ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LAURENT CLOZEL
PATRICK DELORME

Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs. II

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 23, nº 2 (1990), p. 193-228
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1990_4_23_2_193_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 23, 1990, p. 193 à 228.

LE THÉORÈME DE PALEY-WIENER INVARIANT POUR LES GROUPES DE LIE RÉDUCTIFS II

PAR LAURENT CLOZEL (*) ET PATRICK DELORME

SOMMAIRE

APPENDICES

0. Introduction

Soit G un groupe de Lie réductif. Les hypothèses naturelles sur G, pour la démonstration des résultats qui nous intéressent, seraient (au plus) celles du livre de Vogan [26] ([1]). Comme nous aurons à utiliser des propriétés fines de la classification de Knapp-Zuckerman des représentations tempérées qui ne semblent pas être démontrées en toute généralité – au moins sous forme publiée – nous supposerons en fait, ce qui est justifié du point de vue des applications, que G est l'ensemble $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ des points réels d'un groupe réductif *connexe* $\mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{R}$.

(*) Lors du travail initial sur cet article, le premier auteur était partiellement financé par la N.S.F. (Grant D.M.S.-8600003) et la Sloan Foundation.

([1]) En particulier, la commutativité des R-groupes.

Fixons une involution de Cartan de G, θ, dont le groupe des points fixes, K, est un sous-groupe compact maximal de G. Soit P un sous-groupe parabolique cuspidal de G. On note $P=MAN$ la décomposition de Langlands de P telle que $MA=P\cap\theta(P)$. (On référera à cette décomposition comme la décomposition de Langlands de P et MA sera appelée la composante de Levi de P.) On note $\hat{M}_{lsd}$ l'ensemble des (classes de) représentations unitaires irréductibles de M qui sont des limites de série discrète non dégénérées (*cf.* [17], § 12). Dans la suite limite de série discrète voudra toujours dire limite de série discrète non dégénérée et on notera en abrégé L.S.D. Si $\delta\in\hat{M}_{lsd}$ et ν est un élément de dual complexifié $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ de l'algèbre de Lie, Lie $A=\mathfrak{a}$, de A, on notera $\pi_{\delta,\nu}^{P}$ l'induite de $P=MAN$ à G de la représentation $\delta\otimes e^{\nu}\otimes 1_N$ (où $\pi_{\delta,\nu}^{P}$ est unitaire dès que $\nu\in i\,\mathfrak{a}^*$). Une telle représentation sera appelée basique dans la suite.

Notons $C_c^\infty(G, K)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact K-finies à droite et à gauche sur G. On se fixe une forme bilinéaire invariante B sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G comme en [7], § 1.6. On note alors $C_c^\infty(G, K)_r$ le sous-espace de $C_c^\infty(G, K)$ formé des fonctions à support dans $K\exp\mathfrak{a}(r)K$ où $\mathfrak{a}(r)$ est la boule fermée de rayon r dans $\mathfrak{a}$ (ceci simplifie la formulation employée dans [7], évitant le recours à des « ε ». Voir [8]; nous remercions Flensted-Jensen de nous avoir fait part oralement de la même observation).

Notre théorème principal caractérise les traces dans les représentations basiques des éléments de $C_c^\infty(G, K)$ ou plus précisément des éléments de $C_c^\infty(G, K)_r$. Quand δ décrit seulement la série discrète nous avons déjà démontré un tel théorème, *cf.* [7], th. 1.

Plus précisément, fixons-nous un sous-groupe parabolique minimal $P_m=M_m A_m N_m$ et soit $P_i=M_i A_i N_i$, $i=1, \ldots, S$, l'ensemble (fini) des sous-groupes paraboliques de G contenant P_m. (On remarquera que certains de ces paraboliques peuvent être associés.) Soit $\mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}_i)_r$ l'espace des transformées de Fourier de fonctions de $C_c^\infty(\mathfrak{a}_i)$ à support dans la boule fermée de rayon $r>0$ de $\mathfrak{a}_i$ (algèbre de Lie de A_i). On note pour $\delta\in\hat{M}_i$ et $\nu\in(\mathfrak{a}_i^*)_{\mathbb{C}}$, $\operatorname{tr}\pi_{\delta,\lambda}$ le caractère distribution de $\pi_{\delta,\lambda}$ (qui ne dépend que de la composante de Levi de P_i). Quand δ décrit les séries discrètes des M_i les seules relations entre les $\operatorname{tr}\pi_{\delta,\lambda}$ sont les égalités :

$$\operatorname{tr}\pi_{\delta,\lambda}=\operatorname{tr}\pi_{\delta',\lambda'}\quad \text{dès que les données } (\delta, \lambda) \text{ et } (\delta', \lambda')$$

sont conjuguées par un élément de G.

Si l'on considère les limites de séries discrètes d'autres relations s'introduisent. Supposons que $\mathbf{M}_i=M_i A_i$ et $\mathbf{M}_j=M_j A_j$ soient des composantes de Levi telles que $\mathbf{M}_i\subset\mathbf{M}_j$. On pose alors $A_i^j=A_i\cap M_j$ et l'on a $A_i=A_j A_i^j$.

Pour certaines limites de séries discrètes on a alors

$$(\bigstar)\qquad \operatorname{ind}_{P_i^j\cap M_j}^{M_j}(\delta_i\otimes e^0\otimes 1)=\bigoplus_{l=1}^{T}\delta_j^l$$

avec $\delta_j^l\in(\hat{M}_j)_{lsd}$, $l=1, \ldots, T$.

Alors on a :

THÉORÈME 1. — *Soit* $r>0$. *Supposons données pour* $i=1, \ldots, S$ *des fonctions* $F_i : (\hat{M}_i)_{l_{sd}} \times (\mathfrak{a}_i^*)_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$. *Les conditions* (*a*) *et* (*b*) *suivantes sont équivalentes.*

(*a*) *Il existe* $f \in C_c^\infty(G, K)_r$ *telle que*

$$F_i(\delta, \nu) = \operatorname{tr} \pi_{\delta, \nu}(f) \qquad pour \quad i=1, \ldots, S.$$

(*b*) *Les fonctions* F_i *ont les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout* i, F_i *est à support fini en* δ, *i.e. sauf pour un nombre fini de* $\delta \in (\hat{M}_i)_{l_{sd}}$, *l'application* $\nu \to F_i(\delta, \nu)$ *est identiquement nulle sur* $(\mathfrak{a}_i^*)_{\mathbb{C}}$.

(ii) *Pour tout* $\delta \in (\hat{M}_i)_{l_{sd}}$, $\nu \to F_i(\delta, \nu)$ *appartient comme fonction de* ν *à* $\mathscr{PW}(\mathfrak{a}_i)_r$.

(iii) *On a* $F_i(\delta, \nu) = F_j(\delta', \nu')$ *dès que les données* (M_i, A_i, δ, ν), $(M_i, A_i, \delta', \nu')$ *sont conjuguées par un élément de* K. *En particulier, pour tout* $w \in W(A_i)$, $\delta \in (\hat{M}_i)_{l_{sd}}$, $\nu \in (\mathfrak{a}_i^*)_{\mathbb{C}}$, $F_i(\delta, \nu) = F_i(w\delta, w\nu)$.

(iv) *Supposons que* $P_i \subset P_j$ *et que* $\delta_i \in (\hat{M}_i)_{l_{sd}}$ *et* $\delta_j^l \in (\hat{M}_j)_{l_{sd}}$, $l=1, \ldots, T$ *vérifient la relation* ($\bigstar$). *Alors, pour tout* $\nu \in (\mathfrak{a}_j)_{\mathbb{C}}^* \subset (\mathfrak{a}_i^*)_{\mathbb{C}}$, *on a*

$$F_i(\delta_i, \nu) = \sum_{l=1}^{T} F_j(\delta_j^l, \nu).$$

On remarquera que notre théorème permet de démontrer le résultat analogue si G est un groupe réductif linéaire *connexe* (comme groupe de Lie) : un tel groupe est en effet le quotient, par un groupe fini, du produit direct de la composante neutre de son centre et de son groupe dérivé; le centre comptant pour du beurre, le résultat se réduit alors aisément au cas d'un groupe linéaire *semi-simple* connexe : celui-ci est un quotient de $\mathbf{G}_{sc}(\mathbb{R})$, où $\mathbf{G}_{sc}$ est le revêtement (algébrique) simplement connexe, dont l'ensemble des *points réels est connexe : le même argument ramène alors au cas de* $\mathbf{G}_{sc}(\mathbb{R})$.

Dans une première version de cet article, nous avions traité le cas d'un tel groupe connexe, en utilisant les résultats de classification démontrés dans ce cas par Knapp et Zuckerman. Le rapporteur nous a fait remarquer que, pour $G = \mathbf{G}(\mathbb{R})$, les résultats analogues étaient contenus dans les articles de Shelstad ([33], [34]). En vue des applications, en particulier à la théorie des formes automorphes, nous avons donc décidé de traiter ce cas, plus général.

La démonstration est analogue à celle donnée dans [7] pour les induites de série discrète. On est réduit à considérer isolément une représentation δ de la série discrète d'un sous-groupe de Levi de G, et à construire les fonctions ayant les propriétés cherchées pour les induites de certaines limites de série discrète (d'autres sous-groupes de Levi) « affiliées » à δ (§ 2.2). On trouve que leur existence résulte du théorème démontré précédemment par nous, permettant de construire des fonctions de Paley-Wiener associées aux différents K-types minimaux de δ.

Cette démonstration est donnée dans le paragraphe 3. Elle repose sur certaines propriétés des induites de limites de série discrète, et de la relation d'affiliation, démontrées dans le paragraphe 2 : ce sont des conséquences simples de la théorie de Knapp-Zuckerman.

Dans le paragraphe 5, on donne certaines conséquences du théorème principal. Elles concernent l'existence de pseudo-coefficients pour la série discrète, et de fonctions d'Euler-Poincaré pour la $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie et le complexe de Dirac. (N. Wallach nous a indiqué une démonstration plus directe de l'existence de fonctions d'Euler-Poincaré; une fois le théorème de Paley-Wiener démontré, elle en est une conséquence immédiate.)

Le paragraphe 4 concerne une propriété de surjectivité des morphismes d'Harish-Chandra dans les induites de limites de série discrète (théorème 2) qui étend le résultat obtenu par l'un de nous pour la série discrète. Il est indépendant du reste de l'article (dans une version antérieure, il était utilisé pour la démonstration de la proposition 1).

Il y a quatre appendices. Le plus nouveau est l'appendice C. L'argument donné pour le théorème principal nécessite une étude fine des propriétés de recollement des transformées de Fourier scalaires de fonctions sur G, le long des sous-espaces de $\mathfrak{a}^*$ ($\mathfrak{a}^*$ est le dual de $\mathfrak{a} = \mathrm{Lie}(A)$, MA étant la décomposition de Langlands d'un sous-groupe de Levi de G et δ étant dans la série discrète de M) stabilisés par les sous-groupes du R-groupe R_δ qui contrôle la réductibilité de $\pi_{\delta, \nu}$ pour ν unitaire. On a abstrait ces propriétés dans l'appendice C. Elles présentent un intérêt indépendant : des phénomènes analogues apparaissent chaque fois que l'on étudie la L-indiscernabilité, y compris dans le cadre global de la formule des traces.

Les autres appendices sont l'appendice A, concernant la surjectivité de la restriction de polynômes W-invariants à un sous-espace de $\mathfrak{a}$ fixé par un sous-groupe de R_δ : il s'agit d'un problème qui avait été étudié par Helgason [12]; l'appendice B, où l'on a donné la démonstration d'un théorème de Raïs, concernant les fonctions de Paley-Wiener invariantes, et qu'il n'avait qu'esquissée; et l'appendice D, en collaboration avec A. Bouaziz, qui corrige une erreur dans notre travail antérieur [7].

Il nous reste à remercier le rapporteur : pour avoir suggéré que nos résultats pouvaient être étendus au cadre naturel d'un groupe réductif algébriquement connexe, et avoir suggéré que les résultats nécessaires étaient contenus dans les travaux de Shelstad; et pour avoir indiqué une simplification importante de l'appendice C. Grâce à ses conseils, le présent article est (on l'espère) beaucoup plus lisible que sa version antérieure. (On remarquera qu'en certains points, les démonstrations des résultats de Shelstad que nous utilisons ne sont qu'esquissées dans [33] et [34]. Il ne devrait pas être difficile au lecteur exigeant d'y interpoler les arguments manquants.)

Les résultats de cet article ont été annoncés dans deux Notes aux *Comptes Rendus* ([28], [29]).

1. Notations, définitions, rappels

1.1. Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ on notera $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié, E^* son dual, S(E) l'algèbre symétrique de $E_{\mathbb{C}}$, 1_E l'endomorphisme identique de E.

Si H est un groupe localement compact on notera $\hat{H}$ son dual unitaire et pour $\mu \in \hat{H}$ on désignera par (μ, E_μ) un représentant de μ. Si en outre H est compact pour tout H-module I, on notera I^μ sa composante isotypique de type μ.

Si L est un groupe de Lie réel, L^0 désignera sa composante neutre, et Z_L son centre. On notera $U(\mathfrak{l})$ l'algèbre enveloppante de la complexifiée $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ de l'algèbre de Lie de L, $\mathfrak{l}$. On notera $Z(\mathfrak{l})$ le centre de $U(\mathfrak{l})$. Si A est un groupe vectoriel d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ on note e^λ (ou encore $a \to a^\lambda$) le quasi-caractère de A dont la différentielle est λ et $\mathbb{C}_\lambda$ le A-module de dimension 1 correspondant.

Enfin on notera $\mathbb{Z}_2$ le groupe à deux éléments.

1.2. Soient G, θ, B, P_m comme dans l'Introduction. Toutefois, dans les numéros 1.2, 1.3 et 1.4, on suppose seulement que G est dans la classe d'Harish-Chandra.

Rappelons qu'on appelle composante de Levi de G tout sous-groupe qui est le plus grand sous-groupe θ-stable d'un sous-groupe parabolique de G. Une composante de Levi $\mathbf{M}$ de G admet une factorisation $\mathbf{M} = MA$ où A est son plus grand sous-groupe vectoriel central et M l'intersection des noyaux des homomorphismes de $\mathbf{M}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On note $\mathscr{P}(G, MA)$ où $\mathscr{P}(MA)$ si aucune confusion n'est à craindre l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G de composante de Levi MA.

On note $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ (où $\Delta(\mathfrak{a})$ si aucune confusion n'est à craindre) l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ (qui sont réelles) et pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{a})$ on notera $\mathfrak{g}_\alpha$ le sous-espace radiciel correspondant. Si $P \in \mathscr{P}(MA)$, on note sa décomposition de Langlands $P = MAN_P$ et on définit $\Delta_P^+ = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}_P\}$. La « chambre de Weyl » positive correspondante C_P est alors définie par $C_P = \{\nu \in \mathfrak{a}^* \mid B(\nu, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Delta_P^+\}$. On notera $\bar{C}_P$ l'adhérence de C_P dans $\mathfrak{a}^*$. Le groupe de Weyl $W(G, A)$ noté aussi $W(A)$ est par définition le quotient du normalisateur dans K de $\mathfrak{a}$ par son centraliseur. On définit également

$$\rho_P = 1/2 \sum_{\alpha \in \Delta_P^+} \dim(\mathfrak{g}_\alpha)\,\alpha.$$

Avec le choix d'un sous-groupe parabolique minimal on appelle sous-groupe parabolique standard (resp. composante de Levi standard) tout sous-groupe parabolique de G contenant P_m (resp. toute composante de Levi d'un sous-groupe parabolique standard).

On remarquera qu'un sous-groupe parabolique standard P est entièrement déterminé par sa composante de Levi puisqu'il est engendré par la réunion de celle-ci avec P_m.

Alors, dans toute notation où devrait figurer P mais où apparaît déjà la composante de Levi de P (explicitement ou implicitement) et si cela ne conduit pas à des confusions, on omettra l'écriture de P. Par exemple, on pourra noter $\Delta^+(\mathfrak{a})$ au lieu de $\Delta_P^+(\mathfrak{a})$.

Soient P, P_1 des sous-groupes paraboliques standard de composante de Levi $\mathbf{M} = MA$ et $\mathbf{M}_1 = M_1 A_1$. Alors $P \subset P_1$ si et seulement si $M \subset M_1$ et alors $\mathbf{M} \subset \mathbf{M}_1$, $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}_1$. On a alors

$$\Delta^+(\mathfrak{a}_1) = \{\alpha_{|\mathfrak{a}_1} \mid \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{a}), \alpha_{|\mathfrak{a}_1} \neq 0\}, \qquad \rho_{P|\mathfrak{a}_1} = \rho_{P_1}.$$

DÉFINITION 1. — *Si* $\mathbf{M} = MA$ *est une composante de Levi de* G, *on dira que* $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *est générique si et seulement si* $(\nu, \alpha) \neq 0$ *pour tout* $\alpha \in \Delta(\mathfrak{a})$.

D'après un lemme bien connu de Langlands [18], Lemma 2.13, le stabilisateur dans $W(A)$ d'une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ — pour les hyperplans déterminés par les racines de $\mathfrak{a}$ — est trivial. En particulier, on voit que si ν est générique, son stabilisateur $W(A)_\nu$ est réduit à l'élément neutre.

1.3. Soient $\mathbf{M} = MA$ une composante de Levi de G et (δ, H_δ) une représentation unitaire de M dans un espace de Hilbert H_δ. Alors, pour tout $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, le groupe G opère par translation à gauche dans l'espace $I^\infty_P(\delta, \nu) = \{\varphi : G \to H_\delta \mid \varphi$ est C^∞, $\varphi(gman) = a^{-\rho_P - \nu}\delta(m^{-1})\varphi(g)$, $g \in G$, $m \in M$, $a \in A$, $n \in N_P\}$ où $P \in \mathscr{P}(MA)$. On note $I_P(\delta, \nu)$ le sous-espace des vecteurs K-finis de $I^\infty_P(\delta, \nu)$, $I^2_P(\delta, \nu)$ le complété de $I^\infty_P(\delta, \nu)$ pour la structure hilbertienne habituelle. Dans ces trois espaces on note $\pi^P_{\delta, \nu}$ la représentation de G ou $(\mathfrak{g}, K)$ correspondante. On note $I^G_M(\delta)^\infty$, $I^G_M(\delta)$, $I^G_M(\delta)^2$ l'espace, indépendant de ν, des restrictions à K des éléments de $I^\infty_P(\delta, \nu)$, $I_P(\delta, \nu)$, $I^2_P(\delta, \nu)$.

Comme $G = KP$ ces restrictions sont bijectives et par transport de structure on obtient des représentations de G ou $U(\mathfrak{g})$ sur ces espaces, notées encore $\pi^P_{\delta, \nu}$ (car δ est une représentation de M et $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$); on notera $\pi_{\delta, \nu}$ au lieu de $\pi^P_{\delta, \nu}$.

1.4. On notera que ces définitions supposent simplement que G est dans la classe d'Harish-Chandra. En particulier, elles s'appliquent si l'on remplace G par M, où $\mathbf{M} = MA$ est la décomposition de Langlands d'un sous-groupe de Levi.

