int (X'' - a)^{\frac{a}{a-b} - 1} (X'' - b)^{\frac{b}{b-a} - 1} dX''. \end{cases}$$

Supposons donc que l'on ait trouvé les fonctions X_i, on aura la première famille du système. Nous allons établir ce résultat nouveau, que la détermination des autres familles se ramène à de simples quadratures. Nous donnerons même une proposition plus générale, en apprenant à composer avec les fonctions X_i un système orthogonal comprenant celui que nous cherchons comme cas particulier.

Supposons donc qu'on ait trouvé les n fonctions X_i satisfaisant aux équations différentielles dont le type est

$$(169) \qquad X' X''' = 2(X'' - a)(X'' - b),$$

et déterminons une quantité λ par l'équation de degré n,

$$(170) \qquad \sum \frac{X'^2}{\lambda - X''} + A = 0,$$

où A désigne une constante quelconque. Le signe Σ indique que la somme porte sur toutes les fonctions X_i; nous supprimons l'indice pour plus de simplicité. Cela posé, considérons la fonction u définie par l'équation

$$(171) \qquad u = \int_\alpha^{\lambda_k} \frac{X'^2 \varpi(\lambda)\, d\lambda}{\lambda - X''} + \int_\alpha^{\lambda_k} A \varpi(\lambda)\, d\lambda,$$

où l'on met pour λ_k une quelconque des racines de l'équation (170).

Dans les quadratures, X'_i, X''_i sont traités comme des constantes. Nous avons donc une fonction dont la dérivée par rapport à λ_k est toujours nulle; mais il n'en est pas de même des dérivées par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$; $\varpi(\lambda)$ et α sont une fonction et une constante que nous déterminerons dans le cours de la démonstration. En différentiant l'équation (171) par rapport à l'une quelconque des variables x_i, et remarquant que la dérivée de u par rapport à λ_k étant nulle, on peut traiter λ_k comme une constante, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_\alpha^{\lambda_k} \left[\frac{X'^2 X'''}{(\lambda - X'')^2} + \frac{2X'X''}{\lambda - X''}\right] \varpi(\lambda)\, d\lambda,$$

ou, en remplaçant $X'X'''$ par sa valeur tirée de l'équation (169), et réduisant,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2X' \int_\alpha^{\lambda_k} \frac{\varpi(\lambda)\, d\lambda}{\lambda - X''}\left[a + b - \lambda + \frac{(\lambda - a)(\lambda - b)}{\lambda - X''}\right].$$

Déterminons la fonction ϖ par la condition

$$\frac{d}{d\lambda}[\varpi(\lambda)(\lambda - a)(\lambda - b)] = \varpi(\lambda)(\lambda - a - b), \tag{172}$$

et la constante α par la condition

$$\frac{\varpi(\alpha)(\alpha - a)(\alpha - b)}{\alpha - X''} = 0, \tag{173}$$

l'intégrale qui figure dans l'expression de $\frac{\partial u}{\partial x}$ pourra être déterminée, et l'on trouvera

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{2X'_i}{\lambda - X''_i}\varpi(\lambda_k)(\lambda_k - a)(\lambda_k - b). \tag{174}$$

Cette expression des dérivées de u nous montre que les n fonctions $u_1, \ldots, u_n$ correspondant aux n racines de l'équation (170) forment un système orthogonal, car, pour deux quelconques de ces fonctions u_1, u_2 correspondantes aux racines λ_1, λ_2, la relation d'orthogonalité prendra la forme

$$\sum \frac{X'^2_i}{(\lambda_1 - X''_i)(\lambda_2 - X''_i)} = 0,$$

et elle est une conséquence des équations que l'on obtient en remplaçant λ par λ_1, λ_2 dans l'équation (170).

