ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. BOUTET DE MONVEL
B. MALGRANGE

Le théorème de l'indice relatif

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 23, nº 1 (1990), p. 151-192
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1990_4_23_1_151_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 23, 1990, p. 151 à 192.

LE THÉORÈME DE L'INDICE RELATIF

PAR L. BOUTET DE MONVEL ET B. MALGRANGE

Cet article a pour objet d'établir, dans un cadre assez général, une formule de l'indice relatif généralisant la formule de l'indice avec paramètres de M. F. Atiyah et I. M. Singer. Notre formule est essentiellement une extension directe de celle de Atiyah et Singer, dans le contexte du théorème de finitude établi par Houzel et Schapira [H-Sch]. Notre énoncé tient compte en outre des supports, comme dans [M], ce qui apporte une précision supplémentaire par rapport aux énoncés précédents. La description précise est faite au paragraphe 4. Il a été commode d'énoncer et de démontrer la formule d'indice dans le cadre des $\mathscr{D}$-modules, pour lesquels on dispose d'une notion d'image directe naturelle, analogue à celle des faisceaux cohérents de la géométrie algébrique ou analytique, et qui remplace avantageusement le système de De Rham relatif de la démonstration de Atiyah et Singer. L'idée de la démonstration de la formule de l'indice est, comme dans la preuve de Grothendieck du théorème de Riemann-Roch, ou dans la preuve publiée de la formule de l'indice de Atiyah et Singer, de tout plonger dans un espace plus simple (ici $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$) où la formule est plus facile à établir.

Voici maintenant une description plus détaillée du problème étudié dans cet article. Les formules d'indice ont leur origine dans le théorème de Riemann-Roch de la géométrie complexe, en particulier sous la forme que lui ont donné Hirzebruch, et Grothendieck dans le cas relatif (*cf.* aussi [B-F-MPh] pour la formulation qui suit) : pour X espace analytique (lisse ou projectif), $Z \subset X$ compact, on introduit le groupe de Grothendieck $K_Z^{an}(X)$ associé aux $\mathscr{O}_X$-modules cohérents à support dans Z. Il existe un homomorphisme canonique $K_Z^{an}(X) \rightarrow K_Z^{top}(X)$, où $K_Z^{top}(X)$ est le groupe d'Atiyah défini par les complexes de fibrés vectoriels topologiques exacts en dehors de Z. Le théorème de Riemann-Roch exprime que cet homomorphisme commute aux images directes propres (il commute aussi aux images inverses). Ce théorème doit être complété par la description de l'image directe K-théorique et par une traduction cohomologique : par exemple le caractère de Chern définit un isomorphisme ch : $K_Z^{top}(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_Z^{pair}(X, \mathbb{Q})$ permettant ainsi de traduire ce qui ne concerne pas la torsion.

Comme les fonctions holomorphes sont les solutions du système elliptique des équations de Cauchy-Riemann, le théorème de Riemann-Roch (au moins dans le cas absolu) est un cas particulier du théorème d'Atiyah et Singer sur l'indice d'un système elliptique d'équations différentielles. Rappelons sa formulation K-théorique. A un système P d'équations différentielles sur une variété X (ou, ce qui revient au même, à un complexe de $\mathscr{D}$-modules possédant une bonne filtration), on peut associer un fibré virtuel $[P]_Z \in K_Z^{top}(T^* X)$ de la K-théorie à support dans Z du fibré cotangent $T^* X$, si Z contient la variété caractéristique de P. Par exemple si P est un complexe d'opérateurs différentiels opérant sur les sections de fibrés vectoriels sur X :

$$\ldots \to E_j \overset{p_j}{\to} E_{j+1} \to \ldots$$

le symbole $\sigma(P)$ est un complexe de fibrés vectoriels sur $T^* X$, exact en dehors d'une variété Z contenant la variété caractéristique de P (égale à celle-ci dans les bons cas), et $[P]_Z$ est le fibré virtuel défini par ce complexe de fibrés. Si X est réelle compacte, et P elliptique *i.e.* l'ensemble $Z = \mathrm{car}(P)$ des points où le symbole $\sigma(P)$ n'est pas exact ne contient pas de covecteur réel non nul, on sait que la cohomologie de P est finie; l'indice $\chi(P)$ (somme alternée des dimensions des groupes de cohomologie) est donné par la formule d'Atiyah et Singer : $\chi(P) = \beta([P])$ où β est l'image directe K-théorique : $K_X^{top}(T^*_{reel} X) \to K^{top}\,\mathrm{point}) = \mathbb{Z}$ construite grâce au théorème de périodicité de Bott. Atiyah et Singer ont donné une version relative de leur théorème : si $Y \to X$ est une submersion propre, P un système elliptique d'opérateurs différentiels verticaux sur X (*i.e.* ne faisant intervenir que des dérivations tangentes aux fibres), ont peut encore définir $[P] \in K_Z^{top}(T^*_{Y/X})$ si Z contient la variété caractéristique (relative) de P dans $T^*_{Y/X}$; P est relativement elliptique si celle-ci ne contient pas de covecteur $\xi \in T^*_{Y/X}$ réel non nul. Dans ce cas $\chi(P) \in K^{top}(X)$ est défini en gros comme indice d'une famille continue d'opérateurs de Fredholm paramétrée par X; c'est un élément de $K^{top}(X)$, qui est encore égal à l'image directe K-théorique dans $K^{top}(X)$ de [P].

Nous nous intéressons dans cet article à la situation suivante : soient $f : Y \to X$ un morphisme de variétés analytiques (pour l'instant complexes), P un $\mathscr{D}_Y$-module cohérent (système d'équations différentielles à coefficients analytiques sur Y). Lorsque P est bien filtré, le symbole gr P définit un élément $[P]_Z^{an}$ du groupe de Grothendieck des $\mathscr{O}[T^* Y]$-modules cohérents à support dans Z sur $T^* Y$, si $Z \supset \mathrm{car}\, P = \mathrm{supp}\,(\mathrm{gr}\, P)$ (car P et $[P]_Z^{an}$ ne dépendent que de P et pas de la filtration). L'élément $[P]_Z^{an}$ contient en gros l'information additive sur P qu'on peut raisonnablement espérer extraire de son symbole gr P. Nous définissons dans cet article (§ 3) un homomorphisme canonique $K_Z^{an} \to K_Z^{top}$, prolongeant celui de [B-F-MPh] pour le cas projectif.