2. Quelques propriétés de la classification des représentations unitaires tempérées de G

2.1. Nous passons maintenant en revue certaines propriétés des représentations tempérées de G. Nous allons utiliser la description combinatoire des « R-groupes » (réductibilité des induites tempérées) donnée par Shelstad [33], à l'aide de la formulation par Langlands de la théorie de Knapp-Zuckerman au moyen du L-groupe. On renvoie le lecteur à [32], [31], [33], [34] pour la construction originale de Langlands et ses rapports avec la théorie de Knapp-Zuckerman.

Si π est une représentation (unitaire) irréductible tempérée de G, on sait qu'il existe un parabolique cuspidal $P = MAN$ de G, une limite de série discrète non dégénérée $\delta \in \hat{M}$ pour M, et un élément $\nu \in i\mathfrak{a}^*$ tels que $\pi \cong \pi^P_{\delta, \nu}$. De plus, si $\pi \cong \pi^{P'}_{\delta', \nu'}$ avec des données de même nature, les données (M, δ, ν) et (M', δ', ν') sont conjuguées par un élément de K ([17]; *cf.* aussi [34], § 3.6, 3.7 dans le cas non connexe).

Nous nous intéressons à la réductibilité des $\pi^P_{\delta, \nu}$. Supposons tout d'abord $\delta \in \hat{M}_d$. Soit $W = W(A)$: il opère sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ et $\hat{M}$. Rappelons que Knapp et Stein [16] ont défini des *opérateurs d'entrelacement* normalisés, que nous noterons $\mathscr{A}_P(w, \delta, \nu)$, pour tout $w \in W_\delta$, le stabilisateur de δ dans W. On sait alors que, si $\nu \in i\mathfrak{a}^*$ est fixé, $w \mapsto \mathscr{A}_P(w, \delta, \nu)$ définit une représentation projective de $W_{\delta, \nu}$. D'après Harish-Chandra, ces opérateurs engendrent le commutant de la représentation $\pi^P_{\delta, \nu}$ ([30]; [16], cor. 9.8).

Soit ${}^L\mathbf{G} = {}^L\mathbf{G}^0 \times W_{\mathbb{R}}$ le groupe dual de $\mathbf{G}$ [19], où $W_{\mathbb{R}}$ désigne le groupe de Weil de $\mathbb{R}$; la représentation $\pi^P_{\delta, \nu}$ est alors associée, par fonctorialité de Langlands, à un homomorphisme $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to {}^L\mathbf{G}$ se factorisant par le plongement de sous-groupe de Levi ${}^L\mathbf{M} \to {}^L\mathbf{G}$, $\mathbf{M}$ étant le groupe réductif sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points réels est MA; l'homomorphisme $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to {}^L\mathbf{M}$ définit alors la représentation de carré intégrable $\delta \otimes \nu$

de MA. On suppose que ${}^L\mathbf{M}^0$ contient le tore de référence ${}^L\mathbf{T}^0$ utilisé dans la construction du groupe dual ${}^L\mathbf{G}^0$. On suppose de plus que $\varphi(W_{\mathbb{R}})$ normalise ${}^L\mathbf{T}^0$ ([19], [33]).

Soit S_φ le centralisateur de $\varphi(W_{\mathbb{R}})$ dans ${}^L\mathbf{G}^0$: c'est un groupe réductif. Soit ${}^L\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de ${}^L\mathbf{T}^0$, ${}^L\mathfrak{t}_\varphi = \{X \in {}^L\mathfrak{t} : \varphi(1\times\sigma)X = X\}$. Puisque $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to {}^L\mathbf{M}$ définit une représentation de carré intégrable, on sait ([19]; *cf.* [33], 4.4) que $\varphi(1\times\sigma)$ opère par (-1) sur les racines de ${}^L\mathbf{M}^0$ dans ${}^L\mathbf{T}^0$; il est facile de voir que ${}^L\mathfrak{t}_\varphi$ s'identifie au dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ du cocentre déployé de $\mathbf{M}$.

D'après Shelstad [33], Lemma 5.3.14, $W_{\delta,\nu}$ s'identifie naturellement à $\Omega_\varphi({}^L\mathbf{G}^0, {}^L\mathbf{T}^0)$, le sous-groupe du groupe de Weyl complexe de $({}^L\mathbf{G}^0, {}^L\mathbf{T}^0)$ donné par l'action des éléments de S_φ. Par ailleurs [33], prop. 5.3.2, ${}^L\mathfrak{t}_\varphi$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}_\varphi = \mathrm{Lie}(S_\varphi^0)$. Soit alors $\Delta'_{\delta,\nu}$ le système de racines de $({}^L\mathfrak{t}_\varphi, {}^L\mathfrak{s}_\varphi)$. D'après l'identification précédente, $\Delta'_{\delta,\nu}$ peut être considéré comme un système de racines dans $\mathfrak{a}$. Il est clair que $W_{\delta,\nu}$ préserve $\Delta'_{\delta,\nu}$ et que le groupe de Weyl $W^0_{\delta,\nu}$ de $\Delta'_{\delta,\nu}$ est inclus dans $W_{\delta,\nu}$.

Fixons une fois pour toutes un ordre sur $\mathfrak{a}$; pour tout $\nu \in \mathfrak{a}^*$, cela détermine un ensemble de racines positives $(\Delta'_{\delta,\nu})^+$ dans $\Delta'_{\delta,\nu}$. Soit

$$R^c_{\delta,\nu} = \{ w \in W_{\delta,\nu} : w(\Delta'_{\delta,\nu})^+ = (\Delta'_{\delta,\nu})^+ \}$$

(c'est le groupe noté R_φ dans [33]). Il est clair que $W_{\delta,\nu}$ est le produit semi-direct de $W^0_{\delta,\nu}$ par $R^c_{\delta,\nu}$ (*cf.* [33], 5.3.11). Le groupe $W^0_{\delta,\nu}$ est contenu dans le groupe des $w \in W_{\delta,\nu}$ tels que $\mathscr{A}_P(w, \delta, \nu)$ est scalaire : cela se déduit de [33], lemme 5.3.15 et des résultats d'Harish-Chandra [30], sec. 38 et 40. Puisque par ailleurs $\pi^P_{\delta,\nu}$ a exactement $|R^c_{\delta,\nu}|$ facteurs irréductibles [34], p. 185-186, le fait que les $\mathscr{A}_P(w, \delta, \nu)$ engendrent le commutant de l'induite implique donc que

$$W^0_{\delta,\nu} = \{ w \in W_{\delta,\nu} : \mathscr{A}_P(w, \delta, \nu) \text{ scalaire} \}.$$

On voit donc enfin que $R^c_{\delta,\nu} \cong W_{\delta,\nu}/W^0_{\delta,\nu}$ s'identifie au R-groupe défini par Knapp-Stein [16]. On sait que $R^c_{\delta,\nu}$ est un produit de groupes d'ordre 2 ([33], 5.3.13).

Par ailleurs [34], p. 186 on a une décomposition

$$\pi^P_{\delta,\nu} = \bigoplus_{i=1}^{l} \pi^{P^\nu}_{\delta^\nu_i,\nu^*} \tag{2.1}$$

où $l = |R^c_{\delta,\nu}|$, $M^\nu A^\nu$ est la décomposition de Langlands de la composante de Levi d'un sous-groupe parabolique $P^\nu \supset P$, δ^ν_i est un élément de $(\hat{M}_\nu)_{lsd}$, $\nu^* = \nu_{|\mathfrak{a}^\nu}$ $(\mathfrak{a}^\nu \subset \mathfrak{a})$, et les induites $\pi^{P^\nu}_{\delta^\nu_i,\nu^*}$ sont irréductibles. La composante $\mathfrak{a}^\nu$ s'identifie à l'ensemble des points fixes de $R^c_{\delta,\nu}$, comme il résulte de la construction de M^ν par transformation de Cayley [34], p. 186. En outre, on a alors

$$\pi^{P \cap M^\nu}_{\delta,0} = \bigoplus_{i=1}^{l} \delta^\nu_i \tag{2.2}$$

(égalité entre représentations de M^ν), comme on le voit en appliquant la démonstration de (2.1) à $\pi^{P\cap M^\nu}_{\delta,0}$ [34], p. 185-186 : on aurait pu aussi démontrer d'abord (2.2) — ce qui revient à supposer $\nu=0$ — puis induire les deux membres, tordus par le caractère ν^* de A^ν, jusqu'à G. L'induction intermédiaire envoie les $\delta_i \otimes \nu^*$ sur des représentations irréductibles de G, car $\nu^* \in (\mathfrak{a}^\nu)^*$ est générique (déf. 1) : *cf.* lemme 3.

Si $\nu=0$, on écrira R^c_δ, Δ'_δ, ... au lieu de $R^c_{\delta,0}$, $\Delta'_{\delta,0}$, ... On a alors

$$\Delta'_{\delta,\nu}=\Delta'_\delta \cap \nu^\perp, \tag{2.3}$$

$\nu^\perp$ étant l'orthogonal de ν dans $\mathfrak{a}$ ([33], prop. 5.3.4 et cor. 5.3.10). En particulier

$$W^0_{\delta,\nu}=(W^0_\delta)_\nu. \tag{2.4}$$

Par ailleurs, si $\nu \in i\mathfrak{a}^*$ est $(\Delta'_\delta)^+$-dominant [*i.e.* $(\operatorname{Im}\nu, \alpha) \geqq 0$, $\forall \alpha \in (\Delta'_\delta)^+$], on a

$$(R^c_\delta)_\nu = R^c_{\delta,\nu}. \tag{2.5}$$

En effet, il est clair que $(R^c_\delta)_\nu \subset R^c_{\delta,\nu}$. Réciproquement, soit $w \in R^c_{\delta,\nu}$. Nous devons montrer que $w \in R^c_\delta$, *i.e.* que $w\alpha>0$ pour tout $\alpha>0$ dans Δ'_δ. Si $(\alpha, \nu)=0$, $\alpha \in \Delta'_{\delta,\nu}$ et $w\alpha>0$ puisque $w \in R^c_{\delta,\nu}$. Supposons $(\alpha, \nu) \neq 0$. Puisque $\operatorname{Im}\nu$ est dominant pour $\Delta'_\delta \cap \Delta^+$, on a $(\alpha, \operatorname{Im}\nu)>0$ et donc $(w\alpha, \operatorname{Im}\nu)=(\alpha, w^{-1}\operatorname{Im}\nu)=(\alpha, \operatorname{Im}\nu)>0$ car w fixe ν. Soit $\nu' \in i\mathfrak{a}^*$, proche de ν, tel que $\operatorname{Im}\nu'$ soit dominant régulier pour Δ'_δ. Alors $(wa, \operatorname{Im}\nu')>0$ si $(\alpha, \nu)=0$ car $w\alpha>0$, et $(w\alpha, \operatorname{Im}\nu')>0$ par continuité si $(\alpha, \nu)\neq 0$. Donc $(w\alpha, \operatorname{Im}\nu')>0$ pour tout α, ce qui implique que w stabilise $\Delta'_\delta \cap \Delta^+$: donc $w \in R^c_\delta$.

2.2. Soient $\mathbf{M}=MA \subsetneqq \mathbf{M}_1=M_1A_1$ deux composantes de G, $P \in \mathscr{P}(\mathbf{M})$, $P_1 \in \mathscr{P}(\mathbf{M}_1)$ avec $P \subset P_1$. On note $P^1=P \cap M_1$ qui est un sous-groupe parabolique de M_1 de composante de Levi MA^1 où $A^1=A \cap M_1$. Si $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_1$ sont des composantes de Levi standard (*i.e.* de sous-groupes paraboliques standard) on choisira toujours pour P (resp. P_1) l'unique sous-groupe parabolique standard de $\mathscr{P}(\mathbf{M})$ resp. $\mathscr{P}(\mathbf{M}_1)$. Alors on introduit :

DÉFINITION 2. — *Soit* $\delta \in (\hat{M})_{lsd}$, $\delta_1 \in (\hat{M})_{lsd}$. *On dira que* δ_1 *est affiliée à* δ *si et seulement si :*

$$\pi^{P^1}_{\delta,0}=\bigoplus_{j=1}^{L} \delta_1^j$$

où les δ_1^j *sont des L.S.D. de* M_1 *et* $\delta_1^1=\delta_1$.

Nous n'utiliserons la définition 2 que quand δ appartient à la série discrète.

Remarque 1. — Si P et P_1 sont comme ci-dessus et que l'on a un entrelacement non nul entre $\delta_1 \in (\hat{M}_1)_{lsd}$ et $\pi^{P^1}_{\delta,\nu_0}$ avec $\delta_1 \in (\hat{M}_1)_{lsd}$ et $\nu_0 \in i\mathfrak{a}^*$, on a nécessairement $\nu_0=0$. En effet, le caractère infinitésimal de δ_1 est réel et la partie imaginaire de celui de $\pi^{P^1}_{\delta,\nu_0}$ est égal à ν_0.

Remarque 2. — La définition ne dépend pas du choix de $P \in \mathscr{P}(\mathbf{M})$ et $P_1 \in \mathscr{P}(\mathbf{M}_1)$ vérifiant $P \subset P_1$ car $\pi^{P^1}_{\delta,0}$ ne dépend que de la classe d'association du parabolique P^1 et ne dépend donc que de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_1$.

Remarque 3. — Soit $P=MAN$ un sous-groupe parabolique de G et $\delta\in\hat{M}_{lsd}$. Alors, pour tout $\nu\in i\mathfrak{a}^*$, les $\delta_i^\nu\in(\hat{M}^\nu)_{lsd}$ qui interviennent dans la décomposition (2.1) de $\pi^P_{\delta,\nu}$ sont affiliées à δ.

Cela résulte en effet de (2.2), au moins quand δ appartient à la série discrète : en général, utiliser les analogues de (2.1) et (2.2) pour les limites de série discrète.

LEMME 1. — *Soient* $P\subset P_1$ *deux sous-groupes paraboliques de* G, *de composantes de Levi* MA *et* M_1A_1. *Soit* $\delta\in\hat{M}_d$, $\delta_1\in(\hat{M}_1)_{lsd}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un opérateur d'entralecement non nul entre* δ_1 *et* $\pi^{P^1}_{\delta,0}$.

(ii) δ_1 *est affiliée à* δ.

Par définition, (ii) implique (i). Pour démontrer la réciproque, décomposons $\pi^{P^1}_{\delta,0}$ suivant (2.1). La représentation δ_1 doit alors être l'une des représentations figurant dans le membre de droite; chacune de celles-ci est donc en fait une limite de série discrète non dégénérée pour M_1.

Q.E.D.

LEMME 2. — *Si* $\delta_1\in(\hat{M}_1)_{lsd}$, $\mathbf{M}_1=M_1A_1$ *étant un sous-groupe de Levi de* G, *il existe un sous-groupe de Levi* $\mathbf{M}=MA$ *de* G, *contenu dans* $\mathbf{M}_1$, *et une représentation* $\delta\in\hat{M}_d$ *telle que* δ_1 *soit affiliée à* δ. *Si* M_1A_1 *est standard, on peut choisir* MA *standard.*

Démonstration. — On sait que δ_1 est contenue dans $\pi^{P^1}_{\delta,\nu}$, P^1 étant un parabolique de $\mathbf{M}_1$, de composante de Levi MA^1, et δ étant dans la série discrète de M. D'après la remarque 1, $\nu=0$. Le lemme précédent montre alors que δ_1 est affiliée à δ. Quitte à conjuguer par des éléments de K, on peut supposer MA standard si M_1A_1 l'est.

LEMME 3. — *Soit* P_1 *un sous-groupe parabolique de* G, *de composante de Levi* M_1A_1, *et* $\delta_1\in(\hat{M}_1)_{lsd}$. *Alors, pour* ν *générique* (déf. 1) *dans* $i\mathfrak{a}_1^*$, $\pi^{P_1}_{\delta_1,\nu}$ *est irréductible.*

Démonstration. — Si δ_1 appartient à la série discrète, cela est bien connu. En général, soit $MA\subset M_1A_1$ une composante de Levi de G, et $\delta\in\hat{M}_d$ tel que δ_1 soit affiliée à δ (lemme 2). Par généricité de ν, on a $(W_1)_{\delta,0}=W_{\delta,\nu}$, où $W_1=W(M_1, A\cap M_1)$. Comme les intégrales d'entrelacement (normalisées) s'induisent de manière évidente, on a de plus $(W_1)^0_{\delta,0}=W^0_{\delta,\nu}$. Par conséquent, $\pi^{P^1}_{\delta,0}$ (représentation de M_1) et $\pi^P_{\delta,\nu}$ ont autant de facteurs irréductibles.

LEMME 4. — *Soient* $P\subset P_1$ *des sous-groupes paraboliques de* G *de composantes de Levi respectives* MA et M_1A_1.

Soient $\delta\in\hat{M}_{lsd}$, $\delta_1\in(\hat{M}_1)_{lsd}$. *On suppose que, pour un* $\nu\in i\mathfrak{a}_1^*$ (*que l'on considère comme un sous-espace de* $i\mathfrak{a}$ *grâce à la décomposition* $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^1\oplus\mathfrak{a}_1$) *générique dans* $(\mathfrak{a}_1^*)_{\mathbb{C}}$, *on a un entrelacement non nul entre* $\pi^{P_1}_{\delta_1,\nu}$ *et* $\pi^P_{\delta,\nu}$. *Alors la décomposition* $\pi^P_{\delta,\nu}=\bigoplus_{i=1}^{l}\pi^{P^\nu}_{\delta_i^\nu,\nu}$ *rappelée en* (2.1) (*avec* $\delta_i^\nu\in(\hat{M}^\nu)_{lsd}$) *vérifie* $A^\nu=A^1$, $M^\nu=M_1$, *et l'on a* $\delta_1=\delta^\nu_{i_0}$ *pour un indice* i_0. *En particulier* δ_1 *est affiliée à* δ.

Démonstration. — D'après le lemme précédent, $\pi^{P_1}_{\delta_1,\nu}$ est irréductible. Le fait qu'il existe un entrelacement non nul entre $\pi^{P_1}_{\delta_1,\nu}$ et $\pi^P_{\delta,\nu}$ implique alors que $\pi^{P_1}_{\delta_1,\nu}\cong\pi^{P^\nu}_{\delta^\nu_{i_0}}$ pour quelque indice i_0.

D'après la propriété d'unicité de la classification des représentations tempérées rappelée au début de 2.1, les données $(M_1, A_1, \delta_1, \nu)$ et $(M^\nu, A^\nu, \delta_1^\nu, \nu)$ sont conjuguées par un élément k de K. Grâce à la forme bilinéaire B (qui est Ad G-invariante) on peut identifier $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{a}_1^*$, $(\mathfrak{a}^\nu)^*$ à des sous-espaces de $\mathfrak{g}$ et l'hypothèse implique entre autre que $\operatorname{Ad} k\, H = H$ où H est l'élément de $\mathfrak{g}$ correspondant à $\operatorname{Im} \nu \in \mathfrak{a}_1^* \cap (\mathfrak{a}^\nu)^* \subset \mathfrak{a}^*$ dans ces identifications. Comme $\operatorname{Im} \nu$ est générique dans $\mathfrak{a}_1^*$ la composante neutre du centralisateur $Z_G(H)$ de H dans G admet $\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$ comme algèbre de Lie et est donc égale à $M_1^0 A_1$, où M_1^0 est la composante neutre de M_1. Alors $k \in Z_G(H)$ normalise $Z_G(H)^0$ et normalise donc $M_1^0 A_1$ donc A_1 (qui est la partie vectorielle du centre de $(M_1^0 A_1)$. Alors $\operatorname{Ad} k$ correspond à un élément w du groupe de Weyl de A_1, $W(A_1)$. En outre, si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_1)$ on a $((\operatorname{Ad} k))\alpha, \nu) = (\alpha, \nu)$ *i.e.* $(w\alpha, \nu) = (\alpha, \nu)$.