Avant de continuer la discussion, voyons comment on déterminera la fonction $\varpi(\lambda)$ et la constante α. L'équation (172) se ramène à la forme

$$\varpi'(\lambda)(\lambda-a)(\lambda-b)=-\lambda\varpi(\lambda),$$

et elle admet pour intégrale

$$\varpi(\lambda)=(\lambda-a)^{\frac{a}{b-a}}(\lambda-b)^{\frac{b}{a-b}}.$$

La somme des deux exposants $\frac{a}{b-a}$, $\frac{b}{a-b}$ étant -1, l'un au moins est plus grand que -1. Supposons, pour fixer les idées,

$$\frac{a}{b-a}>-1,$$

et par conséquent, en ajoutant l'unité aux deux membres,

$$\frac{b}{b-a}>0,$$

alors la constante α devant annuler

$$\frac{\varpi(\alpha)(\alpha-a)(\alpha-b)}{\alpha-X''}=\frac{(\alpha-a)^{\frac{b}{b-a}}(\alpha-b)^{\frac{a}{a-b}}}{\alpha-X''},$$

nous pouvons prendre $\alpha=a$. Nous avons donc le théorème suivant :

Si l'on détermine n valeurs de λ par l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{X_i'^2}{\lambda-X_i''}+A=0, \tag{175}$$

les fonctions X_i *satisfaisant aux équations différentielles*

$$X_i'X_i'''=2(X_i''-a)(X_i''-b),$$

les n fonctions

$$u_k=\Sigma X_i'^2\int_\alpha^{\lambda_k}\frac{(\lambda-a)^{\frac{a}{b-a}}(\lambda-b)^{\frac{b}{a-b}}}{\lambda-X_i''}\,d\lambda+A\int_\alpha^{\lambda_k}(\lambda-a)^{\frac{a}{b-a}}(\lambda-b)^{\frac{b}{a-b}}\,d\lambda,$$

où λ_k désigne une des racines de l'équation (175) *où α est celui des deux nombres a et b pour lequel l'exposant de $\lambda - \alpha$ est plus grand que -1 et où les intégrales sont prises en considérant λ comme seule variable, ces n fonctions forment un système orthogonal.*

On verra d'ailleurs très-facilement que, dans le cas où A est nul, l'équation en λ se réduisant au degré $n-1$, on n'a plus que $n-1$ fonctions orthogonales, et que le système peut être complété par l'adjonction de la fonction

$$u = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

On retrouve ainsi les systèmes étudiés par M. Serret pour le cas de $n=3$, et l'on obtient ce résultat important que la détermination de toutes les familles, et par conséquent celle des lignes de courbure des surfaces qui le composent, se ramènent à de simples quadratures.

Les résultats précédents, qui nous paraissent élégants, montrent l'utilité qu'il peut y avoir dans certains cas à étudier la Géométrie à n dimensions, ou, si l'on veut, l'Analyse à n variables. Il est clair que c'est seulement pour introduire la symétrie dans des calculs qui, très-possibles dans le cas de trois variables, seraient inextricables dans le cas général, que nous avons introduit cette variable λ, dont l'emploi joue un rôle fondamental dans notre analyse et nous a donné les propositions précédentes.

Nous allons, en terminant, donner une nouvelle et dernière généralisation des résultats précédents qui nous conduira aux lignes de courbure d'un nombre assez grand de surfaces algébriques et transcendantes.

Considérons maintenant l'équation

$$(176)\qquad \sum \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i''} - 2(k-1)(X_1 + \ldots + X_n) = 0,$$

qui détermine n valeurs de λ. Nous supposerons que les fonctions X_i satisfassent aux équations différentielles

$$(177)\qquad X'X''' = 2k(X''-a)(X''-b).$$

Multiplions l'équation (176) par $\varpi(\lambda)\,d\lambda$, $\varpi(\lambda)$ étant à déterminer, et intégrons-la en considérant toujours λ comme seule variable. Nous aurons

$$u = \sum \int_\alpha^{\lambda_k} \frac{X'^2\,\varpi(\lambda)\,d\lambda}{\lambda - X''} - 2(k-1)\int_\alpha^{\lambda_k} (X_1 + \ldots + X_n)\,\varpi(\lambda)\,d\lambda,$$

α étant une constante à déterminer et λ_k étant une des racines de l'équation (176). On obtient ainsi une fonction dont la dérivée partielle par rapport à λ_k est nulle, et dont par conséquent la dérivée par rapport à x_i se réduit aux seuls termes