Suivant Kashiwara [K 2] on définit l'image directe $f_+ P$, qui est un objet de la catégorie dérivée de celle des $\mathscr{D}_X$-modules. Lorsque f est une immersion fermée, f_+ est une équivalence de la catégorie des $\mathscr{D}_Y$-modules cohérents sur celle des $\mathscr{D}_X$-modules cohérents à support $\subset f(Y)$. Il est aisé d'établir la formule d'indice dans ce cas, exprimant $[f_+ P]_Z^{an}$ ou $[f_+ P]_Z^{top}$ en fonction de $[P]_Z^{an}$ ou $[P]_Z^{top}$. Lorsque f est une submersion, Ch. Houzel et P. Schapira [H-Sch] ont montré que l'image directe d'un $\mathscr{D}$-module P cohérent est cohérente sous une hypothèse assez générale « d'ellipticité relative ». Combinant ceci avec le résultat pour les immersions, on obtient une définition un peu plus générale d'ellipticité relative, assurant que $f_+ P$ est cohérent si P l'est (la définition est donnée au paragraphe 4). Dans tous ces cas on connaît une majoration Z' de la variété caractéristique de $f_+ P$ en fonction de $Z = \mathrm{car}\, P$: car $f_+ P \subset Z' = \bar{f}\, F^{-1}(Z)$, où

$\bar{f}: f^{-1}(T^* X) = Y \times_X T^* X \to T^* X$ est la projection et $F: f^{-1}(T^* X) \to T^* Y$ est l'application cotangente. Le résultat essentiel de cet article est la description, dans cette situation, de $[f_+ P]_{Z'}^{top}$ en fonction de $[P]_Z^{top}$. c'en est l'image directe K-théorique $\bar{f}_* F^{-1}([P]_Z^{top})$, après une compactification topologique convenable de $\bar{f}$ et F, liée à l'ellipticité (bien que tout à fait naturelle la description de cette compactification et donc de notre formule d'indice est un peu longue et se trouve au paragraphe 4; elle combine le fait qu'il s'agit de systèmes d'équation à coefficients holomorphes dans Y tout entier, relativement elliptiques, et que pour en calculer l'indice il suffit en gros d'en évaluer le symbole aux covecteurs normaux de ∂Y).

Parmi les cas particuliers, notons les suivants :

(1) Le cas « absolu », où l'espace X est réduit à un point : ce cas est traité dans [BM 2]; la méthode suivie ici est essentiellement une généralisation de celle de cet article.

(2) Le cas où f est propre et où $P = G \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y$, G un $\mathcal{O}_Y$-faisceau cohérent (il suffit que f soit propre sur le support de G). Dans ce cas, notre théorème redémontre la formule de Riemann-Roch-Grothendieck, dans le cas des espaces analytiques singuliers plongés dans des variétés lisses (pas dans le cas singulier général de R. N. Levy [L.]).

(3) Plus généralement, dans le cas où f est propre (ou propre sur le support de P), le résultat démontré dans [M] est que l'on a déjà $[f_+ P]_{Z'}^{an} = \bar{f}_* F^{-1}([P]_Z^{an})$ (image et contre image K-théorique). Donc dans le cas propre notre formule se déduit de ce résultat et du théorème de Riemann-Roch (ce dernier permettant de passer de $[.]^{an}$ à $[.]^{top}$).

Le résultat de ce papier est plus fort que celui de [M] en ce qu'il redémontre la formule de Riemann-Roch, et qu'il s'applique à un cas plus général que le cas propre. Par contre notons que dans le cas général (f relativement elliptique mais non propre, *i.e.* le bord ∂Y est non vide) la formule au niveau des K^{an} n'a plus de sens, et seule subsiste la formule topologique.

Dans [BM 1] sont définis les opérateurs de Toeplitz sur une variété à bord complexe Y (strictement pseudo-convexe). Un opérateur de Toeplitz A a un symbole σ_A qui est essentiellement une fonction sur ∂Y. Ici encore on a une notion de complexe elliptique d'opérateurs de Toeplitz et de famille continue, paramétrée par X, de tels complexes. Si P est une telle famille, c'est une famille continue de complexes de Fredholm, qui a un indice $\operatorname{Ind} P \in K^{top}(X)$. Le symbole de P définit un complexe de fibrés vectoriels sur $X \times Y$, exact sur ∂Y d'où un élément $[P] \in K^{top}(X \times Y, X \times \partial Y)$. Le théorème de l'indice dit encore dans ce cas que Ind P est l'image K-théorique de [P]. Ce résultat, et sa version avec supports, se ramènent essentiellement à celui de notre article; mais en fait nous le démontrerons directement dans le cas où Y est un ellipsoïde, et c'est ce cas particulier qui est le point de départ pour la formule de l'indice. Les opérateurs de Toeplitz fournissent un outil plus souple que les opérateurs différentiels à coefficients holomorphes : il est facile de les déformer (comme les opérateurs pseudo-différentiels) et ils ont des adjoints, ce qui est essentiel pour une description à la Hodge-De Rham de la cohomologie d'un complexe d'opérateurs différentiel au moyen de « formes harmoniques ». Le théorème d'indice pour une famille d'opérateurs de Toeplitz est en gros le même que celui d'Atiyah et Singer pour une famille d'opérateurs elliptiques; cependant la présence de supports en complique l'énoncé et la démonstration (§ 2).

Enfin la formule de l'indice a d'abord été démontrée par Atiyah et Singer pour des opérateurs sur une variété réelle, avec ou sans bord. Ce cas (et le cas relatif réel) est aussi couvert par le résultat de cet article, du moins pour les opérateurs à coefficients analytiques ([1]), et lorsqu'il y a un bord, pour les systèmes qui sont elliptiques sans qu'il y ait à adjoindre de condition aux limites (*cf.* § 4). L'idée est la suivante : soit d'abord Y une variété complexe à bord, $Y_{\mathbf{R}}$ la variété analytique réelle sous-jacente. Si P est un $\mathscr{D}_Y$-module cohérent, et qu'on note $P_{\mathbf{R}}$ le $\mathscr{D}_{Y_{\mathbf{R}}}$-module obtenu en adjoignant à P les équations de Cauchy-Riemann ($P_{\mathbf{R}}=\pi^+ P$, où π est la projection $Y_{\mathbf{R}} \to Y$), il est à peu près évident que les systèmes d'équations aux dérivées partielles correspondant à P et $P_{\mathbf{R}}$ sont équivalents, et les éléments de K-théorie $[P]_Z^{\text{top}}$ et $[P_{\mathbf{R}}]_{Z'}^{\text{top}}$ ($Z=\operatorname{car} P$, $Z'=\operatorname{car} P_{\mathbf{R}}$) sont liés très simplement (*cf.* § 3). D'autre part si Y est réelle et si P' est un $\mathscr{D}_Y$-module cohérent, P' se prolonge en un $\mathscr{D}_{\tilde{Y}}$-module cohérent $\tilde{P}'$ sur un voisinage U de Y dans une complexification $\tilde{Y}$ et de nouveau les éléments de K-théorie topologique définis par P' et $\tilde{P}'$ sont liés de façon très simple. Noter que même si Y est compacte, U ne l'est pas; c'est au mieux une variété à bord compacte (complexe). On constate aisément que $P_{\mathbf{R}}$ est relativement elliptique si P l'est, resp. que $\tilde{P}'$ est relativement elliptique si P' l'est et si on a choisi pour U un voisinage tubulaire assez petit convenable (*cf.* § 4). Ceci permet de passer du réel au complexe, ou du complexe au réel où tout est de Stein. C'est d'ailleurs en profitant de ceci qu'on définit l'homomorphisme canonique $K^{\text{an}} \to K^{\text{top}}$. En revanche pour le cas réel la notion d'ellipticité relative ne suffit plus car elle n'est pas stable par immersion fermée. On l'élargit en introduisant la notion de presqu'ellipticité relative, comme dans [BM 2] pour le cas absolu (P' est relativement presqu'elliptique si les prolongements $\tilde{P}'$ sont relativement elliptiques pour une famille continue U_s, $0<s<1$ de voisinages tubulaires de Y dans $\tilde{Y}$, d'intersection Y).