On a donc $w = 1$ puisque ν est générique, *i.e.* k centralise $\mathfrak{a}_1$. Finalement on obtient $k \in M_1 A_1$. Alors on a $A^\nu = A_1$, $M^\nu = M_1$. De plus $\delta_1 \otimes e^\nu$, $\delta_{i_0}^\nu \otimes e^\nu$ sont conjuguées par un automorphisme intérieur de $M_1 A_1$ donc équivalentes. D'où $\delta_1 \simeq \delta_{i_0}^\nu$ comme désiré. Alors le fait que δ_1 soit affilié à δ résulte du lemme précédent.

LEMME 5. — *Soient* MA et $M_1 A_1$ *deux sous-groupes de Levi de* G *et* δ (resp. δ_1) *un élément de* $\hat{M}_d$ [resp. *de* $(\hat{M}_1)_{lsd}$]. *On suppose* δ_1 *affiliée à* δ. *Soit* $W = W(A)$, $W_1 = W(A_1)$. *Alors, si* $w \in W_\delta$ *laisse* $\mathfrak{a}_1$ *invariant, sa restriction* $w_{|\mathfrak{a}_1}$ *appartient à* $(W_1)_{\delta_1}$.

Démonstration. — Soient $P = MAN$, $P_1 = M_1 A_1 N_1$ avec $P \subset P_1$ des paraboliques associés aux sous-groupes de Levi. Soit $w \in W_\delta$ tel que $w\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$. On considère $i\mathfrak{a}_1^*$ comme un sous-espace de $i\mathfrak{a}^*$ à l'aide de la décomposition orthogonale; pour tout $\nu \in i\mathfrak{a}_1^*$, on a alors $\pi_{\delta, \nu}^P \cong \pi_{\delta, w\nu}^P$. Par ailleurs, δ_1 est affiliée à δ : on a une identité de représentations de M_1 :

$$\pi_{\delta, 0}^{P^1} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} \delta_1^i, \tag{2.6}$$

avec $P^1 = P \cap M_1$, δ_1^i étant une limite de série discrète de M_1, avec $\delta_1 = \delta_1^1$. Par induction par étapes, on en déduit :

$$\bigoplus_{i=1}^{l} \pi_{\delta_1^i, \nu}^{P_1} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} \pi_{\delta_1^i, w\nu}^{P_1}. \tag{2.7}$$

Choisissons ν dans $i\mathfrak{a}_1^*$ tel que ν et $w\nu$ soient génériques. Les représentations figurant dans (2) sont alors irréductibles d'après le lemme 3. On a donc $\pi_{\delta_1, \nu}^{P_1} \cong \pi_{\delta_1^{i_0}, w\nu}^{P_1}$ pour quelque i_0; les données $(M_1, A_1, \delta_1, \nu)$ et $(M_1, A_1, \delta_1^{i_0}, w\nu)$ sont donc conjuguées par un élément de K, et donc $w\nu = w_1 \nu$ pour un $w_1 \in W(A_1)$. Par ailleurs, faisant $\nu = 0$ dans l'isomorphisme précédent, on obtient par prolongement analytique $\pi_{\delta_1, 0}^{P_1} \cong \pi_{\delta_1^{i_0}, 0}^{P_1}$. Induisant l'égalité (2.6), on a par ailleurs $\pi_{\delta, 0}^{P} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} \pi_{\delta_1^i, 0}^{P_1}$. Comme la représentation $\pi_{\delta, 0}^{P}$ n'a que des facteurs de multiplicité 1, les deux égalités précédentes montrent que $\delta_1^{i_0} \cong \delta_1$. On a donc enfin montré qu'il existe $w_1 \in W(A_1)$ tel que $w_1 \delta_1 \cong \delta_1$ et $w\nu = w_1 \nu$. Par ailleurs, la restriction w' de w à $\mathfrak{a}_1$ est un élément du groupe de Weyl $W(A_1)$. On a donc $(w')^{-1} w_1 \nu = \nu$ avec $(w')^{-1} w_1 \in W(A_1)$: puisque ν est générique et $W(A_1)$ est le groupe de Weyl d'un système de racines, on doit avoir $w_1 = w'$, donc enfin $w'\delta_1 \cong \delta_1$, ce qui termine la démonstration.

2.3. On utilise la notion de K-type minimal de Vogan, *cf.* [24], [26]. Si $\mathbf{M} = \mathrm{MA}$ est la composante de Levi de $\mathrm{P} \in \mathscr{P}(\mathbf{M})$ et δ une limite de série discrète de M, on note $\mathrm{A}(\delta)$ l'ensemble des K-types minimaux de $\pi^{\mathrm{P}}_{\delta,\nu}$ [qui ne dépend pas de $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ ni de $\mathrm{P} \in \mathscr{P}(\mathbf{M})$]. Rappelons certaines propriétés de $\mathrm{A}(\delta)$ dans le cas où δ est dans la série discrète.

(i) les éléments de $\mathrm{A}(\delta)$ sont de multiplicité 1 dans $\mathrm{I}^{\mathrm{G}}_{\mathbf{M}}(\delta)$;

(ii) chaque sous-représentation de $\pi^{\mathrm{P}}_{\delta,\nu}$ pour $\nu \in i\mathfrak{a}^*$ est engendrée par le sous-espace isotypique correspondant aux éléments de $\mathrm{A}(\delta)$ qu'elle contient;

(iii) notons $\mathrm{R}_\delta = \mathrm{W}_\delta/\mathrm{W}^0_\delta$ et pour $\nu \in i\mathfrak{a}^*$, $\mathrm{R}_{\delta,\nu}$ l'image réciproque de $\mathrm{W}_{\delta,\nu}$ dans R_δ. Il existe une action naturelle de $\hat{\mathrm{R}}_\delta$ sur $\mathrm{A}(\delta)$, simplement transitive, telle que pour tout $\nu \in i\mathfrak{a}^*$ l'ensemble des éléments de $\mathrm{A}(\delta)$ contenu dans un sous-module irréductible de $\pi^{\mathrm{P}}_{\delta,\nu}$ est exactement une orbite de $\mathrm{R}^{\perp}_{\delta,\nu}\,(\subset \hat{\mathrm{R}}_\delta)$ pour cette action.

Ces propriétés sont établies par Vogan [24] dans le cas connexe; l'identification du groupe R_δ avec celui défini par Vogan repose sur [9], Thm. 1. Pour généraliser ceci au cas non connexe, il suffit d'utiliser [7], § 4 et l'appendice D, qui ramènent l'étude des K-types minimaux de $\pi^{\mathrm{P}}_{\delta,\nu}$ au cas connexe.

Remarquons par ailleurs que la projection naturelle $\mathrm{R}^c_\delta \to \mathrm{R}_\delta$ ou, plus généralement, $\mathrm{R}^c_{\delta,\nu} \to \mathrm{R}_{\delta,\nu}$, est un isomorphisme.

Soit maintenant $\mathbf{M}_1 = \mathrm{M}_1\mathrm{A}_1$ une composante de Levi de G et $\delta_1 \in (\hat{\mathrm{M}}_1)_{lsd}$. Introduisant $\mathbf{M} = \mathrm{MA}$ et δ série discrète de M telle que δ_1 soit affiliée à δ, on a facilement les propriétés suivantes de $\mathrm{A}(\delta_1)$:

(i)′ $\mathrm{A}(\delta_1)$ est égal à l'intersection de $\mathrm{A}(\delta)$ avec l'ensemble des K-types intervenant dans $\mathrm{I}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{M}_1}(\delta_1)$ et tout élément de $\mathrm{A}(\delta_1)$ est de multiplicité 1 dans $\mathrm{I}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{M}_1}(\delta_1)$.

(ii)′ Pour $\mathrm{P}_1 \in \mathscr{P}(\mathbf{M}_1)$ tout sous-module de $\pi^{\mathrm{P}_1}_{\delta,\nu}$, $\nu \in i\mathfrak{a}^*_1$ est engendré par le sous-espace associé aux éléments de $\mathrm{A}(\delta_1)$ qu'il contient. Chaque sous-module irréductible de $\pi^{\mathrm{P}_1}_{\delta_1,\nu}$ pour un $\nu \in i\mathfrak{a}^*_1$ fixé contient le même nombre d'éléments de $\mathrm{A}(\delta_1)$.

3. Démonstration du théorème principal

3.1. Nous donnons maintenant la démonstration du théorème 1. Imitant la stratégie suivie dans [7], nous commençons par le démontrer pour les représentations induites de L.S.D. affiliées à une série discrète fixée.

PROPOSITION 1. — *Soient* $\mathrm{P} = \mathrm{MAN}$ *un sous-groupe parabolique cuspidal standard de* G, δ *une série discrète de* M, μ *un* K-*type minimal de* $\pi_{\delta,\nu}$. *Soit* $r > 0$.

Soit (F_i) *une famille de fonctions comme dans l'énoncé du théorème principal Alors il existe* $f \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathrm{G}, \mathrm{K})_r$ *vérifiant :*

(i) $\operatorname{tr}\pi_{\delta_1,\nu}(f) \equiv \mathrm{F}_i(\delta_1, \nu)$ *pour tout* δ_1 *L.S.D. d'un* M_i, *affiliée à* δ.

(ii) $f \in \bigoplus_{\mu \in \mathrm{A}(\delta)} \mathrm{C}^\infty_c(\mathrm{G})^{\mu\mu}$ i.e. *f est somme de fonctions qui se transforment à droite et à gauche par un* K-*type minimal de* $\pi_{\delta,\nu}$.

Démonstration. — On note $W = W_\delta \subset W(A)$, $W^0 = W_\delta^0$, $\Delta = \Delta'_\delta$. On choisit un ensemble Δ^+ de racines positives pour Δ. Soit C la chambre de Weyl associée dans $\mathfrak{a}^*$, $\bar{C}$ l'adhérence de C. Alors (W, Δ^+) est une paire satisfaisant les hypothèses de l'appendice C, dont on utilise les notations. On va associer aux (F_i) un élément F de l'espace $\mathscr{P}W(\mathfrak{a}, W, \Delta^+)_r$ défini dans cet appendice. Pour cela on se fixe $\mu_0 \in A(\delta)$. Alors $A(\delta)$ s'identifie à $\hat{R}_\delta = (W_\delta/W_\delta^0)^\wedge$ (en envoyant le caractère trivial sur μ_0) comme $\hat{R}_\delta$-espace homogène. Si $\mu \in A(\delta)$ on notera r^μ l'élément de $\hat{R}_\delta$ correspondant. On note $R = R_\delta^c \subset W$ qui s'identifie à R_δ par la projection naturelle. Soit R^1 un élément de $\operatorname{Diag}(W, \Delta^+)$ *i.e.* $R^1 = R_{\nu_0}$ pour un $\nu_0 \in i\bar{C}$. Alors, d'après le paragraphe 2.1 [après la formule (2.1)], la strate correspondante $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}^{R^1}$ est égale à $\mathfrak{a}^{\nu_0}$. On considère alors le sous-groupe parabolique standard de G, $P_1 = M_1 A_1 N_1$, de composante de Levi $M_1 A_1 = M^{\nu_0} A^{\nu_0}$. Alors $\pi_{\delta, 0}^{P \cap M_1} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} \delta_i$, où les δ_i sont des limites de série discrète pour M_1, et $\pi_{\delta, \nu_0}^{P} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} \pi_{\delta_i, \nu_0}^{P_1}$, les représentations figurant à droite étant irréductibles. On peut maintenant définir, les notations étant celles de l'appendice C, la fonction $F_{R^1, \chi}(\nu)$ pour tout $\nu \in (\mathfrak{a}_1^*)_{\mathbb{C}}$ et $\chi \in \hat{R}^1$. En effet, d'après le paragraphe 2.3 (iii), les éléments de $A(\delta_i)$ s'identifient, pour tout δ_i, à une orbite de $(R^1)^\perp = R_{\nu_0}^\perp \subset \hat{R}$. Dans l'identification de $A(\delta)$ à $\hat{R}$ rappelée au début de cette démonstration, une orbite de $(R^1)^\perp$ correspond alors à un caractère de $\hat{R}^1$. A tout δ_i, on associe ainsi un élément χ_{δ_i} de $\hat{R}^1$, et cette correspondance est bijective d'après le paragraphe 2.3. Son inverse sera noté $\chi \to \delta_{i(\chi)}$.

On pose alors

$$F_{R^1, \chi}(\nu) = F(\delta_{i_\chi}, \nu).$$

C'est alors un exercice fastidieux mais facile de vérifier que la famille des $F_{R^1, \chi}$ définit un élément de $\mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}, W, \Delta^+)_r$. En effet, soient R', $R'' \in \operatorname{Diag}(W, \Delta^+)$ avec $R' \subset R''$, et $\mathfrak{a}' \supset \mathfrak{a}''$ les strates correspondantes. Il résulte des paragraphes 2.1, 2.2 que les centralisateurs dans G de $\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{a}''$, $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}''$ sont des composantes de Levi standard. On note $P' = M' A' N'$, $P'' = M'' A'' N''$ les décompositions de Langlands des sous-groupes paraboliques standard correspondants.

On a alors $P' \subset P''$,

$$\pi_{\delta, 0}^{P \cap M'} \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \delta'_i, \qquad \delta'_i \in (\hat{M}')_{l_{sd}}$$

et

$$\pi_{\delta, 0}^{P \cap M''} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} \delta''_i, \qquad \delta''_i \in (\hat{M}'')_{l_{sd}}.$$

Par induction par étages, on voit que chaque $\pi_{\delta_i, 0}^{P' \cap M''}$ est la somme de certaines représentations δ''_j. Il est clair que dans ce cas $A(\delta''_j) \subset A(\delta'_j)$. Puisque les $A(\delta'_i)$ [resp.

les $A(\delta_j'')$] forment une partition de $A(\delta)$, on a donc

$$\pi_{\delta_i', 0}^{P'' \cap M''} = \bigoplus_{j : A(\delta_j'') \subset A(\delta_i')} \delta_j''.$$

Donc, pour tout $\nu \in (\mathfrak{a}'')^*$, on a, d'après l'hypothèse (iv) du théorème 1 :

$$F(\delta_i', \nu) = \sum_{j : A(\delta_j'') \subset A(\delta_i')} F(\delta_j'', \nu).$$

Mais ceci se réécrit

$$(F_{R', \chi})_{|(\mathfrak{a}'')^*_{\mathbb{C}}} = \sum_{\eta/R' = \chi} F_{R'', \chi}$$

où $\chi \in \hat{R}'$ correspond à δ_i', car les $\eta \in \hat{R}''$ avec $\eta_{|R'} = \chi$ correspondent aux δ_j'' avec $A(\delta_j'') \subset A(\delta_j')$.

Les autres conditions d'invariance des $F_{H, \chi}$ sont claires d'après le lemme 5 et l'on a bien $F \in \mathscr{PW}(\mathfrak{a}, W, \Delta^+)_r$. En fait, F est de plus R-invariante d'après la remarque C1 de l'appendice. Nous voulons maintenant appliquer la proposition C1 et la remarque C1 de l'appendice : elles impliquent qu'il existe une famille $\Phi = (\Phi_\eta)_{\eta \in \hat{R}}$ d'éléments de $\mathscr{PW}(\mathfrak{a})^{W_\delta}$ telle que la famille de fonctions $F_{R^1, \chi}(\nu)$ obtenue par recollement à partir de Φ soit égale à notre famille $F_{R^1, \chi}(\nu) = F(\delta_{i_\chi}, \nu)$; ou, plus explicitement, telle qu'on ait, pour tout $R^1 \in \mathrm{Diag}(W, \Delta^+)$ et $\chi \in \hat{R}^1$:

$$F(\delta_{i_\chi}, \nu) = \sum_{\eta \in \hat{R}, \eta_{|R^1} = \chi} (\Phi_\eta)_{|\mathfrak{a}^{R^1}} \tag{3.1}$$

(*cf.* appendice C, avant la définition C1).

Soit alors $(\Phi_\eta)_{\eta \in \hat{R}}$ la famille de fonctions de $\mathscr{PW}(\mathfrak{a})^{W_\delta}$ satisfaisant (3.1). Grâce à la proposition 1 de [7], on peut choisir, pour tout $\eta \in \hat{R}$, une fonction $f_\eta \in C_c^\infty(G)_r^{\mu_\eta, \mu_\eta}$, $\mu_\eta = \eta . \mu_0$ étant le K-type dans $A(\delta)$ associé à η, telle que $\pi_{\delta, \nu}(f_\eta) = (\dim E_{\mu_\eta})^{-1} \Phi_\eta(\nu) P_\delta^{\mu_\eta}$, où $P_\delta^{\mu_\eta}$ est la projection orthogonale de $I_M^G(\delta)$ sur $I_M^G(\delta)^{\mu_\eta}$.

On pose $f = \sum_{\eta \in \hat{R}} f_\eta$. Montrons que f vérifie les conclusions de la proposition 1. Il est clair que f se transforme selon les K-types spécifiés par la condition (ii). Vérifions qu'elle a les transformées de Fourier requises par (i).

Soit $\delta_1 \in (\hat{M}_1)_{Isd}$ affiliée à δ, $\mathbf{M}_1 = M_1 A_1$ étant une composante de Levi standard. Il est facile de voir que $\bar{C} \cap \mathfrak{a}_1^*$ est un fermé d'intérieur non vide de $\mathfrak{a}_1^*$. Il existe donc $\nu_0 \in i\bar{C}$, générique dans $i\mathfrak{a}_1^*$. Alors $\pi_{\delta_1, \nu_0}^{P_1}$ est irréductible (§ 2.1). D'après le lemme 4, $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}^{\nu_0}$ et [voir, § 2.1, après (2.1)] $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}^{R_{\delta, \nu_0}^c}$. Donc $\mathfrak{a}_1$ est une strate de (W, Δ^+). Par ailleurs, l'ensemble des K-types de $A(\delta)$ figurant dans $\pi_{\delta_1, \nu}^{P_1}$ (quel que soit ν) est égal à $A(\delta_1)$, donc

$$\mathrm{tr}(\pi_{\delta_1, \nu}(f)) = \sum_{\eta \in \hat{R}, \mu_\eta \in A(\delta_1)} \Phi_\eta(\nu)$$

ou encore ;

$$\operatorname{tr}(\pi_{\delta_1, \nu}(f)) = \sum_{\eta \in \hat{R}, \eta|_{R^1} = \chi} \Phi_\eta(\nu);$$

R^1 est l'élément de Diag(W, Δ^+) correspondant à la strate, χ l'élément de $\hat{R}^1$ associé à δ_1 ou $A(\delta_1)$.

D'après (3.1), on a alors

$$F(\delta_1, \nu) = \operatorname{tr} \pi_{\delta_1, \nu}(f).$$

Donc f vérifie la condition (i) de la proposition 1 : ceci achève la démonstration.