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_\alpha^{\lambda_k} \left[\frac{X_i' X_i'''}{(\lambda - X_i'')^2} - \frac{2 X_i' X_i''}{\lambda - X_i''} - 2(k-1) X_i' \right] \varpi(\lambda)\, d\lambda.$$

En remplaçant X_i''' par sa valeur tirée de l'équation (177), nous aurons, après quelques réductions,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 2 X_i' \int_\alpha^{\lambda_k} \left[\frac{k(\lambda - a)(\lambda - b)}{(\lambda - X_i'')^2} - \frac{(2k-1)\lambda - k(a+b)}{\lambda - X_i''} \right] \varpi(\lambda)\, d\lambda.$$

Cela posé, définissons la fonction $\varpi(\lambda)$ par la condition

$$(178) \qquad k \frac{d}{d\lambda} (\lambda - a)(\lambda - b) \varpi(\lambda) = [(2k-1)\lambda - k(a+b)] \varpi(\lambda)$$

et la constante α par la condition

$$\frac{\varpi(\alpha)(\alpha - a)(\alpha - b)}{\alpha - X''} = 0.$$

L'intégrale qui exprime $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ pourra être déterminée, et l'on trouvera

$$(179) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = -2 X_i' \frac{k \varpi(\lambda_k)(\lambda_k - a)(\lambda_k - b)}{\lambda_k - X_i''}.$$

Il suit de là que les n fonctions $u_1, \ldots, u_n$, correspondant aux n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de l'équation (176), forment un système orthogonal; car, pour les deux fonctions u_1, u_2, par exemple, la condition d'orthogonalité

$$\sum \frac{X_i'^2}{(\lambda_1 - X_i'')(\lambda_2 - X_i'')} = 0$$

est identique à celle qu'on obtient, en substituant λ_1, λ_2 dans l'équation (176), et retranchant les deux équations ainsi obtenues.

La fonction $\varpi(\lambda)$ se détermine sans difficulté au moyen de l'équation (178). On trouve

$$(180) \qquad \varpi(\lambda) = (\lambda - a)^{\frac{a}{k(b-a)}} (\lambda - b)^{\frac{b}{k(a-b)}}.$$

La constante α est ensuite déterminée par la condition.

$$\frac{(\alpha-a)^{\frac{a}{k(b-a)}+1}(\alpha-b)^{\frac{b}{k(a-b)}+1}}{\alpha-\mathrm{X}_i''}=0.$$

Si l'un des exposants du numérateur est positif, on prendra $\alpha=a$ ou $\alpha=b$; s'ils sont négatifs, on prendra $\alpha=\pm\infty$.

En résumant tout ce qui précède, nous obtenons le théorème suivant :

Considérons n fonctions $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ *dépendant chacune uniquement de la variable de même indice et satisfaisant aux équations différentielles*

$$\mathrm{X}_i'\mathrm{X}_i'''=2k(\mathrm{X}_i''-a)(\mathrm{X}_i''-b). \tag{181}$$

Si nous appelons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *les n fonctions de* $x_1, \ldots, x_n$ *racines de l'équation*

$$\sum\frac{\mathrm{X}_i'^2}{\lambda-\mathrm{X}_i''}-2(k-1)(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2\ldots+\mathrm{X}_n)=0, \tag{182}$$

les n fonctions définies par les quadratures

$$\left\{\begin{aligned} u_k=&\int_\alpha^{\lambda_k}(\lambda-a)^{\frac{a}{k(b-a)}}(\lambda-b)^{\frac{b}{k(a-b)}}d\lambda\\ &\times\left[\sum\frac{\mathrm{X}_i'^2}{\lambda-\mathrm{X}_i''}-2(k-1)(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\ldots+\mathrm{X}_n)\right],\end{aligned}\right. \tag{183}$$

où α *est un des trois nombres* a, b, ∞ *choisi par la seule condition que l'intégrale ait un sens déterminé, forment un système orthogonal.*

Si $a=b$, les formules précédentes sont illusoires; mais on se reportera à l'équation différentielle qui détermine $\varpi(\lambda)$.