Voici enfin en gros l'idée de la démonstration du théorème d'indice relatif : le théorème est connu pour les immersions fermées, et on montre facilement grâce aux remarques précédentes que son énoncé dans le cas complexe équivaut à son énoncé dans le cas réel. Moyennant cela, en rendant tout réel, puis en plongeant dans un produit (boule réelle) $\times$ X, puis en prenant de nouveau un petit voisinage tubulaire complexe des fibres, on se ramène au cas où f est la projection $Y=Q_\varepsilon \times X \to X$, où $Q_\varepsilon \subset \mathbb{C}^n$ est un ellipsoïde. Dans ce cas si P est un $\mathscr{D}_Y$-module cohérent bien filtré relativement elliptique, le gradué de P pour la bonne filtration verticale introduite par Houzel et Schapira, est un complexe elliptique d'opérateurs différentiels (donc de Toeplitz) sur Q_ε, paramétré par $T^* X$, auquel on peut appliquer le théorème d'indice avec supports du paragraphe 2 (c'est à ce point de la démonstration que ces opérateurs interviennent de façon essentielle). Pour terminer il faut faire le lien entre l'élément de K-théorie défini par la filtration verticale de P et celui défini par la filtration donnée : ceci a déjà été fait dans l'article de Malgrange [M].

(1) Nous nous limitons dans cet article à la catégorie analytique où les résultats de finitude équivalent en gros à des résultats de cohérence. Comme tout fibré vectoriel sur une variété possède une structure analytique réelle, et que ses sections continues s'approchent par des sections analytiques, ceci suffit pour les formules d'indice.

L'article est organisé ainsi : le paragraphe 1 contient un rappel de ce qui nous est nécéssaire en K-théorie, en particulier la description de l'image directe K-théorique.

La définition et les propriétés utiles ici des opérateurs de Toeplitz sont décrites au paragraphe 2, où se trouve aussi le théorème d'indice avec supports d'une famille continue de tels opérateurs.

La définition et les opérations usuelles des $\mathscr{D}$-modules sont rappelés au paragraphe 3, ainsi que le passage du cas complexe au cas réel qui se fait de façon naturelle et simple pour les opérateurs différentiels à coefficients analytiques.

Enfin l'énoncé du théorème d'indice relatif est décrit au paragraphe 4, la démonstration en est faite au paragraphe 5.

Nous n'abordons pas dans cet article les versions différentielles de la formule de l'indice, ni les « vrais » problèmes aux limites elliptiques.

Cet article a aussi été annoncé dans des conférences, en particulier à Oberwolfach (juin 1985).

1. Rappels de K-théorie.
2. Indice d'une famille d'opérateurs de Toeplitz.
3. Rappels sur les $\mathscr{D}$-modules.
4. Énoncé du théorème.
5. Démonstration du théorème.

1. Rappels de K-théorie

Nous avons regroupé ici ce qui a paru utile pour la démonstration en K-théorie. Le lecteur pourra aussi se reporter à [A], [B-F-MPh] qui contiennent essentiellement les résultats de ce paragraphe (à quelques variantes près dans les définitions). Seule la description de l'image directe K-théorique se trouve un peu éparpillée dans la littérature.

1.1. K-THÉORIE A SUPPORTS. — (*a*) *Définitions.* — Dans ce qui suit X désigne un espace métrique, $Z \subset X$ une partie compacte. Ce qui suit s'applique également au cas d'une paire (X, Z) homotope à une paire (X métrique, Z compact), en particulier au cas où X est un fibré vectoriel de base métrique, $Z \subset X$ une partie fermée conique (*i. e.* stable par homothétie) de base compacte, situation qui sera la nôtre, à la fin de ce paragraphe et aux paragraphes 4 et 5 (il y a d'autres généralisations possibles).

On note $K_Z(X)$ (groupe des fibrés virtuels sur X, à support dans Z) le groupe des classes d'homotopie stable de morphismes de fibrés vectoriels complexes de rang fini sur X :

$$(1.1) \qquad a: \quad E \to F$$

exacts (*i.e.* isomorphiques) en dehors de Z. Si a est un tel morphisme on note $[a]_Z$ sa classe dans $K_Z(X)$. On a donc par définition si $a: E \to F$ et $b: E' \to F'$ sont deux morphismes de fibrés exacts hors de Z, $[a]_Z = [b]_Z$ si et seulement s'il existe deux fibrés

G, G′ sur X, des isomorphismes $\alpha: E\oplus G \to E'\oplus G'$ et $\beta: F\oplus G \to F'\oplus G'$ et une déformation continue, exacte hors de Z, de $a\oplus \mathrm{Id}_G$ sur $\beta^{-1}(b\oplus \mathrm{Id}_{G'})\,\alpha$. On a $[a\oplus b]_Z = [a]_Z + [b]_Z$; on vérifie élémentairement qu'on a $[a]_Z\oplus[b]_Z = [a_0 b]_Z$ si a et b sont composables, et $-[a]_Z = [a^*]_Z$, où a^* est l'adjoint pour n'importe quelle métrique hermitienne (c'est ce qui explique que les classes d'homotopie stable forment déjà un groupe pour la loi $\oplus$; rappelons que deux fibrés vectoriels de base paracompacte sont isomorphes s'ils sont homotopes).

Plus généralement, soit d un complexe borné de fibrés vectoriels de rang fini sur X, exact hors de Z :

(1.2) $$d:\quad \ldots \to E^k \xrightarrow{k} E^{k+1} \to \ldots$$

On note $\delta(d)$ le morphisme

(1.3) $$\delta(d) = d - d^*:\quad \oplus E^{2j} \to \oplus E^{2j+1}.$$

C'est un isomorphisme aux points où d est exact. On pose

(1.4) $$[d]_Z = [\delta(d)]_Z \in K_Z(X).$$

La définition de l'adjoint d^* suppose qu'on a choisi des métriques hermitiennes sur les E^k. La classe d'homotopie de $\delta(d)$, et *a fortiori* $[d]_Z$, ne dépendent pas du choix de ces métriques.

En fait $K_Z(X)$ est le groupe engendré par les éléments $[d]_Z$ et les relations :

(i) $[d]_Z = 0$ si d est exact, et $[d]_Z = [d]_{Z'}$ s'il existe une déformation, exacte en dehors de Z, de d sur d';

(ii) $[d]_Z = [d']_Z + [d'']_Z$ s'il existe une suite exacte de complexes $0 \to d' \to d \to d'' \to 0$. (On vérifie, par récurrence sur la longueur de d, que les relations (i) et (ii) engendrent la relation $d - \delta(d) \sim 0$, *cf.* [B-F-MPh].)

(*b*) *Images inverses.* — Soit X′ un autre espace métrique, $f: X' \to X$ une application continue, $Z' \subset X'$ une partie compacte contenant $f^{-1}(Z)$. Alors l'image inverse des fibrés et morphismes de fibrés (ou complexes de fibrés) définit un homomorphisme de groupes, encore noté f^{-1} :

(1.5) $$f^{-1}:\quad K_Z(X) \to K_{Z'}(X')$$

Notons que si a et b sont deux complexes de fibrés vectoriels exacts hors de Z et quasi-isomorphes au voisinage de Z on a $[a]_Z = [b]_Z$ (en effet si u est un morphisme $a \to b$ quasi-isomorphiques au voisinage de Z, le cône de u est exact et on a une suite exacte de complexes $0 \to b(-1) \to \text{cône}(u) \to a \to 0$. D'autre part si Z est compact tout germe de fibré vectoriel au voisinage de Z est facteur direct d'un fibré trivial et tout germe de morphismes de fibrés au voisinage de Z se prolonge stablement en un morphisme de fibrés (global). Il en résulte que si X′ est ouvert dans X, f est l'inclusion canonique, et $Z = Z'$, alors l'application image inverse f^{-1} est un isomorphisme (excision).