Démonstration du théorème 1. — A partir de la proposition 1, la démonstration est la même que celle du théorème 1 de [7] à partir de la proposition 1 de cet article. On procède par récurrence sur la longueur des K-types minimaux, traitant d'un coup toutes les limites de série discrète affiliées à une même série discrète : pour les détails, *cf.* [7], paragraphe 2.3, et [8] qui permet d'éviter les conditions en « $r+\varepsilon$ » de [7].

4. Surjectivité des morphismes d'Harish-Chandra pour les limites de séries discrète

Les résultats du paragraphe 2 permettent de démontrer un théorème de surjectivité des morphismes d'Harish-Chandra associés aux K-types minimaux des induites de limites de série discrète. Cela étend le théorème démontré par l'un de nous [9] dans le cas des séries discrètes.

Dans ce paragraphe, nous supposerons, exceptionnellement, que G est un groupe *connexe* (pour la topologie réelle). Le groupe G est toujours supposé *linéaire* (*voir* l'introduction pour le passage d'un groupe satisfaisant nos hypothèses générales à un groupe linéaire connexe).

Commençons par quelques rappels sur les espaces de transition.

Soit $\mu \in \hat{K}$, on note J_μ l'annulateur dans $U(\mathfrak{k})$ de μ et (μ, E_μ) un représentant de μ.

On fixe $\mathbf{M} = MA$ un levi standard et $\delta \in \hat{M}_{lsd}$.

On note $\mathscr{E}_\delta^\mu = \operatorname{Hom}_{K_M}(E_\mu, E_\delta)$ où (δ, E_δ) est un représentant de δ et $K_M = K \cap M$. Alors, grâce à la réciprocité de Frobenius, $I_M^G(\delta)^\mu$ s'identifie naturellement à $E_\mu \otimes \mathscr{E}_\delta^\mu$. Si $\mu, \mu' \in \hat{K}$, soit $U^{\mu\mu'} \subset U = U(\mathfrak{g})$ l'espace de transition $\{u \in U \mid J_\mu u \subset U J_{\mu'}\}$.

PROPOSITION 2. — *Soient* $\mu, \mu' \in \hat{K}$. *On note*

$$\mathscr{F}_\delta^{\mu'\mu} = \{\nu \to \pi_{\delta\nu}(u)_{|I_M^G(\delta)^\mu} \mid \nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, u \in U^{\mu'\mu}\}.$$

Alors :

(i) *Les éléments de* $\mathscr{F}_\delta^{\mu'\mu}$ *sont des fonctions polynomiales en* ν, i.e. *avec les identifications ci-dessus :*

$$\mathscr{F}_\delta^{\mu'\mu} \subset S(\mathfrak{a}) \otimes \operatorname{End}(E_\mu \otimes \mathscr{E}_\delta^\mu, E_{\mu'} \otimes \mathscr{E}_\delta^{\mu'}).$$

(ii) *Identifiant* $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}_\mu \otimes \mathscr{E}^\mu_\delta, \mathrm{E}_{\mu'} \otimes \mathscr{E}^{\mu'}_\delta)$ *à* $\mathrm{Hom}(\mathscr{E}^\mu_\delta, \mathscr{E}^{\mu'}_\delta) \otimes \mathrm{Hom}(\mathrm{E}_\mu, \mathrm{E}_{\mu'})$ *on a* $\mathscr{F}^{\mu'\mu}_\delta = \mathrm{F}^{\mu'\mu}_\delta \otimes \mathrm{Hom}(\mathrm{E}_\mu, \mathrm{E}_{\mu'})$ *avec* $\mathrm{F}^{\mu'\mu}_\delta \subset \mathrm{S}(\mathfrak{a}) \otimes \mathrm{Hom}(\mathscr{E}^\mu_\delta, \mathscr{E}^{\mu'}_\delta)$.

(iii) *On a* $\mathrm{F}^{\mu\mu}_\delta \otimes 1_{\mathrm{E}_\mu} = \{ \nu \to \pi_{\delta\nu}(u)_{|\,\mathrm{I}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{M}}(\delta)}\, \mu \,|\, u \in \mathrm{U}^{\mathrm{K}} \}$.

Démonstration. — Identique à celle de la proposition 3 de [9].

Signalons que la démonstration du point (v) de celle-ci [(iii) ici] est un peu elliptique. Il est nécessaire d'utiliser l'égalité $\mathrm{U}^{\mu\mu} = \mathrm{U}(\mathfrak{k})\,\mathrm{U}^{\mathrm{K}} + \mathrm{UI}^\mu$ [*cf.* [10], prop. 9.1.10] et alors (iii) résulte de (ii).

THÉORÈME 2. — *Soit* $\mathbf{M}_1 = \mathrm{M}_1 \mathrm{A}_1$ *une composante de Levi de* G, $\delta_1 \in (\hat{\mathrm{M}}_1)_{lsd}$ *et* $\mu \in \mathrm{A}(\delta_1)$. *Avec les notations de la proposition* 2, *de* 2.1 *et* 2.3, *on a :*

(i) *L'homomorphisme* $\pi^\mu_{\delta_1} : \mathrm{U}^{\mathrm{K}} \to \mathrm{S}(\mathfrak{a}_1)^{\mathrm{W}_{\delta_1}}$ *est surjectif.*

(ii) *Pour tout* μ, $\mu' \in \mathrm{A}(\delta_1)$, *il existe un unique* $r^{\mu'\mu}_{\delta_1} \in \hat{\mathrm{R}}_{\delta_1}$ *tel que* $\mathrm{F}^{\mu'\mu}_{\delta_1}$ soit *égal à la composante isotypique de type* $r^{\mu'\mu}_{\delta_1}$ *de* $\mathrm{S}(\mathfrak{a}_1)^{\mathrm{W}^0_{\delta_1}}$ *sous l'action naturelle de* $R_{\delta_1} (= \mathrm{W}_{\delta_1}/\mathrm{W}^0_{\delta_1})$ *sur* $\mathrm{S}(\mathfrak{a}_1)^{\mathrm{W}^0_{\delta_1}}$.

Nous démontrons d'abord un résultat intermédiaire. Choisissons une composante de Levi $\mathbf{M} = \mathrm{MA}$ de G, et une série discrète de δ de M, telles que δ_1 soit affiliée à δ. On sait alors que l'assertion (i) du théorème est vraie pour δ (*cf.* [9]).

Fixons $\mathrm{P} \in \mathscr{P}(\mathbf{M})$ et $\mathrm{P}_1 \in \mathscr{P}(\mathbf{M}_1)$ avec $\mathrm{P} \subset \mathrm{P}_1$. (Pour $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_1$ standard, on peut choisir P et P_1 standard.) On en déduit des ordres compatibles sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}_1$, d'où des choix de racines positives $(\Delta'_{\delta,\nu})^+$, $(\Delta'_\delta)^+$ sur $\Delta'_{\delta,\nu}$, Δ'_δ (§ 2.1) et des « R-groupes concrets » $\mathrm{R}^c_{\delta,\nu}$ (§ 2.1).

Nous allons nous servir de certaines généralisations des résultats énoncés dans le paragraphe § 2.1 au cas où l'on induit à partir d'une limite de série discrète non dégénérée. Puisque G est connexe, ces résultats sont contenus dans [17] ou en résultent facilement.

Rappelons que δ_1 est une limite de série discrète *non dégénérée* de M_1, et qu'on a muni $\mathfrak{a}_1$ d'un ordre.

4.1. On peut alors définir, pour tout $\nu \in i\mathfrak{a}^*_1$, un système de racines $\Delta'_{\delta_1,\nu}$ contenu dans $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_1)$ [17], p. 462.

4.2. On définit alors

$$\mathrm{R}^c_{\delta_1,\nu} = \{ w \in \mathrm{W}_{\delta_1,\nu} : w\alpha > 0 \text{ si } \alpha \in (\Delta'_{\delta_1,\nu})^+ = \Delta'_{\delta_1,\nu} \cap \Delta^+ \}.$$

On a alors $\mathrm{W}_{\delta_1,\nu} = \mathrm{W}^0_{\delta_1,\nu} \mathrm{R}^c_{\delta_1,\nu}$ (produit semi-direct, avec $\mathrm{W}^0_{\delta_1,\nu}$ invariant); $\mathrm{W}^0_{\delta_1,\nu}$ est le groupe de Weyl de $\Delta'_{\delta_1,\nu}$ et est égal à l'ensemble des $w \in \mathrm{W}_{\delta_1,\nu}$ tels que l'opérateur d'entrelacement normalisé est scalaire [17], Thm. 11.1, Thm. 12.6].

4.3. Les opérateurs d'entrelacement normalisés associés aux éléments de $\mathrm{R}^c_{\delta_1,\nu}$ engendrent le commutant de $\pi_{\delta_1,\nu}$; $\pi_{\delta_1,\nu}$ est sans multiplicité, de longueur $|\mathrm{R}^c_{\delta_1,\nu}|$ (*ibid.*).

4.4. Si $\nu = 0$, écrivons comme à l'accoutumée Δ'_{δ_1}, $\mathrm{R}^c_{\delta_1}$ au lieu de $\Delta'_{\delta_1,0}$, ... Alors, si $\nu \in i\mathfrak{a}^*_1$ est $(\Delta'_{\delta_1})^+$-dominant, on a

$$(\mathrm{R}^c_{\delta_1})_\nu = \mathrm{R}^c_{\delta_1,\nu}.$$

Ceci se démontre comme (2.5).

On va commencer par préciser le lemme 5, dont on garde les notations.

PROPOSITION 3

(i) $(W_1)_{\delta_1}=\{w_{|\mathfrak{a}_1} : w\in W_\delta,\ w(\mathfrak{a}_1)=\mathfrak{a}_1\}$.

(ii) $(W_1)^0_{\delta_1}=\{w_{|\mathfrak{a}_1} : w\in W^0_\delta,\ w(\mathfrak{a}_1)=\mathfrak{a}_1\}$.

(iii) *Il existe* $\nu\in i\mathfrak{a}_1^*$ *avec* $\operatorname{Im}\nu$ *générique dans* $\mathfrak{a}_1^*$ *et* $(\Delta'_\delta)^+$*-dominant comme élément de* $\mathfrak{a}^*$. *On a alors* $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}^{R^c_{\delta,\nu}}$. *En particulier, puisque* R^c_δ *est commutatif,* $\mathfrak{a}_1$ *est laissé stable par* R^c_δ. *D'après* (i), *on en déduit un homomorphisme* $R^c_\delta\to(W_1)_{\delta_1}$, *d'où un homomorphisme* $R^c_\delta\to R^c_{\delta_1}$. *Alors cet homomorphisme est surjectif de noyau* $R^c_{\delta,\nu}$.

Démonstration. — (i) On a vu que si $w\in W_\delta$ stabilise $\mathfrak{a}_1$, $w_{|\mathfrak{a}_1}\in(W_1)_{\delta_1}$ (lemme 5). Réciproquement, soit $w_1\in(W_1)_{\delta_1}$. Si $\nu\in i\mathfrak{a}_1^*$, on a $\pi^{P_1}_{\delta_1,\nu}\cong\pi^{P_1}_{\delta_1,w\nu}$. Choisissons $\mu\in A(\delta_1)\subset A(\delta)$. En induisant par étages, on voit qu'alors

$$\pi^\mu_\delta(u)(\nu)=\pi^\mu_\delta(u)(w_1\nu)$$

pour tout $u\in U^K$, $\nu\in i\mathfrak{a}_1^*$. Puisque $\pi^\mu_\delta : U^K\to S(\mathfrak{a})^{W_\delta}$ est surjectif, on en déduit aisément que $w_1\nu=w\nu$ pour tout ν, avec un $w\in W_\delta$. D'où (i).

Montrons (ii) et (iii). Pour exhiber $\nu\in i\mathfrak{a}_1^*$ avec $\operatorname{Im}\nu$ générique et $(\Delta'_\delta)^+$ dominant, il suffit de choisir ν avec $\operatorname{Im}\nu$ générique et $\Delta^+_{P_1}$-dominant (donc Δ^+_P-dominant). Pour un ν vérifiant les conditions de l'énoncé, $\pi^P_{\delta,\nu}$ admet $|R^c_{\delta,\nu}|$ facteurs irréductibles dont l'un est $\pi^{P_1}_{\delta_1,\nu}$. Donc, d'après 2.3 (iii) et (4.3):

$$|R^c_{\delta_1}|=|R^c_\delta|\times|R^c_{\delta,\nu}|^{-1}.$$

D'autre part, $\operatorname{Im}\nu\in\mathfrak{a}_1^*$ étant $(\Delta'_\delta)^+$-dominant, on a $(R^c_\delta)_\nu=R^c_{\delta,\nu}\subset R^c_\delta$ d'après (2.5).

D'où

$$|R^c_{\delta_1}|=|R^c_\delta/(R^c_\delta)_\nu|.$$

Par ailleurs, on a $\mathfrak{a}^\nu=\mathfrak{a}^{R^c_{\delta,\nu}}$ [*cf.* § 2.1, après (2.1)] et d'après le lemme 4 on a $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}^\nu$. Tenant compte de l'égalité $R^c_{\delta,\nu}=(R^c_\delta)_\nu$, on a $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}^{(R^c_\delta)_\nu}$. Donc $\mathfrak{a}_1$ est bien stable par R^c_δ et R^c_δ est un sous-groupe du groupe $W^1_\delta=\{w\in W_\delta\,|\,w(\mathfrak{a}_1)=\mathfrak{a}_1\}$. D'autre part, d'après (i) on a un homomorphisme surjectif ρ de W^1_δ sur W_{δ_1} donné par $w\to w_{|\mathfrak{a}_1}$. Notons s_1 l'homomorphisme de W^1_δ sur $R_{\delta_1}=W_{\delta_1}/W^0_{\delta_1}$ obtenu en composant l'homomorphisme précédent avec la projection naturelle $W_{\delta_1}\to R_{\delta_1}$. D'autre part, à $w\in W_\delta$ on peut associer l'opérateur $s_2(w)$ qui est la restriction à $\pi_{\delta_1,0}$ de $\mathscr{A}_P(\delta,w,0)$. En effet $\mathscr{A}_P(\delta,w,0)$ laisse stable les sous-modules de $\pi^P_{\delta,0}$ (celui-ci est sans multiplicité) et l'injection $\delta_1\hookrightarrow\pi^{P_1}_{\delta,0}$donne par induction une injection $\pi^{P_1}_{\delta_1,0}\hookrightarrow\pi^P_{\delta,0}$ (qu'on regarde comme une inclusion).

Notons

$$\text{P Ker } s_2=\{w\in W_\delta\,|\,s_2(w)\text{ est scalaire}\}.$$

On va montrer que $(\text{P Ker } s_2)\cap W^1_\delta=\operatorname{Ker} s_1$. Étudions P Ker s_2. Clairement $W^0_\delta\subset$ P Ker s_2. Montrons que P Ker s_2 contient $R^c_{\delta,\nu}$. L'opérateur $\mathscr{A}_P(\delta,r,\nu)$ doit être scalaire sur $\pi^{P_1}_{\delta_1,\nu}(\subset\pi^P_{\delta,\nu})$ car ν étant générique $\pi^{P_1}_{\delta_1,\nu}$ est irréductible. En particulier

$\mathscr{A}_P(\delta, r, \nu)_{|\bigoplus_{\mu \in A(\delta_1)} I_M^G(\delta)^\mu} = c\,\mathrm{Id}$ où $c \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $t>0$, on a de même $r \in R^c_{\delta, t\nu}$ et $\mathscr{A}_P(\delta, r, t\nu)_{|\bigoplus_{\mu \in A(\delta_1)} I_M^G(\delta)^\mu} = c(t)\,\mathrm{Id}$. Par ailleurs, les opérateurs $\mathscr{A}_P(\delta, r, \nu)$ sont analytiques en $\nu \in i\mathfrak{a}^*$. Donc $t \to c(t)$ se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\mathscr{A}_P(r, \delta, 0)_{|\bigoplus_{\mu \in A(\delta_1)} I_M^G(\delta)^\mu} = c(0)\,\mathrm{Id}.$$

Or $\pi^{P_1}_{\delta_1, 0}$ est engendré par ses K-types minimaux. Donc $\mathscr{A}_P(r, \delta, 0)$ est scalaire sur $\pi^{P_1}_{\delta_1, 0}$ et on a bien montré $R^c_{\delta, \nu} \subset P\,\mathrm{Ker}\, s_2$. Par ailleurs, le commutant de $\pi^P_{\delta, 0}$ est engendré par les $\mathscr{A}_P(\delta, w, 0)$, $w \in W_\delta$, donc les $s_2(w)$ engendrent le commutant de $\pi^{P_1}_{\delta_1, 0}$ qui est de dimension $|R^c_{\delta_1}|$ $(=|R^c_\delta| \times |R^c_{\delta, \nu}|^{-1}$ d'après ce que l'on a déjà vu.)

Or l'espace engendré par les $s_2(w)$ est de dimension inférieure ou égale à $|W_\delta/P\,\mathrm{Ker}\, s_2|$. D'où $|W_\delta/P\,\mathrm{Ker}\, s_2| \geqq |R^c_\delta| \times |R^c_{\delta,\nu}|^{-1}$. Or $P\,\mathrm{Ker}\, s_2$ contient $R^c_{\delta,\nu} W^0_\delta$. D'où $|W_\delta/P\,\mathrm{Ker}\, s_2| \leqq |R^c_\delta/R^c_{\delta, \nu}|$, puis $|W^1_\delta/P\,\mathrm{Ker}\, s_2| \leqq |R^c_\delta/R^c_{\delta, \nu}|$ et finalement $P\,\mathrm{Ker}\, s_2 = R^c_{\delta, \nu} W^0_\delta$. Comme $R^c_{\delta, \nu} \subset W^1_\delta$ on a $P\,\mathrm{Ker}\, s_2 \cap W^1_\delta = R^c_{\delta, \nu}(W^0_\delta \cap W^1_\delta)$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Ker}\, s_1 \subset (P\,\mathrm{Ker}\, s_2) \cap W^1_\delta$. On a, par définition, $\mathrm{Ker}\, s_1 = \rho^{-1}(W^0_{\delta_1})$ où ρ est l'homomorphisme naturel $W^1_\delta \to W_{\delta_1}$ donné par $\rho(w) = w_{|\mathfrak{a}_1}$. Comme $W^0_{\delta_1}$ est engendré par les réflexions s_α où α décrit les racines simples de $(\Delta'_{\delta_1})^+$, il suffit de voir que pour une telle réflexion s_α, $\rho(w) = s_\alpha$ implique $w \in P\,\mathrm{Ker}\, s_2$. Soit donc α racine simple de $(\Delta'_{\delta_1})^+$. L'intersection de l'orthogonal de α avec l'ensemble des éléments $(\Delta'_{\delta_1})^+$ dominants de $\mathfrak{a}^*_1$ est d'intérieur non vide dans $\alpha^\perp$ (car α est simple). On note Ω l'intérieur de cette intersection. Alors, pour tout $\nu_1 \in i\Omega$ on a d'après (4.4) $(R^c_{\delta_1})_{\nu_1} = R^c_{\delta_1, \nu_1}$. Montrons que l'on peut choisir $\nu_1 \in i\Omega$ tel que $R^c_{\delta_1, \nu_1} = \{1\}$. En effet, si tel n'était pas le cas, on aurait :

$$\forall \nu \in i\Omega, \quad \exists r_\nu \in R^c_{\delta_1} - \{1\}, \qquad r_\nu = \nu.$$

Notons pour $r \in R^c_{\delta_1}$, $F_r = \{\nu \in \alpha^\perp \mid r\nu = \nu\}$. D'après ce qui précède la réunion des F_r, $r \neq 1$ est d'intérieur non vide car elle contient Ω. Or les F_r sont fermés. Donc, d'après le théorème de Baire l'un des F_r est d'intérieur non vide. Alors, pour tout ν dans cet F_r, on a $r\nu = s_\alpha \nu$, d'où pour tout ν dans $\alpha^\perp$ on a $r\nu = s_\alpha \nu$ (puisque F_r est d'intérieur non vide). Comme $r \neq 1$ et que r et s_α sont des transformations orthogonales de $\mathfrak{a}_1$, on a nécessairement $r = s_\alpha$. Or $s_\alpha \in W^0_{\delta_1}$, $r \in R^c_{\delta_1} - \{1\}$ et $W^0_{\delta_1} \cap R^c_{\delta_1} \neq \{1\}$. D'où une contradiction qui montre que l'on peut choisir $\nu_1 \in i\Omega$ avec $R^c_{\delta, \nu_1} = \{e\}$. Alors $\pi^{P_1}_{\delta_1, \nu_1}$ est irréductible. Donc $\mathscr{A}_P(\delta, w, \nu_1)$ est scalaire sur $\pi^{P_1}_{\delta_1, \nu_1}$ et de même pour tout $t>0$, $\mathscr{A}(\delta, w, t\nu_1)$ est scalaire sur $\pi_{\delta_1, t\nu_1}$.