Il importe de remarquer que, en employant le langage de la Géométrie, une des familles orthogonales précédentes comprend la surface

$$\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\ldots+\mathrm{X}_n=0,$$

dont on saura par conséquent déterminer les lignes de courbure.

Supposons, en effet, que l'une des racines λ devienne très-grande, l'équation (179) nous donnera, pour l'expression approchée de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -2\lambda^{1-\frac{1}{k}} X'_i,$$

et par conséquent

$$u = -2\lambda^{1-\frac{1}{k}}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) + C.$$

Or, pour $\lambda = \infty$, l'équation (182) nous donne

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0.$$

On voit donc que l'une des fonctions u demeurera constante pour toutes les valeurs de $x_1, \ldots, x_n$ satisfaisant à l'équation précédente.

Traitant à part ce cas particulier qui, nous le verrons, est très-important, nous obtiendrons le théorème suivant, qu'il est du reste très-aisé de vérifier directement.

Les lignes de courbure de la surface définie par l'équation

$$(184) \qquad X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0,$$

où $X_1, \ldots, X_n$ *satisfont aux équations*

$$(184\ bis) \qquad X'_i X'''_i = 2k(X''_i - a)(X''_i - b),$$

se déterminent de la manière suivante. On recherchera les $n-1$ *fonctions* λ_k *racines de l'équation*

$$(185) \qquad \sum \frac{X_i'^2}{\lambda - X''_i} = 0;$$

puis, déterminant une fonction $\varpi(\lambda)$ *par l'équation*

$$(186) \qquad k\varpi'(\lambda)(\lambda - a)(\lambda - b) = -\lambda\varpi(\lambda)$$

et une constante α *par la condition*

$$\frac{\varpi(\alpha)(\alpha - a)(\alpha - b)}{\alpha} = 0,$$

on calculera les $n-1$ *fonctions*

$$u_k = \int_\alpha^{\lambda_k} \varpi(\lambda) \sum \frac{X_i'^2}{\lambda - X''_i};$$

une seule d'entre elles demeurera variable sur chacune des lignes de courbure du lieu considéré.

Nous allons indiquer une méthode directe qui nous conduira au même résultat, et que, pour plus de netteté, nous allons exposer en supposant le nombre des variables égal à trois.

Proposons-nous le problème suivant :

Trouver les lignes de courbure de la surface représentée par l'équation

$$X + Y + Z = C. \tag{187}$$

D'après les développements donnés au § X, nous pourrons présenter cette recherche de la manière suivante.

On déterminera, pour chaque point de la surface, les deux racines de l'équation

$$\frac{X'^2}{\lambda - X''} + \frac{Y'^2}{\lambda - Y''} + \frac{Z'^2}{\lambda - Z''} = 0. \tag{188}$$

Les équations différentielles des lignes de courbure seront

$$\frac{X'\,dx}{\lambda - X''} + \frac{Y'\,dy}{\lambda - Y''} + \frac{Z'\,dz}{\lambda - Z''} = 0, \tag{189}$$

où λ désigne une des deux racines de l'équation précédente.

La forme de l'équation précédente nous montre que nous saurions intégrer si λ était une constante sur chaque ligne de courbure. C'est ce qui a lieu pour les surfaces du second degré. Mais, en général, λ varie sur chaque ligne de courbure, et l'intégration ne peut se faire immédiatement. Comme on a aussi, en vertu de l'équation de la surface,

$$X'dx + Y'dy + Z'dz = 0,$$

cherchons si l'on peut déterminer trois fonctions de λ, telles que l'expression

$$\left(\frac{X'^2}{\lambda - X''} + \frac{Y'^2}{\lambda - Y''} + \frac{Z'^2}{\lambda - Z''}\right)\varpi(\lambda)\,d\lambda + f(\lambda)\left(\frac{X'dx}{\lambda - X''} + \frac{Y'dy}{\lambda - Y''} + \frac{Z'dz}{\lambda - Z''}\right)$$
$$+ \varphi(\lambda)(X'dx + Y'dy + Z'dz),$$

où le coefficient de $d\lambda$ est nul en vertu de l'équation (188), devienne une différentielle exacte. En écrivant que la dérivée du coefficient de dx, par rapport à λ, est égale à celle du coefficient de λ par rapport à x, on trouve

$$2\varpi(\lambda)X''(\lambda-X'')+\varpi(\lambda)X'X'''+f'(\lambda)(\lambda-X'')-f(\lambda)+\varphi'(\lambda)(\lambda-X'')^2=0.$$