(*c*) *Produits.* — Soit d, resp. d', un complexe borné, de rang fini, exact en dehors de Z, resp. Z′, de fibrés vectoriels. Alors le complexe produit $d \otimes d'$ est exact en dehors de $Z \cap Z'$, d'où une loi de multiplication

$$K_Z(X) \otimes K_{Z'}(X) \to K_{Z \cap Z'}(X). \tag{1.6}$$

En particulier $K(X) = K_X(X)$ est muni d'une structure d'anneau, et $K_Z(X)$ d'une structure de K(X)-module. L'image inverse est compatible avec ces structures d'anneau ou de module (respecte les produits).

Soient $Y \subset X$ compact, $Z \subset Y$ fermé. On définit encore un produit

$$K_Z(Y) \otimes K_Y(X) \to K_Z(X) \tag{1.7}$$

comme suit : si d est un complexe (borné, etc.) sur Y, exact hors de Z, il existe un complexe $\tilde{d}$ défini sur un voisinage ouvert U de Y dans X, exact dans $Y - Z$, qui prolonge d. Si alors d' est un complexe sur X, exact hors de Y, le produit $[d]_Z [d']_Y \in K_Z(X)$ est l'image inverse par l'isomorphisme d'excision de la classe $[\tilde{d} \otimes d'_{|U}] \in K_Z(U)$.

(*d*) *Remarque.* — $K_Z(X)$ s'identifie aussi à l'ensemble des classes d'homotopie stable de triplets (E, F, α) où E, F sont des fibrés vectoriels complexes sur X, et α est un isomorphisme $E_{|X-Z} \to F_{|X-Z}$. En effet si $a : E \to F$ est un morphisme de fibrés exact hors de Z, $\alpha = a_{|X-Z}$ est par définition un isomorphisme, et il est clair que la classe d'homotopie stable de α ne dépend que de celle de a. Inversement soit $\alpha : E_{|X-Z} \to F_{|X-Z}$ un isomorphisme. Choisissons des normes sur E et F, et une fonction φ réelle continue sur X, nulle sur Z et >0 en dehors de Z (par exemple la distance à Z). Alors $a = \varphi \alpha \| \alpha \|^{-1}$ se prolonge continûment à X par 0 sur Z; et il est clair que sa classe d'homotopie stable ne dépend que de celle de α.

1.2. Indice d'une famille d'opérateurs de Fredholm. — Soit H un espace de Hilbert de type dénombrable. Le groupe GL(H) des automorphismes de H, muni de la topologie de la norme, est contractile d'après N. Kuiper. Notons $F(H) \subset L(H)$ l'ensemble, ouvert dans L(H), des opérateurs de Fredholm, muni de la topologie de la norme [on a $A \in F(H)$ si $\dim \ker A < \infty$ et $\dim \operatorname{coker} A < \infty$; Im A est alors fermée et A induit un isomorphisme $\operatorname{Ker} A^{\perp} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} A$].

Soit X comme ci dessus, $Z \subset X$ compact. On note $F_Z(X)$ l'ensemble des classes d'homotopie $[A]_Z^F$ d'applications continues A de X dans F(H) telles que $A(x)$ soit inversible pour $x \notin Z$. $F_Z(X)$ est muni de la loi de composition $[A]_Z^F + [B]_Z^F = [A \circ B]_Z^F$, qui en fait un groupe commutatif; en particulier $[A^*]_Z^F = -[A]_Z^F$.

Plus généralement appelons complexe de Fredholm un complexe borné D :

$$D : \quad \ldots \to \mathscr{H}^k \to \mathscr{H}^{k+1} \to \ldots \tag{1.8}$$

où les $\mathscr{H}^k$ sont des fibrés hibertiens sur X, de dimension hilbertienne au plus dénombrable (un tel fibré est trivialisable s'il est de rang infini), $\mathscr{H}^k = 0$ pour $|k|$ assez grand, les D^k

sont des morphismes de fibrés hilbertiens tels que $D_0^{k+1} D^k = 0$, et l'homologie de D est de rang fini en tout point de X.

On note alors $\delta(D)$ le morphisme de fibrés hilbertiens :

$$\delta(D) = D - D^* : \quad \oplus \mathscr{H}^{2k} \to \oplus \mathscr{H}^{2k+1}. \tag{1.9}$$

C'est un opérateur de Fredholm, inversible en tout point où D est exact.

Soit D un tel complexe, exact en dehors de Z; $\delta(D)$ est inversible en dehors de Z. Les fibrés $\oplus \mathscr{H}^{2k} \oplus (X \times H)$ et $\oplus \mathscr{H}^{2k+1} \oplus (X \times H)$ sont de rang infini donc triviaux, et on note

$$[D]_Z^F \in F_Z(X) \tag{1.10}$$

l'élément défini par $\delta(D) \oplus \mathrm{Id}_H$ [après identification au fibré trivial de $\oplus \mathscr{H}^{2k} \oplus (X \times H)$ et $\oplus \mathscr{H}^{2k+1} \oplus (X \times H)$].

Cette construction s'applique en particulier au cas où D est de rang fini, d'où un homomorphisme (canonique) :

$$K_Z(X) \to F_Z(X). \tag{1.11}$$

Cet homomorphisme est en fait un isomorphisme, dont l'inverse peut être décrit comme suit : si $A : X \to F(H)$ représente un élément de $F_Z(X)$, il existe (par compacité) un sous-espace de rang fini $E \subset H$ tel que $A(x)_{|E^\perp}$ soit injectif pour tout $x \in X$. Alors $F = (A(E^\perp))^\perp$ est un sous-fibré de rang fini de $X \times H$, et dans les décompositions $H = E \oplus E^\perp = F \oplus F^\perp$, A admet une matrice triangulaire

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ * & b \end{bmatrix}$$

où b est un isomorphisme de $E^\perp$ sur $F^\perp$, et $a : E \to F$ est inversible hors de Z. Il est clair que $[A]_Z^F$ provient de l'élément $[a]_Z \in K_Z(X)$. On note

$$\mathrm{Ind}_Z(A) \in K_Z(X) \tag{1.12}$$

l'élément de $K_Z(X)$ correspondant à $[A]_Z^F$.

1.3. IMAGE DIRECTE EN K-THÉORIE. — (*a*) *Structures* spin^c (référence : [A-B-S]). — Soit X comme ci-dessus, et soit N un fibré vectoriel réel de dimension paire sur X. Une structure spin^c sur N est la donnée

(1.13) (i) *d'une métrique euclidienne* (continue) *sur* N.

On notera C_N l'algèbre de Clifford négative de N : fibré en $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{Z}_2$-graduées sur X, engendré par le sous-fibré vectoriel réel N et les relations $n \cdot n = -\|n\|^2$ pour $n \in N$.

(ii) *d'un* C_N-*module* $\mathbb{Z}_2$-*gradué* $\mathscr{S}_N = \mathscr{S}_N^+ + \mathscr{S}_N^-$ (*fibré*), *simple en tout point de* X.