Procédant par passage à la limite comme en (i), on en déduit que $\mathscr{A}_P(\delta, w, 0)$ est scalaire sur $\pi^{P_1}_{\delta_1, 0}$ *i.e.* $w \in P\,\mathrm{Ker}\, s_2$. Ceci achève de prouver que $\mathrm{Ker}\, s_1 \subset (P\,\mathrm{Ker}\, s_2) \cap W^1_\delta$. Mais s_1 étant surjectif, on a $|W^1_\delta/\mathrm{Ker}\, s_1| = |R^c_{\delta_1}|$. Or on a vu ci-dessus que : $|W^1_\delta/((P\,\mathrm{Ker}\, s_2) \cap W^1_\delta)| = |R^c_\delta/(R^c_\delta)_\nu|$ pour $\nu \in i\mathfrak{a}^*_1$ avec $\mathrm{Im}\,\nu$ générique dans $\mathfrak{a}^*_1$ et $(\Delta'_\delta)^+$-dominant. Or dans ce cas on a vu que $|R^c_{\delta_1}| = |R^c_\delta/(R^c_\delta)_\nu|$. D'où $|\mathrm{Ker}\, s_1| = |((P\,\mathrm{Ker}\, s_2) \cap W^1_\delta)|$. En tenant compte de $\mathrm{Ker}\, s_1 \subset (P\,\mathrm{Ker}\, s_2) \cap W^1_\delta$, on a finalement l'égalité voulue, *i.e.*

$$\mathrm{Ker}\, s_1 = R^c_{\delta, \nu}(W^0_\delta \cap W^1_\delta) \qquad \text{où} \quad \nu \in i\mathfrak{a}^*_1$$

avec Im ν générique dans $\mathfrak{a}_1^*$ et $(\Delta'_\delta)^+$-dominant.

On peut maintenant prouver (ii) et (iii). En effet, soit $w_1 \in W^0_{\delta_1}$. D'après (i) il existe $w_1 \in W^1_{\delta_1}$ avec $w_{|\mathfrak{a}_1} = w_1$. Mais on a $w \in \operatorname{Ker} s_1$. Alors $w = rw'$ avec $r \in R^c_{\delta, \nu}$, ν comme ci-dessus, et $w' \in W^0_\delta \cap W^1_\delta$. Mais si $r \in R^c_{\delta, \nu}$, $r_{|\mathfrak{a}_1}$ est trivial (car $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}^{R^c_{\delta, \nu}}$), d'après ce qu'on a vu avant (2.2).

Alors $w_1 = w'_{|\mathfrak{a}_1}$ où $w' \in W^0_\delta \cap W^1_\delta$. Ceci achève de prouver (ii). Pour (iii) si $r \in R^c_\delta$ s'envoie sur 1 dans R_{δ_1} cela signifie que l'on a $r \in \operatorname{Ker} s_1$. Mais $\operatorname{Ker} s_1 \cap R^c_\delta = R^c_{\delta, \nu}$ d'après ce qui précède et ceci achève de prouver (iii).

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.

Rappelons qu'avec les notations de la proposition 3, on a $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}^{R^c_{\delta, \nu}}$ et $R^c_{\delta, \nu} = (R^c_\delta)_\nu$.

Donc $R^c_{\delta, \nu}$ est un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{a}$ laissant fixe $(\Delta'_\delta)^+$ qui est isomorphe à un produit de copies de $\mathbb{Z}_2$. On peut appliquer la proposition A.2 et l'on a

$$S(\mathfrak{a}_1)^{W_1} = \{ p_{|\mathfrak{a}_1^*} \mid p \in S(\mathfrak{a}_1)^{W^0_\delta} \}$$

où

$$W_1 = \{ w_{|\mathfrak{a}_1} \mid w \in W^0_\delta,\ w\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 \}.$$

Mais, d'après la proposition 3, on a $W_1 = W^0_{\delta_1}$. Donc $S(\mathfrak{a}_1)^{W^0_{\delta_1}}$ est l'image de $S(\mathfrak{a})^{W^0_\delta}$ par l'homomorphisme de restriction des polynômes sur $\mathfrak{a}^*$ à $\mathfrak{a}_1^*$.

Par ailleurs, les éléments de R^c_δ laissent stable $\mathfrak{a}_1$ et leur restriction à $\mathfrak{a}_1$ (qui sont dans W_{δ_1}) laissent invariant $W^0_{\delta_1}$ (qui est distingué dans W_{δ_1}).

On en déduit une action de R^c_δ sur $S(\mathfrak{a}_1)^{W^0_{\delta_1}}$, pour laquelle le sous-groupe $R^c_{\delta, \nu}$ agit trivialement (il fixe $\mathfrak{a}_1$ point par point). De même R^c_δ agit sur $S(\mathfrak{a})^{W^0_\delta}$ et l'homomorphisme de restriction $S(\mathfrak{a})^{W^0_\delta} \to S(\mathfrak{a}_1)^{W^0_{\delta_1}}$ est un morphisme de R^c_δ-modules.

Soit alors μ, $\mu' \in A(\delta_1)$. On a μ, $\mu' \in A(\delta)$ et d'après [9] il existe un unique $r^{\mu'\mu}_\delta \in \hat{R}_\delta = \hat{R}^c_\delta$ tel que $F^{\mu'\mu}_\delta = S(\mathfrak{a})^{W^0_\delta, r^{\mu'\mu}}_\delta$; le membre de droite désigne ici la composante isotypique de type $r^{\mu'\mu}_\delta$ de $S(\mathfrak{a})^{W^0_\delta}$. Or on voit facilement que $F^{\mu'\mu}_{\delta_1} = \{ p_{|\mathfrak{a}_1^*} \mid p \in F^{\mu'\mu}_\delta \}$. On a donc

$$F^{\mu'\mu}_{\delta_1} = (S(\mathfrak{a}_1)^{W^0_{\delta_1}})^{r^{\mu'\mu}_\delta}.$$

Mais l'action de R^c_δ sur $S(\mathfrak{a}_1)^{W^0_{\delta_1}}$ passe au quotient par $R^c_{\delta, \nu}$ et $F^{\mu'\mu}_\delta \neq 0$ (car $\pi^{P_1}_{\delta_1, \nu}$ est irréductible et contient μ', μ). On a donc $r^{\mu'\mu}_\delta \in (R^c_\delta / R^c_{\delta, \nu})^\wedge$. Par ailleurs, on a un isomorphisme (*cf.* proposition 3) de R_{δ_1} avec $R^c_\delta / R^c_{\delta, \nu}$ qui transporte l'action de $R^c_\delta / R^c_{\delta, \nu}$ sur $S(\mathfrak{a}_1)^{W^0_{\delta_1}}$ en celle de $R_{\delta_1} = W_{\delta_1} / W^0_{\delta_1}$. Alors par cet isomorphisme on obtient un élément de $\hat{R}_{\delta_1}$ qui correspond à $r^{\mu'\mu}_\delta$ et que l'on note $r^{\mu'\mu}_{\delta_1}$. Alors on a

$$F^{\mu'\mu}_{\delta_1} = (S(\mathfrak{a}_1)^{W^0_{\delta_1}})^{r^{\mu'\mu}_{\delta_1}} \quad \text{comme désiré.}$$

L'unicité de $r^{\mu'\mu}_{\delta_1}$ résulte de la non nullité de $F^{\mu'\mu}_{\delta_1}$. Ceci achève de prouver (ii).

Alors (i) résulte de l'égalité $F^{\mu\mu}_\delta = \operatorname{Im} \pi^\mu_\delta$ (cf. proposition 1) et du fait que $r^{\mu\mu}_\delta = 1$ implique que $r^{\mu\mu}_{\delta_1} = 1$.

5. Réformulation. Applications

5.1. Le théorème 1 peut être reformulé de façon plus abstraite, sous une forme proche du théorème démontré par Bernstein, Deligne et Kazhdan [4] pour les groupes p-adiques, et conforme aux hypothèses d'Analyse harmonique énoncées par Arthur dans son article sur la formule des traces invariante ([1], § 5). (Le lecteur remarquera qu'Arthur considérait des fonctions C_c^∞, alors que nous nous restreignons aux fonctions K-finies. Les progrès faits par Arthur ces dernières années sur la formule des traces montrent que cela n'est pas une restriction sérieuse.)

Suivant les notations d'Arthur, soit $\Pi_{\text{temp}}(M)$ l'ensemble des (classes de) représentations irréductibles d'un sous-groupe de Levi M de G ([2]). Si $M \in \mathscr{L}^G$, l'ensemble des sous-groupes de Levi de G, soit $\mathfrak{a}_M$ l'algèbre de Lie de sa composante déployée. Si $\nu \in \mathfrak{a}_M^*$ et $\pi \in \Pi_{\text{temp}}(M)$, notons π_ν la représentation de G

$$\operatorname{ind}_{MN}^G(\pi \otimes e^{i\nu}),$$

où MN est un parabolique de G contenant M comme composante de Levi. Fixons des normes $\| \quad \|$ sur les $\mathfrak{a}_M$ de la façon habituelle.

Si φ est une fonction définie sur $\Pi_{\text{temp}}(G)$ à valeurs complexes, on note $\tilde{\varphi}$ son prolongement $\mathbb{Z}$-linéaire au $\mathbb{Z}$-module libre, $\mathbb{Z}(\Pi_{\text{temp}}(G))$, dont l'ensemble des générateurs est $\Pi_{\text{temp}}(G)$. De façon évidente, pour $\pi \in \Pi_{\text{temp}}(M)$ et $\nu \in \mathfrak{a}_M^*$ on peut considérer π_ν comme un élément de $\mathbb{Z}(\Pi_{\text{temp}}(G))$ et pour φ comme ci-dessus $\tilde{\varphi}(\pi_\nu)$ est bien défini.

Si Γ est un ensemble fini de K-types, r une constante >0, soit $J_r(G)_\Gamma$ l'ensemble des fonctions

$$\varphi : \quad \Pi_{\text{temp}}(G) \to \mathbb{C}$$

satisfaisant les conditions suivantes :

(i) Si $\pi \in \Pi_{\text{temp}}(G)$ n'a aucun K-type dans Γ, $\varphi(\pi) = 0$.

(ii) Pour tout $M \in \mathscr{L}^G$, $\pi \in \Pi_{\text{temp}}(M)$, la fonction

$$\Phi(\pi, X) = \int_{\mathfrak{a}_M^*} \tilde{\varphi}(\pi_\nu) e^{-i\langle \nu, X \rangle} d\nu,$$

définie pour $X \in \mathfrak{a}_M$, s'annule pour $\|X\| > r$.

Soit $C_c^\infty(G, K)_{r, \Gamma}$ l'espace des fonctions de $C_c^\infty(G, K)_r$ se transformant sous Γ.

THÉORÈME 1′. — *L'application*

$$f \to \varphi(f) : \varphi(f)(\pi) = \operatorname{trace} \pi(f), \ \pi \in \Pi_{\text{temp}}(G)$$

([2]) Nous utilisons dans le chapitre 5.1 la notation coutumière dans la théorie automorphe. En particulier, M – au lieu de MA – désigne un sous-groupe de Levi.

est une application surjective : $C_c^\infty(G, K)_{r,\Gamma} \to J_r(G)_\Gamma$, *dès que* Γ *est saturé pour l'ordre sur* $\hat{K}$ *introduit dans* [7] 2.3, *i.e. si* $\mu \in \Gamma$ *et* $\mu' \leqq \mu$ *implique* $\mu' \in \Gamma$.

Le théorème 1′ se déduit immédiatement du théorème 1 à l'aide des propriétés de la transformation de Fourier inverse et des restrictions de fonctions de Paley-Wiener à un sous-espace.

5.2. Applications. — Les notations habituelles sont de nouveau en vigueur.

Commençons par mentionner une conséquence simple du théorème 1. Soit λ une forme $\mathbb{Z}$-linéaire, à valeurs complexes, sur le groupe de Grothendieck $R(G)$ des modules de Harish-Chandra de longueur finie de G. On dit que λ est discrète si, pour tout parabolique propre $MAN \subsetneqq G$, et toute représentation de longueur finie τ_M de M et $\nu \in \mathfrak{a}^* \otimes \mathbb{C}$, λ s'annule sur $\mathrm{ind}_{MAN}^G(\pi_\mu \otimes e^\nu)$. (Cette définition est due à Bernstein-Deligne-Kazhdan [4].) Il est équivalent de supposer que $\lambda(\pi_{\delta,\nu}) = 0$ pour toute représentation basique $\pi_{\delta,\nu}$ venant d'un parabolique propre (*cf.* [6], démonstration de la proposition 1).

Soit λ une forme linéaire discrète. *Supposons le centre de* G *compact*. D'après un théorème de Harish-Chandra et Zuckerman (*cf.* [25], proposition 6.6.7), $R(G)$ est engendré sur $\mathbb{Z}$ par les représentations basiques. On en déduit que λ est déterminée par ses valeurs sur les représentations de $\hat{G}_{l_{sd}}$.

Rappelons que si une représentation irréductible π de G s'exprime comme

$$\pi = \sum_{\delta,\nu} n(\delta,\nu)\,\pi_{\delta,\nu} \quad \text{(égalité dans } R(G))$$

avec les $\pi_{\delta,\nu}$ basiques, les $\pi_{\delta,\nu}$ telles que $n(\delta,\nu) \neq 0$ ont même caractère infinitésimal que π.

Lemme 6 (G de centre compact). — *Supposons* λ *discrète. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

(1) *L'ensemble des représentations irréductibles de* G *telles que* $\lambda(\pi) \neq 0$ *est fini.*

(2) *L'ensemble des* $\pi \in \hat{G}_{l_{sd}}$ *telles que* $\lambda(\pi) \neq 0$ *est fini.*

(3) *Il existe un ensemble fini* Γ *de* K*-types tel que* $\lambda(\pi) = 0$ *si* π *ne contient aucun* K*-type de* Γ.

Si λ *satisfait ces conditions, on dit que* λ *est admissible.*

Démonstration. (1) ⇒ (3) est évident; (3) ⇒ (2) est démontré, par exemple, dans [7], lemme A5. Supposons (2) vrai, et soit π irréductible. Si $\lambda(\pi) \neq 0$, π doit avoir le même caractère infinitésimal qu'une l.s.d. δ tel que $\lambda(\delta) \neq 0$, et ceci implique (1) d'après le théorème de finitude d'Harish-Chandra.

Proposition 4. — *Soit* λ *une forme linéaire discrète et admissible sur* $R(G)$, G *de centre compact, et* $r > 0$. *Alors il existe* $f \in C_c^\infty(G, K)_r$ *telle que*

$$\lambda(\pi) = \operatorname{tr} \pi(f)$$

pour toute représentation π *de longueur finie.*

La proposition 4 est une conséquence immédiate du théorème 1.

COROLLAIRE (Existence de pseudo-coefficients). — *Soit* $\delta_0 \in \hat{G}_d$. *Alors, pour tout* $r > 0$, *il existe* $f \in C_c^\infty(G, K)_r$ *telle que*

(i) $\operatorname{tr} \delta_0(f) = 1$

(ii) $\operatorname{tr} \pi_{\delta, \nu}(f) = 0$ *pour toute représentation basique* $\pi_{\delta, \nu}$ *de* G *différente de* δ_0.

Une fonction f satisfaisant ces conditions est appelée pseudo-coefficient de δ_0.

Démonstration. — Associons une forme linéaire admissible à δ_0. Il suffit de la définir pour les représentations basiques, où elle est définie par (i) et (ii). Pour voir que cette définition est cohérente, il suffit de vérifier qu'elle est compatible avec les relations (★) figurant dans l'énoncé du théorème 1. Cela résulte du fait bien connu qu'une représentation de la série discrète de G ne peut figurer dans le membre de droite d'une identité (★) : cela fait partie du « Disjointness Theorem » de Langlands, *cf.* [17], théorème 14.1.

Nous donnons maintenant deux applications de la proposition 4. La première concerne la cohomologie continue. Si π est une représentation de G, soit $H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi)$ le i-ième espace de cohomologie relative de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ à valeurs dans le $(\mathfrak{g}, K)$-module associé à π. Notons

$$\operatorname{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi)$$

le caractéristique d'Euler-Poincaré associée. Le théorème suivant résout un problème posé par J.-P. Labesse.

THÉORÈME 3. — *Soit* ξ *une représentation de dimension finie de* G.

(i) *Si* G *n'a pas de série discrète, on a* $\operatorname{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi \otimes \xi) = 0$ *pour tout* $(\mathfrak{g}, K)$*-module de longueur finie* π.

(ii) *Si* G *a une série discrète, il existe, pour tout* $r > 0$, *une fonction* $f_\xi \in C_c^\infty(G, K)_r$ *telle que, pour tout* $(\mathfrak{g}, K)$*-module de longueur finie* π *de* G :

$$\operatorname{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi \otimes \xi) = \operatorname{tr} \pi(f_\xi).$$

Il y a un théorème analogue concernant l'opérateur de Dirac ([20], 3).

Supposons maintenant que G *a une série discrète*. Soit $T \subset K$ un sous-groupe de Cartan, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$, $\Delta_c \subset \Delta$ l'ensemble des racines compactes. Fixons un système de racines positives Δ_c^+ pour Δ_c.