Cette équation devant être satisfaite identiquement, il faut que X', X''', X''^2, X'' soient liées par une relation linéaire, et par conséquent que l'on ait une équation de la forme

$$X'X'''=2k(X''-a)(X''-b). \tag{190}$$

En substituant la valeur de $X'X'''$ déduite de cette équation et en écrivant que les coefficients de X''^2, X'' et le terme indépendant de X'' sont nuls dans l'équation précédente, nous aurons les trois équations

$$\begin{gathered}2(1-k)\varpi(\lambda)=\varphi'(\lambda),\\ 2\varpi(\lambda)[k(a+b)-\lambda]=-f'(\lambda)-2\lambda\varphi'(\lambda),\\ 2kab\varpi(\lambda)=-\lambda f'(\lambda)+f(\lambda)-2\lambda\varphi'(\lambda).\end{gathered}$$

On déduit facilement de là

$$\begin{aligned}f'(\lambda)&=2\varpi(\lambda)[(2k-1)\lambda-k(a+b)],\\ f(\lambda)&=2k\varpi(\lambda)(\lambda-a)(\lambda-b),\end{aligned}$$

et, en éliminant $f(\lambda)$,

$$k\varpi'(\lambda)(\lambda-a)(\lambda-b)=-\lambda\varpi(\lambda).$$

Les trois fonctions cherchées seront donc données par les trois équations

$$\left\{\begin{aligned}&k\varpi'(\lambda)(\lambda-a)(\lambda-b)=-\lambda\varpi(\lambda),\\ &f(\lambda)=2k\varpi(\lambda)(\lambda-a)(\lambda-b),\\ &\varphi'(\lambda)=2(1-k)\varpi(\lambda).\end{aligned}\right. \tag{191}$$

On voit d'ailleurs que, si Y, Z satisfont à des équations toutes pareilles à l'équation (190), toutes les conditions d'intégrabilité seront satisfaites. Ce point étant établi, le calcul s'achève sans difficulté, et nous obtenons le théorème déjà donné :

Les lignes de courbure de la surface

$$X+Y+Z=C, \tag{192}$$

où les trois fonctions X, Y, Z *satisfont aux équations*

$$(193)\qquad \left\{\begin{aligned} X'X''' - 2k(X''-a)(X''-b) = 0,\\ Y'Y''' - 2k(Y''-a)(Y''-b) = 0,\\ Z'Z''' - 2k(Z''-a)(Z''-b) = 0,\end{aligned}\right.$$

sont à l'intersection de la surface et des enveloppes des surfaces

$$(194)\qquad u = \int_\alpha^\lambda \varpi(\lambda)\left(\frac{X'^2}{\lambda - X''} + \frac{Y'^2}{\lambda - Y''} + \frac{Z'^2}{\lambda - Z''}\right) d\lambda,$$

où $\varpi(\lambda)$ *est une fonction satisfaisant à l'équation*

$$(195)\qquad k\varpi'(\lambda)(\lambda - a)(\lambda - b) = -\lambda\varpi(\lambda)$$

et où α *est un des trois nombres* a, b, ∞ *défini par la condition*

$$(196)\qquad \frac{\varpi(\alpha)(\alpha - a)(\alpha - b)}{\alpha} = 0,$$

qu'il est toujours possible de vérifier.