Si N est muni d'une structure spin^c, il est canoniquement orienté : une base orthonormale $e_1, e_2, \ldots, e_{2n}$ de N_x ($\dim_{\mathbb{R}} N_x = 2n$) est orientée si $e_1, e_2, \ldots, e_{2n}\, \xi = i^n \xi$ pour tout $\xi \in \mathscr{S}_{N_x}^+$.

Les structures spin^c s'ajoutent : si N et N′ sont munis de structures spin^c, $N \oplus N'$ est muni de la métrique somme, et de $\mathscr{S}_{N\oplus N'} = \mathscr{S}_N \otimes^g \mathscr{S}_{N'}$, produit tensoriel gauche, qui est un $C_{N\oplus N'} \simeq C_N \otimes^g C_{N'}$-module $\mathbb{Z}_2$-gradué.

Elles se retranchent : si N est muni d'une structure spin^c, ainsi que $N' \subset N$ (métrique induite), $N'' = N'^{\perp}$ est muni de la métrique induite et de $\mathscr{S}_{N''} = \mathrm{Hom}^{\mathrm{gr}}_{C_{N'}}(\mathscr{S}_{N'}, \mathscr{S}_N)$, qui en fait un $C_{N''}$-module simple $\mathbb{Z}_2$-gradué. C'est l'unique structure spin^c sur N″ pour laquelle N, avec sa structure spin^c, est isomorphe à $N' \oplus N''$.

On peut dès lors parler de structure spin^c virtuelle sur un fibré virtuel de dimension paire. Si E est un fibré (pas virtuel), une structure spin^c virtuelle sur E provient d'une vraie structure spin^c, unique à isomorphisme près, en vue du résultat de complémentation précédent.

Exemple. — Soit E un fibré vectoriel complexe de rang fini, muni d'une métrique hermitienne, et soit N le fibré réel sous-jacent. Alors N est muni d'une structure spin^c canonique, pour laquelle la métrique euclidienne est celle déduite de la métrique hermitienne de E, et

$$\mathscr{S}_N = \Lambda_{\mathbb{C}} E^* \,(= \Lambda^{\mathrm{pair}}_{\mathbb{C}} E^* \oplus \Lambda^{\mathrm{impair}}_{\mathbb{C}} E^*) \tag{1.14}$$

où E* désigne le dual de E, la multiplication de Clifford étant donnée par

$$n \,.\, \omega = n_{\mathrm{L}} \,\omega - n^* \wedge \omega \tag{1.15}$$

où $n \in N = E$, $\omega \in \mathscr{S}_N = \Lambda E^*$, et $n^* \in E^*$ est l'élément correspondant à n par la métrique hermitienne ($\omega \to n^* \wedge \omega$ est adjoint de $\omega \to n_{\mathrm{L}}\,\omega$).

Comme les métriques hermitiennes de E sont toutes homotopes la structure spin^c virtuelle définie par la structure ci-dessus ne dépend que de la structure complexe de E (structure spin^c virtuelle canonique de E).

(*b*) *Isomorphisme de Bott* ([2]). — Soient N un fibré réel spin^c sur X comme ci-dessus, $p : N \to X$ la projection. On identifie X (et plus généralement toute partie de X) à son image par la section nulle de N. La multiplication de Clifford $(n, \xi) \to n \,.\, \xi$ définit un homomorphisme de fibrés vectoriels sur N, exact hors de X :

$$\beta_N : \ p^{-1}\mathscr{S}^+_N \to p^{-1}\mathscr{S}^-_N \tag{1.16}$$

Si N est le fibré réel sous-jacent à un fibré complexe hermitien E, muni de la structure spin^c canonique, on a $\beta_N = \delta(k_E)$ où k_E est le complexe de Koszul (en degrés négatifs) :

$$k_E \ldots p^{-1}\Lambda^{-k} E^* \to p^{-1}\Lambda^{-k+1} E^* \to \ldots E^* \to \mathbb{C} \to 0 \tag{1.17}$$

dont la différentielle au point $n \in N = E$ est le produit intérieur $\omega \to n_{\mathrm{L}}\,\omega$.

([2]) Appelé aussi isomorphisme de Thom.

La classe b_N de β_N (ou de k_E) est un élément de $K_X(N)$. Pour toute partie $Z \subset X$ compacte, la multiplication par b_N définit un homomorphisme

$$b_{N/X} : K_Z(X) \to K_Z(N). \tag{1.18}$$

Cet homomorphisme est en fait un isomorphisme lorsque X est de dimension finie : cela résulte du théorème de périodicité de Bott lorsque $Z = X$, et cela s'y ramène facilement lorsque Z a un voisinage tubulaire, par exemple si (X, Z) est une paire de CW-complexes, ou d'espaces analytiques. Dans le cas le plus général où X est de dimension finie, cela résulte du théorème 2.4 du paragraphe 2, l'application inverse étant décrite par l'indice des familles d'opérateurs de Toeplitz. Nous admettons ce résultat provisoirement pour la suite de ce paragraphe.

Remarque 1. — Dans le contexte ci-dessus (E fibré complexe) on dispose aussi du complexe de l'algèbre extérieure :

$$\lambda_E : \quad 0 \to \mathbb{C} \to E \to \ldots \Lambda^k E \to \Lambda^{k+1} E \to \ldots \tag{1.17 bis}$$

dont la différentielle au point $n \in N = E$ est le produit extérieur $\xi \to n \wedge \xi$. $\delta(\lambda_E)$ est le dual ($\Leftrightarrow$ conjugué) de $\delta(k_E)$, et l'élément de K-théorie $[\delta(\lambda_E)] \in K_X(N)$ est aussi un générateur de $K_X(N)$ sur $K(X)$; il n'est pas en général égal à b_N, et c'est ce dernier qui intervient de façon naturelle pour la formule de l'indice (images directes); le complexe λ_E est plutôt associé aux images inverses.

(*c*) *Image directe en K-théorie.* — Soient X et Y deux variétés réelles de dimension finie, $f : Y \to X$ une application continue. Une structure spin^c (virtuelle) sur f est, par définition, une structure spin^c virtuelle sur le fibré normal virtuel

$$N(f) = f^{-1}(TX) - TY \tag{1.19}$$

(une telle structure n'existe que si $\dim Y - \dim X$ est pair).

Exemples 1. — Si f est une immersion différentiable, se donner une structure spin^c sur f revient à se donner une structure spin^c (non virtuelle) sur le fibré normal de l'immersion $f^{-1}(TX)/f'(TY)$, où $f' : TY \to f^{-1}(TX)$ désigne la dérivée de f. En particulier si ce fibré normal est muni d'une structure complexe, f est canoniquement munie d'une structure spin^c (virtuelle).

2. — Si f est une submersion différentiable, se donner une structure spin^c sur f revient à se donner une structure spin^c sur le fibré tangent relatif TY/X (plus exactement sur son opposé). En particulier si $f : Y \to X$ représente une famille de variétés complexes, ou presque complexes, paramétrée par X, elle est canoniquement munie d'une structure spin^c.

3. — Si X et Y sont des variétés complexes, toute application continue $f : Y \to X$ est canoniquement munie d'une structure spin^c, provenant des structures complexes de TY et $f^{-1}(TX)$.