Soit $\mu \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ le plus haut poids d'une représentation irréductible de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ (aussi notée μ). On peut choisir Δ_μ^+, un système de racines positives de Δ, tel que $\mu + \rho_c$ est dominant, où $\rho_c = 1/2 \sum_{\alpha \in \Delta_\mu^+} \alpha$, $\rho_n = \rho - \rho_c$. On suppose que $\mu + \rho_n$ *est un caractère de* T. Sous ces conditions, on a les opérateurs de Dirac

$$D_\mu^\pm \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes \operatorname{Hom}(V_\mu \otimes S^\pm, V_\mu \otimes S^\mp)$$

où V_μ est la représentation de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ de type μ, $S^\pm$ sont les deux modules de spin ([3], § 1.3). Si V est l'espace d'un $(\mathfrak{g}, K)$-module, on en déduit des opérateurs

$D_\mu^\pm : V \otimes V_\mu \otimes S^\pm \to V \otimes V_\mu \otimes S^\mp$ ([3], § 1.3, [2], Appendix). Posons

$$\mathrm{ep}(\mu, \pi) = \dim \operatorname{Ker} D_\mu^+ - \dim \operatorname{Coker} D_\mu^+.$$

THÉORÈME 4. — *Soit* $\mu \in \hat{\mathfrak{t}}_{\mathbb{C}}$ *tel que* $\mu + \rho_n$ *est un caractère de* T *et* $r > 0$. *Alors il existe une fonction* $f_\mu \in C_c^\infty(G, K)_r$ *telle que*

$$\mathrm{ep}(\mu, \pi) = \operatorname{tr} \pi(f_\mu)$$

pour toute représentation de longueur finie π *de* G.

Démonstration. — Les deux théorèmes se démontrent de la même façon. On utilise la proposition 4. Il s'agit de montrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré est une forme linéaire discrète et admissible. Soit $\mathrm{ep}(\pi)$ l'une des caractéristiques définies par le théorème 3 ou le théorème 4.

Tout d'abord, l'application $\pi \to \mathrm{ep}(\pi)$ est additive. Pour la $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-cohomologie, ceci résulte de la suite exacte longue en cohomologie; pour l'opérateur de Dirac, cela résulte de la suite Ker-Coker associée au diagramme à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & V'_+ & \to & V_+ & \to & V''_+ & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle D^+} & & \downarrow{\scriptstyle D^+} & & \downarrow{\scriptstyle D^+} & \\ 0 \to & V'_- & \to & V_- & \to & V''_- & \to 0 \end{array}$$

associé à une suite exacte courte $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$; on a noté $V_\pm = V \otimes V_\mu \otimes S^\pm$.

Montrons que $\pi \to \mathrm{ep}(\pi)$ est *discrète*.

Considérons une représentation $\pi_{\delta, \lambda}$ basique, induite d'un parabolique propre $P = MAN$. Le calcul de la $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-cohomologie à l'aide du complexe standard [5], § 1.1.2 montre que $\mathrm{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi \otimes \xi)$ ne dépend que de $\pi_{|K}$. D'après la définition de $D_\mu^\pm$, il en est de même pour $\mathrm{ep}(\mu, \pi)$. Mais on a $\mathrm{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi \otimes \xi) = 0$, d'après le lemme de Wigner, si $\chi_\pi \neq \chi_{\xi *}$ (*cf.* [5], théorème 4.1).

On a donc $\mathrm{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi_{\delta, \lambda} \otimes \xi) = 0$ pour presque tout λ et donc partout.

Ceci démontre le théorème 3 (i). De façon analogue, on a $\mathrm{ep}(\mu, \pi) = 0$ sauf si l'opérateur de Casimir agit sur π par un scalaire dont la valeur est déterminée par μ ([27], démonstration du théorème 7.6). Comme l'opérateur de Casimir agit sur $\pi_{\delta, \lambda}$ par une fonction quadratique de λ, le même argument montre que $\mathrm{ep}(\mu; \pi_{\delta, \lambda}) = 0$.

Enfin, $\pi \to \mathrm{ep}(\pi)$ est *admissible*. Pour la $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-cohomologie, cela résulte du lemme de Wigner [par exemple à l'aide du lemme 6(1)]; pour l'opérateur de Dirac, on peut utiliser le lemme 6(3) et l'expression de $D_\mu^\pm$ avant le théorème 4. Ceci termine la démonstration.

APPENDICE A

Surjectivité de la restriction de polynomes W-*invariants*

PROPOSITION A.1. — *Soit* Δ *un système de racines réduit sur un espace vectoriel* E (*réel ou complexe*), Δ^+ *un ensemble de racines positives. Soit* r *une involution de* E, *dont la* *transposée laisse stable* Δ^+; *soit* E_1 (*resp.* E_1^-) *l'espace des éléments invariants* (*resp. anti-invariants*) *de* E *sous* r.

Alors $E=E_1 \oplus E_1^-$, $E^*=E_1^* \oplus (E_1^-)^*$ *et la restriction des fonctions polynomiales de* E^* à E_1^* *détermine un homomorphisme surjectif :*

$$S(E)^W \to S(E_1)^{W_1}.$$

Ici W *est le groupe de Weyl de* Δ *et* $W_1=\{w_{|E_1} \mid w \in W \text{ et } wE_1 \subset E_1\}$ *est aussi le groupe de Weyl du système des racines restreintes* $\Delta_1=\{\alpha_{|E_1} \mid \alpha \in \Delta,\ \alpha_{|E_1} \neq 0\}$.

Démonstration. — Ce problème fait partie d'un problème plus général étudié par Helgason. Dans [12], Helgason considère une algèbre de Lie semi-simple réelle $\mathfrak{g}_0$ avec décomposition de Cartan $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ pour l'involution de Cartan, θ. Soit $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$ une décomposition d'Iwasawa avec $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{p}_0$. On peut trouver une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de la complexifiée $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_0$ contenant $\mathfrak{a}_0$ et stable sous θ (comme d'habitude $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$, ... désignent les complexifiés de $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{a}_0$, ...). Soit W le groupe de Weyl de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Helgason étudie l'image de l'homomorphisme de restriction $S(\mathfrak{h})^W \to S(\mathfrak{a})^{W_1}$ où $\mathfrak{a}$ est l'ensemble des points fixes de l'involution $r=-\theta$ de $\mathfrak{h}$ et $W_1=\{w_{|\mathfrak{a}} \mid w \in W,\ w\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}\}$. En général r ne donne pas naissance à une involution du diagramme de Dynkin de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. C'est le cas seulement si $\mathfrak{g}_0$ est quasi déployée. C'est donc le problème d'Helgason restreint au cas où $\mathfrak{g}_0$ est quasi déployée que nous voulons étudier (avec $E=\mathfrak{h}$, $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}$). Le cas où $\mathfrak{g}_0$ est déployé est trivial, ce que nous excluons désormais. Le cas où $\mathfrak{g}_0$ est complexe ainsi que le cas où $\mathfrak{g}_0$ est classique est traité dans [12]. Par réduction et en décomposant $\mathfrak{g}_0$ en facteurs simples, on voit qu'il ne reste qu'à traiter le cas où $\mathfrak{g}_0$ est la forme réelle quasi déployée non déployée de E_6 (E II dans la liste [13], Table V, p. 518).

Dans ce cas le système de racines restreintes Δ_1 est réduit et de type F_4.

On vérifie facilement à l'aide de [13], p. 534, que les racines courtes de F_4 ont multiplicité 2 (*i.e.* il existe deux racines distinctes de Δ se restreignant en une racine courte donnée) et que les racines longues ont multiplicité 1. Alors, les polynômes suivants (après identification de E_1 et E_1^* grâce à un produit scalaire invariant) :

$$P_{2l}=2 \sum_{\substack{\alpha \in \Delta_1^+ \\ \alpha \text{ courte}}} \alpha^{2l} + \sum_{\substack{\beta \in \Delta_1^+ \\ \beta \text{ longue}}} \beta^{2l}$$

sont contenus dans l'image de l'homomorphisme $S(E)^W \to S(E_1)^{W_1}$.

(Ici $\Delta_1^+=\{\alpha_{|E_1} \mid \alpha \in \Delta^+,\ \alpha_{|E_1} \neq 0\}$). En effet P_{2l} est l'image de $\sum_{\gamma \in \Delta^+} \gamma^{2l} \in S(E)^W$. Par ailleurs on sait que $S(E_1)^{W_1}$ est engendrée par des générateurs homogènes de degré 2, 6, 8, 12, algébriquement indépendants. Notant d_l la dimension de la composante homogène de degré l de $S(E_1)^{W_1}$ on a $d_2=1$, $d_6=2$, $d_8=3$, $d_{12}=5$. En explicitant les racines de Δ_1 dans une base de E_1 on va vérifier à la main que les composantes homogènes de l'algèbre engendrée par P_2, P_6, P_8, P_{12} de degré 2, 6, 8, 12 ont les mêmes dimensions que celles de $S(E_1)^{W_1}$. L'image de $S(E)^W$ par l'homomorphisme de restriction qui est une sous-algèbre de $S(E_1)^{W_1}$ contiendra alors les générateurs de $S(E_1)^{W_1}$ et lui sera donc égale.

Détail des calculs. — On choisit une base de E_1^*, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4$ dans laquelle les racines positives courtes de Δ_1 sont ε_i, $1 \leqq i \leqq 4$ et $1/2\ (\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$ et les racines positives longues sont $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $1 \leqq i < j \leqq 4$. Les polynômes considérés sont tous symétriques en ε_1, ε_2, ε_3, ε_4. Par convenance on n'écrit donc qu'un seul terme de chaque type. Par exemple $\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^4 + \ldots$ veut dire $\sum_{i<j} \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^4 + \varepsilon_j^2 \varepsilon_i^4$ (ce qui n'est pas le symétrisé de $\varepsilon_1^2 \varepsilon_4^2$). Alors on a :

$$P_2 = 12\,\varepsilon_1^2 + \ldots$$

$$2^2 P_6 = 3\,(11\,\varepsilon_1^6 + \ldots + 45\,\varepsilon_1^4 \varepsilon_2^2 + \ldots + 30\,\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2 + \ldots$$

$$\begin{aligned} 2^4 P_8 = {} & 129\,\varepsilon_1^8 + \ldots + 924\,\varepsilon_1^6 \varepsilon_2^2 + \ldots \\ & + 2310\,\varepsilon_1^4 \varepsilon_2^4 + \ldots + 420\,\varepsilon_1^4 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2 + \ldots + 2520\,\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2 \varepsilon_4^2 \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^8 P_{12} = 3\,(& 683\,\varepsilon_1^{12} + \ldots + 11286\,\varepsilon_1^{10} \varepsilon_2^2 + \ldots + 84645\,\varepsilon_1^8 \varepsilon_2^4 + \ldots \\ & + 158004\,\varepsilon_1^6 \varepsilon_2^6 + \ldots + 990\,\varepsilon_1^8 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2 + \ldots + 4620\,\varepsilon_1^6 \varepsilon_2^4 \varepsilon_3^2 + \ldots \\ & + 11550\,\varepsilon_1^4 \varepsilon_2^4 \varepsilon_3^4 + \ldots + 27720\,\varepsilon_1^6 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2 \varepsilon_4^2 + \ldots + 69300\,\varepsilon_1^4 \varepsilon_2^4 \varepsilon_3^2 \varepsilon_4^2 + \ldots . \end{aligned}$$

On introduit alors

$$Y_2 = P_2$$

$$Y_6 = \frac{4}{3} P_6 - 11\,Y_2^3 \ i.e.\ Y_6 = \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + \ldots - 3\,\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2 \ldots$$

$$Y_8 = \frac{1}{2^4} (2^4 P_8 - 129\,Y_2^4)$$

et l'on trouve

$$Y_8 = 17\,\varepsilon_1^6 \varepsilon_2^2 + \ldots + 64\,\varepsilon_1^4 \varepsilon_2^4 + \ldots - 47\,\varepsilon_1^4 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2 \ldots - 24\,\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2 \varepsilon_4^2.$$

Alors il est facile de voir que les composantes homogènes de d^0 2, 6, 8, 12 de l'image de l'homomorphisme de restriction sont au moins égales respectivement à 1, 2, 3, 5 en montrant que Y_2^3 et Y_6 (resp. Y_2^4, $Y_2 Y_6$, Y_8) resp. (Y_2^6, $Y_2^3 Y_6$, $Y_2^2 Y_8$, Y_6^2, P_{12}) sont linéairement indépendants.

Ceci achève la démonstration de la proposition.

Proposition A.2. — *Soit* Δ, *un système de racines sur un espace vectoriel* E (*réel ou complexe*), Δ^+ *un ensemble de racines positives. Soit* R *un groupe d'automorphismes de* E *dont les transposés laissent stable* Δ^+. *On suppose en outre que* R *est un produit de copies de* $\mathbb{Z}_2$. *Soit* $E_1 = E^R$ *et* E_1^- *l'orthogonal de* E_1 *pour un produit scalaire* R-*invariant sur* E.

Alors $E = E_1 \oplus E_1^-$, $E^* = E_1^* \oplus (E_1^-)^*$ *et la restriction des fonctions polynomiales sur* E^* *à* E_1^* *détermine un homomorphisme surjectif :*

$$S(E)^W \to S(E_1)^{W_1}.$$

Ici W *est le groupe de Weyl de* Δ *et* $W_1 = \{ w_{|E_1} \mid w \in W,\ w(E_1) = E_1 \}$.

En outre, si l'on note

$$\Delta_1 = \{ \alpha_{|E_1} \mid \alpha \in \Delta,\ \alpha_{|E_1} \neq 0 \} \qquad \textit{et} \qquad (\Delta_1)_{\mathrm{red}} = \{ \alpha \in \Delta_1 \mid 1/2\,\alpha \notin \Delta_1 \},$$

$(\Delta_1)_{\mathrm{red}}$ *est un système de racines réduit dans* E_1 *et* W_1 *est le groupe de Weyl de* $(\Delta_1)_{\mathrm{red}}$.

Démonstration. — On va procéder par récurrence sur $|R|$. La proposition est triviale si $|R|=1$. Supposons la proposition prouvée pour $|R| \leqq 2^l$. On suppose maintenant $|R| = 2^{l+1}$. Soient alors R' et $r \in R$ tels que R s'identifie au produit direct $R' \times \{1, r\}$. On pose $E'_1 = E^{R'}$, $E'_1{}^-$ l'orthogonal de E'_1 dans E_1. Alors $E^* = (E'_1)^* \oplus (E'_1{}^-)^*$ et l'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer que $S(E)^W$ s'envoie surjectivement sur

$$S(E'_1)^{W'_1} \qquad \text{où} \quad W'_1 = \{ w_{|E'_1} \mid w \in W \text{ et } w E'_1 \subset E'_1 \}.$$

Notant

$$\Delta'_1 = \{ \alpha_{|E'_1} \mid \alpha \in \Delta,\ \alpha_{|E'_1} \neq 0 \}$$

et

$$(\Delta'_1)_{\mathrm{red}} = \{ \alpha \in \Delta'_1 \mid 1/2\,\alpha \notin \Delta'_1 \},$$

$(\Delta'_1)_{\mathrm{red}}$ est un système de racines dans E'_1 et W'_1 est le groupe de Weyl de $(\Delta'_1)_{\mathrm{red}}$. D'autre part le sous-espace de E'_1 des vecteurs fixes sous r est égal à $E_1 = E^R$. On a alors $E_1^- = (E_1^- \cap E'_1) \oplus (E'_1)^-$.

La proposition A.1 permet de conclure que $S(E'_1)^{W'_1}$ s'envoie surjectivement par restriction sur $S(E_1)^{W''_1}$ où $W''_1 = \{ w_{|E_1} \mid w \in W'_1,\ w E'_1 \subset E'_1 \}$ est aussi le groupe de Weyl de

$$\Delta''_1 = \{ \alpha_{|E_1} \mid \alpha \in (\Delta'_1)_{\mathrm{red}},\ \alpha_{|E_1} \neq 0 \}$$

qui est un système de racines (éventuellement non réduit) dans E_1. On a évidemment $\Delta''_1 \subset \Delta_1$.

D'autre part, si $\alpha \in \Delta_1$, on a $\alpha = \beta_{|E_1}$ pour un $\beta \in \Delta$. Donc $\alpha = \gamma_{|E_1}$ avec $\gamma \in \Delta'_1$ ($\gamma = \beta_{|E'_1}$). Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$1/2^k\,\gamma \in (\Delta'_1)_{\mathrm{red}} \qquad \text{et} \qquad 1/2^{k'}\,\gamma \in \Delta'_1$$

dès que $0 \leqq k' \leqq k$. D'où

$$1/2^k\,\alpha \in \Delta''_1 \qquad \text{et} \qquad 1/2^{k'}\,\alpha \in \Delta_1, \qquad 0 \leqq k' \leqq k.$$

Donc si $\alpha \in (\Delta_1)_{\mathrm{red}}$ on a avec les notations ci-dessus $k \neq 0$ et donc $(\Delta_1)_{\mathrm{red}} \subset (\Delta''_1)$.

Réciproquement, soit $\alpha \in (\Delta''_1)_{\mathrm{red}}$. Si $\alpha \notin (\Delta_1)_{\mathrm{red}}$, on a $\alpha' = 1/2\,\alpha \in \Delta_1$.

Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $1/2^k\,\alpha' = 1/2^{k+1}\,\alpha \in \Delta''_1$. Mais Δ''_1 est un système de racines. Ceci implique nécessairement que $k=0$ *i.e.* $1/2\,\alpha \in \Delta''_1$.

Ce qui contredit $\alpha \in (\Delta_1'')_{\text{red}}$. Finalement on a les inclusions $(\Delta_1'')_{\text{red}} \subset (\Delta_1)_{\text{red}} \subset \Delta_1''$. Mais alors si on avait $\alpha \in (\Delta_1)_{\text{red}}$ et $\alpha \notin (\Delta_1'')_{\text{red}}$ on aurait $1/2\,\alpha \in (\Delta_1'')_{\text{red}}$, donc aussi $1/2\,\alpha \in (\Delta_1)_{\text{red}}$. Ce qui est impossible.

Donc $(\Delta_1)_{\text{red}} = (\Delta_1'')_{\text{red}}$. Donc $(\Delta_1)_{\text{red}}$ est bien un système de racines et W_1'' est le groupe de Weyl de Δ_1. Par ailleurs le composé de deux homomorphismes surjectifs étant surjectif, $S(E)^W$ s'envoie par restriction surjectivement sur $S(E_1)^{W_1''}$. Il faut maintenant comparer W_1'' et W_1. On a clairement $W_1'' \subset W_1$. Supposons alors que $W_1'' \neq W_1$. On aurait alors $S(E_1)^{W_1} \subsetneq S(E_1)^{W_1''}$. Or $S(E)^W$ s'envoie par restriction dans $S(E_1)^{W_1}$. Comme l'image de cette restriction est $S(E_1)^{W_1''}$ on a une contradiction qui prouve que $W_1'' = W_1$ et ceci achève la démonstration de la proposition A.2.

APPENDICE B

Un théorème de Raïs

Pour la commodité du lecteur nous allons donner une démonstration du théorème suivant, dû à Raïs (*voir* [21], § 3, pour une version moins précise).

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, W un groupe fini d'automorphismes de E engendré par des réflexions. On note $S(E)^W$ l'algèbre des invariants de W agissant dans l'espace S(E) des fonctions polynomiales sur $E_{\mathbb{C}}^*$. D'après un théorème de Chevalley, S(E) est un module libre sur $S(E)^W$, de dimension $|W|$. Soit $P_1, \ldots, P_l$ une base de S(E) sur $S(E)^W$. Enfin, soit $\mathscr{PW}(E)_r$ l'espace des transformées de Fourier des fonctions C^∞ à support compact sur E à support dans la boule fermée de rayon r : ce sont des fonctions sur $E_{\mathbb{C}}^*$.