Indiquons quelques applications de ce théorème. Supposons d'abord que les constantes a et b soient nulles; nous aurons

$$X'X''' = 2kX''^2.$$

L'hypothèse $k = 1$ a été examinée. L'intégrale de l'équation précédente est

$$X = \alpha + a(x - x)^m,$$

où m est défini par l'équation

$$(197)\qquad \frac{m-2}{m-1} = 2k.$$

L'hypothèse $2k = 1$ sera traitée à part. Nous pouvons faire $\alpha = x_0 = 0$, et nous obtenons comme solution ax^m. La surface correspondante sera donc représentée par une équation de la forme

$$(198)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1,$$

où m sera quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire. On sait que Lamé, dans son opuscule sur les méthodes en Géométrie, a le premier étudié ces surfaces que M. de la Gournerie, qui en a fait connaître plusieurs propriétés, nomme *tétraédrales symétriques*.

On trouve ici

$$\varpi = \lambda^{\frac{2(1-m)}{m-2}};$$

l'équation (196), si l'on y change λ en $\frac{1}{\mu}$, prend la forme

$$u = \frac{x^m}{a^m}\int_\alpha^\mu \frac{\mu^{\overline{\frac{m}{m-2}}}\,d\mu}{\mu - a^m x^{2-m}} + \frac{y^m}{b^m}\int_\alpha^\mu \frac{\mu^{\overline{\frac{m}{m-2}}}\,d\mu}{\mu - b^m y^{2-m}} + \frac{z^m}{c^m}\int_\alpha^\mu \frac{\mu^{\overline{\frac{m}{m-2}}}\,d\mu}{\mu - c^m z^{2-m}}.$$

Chaque ligne de courbure s'obtiendra en donnant à u une valeur constante et éliminant μ entre cette équation et sa dérivée

$$\frac{x^m}{a^m(\mu - a^m x^{2-m})} + \frac{y^m}{b^m(\mu - b^m y^{2-m})} + \frac{z^m}{c^m(\mu - c^m z^{2-m})} = 0.$$

Le résultat sera évidemment compliqué; les équations des lignes de courbure contiendront toujours des logarithmes et une partie algébrique.

Par exemple, pour la surface

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{y}{b}\right)^3 + \left(\frac{z}{c}\right)^3 = 1, \tag{199}$$

en effectuant les intégrations, on aura

$$u = \frac{\mu^3}{2} + \frac{\mu^2}{3}(x^2 + y^2 + z^2) + \mu(a^3 x + b^3 y + c^3 z)$$
$$+ \log\left(1 - \frac{\mu x}{a^3}\right)^{a^6}\left(1 - \frac{\mu y}{b^3}\right)^{b^6}\left(1 - \frac{\mu z}{c^3}\right)^{c^6},$$

et il y aura à éliminer μ entre cette équation et sa dérivée (algébrique) par rapport à μ.

Quoi qu'il en soit, on voit que nous savons déterminer les lignes de courbure de deux surfaces du troisième ordre, l'une

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1,$$

qui est la surface à quatre points doubles, l'autre qui est représentée par l'équation (197).

Nous savons de même déterminer les lignes de courbure des deux surfaces du quatrième ordre

$$\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 + \left(\frac{z}{c}\right)^4 = 1,$$

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1.$$

La seconde de ces équations représente la surface de Steiner.

Si l'on a $k = \frac{1}{2}$, l'équation (197) ne détermine aucune valeur de m. Alors on a

$$X = ae^{mx},$$

et la surface correspondante a pour équation

$$e^{mx} + e^{ny} + e^{pz} = 1. \tag{200}$$

Ici l'on a $\varpi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, et, en changeant encore λ en $\frac{1}{\lambda}$, on trouve

$$u = e^{mx}\log(1 - \lambda m^2 e^{mx}) + e^{ny}\log(1 - \lambda n^2 e^{ny}) + e^{pz}\log(1 - \lambda p^2 e^{pz});$$

il faudra éliminer λ entre cette équation et sa dérivée.