Les structures spin^c se composent : si f et g sont munies de telles structures, $N(f \circ g) = g^{-1}(N(f)) + N(g)$ est muni de la structure spin^c somme de celles de $N(g)$ et de l'image inverse par g de celle de $N(f)$.

Soit $f: \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ une application de classe C^1, munie d'une structure spin^c. Soit $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y}$ (resp. $\mathrm{T} \subset \mathrm{X}$) une partie compacte (ou plus généralement comme ci-dessus tel que la paire (Y, Z) [resp. (X, T)] soit homotope à une paire (Y métrique, Z compact) (resp...). On suppose $f_{|\mathrm{Z}}$ propre, $f(\mathrm{Z}) \subset \mathrm{T}$ L'image directe [3].

$$(1.20) \qquad f_*: \quad \mathrm{K_Z(Y)} \to \mathrm{K_T(X)}$$

est caractérisée axiomatiquement par les trois conditions suivantes :

(I 1) Elle est covariante : $(fg)_* = f_* g_*$.

(I 2) Elle commute aux images inverses.

(I 3) Si X est un fibré vectoriel spin^c sur Y, f la section nulle, munie de la structure spin^c déduite de celle des fibres de X, on a $f_* = b_{\mathrm{X/Y}}$ (isomorphisme de Bott).

La signification de (I 2) est la suivante : soit un diagramme

$$(1.21) \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Y}' & \xrightarrow{g} & \mathrm{Y} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathrm{X}' & \xrightarrow{\mathrm{G}} & \mathrm{X} \end{array}$$

où X, Y, X′, Y′ sont des variétés, f, g, F, G sont de classe C^1, f et G sont transverses et Y′ s'identifie au produit fibré $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}'$; f est muni d'une structure spin^c, et F de la structure spin^c qui s'en déduit par image inverse.

Soient $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y}$, $\mathrm{Z}' \subset \mathrm{Y}'$, $\mathrm{T} \subset \mathrm{X}$, $\mathrm{T}' \subset \mathrm{X}'$ compacts (ou comme au n° 1, et on suppose $f_{|\mathrm{Z}}$, $\mathrm{F}_{|\mathrm{Z}'}$ propres), tels que $\mathrm{Z}' \supset g^{-1}(\mathrm{Z})$, $\mathrm{T}' \supset \mathrm{G}^{-1}(\mathrm{T})$, $\mathrm{T} \supset f(\mathrm{Z})$, $\mathrm{T}' \supset \mathrm{F}(\mathrm{Z}')$. Alors on a

$$(1.22) \qquad \mathrm{G}^{-1} f_* = \mathrm{F}_* g^{-1}: \quad \mathrm{K_Z(Y)} \to \mathrm{K_{T'}(X')}.$$

En particulier l'image directe commute aux restrictions aux ouverts (cas où G et g sont des plongements ouverts). Par exemple si $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ est ouvert et $f: \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est l'inclusion canonique munie de la structure spin^c triviale, $\mathrm{Z} \subset \mathrm{T}$ et T est fermé dans X, $f_*: \mathrm{K_Z(Y)} \to \mathrm{K_Z(X)}$ est l'homomorphisme d'image inverse; c'est l'isomorphisme d'excision si $\mathrm{Z} = \mathrm{T}$.

Pour $f: \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ de classe C^1, munie d'une structure spin^c, propre sur $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y}$, et $\xi \in \mathrm{K_Z(Y)}$, l'image $f_*(\xi)$ est construite comme suit : soit $j: \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathbb{C}^\mathrm{N}$ un plongement de classe C^1 (il en existe si N est grand). Soit $i: \mathrm{Y} \to \mathbb{C}^\mathrm{N} \times \mathrm{X}$ le plongement déduit du graphe de f: $i(y) = (j(y), f(y))$. Notons $p: \mathbb{C}^\mathrm{N} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ la projection; p est canoniquement muni d'une structure spin^c; i est muni de la structure spin^c différence ($f = p_0 i$) donc $i(\mathrm{Y})$ admet dans $\mathbb{C}^\mathrm{N} \times \mathrm{X}$ un voisinage tubulaire spin^c (*i.e.* difféomorphe au fibré spin^c normal du plongement). On a alors $f_* = p_* i_*$ (axiome I 1), et i_* est le composé de l'isomorphisme de Bott : $\mathrm{K_Z(Y)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_{i(\mathrm{Z})}(\mathrm{U})$ (axiome I 3), et de l'isomorphisme d'excision $\mathrm{K}_{i(\mathrm{Z})}(\mathrm{U}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_{i(\mathrm{Z})}(\mathbb{C}^\mathrm{N} \times \mathrm{X})$ [axiome I 2 et remarque suivant (1.22)].

Comme $f_{|\mathrm{Z}}$ est propre il existe une fonction continue $r > 0$ sur X telle que $i(\mathrm{Z})$ soit contenu dans le fibré B_r en boules de rayon r de $\mathbb{C}^\mathrm{N} \times \mathrm{X}$.

---

(3) La notation devrait préciser les supports Z, T, etc. mais ceci ne prêtera pas à confusion.

Posons $Z'=p^{-1}(f(Z))\cap B_r\supset i(Z)$. Alors p_* est le composé de :

– l'homomorphisme canonique (image inverse) : $K_{i(Z)}(\mathbb{C}^N\times X)\to K_{Z'}(\mathbb{C}^N\times X)$ (qui n'est en général pas un isomorphisme) par I 2);

– l'inverse de l'isomorphisme canonique : $K_{\{0\}\times f(Z)}(\mathbb{C}^N\times X)\xrightarrow{\sim} K_{Z'}(\mathbb{C}^N\times X)$ [il s'agit d'un isomorphisme parce que l'application identique de $\mathbb{C}^N\times X$ induit une équivalence d'homotopie de la paire $(\mathbb{C}^N\times X,\ \{0\}\times f(Z))$ sur la paire $(\mathbb{C}^N\times X,\ Z')$];

– de l'inverse de l'isomorphisme de Bott : $K_{\{0\}\times f(Z)}(\mathbb{C}^N\times X)\xrightarrow{\sim} K_{f(Z)}(X)$;

– et enfin de l'homomorphisme canonique $K_{f(Z)}(X)\to K_T(X)$.

Cela détermine complètement $f_*(\xi)$ pour $\xi\in K_Z(Y)$. On vérifie aisément qu'ainsi construit $f_*(\xi)$ ne dépend pas du choix du plongement i, et qu'il satisfait aux axiomes I 1, I 2, I 3, cela résultant des propriétés de fonctorialité et de multiplicativité évidentes de l'isomorphisme de Bott.

2. Indice d'une famille d'opérateurs de Toeplitz

Les opérateurs de Toeplitz interviennent dans notre démonstration de la façon suivante : pour établir le théorème d'indice nous devrons d'abord l'établir dans le cas particulier suivant : X est un espace analytique, P_x est un complexe d'opérateurs différentiels analytiques sur un voisinage d'un ellipsoïde $Q_\varepsilon\subset\mathbb{C}^n$ (exemple ci-dessous), paramétré analytiquement par $x\in X$, et elliptique *i.e.* le bord ∂Q_ε est non caractéristique. Alors la cohomologie (à coefficients analytiques, ou C^∞, ou dans les espaces de Sobolev H^s, etc.) est cohérente, parce que c'est la cohomologie d'une famille analytique d'opérateurs de Fredholm. Il faut dans ce cas calculer l'élément de K-théorie défini par cette cohomologie (ou du moins au-dessus des parties compactes de X). Les opérateurs de Toeplitz généralisent les opérateurs différentiel sur Q_ε, et présentent l'avantage de former une *-algèbre : il y a des adjoints; on pourra donc grâce à eux former l'opérateur $(P+P^*)$ qui intervient dans la définition de la K-théorie topologique. Il est aussi plus facile de les déformer. Ils jouent ainsi le même rôle vis-à-vis des opérateurs différentiels complexes que les opérateurs pseudo-différentiels pour les opérateurs différentiels réels.