THÉORÈME B.1 (Raïs) (cf. [21]). — *Soit $\varphi \in \mathscr{PW}(E)_r$. Alors φ s'écrit de façon unique*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{l} P_i \varphi_i$$

où les φ_i appartiennent à l'espace $\mathscr{PW}(E)_r^W$ des fonctions de Paley-Wiener sur $E_{\mathbb{C}}^*$, invariantes par W.

Démonstration. — Si les φ_i existent elles satisfont le système

$$\varphi(w\lambda) = \sum_{i=1}^{l} P_i(w\lambda)\,\varphi_i(\lambda), \qquad \forall w \in W, \quad \forall \lambda \in E_{\mathbb{C}}^*.$$

C'est un système de l équations à l inconnues où l est l'ordre de W. Notons $w_1, \ldots, w_l$ les éléments de W et $D(\lambda) = \det(P_i(w_j\lambda))$.

Comme les P_i forment une base de S(E) sous $S(E)^W$, on sait, d'après Harisch-Chandra, qu'ils sont également linéairement indépendants sous l'action du corps des fractions $Q(\mathfrak{a})^W$ de $S(\mathfrak{a})^W$ agissant sur le corps des fractions $Q(\mathfrak{a})$ de $S(\mathfrak{a})$. On en déduit que D est non identiquement nul.

Alors, en résolvant le système ci-dessus, on trouve des fonctions ψ_i définies par :

$$\psi_i(\lambda)=(-1)^i \begin{vmatrix} \varphi_i(w_1\lambda) & P_1(w_1\lambda) & \dots & \hat{P}_i(w_1\lambda) & \dots & P_l(w_1\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi_i(w_l\lambda) & P_1(w_l\lambda) & \dots & \hat{P}_i(w_l\lambda) & \dots & P_l(w_l\lambda) \end{vmatrix}$$

et qui vérifient

$$\forall w \in W, \quad \forall \lambda \in E^*_{\mathbb{C}}, \qquad D(\lambda)\varphi(w\lambda)=\Sigma P_i(w\lambda)\psi_i(\lambda).$$

Clairement les ψ_i sont holomorphes et sont les seules solutions holomorphes du système ci-dessus [qui est de Cramer lorsque $D(\lambda)$ est non nul]. Elles sont donc invariantes sous W. Par ailleurs, $\mathscr{PW}(E)_r$ étant stable par multiplication par des polynômes, on a finalement $\psi_i \in \mathscr{PW}(E)_r$ pour tout i. Montrons que les ψ_i sont divisibles comme fonctions holomorphes par D. Pour cela approximons la fonction entière φ par une suite de polynômes (φ_n) qui converge vers φ uniformément sur tout compact (sa série de Taylor à l'origine par exemple). Alors, comme les P_i forment une base de $S(\mathfrak{a})$ sous l'action de $S(\mathfrak{a})^W$, il existe des polynômes $\varphi_{i,n}$ W-invariants et uniques tels que $\varphi_n=\sum_{i=1}^{l} P_i\varphi_{i,n}$. Clairement, $\psi_{i,n}=D\varphi_{i,n}$ est donnée par une formule analogue à celle définissant ψ_i où l'on a remplacé φ par φ_n. Il résulte de ces formules que $(\psi_{i,n})$ converge uniformément sur tout compact vers ψ_i. La divisibilité par D se préserve par passage à la limite. Pour le voir, rappelons un lemme classique :

LEMME B.1. (cf. Ehrenpreis [11], th. 1.4, p. 8). — *Soit* Q *un polynôme sur* $\mathbb{C}$ *en* $z_1 \dots z_m$.

(i) *Alors il existe des constantes* α, β *telles que pour toute fonction* F *holomorphe sur* $|z_j-z_j^0|\leqq\rho$ *pour tout* j, *où* $z^0=(z_1^0, \dots, z_m^0)$ *est un point donné, on ait la propriété suivante :*

Si $|Q(z)F(z)|\leqq C$ *sur* $\{z \mid |z_j-z_j^0|\leqq\rho \text{ pour tout } j\}$

on a $|F(z^0)|\leqq\alpha C\rho^{-\beta}$.

(ii) *Si en outre* F *est entière*, $p_{r,n}(F)\leqq e^{r\rho}(1+\rho)^n\alpha\rho^{-\beta}p_{r,n}(QF)$ *pour tout* $\rho>0$ *et* $r\geqq 0$, *où* $p_{r,n}(F)=\operatorname{Sup}_{z\in\mathbb{C}^m}(1+\|z\|^n)e^{-r\|\operatorname{Re} z\|}|F(z)|$, *où* $\|z\|=\operatorname{Sup}|z_j|$.

Démonstration. — (i) est le théorème 1.4, p. 8 de Ehrenpreis.

(ii) résulte de (i). En effet :

$$p_{r,n}(F)=\sup_{z\in\mathbb{C}^m}(1+\|z\|)^n e^{-r\|\operatorname{Re} z\|}|F(z)|$$

$$\leqq \operatorname{Sup}_{z\in\mathbb{C}^m}(1+\|z\|)^n e^{-r\|\operatorname{Re} z\|}\alpha\rho^{-\beta}x \operatorname{Sup}_{\|z'-z\|\leqq\rho}|Q(z')F(z')|.$$

Comme

$$1+\|z\|\leqq(1+\|z'\|)(1+\|z-z'\|) \qquad \text{et} \qquad \|\operatorname{Re} z\|\geqq\|\operatorname{Re} z'\|-\|\operatorname{Re}(z-z')\|$$

on en déduit

$$p_{r,n}(\mathrm{F}) \leqq e^{r\rho}(1+\rho)^n \alpha \rho^{-\beta} p_{r,n}(\mathrm{QF}).$$

C.Q.F.D.

On déduit immédiatement de ce lemme que la convergence uniforme sur tout compact des $\psi_{i,n}$ vers ψ_i implique la convergence uniforme sur tout compact des $\varphi_{i,n}$ vers une fonction holomorphe φ_i. Clairement on a $\mathrm{D}\varphi_i = \psi_i$ et la divisibilité de ψ_i par D en résulte. Maintenant la partie (ii) du lemme implique que φ_i est dans $\mathscr{P}\mathscr{W}_r(\mathrm{E})$ puisque ψ_i est dans cet espace.

Ceci achève la démonstration du théorème.

APPENDICE C

Recollement de fonctions de Paley-Wiener

Soit E un espace vectoriel réel et Δ un système de racines sur E. On note W^0 le groupe de Weyl de Δ. Soit W un groupe fini d'automorphismes de E contenant W^0 comme sous-groupe distingué et tel que le quotient de W par W^0 soit isomorphe à un produit de copies de $\mathbb{Z}_2$.

On suppose en outre que W laisse fixe Δ. On choisit Δ^+ un ensemble de racines positives. On se fixe un produit scalaire invariant par W sur E ce qui permet entre autres d'identifier E à son dual. A la paire (W, Δ^+) on va associer plusieurs objets. D'abord $\mathrm{R} = \{ r \in \mathrm{W} \mid r(\Delta^+) = \Delta^+ \}$. On définit alors une famille de sous-groupes de R appelée diagramme de (W, Δ^+) : $\mathrm{Diag}(\mathrm{W}, \Delta^+) = \{ \mathrm{R}_\nu \mid \nu \in \bar{\mathrm{C}} \}$ où C est la chambre de Weyl positive définie par Δ^+, $\bar{\mathrm{C}}$ sa fermeture et R_ν désigne le stabilisateur de ν dans R.

On définit également un ensemble fini de sous-espaces vectoriels de E appelés strates de la paire (W, Δ^+) :

$$\mathrm{Str}(\mathrm{W}, \Delta^+) = \{ \mathrm{E}^{\mathrm{H}} \mid \mathrm{H} \in \mathrm{Diag}(\mathrm{W}, \Delta^+) \}.$$

Notons que la correspondance $\mathrm{H} \to \mathrm{E}^{\mathrm{H}}$ de $\mathrm{Diag}(\mathrm{W}, \Delta^+)$ sur $\mathrm{Str}(\mathrm{W}, \Delta^+)$ est bijective. En effet, si $\mathrm{E}^{\mathrm{H}} = \mathrm{E}^{\mathrm{H}'} \in \mathrm{Diag}(\mathrm{W}, \Delta^+)$, il existe ν, $\nu' \in \bar{\mathrm{C}}$ avec $\mathrm{R}_\nu = \mathrm{H}$, $\mathrm{R}_{\nu'} = \mathrm{H}'$. Alors $\nu \in \mathrm{E}^{\mathrm{H}} = \mathrm{E}^{\mathrm{H}'}$ implique que $\mathrm{H}' \subset \mathrm{R}_\nu = \mathrm{H}$. De même on a $\mathrm{H}' \subset \mathrm{H}$. D'où l'égalité voulue. Chaque strate est donc de la forme $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}^{\mathrm{R}^1}$ pour un unique $\mathrm{R}^1 \in \mathrm{Diag}(\mathrm{W}, \Delta^+)$. Pour une telle strate on introduit les groupes d'automorphismes de E_1 :

$$\mathrm{W}_1 = \{ w_{|\mathrm{E}_1} \mid w \in \mathrm{W},\ w\mathrm{E}_1 \subset \mathrm{E}_1 \}$$

$$\mathrm{W}_1^0 = \{ w_{|\mathrm{E}_1} \mid w \in \mathrm{W}^0,\ w\mathrm{E}_1 \subset \mathrm{E}_1 \}.$$

Comme R est commutatif (car il s'identifie naturellement au quotient W/W^0), on voit que R laisse stable $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}^{\mathrm{R}^1}$ et R^1 est le sous-groupe de R laissant fixe E_1 point par point. On note

$$R_1=\{r_{|E_1}\,|\,r\in R\}\text{ qui s'identifie au quotient } R/R^1.$$

Pour $r>0$, on note $\mathcal{PW}(E, W, \Delta^+)_r$ l'espace des familles

$$(F_{R^1,\chi})_{R^1\in \mathrm{Diag}(W,\Delta^+),\,\chi\in\hat{R}^1}\text{ telles que :}$$

(i) $F_{R^1,\chi}\in\mathcal{PW}(E_1)_r^{W_1^0}$ pour tout $\chi\in\hat{R}^1$, où $E_1=E^{R^1}$;

(ii) si R', $R''\in \mathrm{Diag}(W, \Delta^+)$ vérifient $R'\subset R''$ on a $E'=E^{R'}\supset E''=E^{R''}$ et on a, pour tout $\chi\in\hat{R}'$:

$$(F_{R',\chi})_{|(E'')^*}=\sum_{\eta\in\hat{R}'',\,\eta_{|R'}=\chi}F_{R'',\eta}$$

On définit une application linéaire ω du produit de $|\hat{R}|$ copies de $\mathcal{PW}(E)_r^{W^0}$ dans $\mathcal{PW}(E, W, \Delta^+)_r$ par :

$$\Phi=(\Phi_\chi)_{\chi\in\hat{R}}\to\omega(\Phi)=F$$

avec

$$F=(F_{R^1,\chi})_{R^1\in \mathrm{Diag}(W,\Delta^+),\,\chi\in\hat{R}^1}$$

définie par

$$F_{R^1,\chi}=\sum_{\eta\in\hat{R},\,\eta_{|R^1}=\chi}(\Phi_\eta)_{|E_1^*}\qquad\text{pour tout}\quad R^1\in \mathrm{Diag}(W,\Delta^+)\quad\text{et}\quad\chi\in\hat{R}^1.$$

On se propose d'étudier la surjectivité de ω pour certaines paires (W, Δ^+).

PROPOSITION C.1. — *L'application* $\omega:\Phi\to F=\omega(\Phi)$ *de* $\prod_{\chi\in\hat{R}}\mathcal{PW}(E)_r^{W^0}$ *dans* $\mathcal{PW}(E, W, \Delta^+)_r$ *est surjective.*

*Remarque C.*1. — On dispose en outre d'une action naturelle de R sur $\mathcal{PW}(E)_r^{W^0}$ car R laisse invariant W^0. De même R agit sur chacune des strates, car celles-ci sont laissées stables par R puisque R est commutatif. Il en résulte donc une action sur $\mathcal{PW}_r(E_1)$ pour toute strate et même sur $\mathcal{PW}_r(E_1)^{W_1^0}$. Finalement on obtient une action de R sur $\mathcal{PW}(E, W, \Delta^+)_r$. Il est alors clair que ω est un morphisme de R-modules. Donc, si $\omega(\Phi)=F$, les composantes isotypiques de F et Φ se correspondent.

En particulier, si F est R-invariante, on peut choisir les Φ_χ, $\chi\in\hat{R}$, invariantes sous W.

On commence par démontrer deux lemmes.

LEMME C.1. — *Pour toute strate* $E_1\in \mathrm{Str}(W, \Delta^+)$ *et toute* $F_1\in\mathcal{PW}(E_1)_r^{W_1^0}$, *il existe* $F\in\mathcal{PW}(E)_r^{W^0}$ *telle que* $F_{|E_1^*}=F_1$.

Démonstration. — D'après [8], F_1 est la restriction à E_1^* d'un élément $\tilde{F}_1$ de $\mathcal{PW}(E)_r$. De plus en moyennant, on peut prendre $\tilde{F}_1$ invariante par le sous-groupe $\tilde{W}_1^0$ des éléments de W^0 qui laissent stable E_1, puisque $W_1^0=\{w_{|E_1}\,|\,w\in\tilde{W}_1^0\}$.

D'après le théorème de Raïs de l'appendice B, on peut écrire $\tilde{F}_1 = \sum_{i=1}^{l} P_i H_i$ où les P_i sont des polynômes et H_i sont éléments de $\mathscr{PW}(E)_r^{W^0}$. Mais $\tilde{F}_1$ étant invariante sous $\tilde{W}_1^0$, en moyennant sous ce sous-groupe de W^0 on a :

$$\tilde{F}_1 = \sum_{i=1}^{l} Q_i H_i \qquad \text{avec} \quad Q_i \in S(E)^{\tilde{W}_1^0}.$$

En particulier les $Q_{i \mid E_1^*}$ sont invariants sous W_1^0. Ils sont donc, grâce à la proposition A.2, la restriction à E_1^* d'éléments $\tilde{Q}_i$ de $S(E)^{W^0}$.

On pose alors

$$F = \sum_{i=1}^{l} \tilde{Q}_i H_i.$$

Clairement $F_{\mid E_1^*} = \tilde{F}_{1 \mid E_1^*}$. Or $\tilde{F}_{1 \mid E_1^*} = F_1$

D'autre part, comme les H_i sont dans $\mathscr{PW}(E)_r^{W^0}$ et que les $\tilde{Q}_i$ sont des polynômes invariants sous W^0, on a aussi $F \in \mathscr{PW}(E)_r^{W^0}$ et F a les propriétés voulues.

LEMME C.2. — *Soit* $s \in R$. *Alors il existe un unique sous-groupe* $R(s)$ *de* R *qui vérifie les conditions* (i) *et* (ii).

(i) $(E^*)^{R(s)} = (E^*)^s$ (*où* $(E^*)^s$ *désigne l'espace des invariants sous* s).

(ii) $\exists\, \nu \in E^*$ *avec* $R_\nu = R(s)$.

Par ailleurs $R(s)$ *vérifie les propriétés suivantes :*

(iii) $\exists\, \nu \in \bar{C} \cap (E^*)^s$ *tel que* $R_\nu = R(s)$. *En particulier* $R(s) \in \mathrm{Diag}(W, \Delta^+)$.

(iv) *Soit* R^1 *un sous-groupe de* R *contenant* s *et tel qu'il existe* $\nu \in E^*$ *avec* $R_\nu = R^1$. *Alors on a* $R(s) \subset R^1$.

Démonstration. — Démontrons d'abord que s'il existe un sous-groupe $R(s)$ satisfaisant (i) et (ii), il est unique. En effet, si R' est un autre sous-groupe satisfaisant (i) et (ii), il existe $\nu' \in E^*$ avec $R_{\nu'} = R'$. Mais comme $s \in R'$ on a $\nu' \in (E^*)^s$. Donc $\nu' \in (E^*)^{R(s)}$. D'où $R(s) \subset R_{\nu'}$. L'inclusion inverse se montre de façon similaire. D'où l'unicité de $R(s)$ si elle existe.

Montrons l'existence de $R(s)$. Pour cela on remarque que $(E^*)^s \cap \bar{C}$ est non vide, car si $\nu \in \bar{C}$ on a $s\nu \in \bar{C}$, donc $\nu + s\nu \in \bar{C} \cap (E^*)^s$ (car C est un cône convexe stable par s et $s^2 = 1$).

Pour H sous-groupe de R on note

$$A_H = \{ \lambda \in (E^*)^s \cap \bar{C} \mid R_\lambda = H \}.$$

Notons que $A_H = \varnothing$ si $s \notin R$.

Alors on a $(E^*)^s \cap \bar{C} = \bigcup A_H$, H sous-groupe de R contenant s.

Mais si $s \in H$ on a $A_H \subset (E^*)^H \subset (E^*)^s$. D'où :

$$(E^*)^s \cap \bar{C} \subset \bigcup (E^*)^H \subset (E^*)^s,$$

H sous-groupe de R contenant s, $A_H \neq \emptyset$.

Donc la réunion des $(E^*)^H$, fermés de $(E^*)^s$ est d'intérieur non vide (C est ouvert dans E^*).

Par le théorème de Baire on en déduit que l'un des E^H est d'intérieur non vide *i.e.* $(E^*)^H = (E^*)^s$ pour un sous-groupe H de R avec $A_H \neq \emptyset$.

Clairement ce sous-groupe vérifie (i), (ii) et (iii).

Quant à (iv), avec les notations de ce point on a $\nu \in (E^*)^s$ (car $s \in R^1$).

D'où $\nu \in (E^*)^{R(s)}$ et donc $R(s) \subset R_\nu = R^1$.

C.Q.F.D.

Démonstration de la proposition C.1. — On part donc de $F \in \mathscr{PW}(E, W, \Delta^+)_r$.

Soit s un élément de R. On définit alors pour $\lambda \in (E^*)^s = (E^*)^{R(s)}$ (avec les notations du lemme C.2) :

$$\varphi_s(\lambda) = \sum_{\chi \in \hat{R}(s)} F_{R(s),\chi}(\lambda)\,\overline{\chi(s)}, \qquad \forall \lambda \in (E^*)^s = (E^*)^{R(s)}.$$

On peut alors, grâce au lemme C.1, étendre φ_s en une fonction sur E^* notée $\tilde{\varphi}_s$ et qui est dans $\mathscr{PW}(E)_r^{W^0}$.

On définit enfin des éléments de $\mathscr{PW}(E)_r^{W^0}$, Φ_η, $\eta \in \hat{R}$ par :

$$\Phi_\eta(\lambda) = |R|^{-1} \sum_{s \in R} \tilde{\varphi}_s(\lambda)\,\eta(s), \qquad \forall \lambda \in E^*_{\mathbb{C}}.$$

On va montrer que $\omega(\Phi) = F$.