Je terminerai en énumérant quelques-unes des surfaces auxquelles s'applique la méthode précédente. On voit d'abord facilement que l'on peut ajouter des termes aux équations déjà données et traiter les surfaces représentées par l'équation

$$ax^m + by^m + cz^m + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) = C,$$

où a, b, c, α, C sont des constantes quelconques. Cette remarque nous permet d'ajouter aux surfaces du troisième et du quatrième ordre, déjà données, les suivantes :

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) = C,$$
$$\frac{a}{x} + b(x^2 + y^2 + z^2) = C,$$
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + c(x^2 + y^2 + z^2) = C,$$
$$ax^4 + by^4 + cz^4 + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) = C;$$

je signalerai aussi les surfaces transcendantes

$$\frac{\cos mx}{m^2} + \frac{\cos ny}{n^2} + \frac{\cos pz}{p^2} = C,$$
$$C\left(\frac{e^{mx}}{m^2} + \frac{e^{ny}}{n^2} + \frac{e^{pz}}{p^2}\right) + C'\left(\frac{e^{-mx}}{m^2} + \frac{e^{-ny}}{n^2} + \frac{e^{-pz}}{p^2}\right) = C'',$$
$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx + \int\sqrt{y^2+\beta}\,dy + \int\sqrt{z^2+\gamma}\,dz = C.$$

Du reste, on peut trouver toutes les surfaces répondant au problème posé, et si, pour plus de symétrie, on remplace

$$2k,\ a,\ b \quad \text{par} \quad \frac{1}{m+n},\ -mh,\ nh,$$

on aura

$$X'X''' = \frac{1}{m+n}(X'' - mh)(X'' + nh),$$
$$X' = \frac{C}{m+n}(X'' - mh)^m(X'' + nh)^n,$$
$$x = C\int(X'' - mh)^{m-1}(X'' + nh)^{n-1}\,dX'',$$
$$X = \frac{C^2}{m+n}\int(X'' - mh)^{2m-1}(X'' + nh)^{2n-1}\,dX''.$$

Les quadratures indiquées peuvent être effectuées toutes les fois que l'un des nombres $m, n, m+n$ sera entier.

Je terminerai en remarquant que, tout ce qui précède s'appliquant à un nombre quelconque de variables, on pourra employer les coordonnées pentasphériques, pourvu que les équations soient homogènes. On saura donc déterminer les lignes de courbure des surfaces représentées par l'équation

$$ax_1^m + bx_2^m + cx_3^m + dx_4^m + ex_5^m = 0,$$

où m est quelconque, ainsi que les constantes a, b, c, d, e. L'équation la plus simple des surfaces précédentes serait, en ramenant par une inversion trois des sphères à des plans,

$$ax^m + by^m + cz^m + \alpha(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)^m + \beta(x^2 + y^2 + z^2 + R^2)^m = 0.$$

Si $\beta = 0$, on a les surfaces

$$ax^m + by^m + cz^m + \alpha\left(1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2}\right)^m = 0,$$

qui, pour $R = \infty$, se réduisent aux surfaces tétraédrales de Lamé.

Les formules étant les mêmes que pour le cas de trois variables, je me dispenserai de les transcrire.

Je me suis demandé quel était le résultat le plus général obtenu dans le cas des surfaces du troisième degré, et si les surfaces obtenues précédemment étaient les transformées homographiques de la surface la plus générale du troisième degré. Il est aisé de répondre à cette question.

La surface représentée par l'équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta = 0$$

peut toujours être ramenée, par une translation des axes, à la forme

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

ou, en rendant l'équation homogène,

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + (\alpha x + \beta y + \gamma z)t^2 + \delta t^3 = 0.$$

Or cette équation nous montre que les plans tangents, menés de l'origine à la surface, sont tangents à deux cônes cubiques, dont l'un a pour équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0.$$

L'origine est donc un point double de la hessienne, et la seule particularité que présente la surface consiste en ce que l'un des cônes, celui qui est représenté par l'équation précédente, est un cône triangulaire.

Dans la surface générale, son équation ne pourrait être ramenée qu'à la forme

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + 3hxyz = 0.$$

Nous avons donc le théorème suivant :

Toute surface du troisième ordre, pour laquelle l'un des vingt cônes circonscrits suivant une section plane à la surface est un cône triangulaire, peut être transformée homographiquement en une autre dont on détermine les lignes de courbure.