Pour cet article nous n'avons en fait besoin que de la théorie des opérateurs de Toeplitz sur un ellipsoïde Q_ε, et pour ceux-ci, du résultat suivant : un opérateur de Toeplitz A a un symbole σ_A qui est une fonction sur ∂Q_ε si A est d'ordre 0; $A\to\sigma_A$ est un homomorphisme de *-algèbres, et σ_A détermine complètement A mod. les opérateurs compacts.

Ces résultats s'établissent plus élémentairement pour la boule Q_1 (*i.e.* sans recours explicite à la théorie des opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe), parce qu'on dispose dans ce cas de formules explicites simples pour le noyau de Bergman. Pour l'ellipsoïde Q_ε $(\varepsilon\neq 1)$, ils sont à peine moins compliqués que dans le cas général de la section 2.1, qui contient une description et un rappel des principales propriétés des opérateurs de Toeplitz. Ceux-ci ont été introduits dans [BM 1]. La technique de base est celle des opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe, introduits dans [Me-Sj] et qui sont décrits avec beaucoup de précision dans le livre de Hörmander [Hö].

Le théorème d'indice relatif de la section 2.2 a été énoncé sous la forme simple et restreinte qui servira au paragraphe 5; la présence de supports en complique déjà sensiblement l'énoncé et la démonstration (pour un ellipsoïde Q_ε tout seul la formule de l'indice est facile à établir parce que $K_0(Q_\varepsilon)=\mathbb{Z}$: il y a une seule vérification à faire). En fait ce théorème se généralise aux familles continues de complexes elliptiques d'opérateurs différentiels verticaux ou opérateurs de Toeplitz (la structure complexe de la fibre pouvant varier); mais l'énoncé le plus général se déduit simplement de celui du théorème d'indice relatif du paragraphe 4.

2.1. Rappels sur les opérateurs de Toeplitz. — Références [BM 1], [BM-Sj], [Hö], [Me-Sj].

Soit $Y \subset \mathbb{C}^n$ un domaine (sous-variété à bord) borné, de bord analytique réel, strictement pseudo-convexe. Ceci signifie que Y peut être défini par une inégalité $u \leqq 0$, où u est analytique réelle sur $\mathbb{C}^n$, $du \neq 0$ sur ∂Y, et la matrice de Levi $(\partial^2 u/\partial z_j \partial \bar{z}_k)$ est hermitienne $\gg 0$ au voisinage de Y.

Exemple. — La boule unité $z\bar{z}-1 \leqq 0$ de $\mathbb{C}^n$; plus généralement l'ellipsoïde Q_ε défini par l'inégalité $|\operatorname{Re} z|^2+\varepsilon^{-2}|\operatorname{Im} z|^2 \leqq 1+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ (les Q_ε forment un système fondamental de voisinages « tubulaires » complexes de la boule unité réelle fermée).

On sait qu'une fonction holomorphe f sur Y est complètement déterminée par la restriction $f_{|\partial Y}$, qui est une hyperfonction sur ∂Y satisfaisant aux équations de Cauchy-Riemann tangentielles. Nous noterons $\mathcal{O}^s(Y)$, ou simplement $\mathcal{O}^s$, l'espace des fonctions holomorphes dans Y dont la restriction à ∂Y appartient à la classe de Sobolev $H^s(\partial Y)$, et $\mathcal{O}^{-\infty}=\bigcup \mathcal{O}^s$. Nous notons $S : L^2(\partial Y) \to \mathcal{O}^0$ le projecteur orthogonal (ceci suppose choisie une densité >0, analytique sur ∂Y, pour définir la norme L^2). On montre dans [BM-Sj] que S est un opérateur intégral de Fourier à phase complexe, *i.e.* son noyau est une distribution conormale associée à l'hypersurface complexifiée de ∂Y dans le complexifié $Y \times \bar{Y}$ de Y (S est en fait analytique, *cf.* [K 3], mais nous n'utiliserons pas cette précision).

Par exemple si Y est la boule unité on a

$$Su(x)=(n-1)!/2\pi^n \int_{\text{sphère}} (1-x.\bar{y})^{-n}u(y)\,d\sigma(y),$$

où $d\sigma(y)$ est l'élément de volume usuel de la sphère.

Si Q est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m sur ∂Y, l'opérateur de Toeplitz T_Q opère de $\mathcal{O}^s$ dans $\mathcal{O}^{s-m}$ pour tout s et est défini par la formule

$$T_Q(u)=S(Q(u_{|\partial Y})) \tag{2.1}$$

Exemples 1. — Si f est une fonction C^∞ sur ∂Y on note T_f l'opérateur de Toeplitz de degré 0 : $u \to T_f(u)=S(fu_{|Y})$.

2. — Soit $P(z, \partial/\partial z)$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients holomorphes au voisinage de Y. Alors P induit sur les $\mathcal{O}^s$ un opérateur de Toeplitz d'ordre m.

L'opérateur de Toeplitz T_Q est la restriction aux $\mathcal{O}^s$ d'un opérateur intégral de Fourier sur ∂Y, de même lagrangienne que S. Les résultats et le formulaire qui suivent résultent alors du calcul et du calcul symbolique des opérateurs intégraux de Fourier, tels qu'ils sont décrits dans [Hö], [Me-Sj]. Nous renvoyons à ces ouvrages, ainsi qu'à [BM 1] où sont introduits les opérateurs de Toeplitz au sens ci-dessus, pour les démonstrations. On note $\Sigma \subset T^* Y$ le sous-fibré en demi-droites engendré par la section (réelle) $1/i d' u_{|\partial Y}$, où d' désigne la partie holomorphe [de type (1,0)] de la dérivée extérieure d. La condition de stricte pseudo-convexité implique que Σ est une sous-variété symplectique de $T^* \partial Y$.

(2.2). SYMBOLE. — Si $A = T_Q$ est un opérateur de Toeplitz d'ordre m, le symbole $\sigma_m(A)$ [ou simplement $\sigma(A)$ ou σ_A] est la fonction $\sigma_m(A) = \sigma_m(Q)_{|\Sigma}$.

L'application $A \to \sigma_A$ est une surjection de l'ensemble des opérateurs de Toeplitz d'ordre m sur l'ensemble des fonctions C^∞ homogènes de degré m sur Σ. Si $\sigma_m(A)$ est nul, A est en fait d'ordre $\leqq m-1$, *i.e.* de la forme $T_{Q'}$, avec Q' d'ordre $\leqq m-1$.

Exemple (suite) 1. — Si f est une fonction C^∞ sur ∂Y, le symbole de l'opérateur de Toeplitz T_f est $f \circ p$, où $p : \Sigma \to \partial Y$ est la projection.