Soit alors $R^1 \in \mathrm{Diag}(W, \Delta^+)$ et $\chi \in \hat{R}^1$. Il nous faut démontrer que :

$$\forall \lambda \in (E^{R^1}), \quad \sum_{\substack{\eta \in \hat{R} \\ \eta|_{R^1} = \chi}} \Phi_\eta(\lambda) = F_{R_1,\chi}(\lambda).$$

Or :

$$\sum_{\substack{\eta \in \hat{R} \\ \eta|_{R^1} = \chi}} \Phi_\eta(\lambda) = |R|^{-1} \sum_{\substack{\eta \in \hat{R} \\ \eta|_{R^1} = \chi}} \sum_{s \in R} \tilde{\varphi}_s(\lambda)\,\eta(s) = |R|^{-1} \sum_{s \in R} \tilde{\varphi}_s(\lambda) \Big(\sum_{\eta \in \hat{R},\, \eta|_{R^1} = \chi} \eta(s) \Big).$$

Mais clairement

$$\sum_{\eta \in \hat{R},\, \eta|_{R^1} = \chi} \eta(s) \text{ vaut } 0 \quad \text{si} \quad s \notin R^1 \quad \text{et} \quad |R/R^1|\,\chi(s) \quad \text{si} \quad s \in R^1$$

(grâce aux relations d'orthogonalité des caractères de R/R^1).

D'où, en notant $A = \sum_{\eta \in \hat{R},\, \eta|_{R^1} = \chi} \Phi_\eta(\lambda)$:

$$A = \frac{1}{|R^1|} \sum_{s \in R^1} \tilde{\varphi}_s(\lambda)\,\chi(s).$$

Mais si $s \in \mathrm{R}^1$ et $\lambda \in (\mathrm{E}^*)^{\mathrm{R}^1}$ on a en particulier $\lambda \in (\mathrm{E}^*)^s$, d'où par construction,

$$\tilde{\varphi}_s(\lambda) = \varphi_s(\lambda) = \sum_{\eta \in \hat{\mathrm{R}}(s)} \mathrm{F}_{\mathrm{R}(s), \eta}(\lambda) \overline{\eta(s)}.$$

Par ailleurs, grâce au lemme C.2(iv), on a aussi $\mathrm{R}(s) \subset \mathrm{R}^1$ et grâce aux propriétés de F on en déduit que pour $s \in \mathrm{R}^1$ et $\lambda \in (\mathrm{E}^*)^{\mathrm{R}^1}$:

$$\tilde{\varphi}_s(\lambda) = \sum_{\eta \in \hat{\mathrm{R}}(s)} \sum_{\chi' \in \hat{\mathrm{R}}^1, \chi'|_{\mathrm{R}(s)} = \eta} \mathrm{F}_{\mathrm{R}^1, \chi'}(\lambda) \overline{\chi'(s)} = \sum_{\chi' \in \hat{\mathrm{R}}^1} \mathrm{F}_{\mathrm{R}^1, \chi'}(\lambda) \overline{\chi'(s)}.$$

D'où :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{|\mathrm{R}^1|} \sum_{s \in \mathrm{R}^1} \sum_{\chi' \in \hat{\mathrm{R}}^1} \mathrm{F}_{\mathrm{R}^1, \chi'}(\lambda) \overline{\chi'(s)} \chi(s).$$

Soit encore :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{|\mathrm{R}^1|} \sum_{\chi' \in \hat{\mathrm{R}}^1} \mathrm{F}_{\mathrm{R}^1, \chi'}(\lambda) \Big(\sum_{s \in \mathrm{R}^1} \overline{\chi'(s)} \chi(s) \Big).$$

Par les relations d'orthogonalité des caractères de R^1 on en déduit :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{|\mathrm{R}^1|} \sum_{\chi' \in \hat{\mathrm{R}}'} \mathrm{F}_{\mathrm{R}^1, \chi'}(\lambda) \times |\mathrm{R}^1| \times \delta_{\chi, \chi'}$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{F}_{\mathrm{R}^1, \chi}(\lambda).$$

C.Q.F.D.

APPENDICE D

Erratum à un article antérieur

Dans cette section, nous corrigeons une erreur de l'article [7]. La démonstration qui suit est un travail commun avec A. Bouaziz.

Le lemme 4 de [7] est faux et improprement attribué à Vogan. Il n'est utilisé que dans la démonstration de la proposition 2 (ii) et du lemme 11 (ii). Nous donnons ci-dessous des démonstrations de ces deux points. Les notations ainsi que les hypothèses sont celles de cet article. En particulier, G est un groupe réductif satisfaisant les conditions de Vogan, mais non nécessairement connexe.

PROPOSITION D.1. (Prop. 2 (ii) de [7]). — *Soit* $\mathrm{M}_i \mathrm{A}_i$ $(i=1, 2)$ *deux sous-groupes de Levi cuspidaux,* $\delta_i \in (\hat{\mathrm{M}}_i)_d$. *Alors, si* $\mathrm{I}(\delta_1)$ *et* $\mathrm{I}(\delta_2)$ *ont un* K-*type minimal en commun, les données* (M_i, δ_i) *sont conjuguées par* G.

Rappelons que $G^{\#}=G^0 Z^G$, $K^{\#}=K \cap G^{\#}$; si M est un sous-groupe de Levi, $M^{\S}=M \cap G^{\#}$ [7], § 1.2 et 4.1.

LEMME D.1 (Lemme 11 (ii) de [7]). — *Soit* $\delta \in \hat{M}_d$, $\delta_{|M^{\S}}=\bigoplus_{i=1}^{r} \delta_i$. Soit $I(\delta_i)$ *la représentation de* $K^{\#}$ *induite de* $\delta_{i|M \cap K^{\#}}$. *Alors, si* $i \neq j$, $I(\delta_i)$ *et* $I(\delta_j)$ *n'ont pas de* $K^{\#}$*-type minimal en commun.*

La proposition D.1. – ainsi que le fait que les K-types interviennent avec multiplicité 1 – est complètement démontrée dans Vogan [23] pour G connexe.

Commençons par démontrer le lemme D.1. Rappelons d'abord que si deux K-types ont un $K^{\#}$-type en commun, ils ont même restriction à $K^{\#}$ ([26], prop. 5.1.9). Supposons maintenant, par exemple, que $A(\delta_2)$ rencontre $A(\delta_1)$.

Rappelons la description de la série discrète de $M^{\S}$.

Si $\delta \in (M^{\S})_d$, δ est déterminée par sa restriction à M^0 et son caractère central restreint $F \cap Z_{M^{\S}}$, F étant défini en [7], § 4.1, (*cf.* Knapp [15], p. 55-56). On note $\Lambda^1_{\delta_1}, \ldots, \Lambda^l_{\delta_1}$ les paramètres d'Harish-Chandra des séries discrètes de M^0 qui décomposent $\delta_{1|M^{\S}}$; donc $\Lambda^i_{\delta_1} \in \mathfrak{b}^*_{\mathbb{C}}$, où $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{m}$; on a choisi un système de racines compactes positives de $\mathfrak{b}$. On note χ le caractère central de δ_1, restreint à $F \cap M^{\S}$.

Si $A(\delta_1) \cap A(\delta_2) \neq \varnothing$, la proposition D.1, étendue du cas connexe (connu) à $G^{\#}$, implique que $\delta_2 = w\delta_1$ pour un $w \in W(A)$. Par ailleurs, d'après le lemme 10 de [7], $\delta_2 = f\delta_1$ pour un $f \in F$. Rappelons [7], § 4.1 que F normalise M_0 et $M^{\S}$, et agit donc sur $(\hat{M}^0)_d$ et $(\hat{M}^{\S})_d$. L'action de F sur $(\hat{M}^0)_d$ est décrite dans Knapp [15], prop. 4.5. Comme F est commutatif, F agit trivialement sur $F \cap Z_{M^{\S}}$ et son action sur $(\hat{M}^{\S})_d$ modifie donc seulement les paramètres d'Harish-Chandra. On a donc

$$(\bigstar) \qquad f(\{\Lambda^1_{\delta_1}, \ldots, \Lambda^l_{\delta_1}\}, \chi) = (\{u\Lambda^1_{\delta_1}, \ldots, u\Lambda^l_{\delta_1}\}, \chi)$$

où u est l'élément du groupe de Weyl complexe $W(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ par lequel f opère sur les paramètres d'Harish-Chandra (*cf.* [15], prop. 4.5, où u est noté sf).

L'action de $W(\mathfrak{a})$ sur $\hat{M}^{\S}$ est aussi décrite dans [15], proposition 4.5. Fixons un ordre sur $i\mathfrak{b}^*$ de telle sorte que $\Lambda^1_{\delta_1}$ soit dominant pour $\Delta^+(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$. Alors

$$(\bigstar\bigstar) \qquad w(\{\Lambda^1_{\delta_1}, \ldots, \Lambda^l_{\delta_1}\}, \chi) = (\{J(w)\Lambda^1_{\delta_1}, \ldots, J(w)\Lambda^l_{\delta_1}\}, \chi')$$

où $J(w)$ est un automorphisme de $i\mathfrak{b}^*$ qui conserve la chambre de Weyl positive. Si $w\delta_1 = f\delta_1$, on a donc $J(w)\Lambda^1_{\delta_1} = u\Lambda^i_{\delta_1}$ pour un $i=1, \ldots, l$.

Par ailleurs, [15], p. 55-56, $\Lambda^1_{\delta_1}$ et $\Lambda^i_{\delta_1}$ sont les paramètres d'Harish-Chandra de séries discrètes ξ^1, ξ^i de M^0 telles que $f\xi^1=\xi^i$ pour un $f \in F \cap G^{\#} = F^{\S}$. Toujours d'après [15], prop. 4.5, on en déduit que $\Lambda^i_{\delta_1} = u'\Lambda^1_{\delta_0}$, $u' \in W(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$. On voit donc que

$$J(w)\Lambda^1_{\delta_1} = uu'\Lambda^1_{\delta_1}.$$

Puisque $J(w)$ conserve la positivité, on voit donc que $uu'\Lambda^1_{\delta_1}$ est dominant pour $\Delta^+(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$, et conjugué à $\Lambda^1_{\delta_1}$ sous $W(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$.

Ceci implique $J(w)\Lambda^1_{\delta_1} = uu'\Lambda^1_{\delta_1} = \Lambda^1_{\delta_1}$.

Le même argument s'applique aux $\Lambda^j_{\delta_1}$; les égalités (★), (★★), et $f\,\delta_1 = w\,\delta_1$ impliquent alors

$$\{u\Lambda^1_{\delta_1}, \ldots, u\Lambda^l_{\delta_1}\} = \{J(w)\Lambda^1_{\delta_1}, \ldots, J(w)\Lambda^l_{\delta_1}\} = \{\Lambda^1_{\delta_1}, \ldots, \Lambda^l_{\delta_1}\}.$$

D'après (★), on a alors $\delta_2 = f\,\delta_1 = \delta_1$. Comme on sait que la restriction de δ à $M^\#$ est sans multiplicité [7], lemme 10, ceci est impossible.

Cela démontre le lemme D.1.

Démonstration de la proposition D.1. — Soit $\delta_i \in (\hat{M}_i)_d$ $(i=1, 2)$ avec $A(\delta_1) \cap A(\delta_2) \neq \varnothing$. Alors on a

$$\delta_{i|M_i^\S} = \oplus\, \delta_i^k \quad (i=1, 2) \quad \text{où} \quad \delta_i^k \in (\hat{M}_i^\S)_d.$$

Si $A(\delta_1) \cap A(\delta_2) \neq \varnothing$, le lemme 11 de [7] — maintenant démontré — implique que $A(\delta_1^j) \cap A(\delta_2^k) \neq 0$ pour un couple (j, k). D'après la proposition D.1 dans le cas *connexe* — étendue à $G^\#$ — les données $(M_1^\S, \delta_1^j)$ et $(M_2^\S, \delta_2^k)$ sont conjuguées sous $G^\#$. A conjugaison près, on peut donc supposer que $M_1 = M_2 = M$ et δ_1, δ_2 ont même restriction à $M^\S$. Considérons les représentations induites $\pi_{\delta_1, 0}$ et $\pi_{\delta_2, 0}$ de G. Elles ont même restriction à $G^\#$, et ont un K-type en commun. Comme $G = KG^\#$, on peut construire un opérateur d'entrelacement entre $\pi_{\delta_1, 0}$ et $\delta_{\delta_2, 0}$, non nul sur l'espace de ce K-type. On utilise pour cela le fait qu'un K-type restreint à $K^\#$ est sans multiplicité ([26], prop. 5.1.9), que les $K^\#$-types minimaux de la restriction de $I(\delta_i, 0)$, $i=1, 2$, à $G^\#$ apparaissent avec multiplicité 1 (d'après le lemme D.1) et que chaque composante irréductible de ces restrictions contiennent un seul $K^\#$-type minimal (d'après [24], étendu du cas connexe à $G^\#$). Avec ceci, notant π_1 (resp. π_2) les composantes irréductibles sous G de $I(\delta_1, 0)$ (resp. $I(\delta_2, 0)$) contenant un K-type minimal commun, on voit qu'il existe un entrelacement non nul de $G^\#$-modules entre π_1 et π_2 qui entrelace l'action de K sur ce K-type minimal commun. Comme $G = G^\# K$ c'est un entrelacement de G-modules. Donc $\pi_{\delta_1, 0}$ et $\pi_{\delta_2, 0}$ ne sont pas disjointes ; d'après un théorème de Langlands, que nous utiliserons dans sa formulation donnée par Knapp-Zuckerman [17], Thm. 14.1, on en déduit que δ_1 et δ_2 sont conjuguées. Ceci termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. ARTHUR, *The Trace Formula in Invariant Form* (*Ann. Math.*, vol. 114, 1981, p. 1-74).

[2] M. ATIYAH et W. SCHMID, *A Geometric Construction of the Discrete Series for Semi-simple Lie Groups* (*Inv. Math.*, 42, 1977, p. 1-62).

[3] D. BARBASCH et H. MOSCOVICI, *L^2-Index and the Selberg trace Formula* (*J. Funct. Anal.*, vol. 53, (2), 1983, p. 151-201).

[4] J. BERNSTEIN, P. DELIGNE et D. KAZHDAN, *Trace Paley-Wiener Theorem for Reductive p-adic groups* (*J. Anal. Math.*, vol. 47, 1986, p. 180-192).

[5] A. BOREL et N. WALLACH, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups and Representations of Reductive Groups*, Princeton Univ. Press, 1980.

[6] L. CLOZEL, *On Limit Multiplicities of Discrete Series Representations in Spaces of Automorphic Forms* (*Inv. Math.*, vol. 83, 1986, p. 265-284).

[7] L. CLOZEL et P. DELORME, *Le Théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs* (*Inv. Math.*, vol. 77, 1984, p. 427-453).

[8] M. COWLING, *On the Paley-Wiener theorem* (*Inv. Math.*, vol. 83, 1986, p. 403-404).

[9] P. DELORME, *Homomorphismes de Harish-Chandra liés aux K-types minimaux des séries principales généralisées des groupes réductifs réels connexes* (*Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, vol. 17, 1984, p. 117-156).

[10] J. DIXMIER, *Algèbres enveloppantes, Cahiers scientifiques*, t. XXXVII, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[11] L. EHRENPREIS, *Fourier Analysis in Several Complex Variables*, Wiley-Interscience Publishers, 1970.

[12] S. HELGASON, *Fundamental Solutions of Invariant Differential Operators on Symmetric Spaces* (*Am. J. Math.*, vol. 86, 1964, p. 565-601).

[13] S. HELGASON, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[14] J. E. HUMPHREYS, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, 1972.

[15] A. KNAPP, *Commutativity of Intertwining Operators for Semi-simple Groups*, (*Compositio Math.*, vol. 46, 1982, p. 33-84).

[16] A. KNAPP et E. STEIN, *Intertwining Operators for Semi-simple Groups II* (*Inv. Math.*, vol. 60, 1980, p. 9-84).

[17] A. KNAPP et G. ZUCKERMAN, *Classification of Irreducible Tempred Representations of Semi-simple Groups* (*Ann. Math.*, vol. 116, 1982, p. 389-501).

[18] R. P. LANGLANDS, *On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series* (*Springer Lect. Notes*, vol. 544, 1976).

[19] R. P. LANGLANDS, *On the Classification of Irreducible Representations of Real Algebraic Groups* [*Notes*, I.A.S. (Princeton), 1973].

[20] R. PARTHASARATHY, *Dirac Operators and the Discrete Series* (*Ann. Math.*, vol. 93, 1972, p. 1-42).

[21] M. RAÏS, *Groupes linéaires compacts et fonctions* C^∞ *covariantes* (*Bull. Sci. Math.*, vol. 107, 1983, p. 93-111).

[22] P. C. TROMBI, *The tempered spectrum of a real semi-simple Lie group* (*Am. J. Math.*, vol. 99, 1977, p. 57-75).

[23] P. C. TROMBI, *Invariant harmonic analysis on split rank one groups with applications* (*Pac. J. Math.*, vol. 101, 1982, p. 223-246).

[24] D. VOGAN, *The Algebraic Structure of the Representations of Semi-simple Lie Groups I* (*Ann. Math.*, vol. 109, 1979, p. 1-60).

[25] D. VOGAN, *The Algebraic Structure of the Representations of Semi-simple Lie Groups II*, notes non publiées.

[26] D. VOGAN, *Representations of Real Reductive Lie Groups*, Birkhaüser, 1981.

[27] D. VOGAN et G. ZUCKERMAN, *Unitary Representations with Non-zero Cohomology* (*Compositio Math.*, vol. 53, 1984, p. 51-90).

[28] L. CLOZEL et P. DELORME, *Sur le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs réels* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 300, série I, n° 11, 1985, p. 331-333).

[29] L. CLOZEL et P. DELORME, *Pseudo-coefficients et cohomologie des groupes réductifs réels* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 300, série I, n° 12, 1985, p. 385-387).

[30] HARISH-CHANDRA, *Harmonic Analysis on real reductive group III* (*Ann. Math.*, vol. 104, 1976, p. 117-201).

[31] A. KNAPP et G. ZUCKERMAN, *Normalizing Factors, Tempered Representations, and L-groups* (*Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 33, n° I, 1979, p. 93-105).

[32] R. P. LANGLANDS, *Notes on the Knapp-Zuckerman theory*, Institute for Advanced Study, Princeton, 1976.

[33] D. SHELSTAD, L-*Indistinguishability for Real Groups* (*Math. Ann.*, vol. 259, 1982, p. 385-430).

[34] D. SHELSTAD, *Orbital integrals, Endoscopic groups and L-Indistinguishability for Real Groups*, in *Journées Automorphes*, Publ. Math., Univ. Paris-VII, Paris, p. 135-219 (s.d.).

(Manuscrit reçu le 27 mars 1987,
révisé le 20 juin 1989).

Laurent CLOZEL,
Université de Paris-Sud,
Mathématiques, bât. n° 425,
U.R.A. D0752 du C.N.R.S.,
91405 Orsay, France.

Patrick DELORME,
Faculté des Sciences de Luminy,
Département de Mathématiques-Informatique,
L.A. n° 225 du C.N.R.S.,
70, route Léon-Lachamp,
13288 Marseille Cedex 9, France.