Exemple 2. — Si A est l'opérateur de Toeplitz défini par un opérateur différentiel $P(z, \partial/\partial z)$ à coefficients holomorphes, on a $\sigma_A(-i\lambda d' u) = \sigma_P(-i\lambda d' u)$ pour $\lambda > 0$ (où comme ci-dessus $u \leqq 0$ est une inéquation de définition de Y).

Si A et B sont d'ordre m, resp. m', on a

$$\sigma_{m+m'}(A \circ B) = \sigma_m(A)\, \sigma_{m'}.(B). \tag{2.3}$$

(2.4) Le crochet $[A, B] = A \circ B - B \circ A$ est d'ordre $m + m' - 1$ et on a

$$\sigma_{m+m'-1}([A, B]) = \frac{1}{i} \{ \sigma_m(A), \sigma_{m'}(B) \}_Z$$

où $\{\ \}_\Sigma$ désigne le crochet de Poisson de la variété symplectique Σ. (Cette formule pour les commutateurs n'interviendra pas explicitement dans la suite. Elle est néanmoins étroitement liée à la formule de l'indice.)

Plus généralement si E et F sont des fibrés vectoriels holomorphes définis au voisinage de Y, on a une notion d'opérateur de Toeplitz de type $E \to F$, opérant des sections holomorphes de E vers celles de F. Le symbole d'un tel opérateur est un morphisme C^∞, homogène, de fibrés : $p^{-1} E \to p^{-1} F$, où p est la projection $\Sigma \to \partial Y$. Moyennant cette modification les assertions (2.2) et (2.3) restent valables [pas (2.4)].

(2.5) OPÉRATEURS ELLIPTIQUES. — Soit A un opérateur de Toeplitz de type $E \to F$. On dit que A est elliptique d'ordre m (ou simplement elliptique) si le symbole $\sigma_m(A)$ est inversible. Lorsqu'il en est ainsi A est un opérateur de Fredholm : $\mathcal{O}^s(Y, E) \to \mathcal{O}^{s-m}(Y, F)$ (dont l'indice est donné par une formule analogue à celle de M. F. Atiyah et I. M. Singer (*cf.* [A-S], [BM 1], formule que nous n'utiliserons pas).

(2.6) RELÈVEMENT DES SYMBOLES. — Il existe une application linéaire et continue qui à un symbole a, fonction homogène de degré m sur Σ ou plus généralement section homogène de degré m de $L(p^{-1} E, p^{-1} F)$, associe un opérateur de Toeplitz A de symbole a. Par exemple si $m = 0$, a est de la forme $f \circ p$ (p = projection $\Sigma \to Y$) et on lui associe l'opérateur T_f. Ainsi toute famille continue de symboles peut être relevée en une famille continue d'opérateurs de Toeplitz.

Observons que le projecteur orthogonal S est de norme 1; donc si f est une fonction sur ∂Y (ou plus généralement un morphisme C^∞ de fibrés vectoriels holomorphes hermitiens) on a $\|T_f\| \leqq \|f\| = \sup_{y \in \partial Y} |f(y)|$. En particulier on a $\|T_f - \mathrm{Id}\| < 1$, donc T_f est inversible, si $\|f - \mathrm{Id}\| < 1$. (T_f est d'ordre 0, $\|T_f\|$ désigne sa norme d'opérateur sur les sections L^2, ce qui suppose choisies des normes hermitiennes sur les fibrés.)

(2.7) Relèvement des symboles inversibles. — Abandonnant la linéarité, on a aussi le résultat de relèvement suivant : soit A_x une famille continue d'opérateurs de Toeplitz d'ordre 0 (pour simplifier), paramétrée par $x \in X$ (X paracompact). On suppose A_x elliptique, inversible pour $x \in X - Z$ ($Z \subset X$ fermé). Soit $a^t = a_x^t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ une famille continue de symboles inversibles telle que $a_x^1 = \sigma(A_x)$. Il existe alors une famille continue A_x^t ($x \in X$, $0 \leqq t \leqq 1$) d'opérateurs de Toeplitz elliptiques, inversibles pour $x \in X - Z$, telle que $\sigma(A_x^t) = a_x^t$.

En effet comme [01] est paracompact il existe une fonction continue $\varepsilon(x) > 0$ telle que pour tous $x \in X$, $t \in [0, 1]$, $s \leqq \inf(t, \varepsilon)$ on ait $\|(a^{t-s})^{-1} a^t - 1\| < 1$; dans ce cas, comme on a vu, l'opérateur $T_{(a^{t-s})^{-1} a^t}$ est inversible. On peut alors définir A_x^t par récurrence par $A^t = T_{a^t (a^1)^{-1}} A^1$ si $1 - \varepsilon \leqq t \leqq 1$, et $A^t = T_{a^t (a^{t+\varepsilon})^{-1}} A^{t+\varepsilon}$ si $t \leqq 1 - \varepsilon$ (A^t est ainsi bien défini comme produit d'un nombre localement borné de facteurs continus).

2.2. Indice d'une famille d'opérateurs de Toeplitz. — 2.2.1. *Complément sur les opérateurs de Fredholm.* — Dans ce numéro nous supposons X métrique de dimension finie : $\dim X \leqq d$ signifie que tout recouvrement ouvert peut être raffiné en un recouvrement pour lequel l'intersection de plus de $d+2$ ouverts distincts est vide. Alors toute application continue d'une partie fermée $Y \subset X$ dans une sphère S_n, $n \geqq d$, se prolonge continûment à X; on sait qu'il en résulte que si E et F sont deux fibrés sur X, u un plongement de $E | Y$ dans $F | Y$, alors u se prolonge à X si $\mathrm{rg}(F) \geqq \mathrm{rg}(E) + \dim X$ (il s'agit du rang sur $\mathbb{R}$, double du rang sur $\mathbb{C}$); de plus deux tels prolongements sont homotopes si $\mathrm{rg}(F) \geqq \mathrm{rg}(E) + \dim(X \times I)$ (I désigne l'intervalle [0, 1]; $X \times I$ est de dimension finie, $\leqq \dim X + 1$). Nous utiliserons la version suivante, avec supports, de ce résultat :

Lemme 2.1. — *Soient* E, F *deux fibrés de même rang sur* X, Y *et* $Z \subset X$ *fermés*, $E' \subset E$ *un sous-fibré*, $a : E \to F$ *un morphisme tel que a soit inversible au-dessus de* $X - Z$, *et* $a | E'$ *injectif sur* Y. *Alors si* $\mathrm{rg}\, E/E'$ *est assez grand il existe une déformation continue* a_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ *telle* $a_0 = a$, $a_t = a$ *sur* Y, a_t *soit inversible au-dessus de* $X - Z$, *et* a_1 *soit injectif sur* E'; *deux telles déformations sont homotopes.*

Autrement dit on peut déformer a en un morphisme injectif sur E', sans rien toucher sur Y. En effet a définit un plongement de E' dans F au voisinage de Y donc il existe un plongement b égal à a au voisinage de Y si $\mathrm{rg}\, E/E' \geqq \dim X$. Si de plus $\mathrm{rg}\, E/E' \geqq \dim((X - Z) \times I)$ les plongements de $E' | X - Z$ définis par a et b sont homotopes de sorte qu'il existe une famille continue u_t d'isomorphismes $E | X - Z \to F | X - Z$ telle que $u_0 = a | X - Z$, $u_1 | E' = b$, $u_t = a$ au voisinage de $Y - Z$ dans $X - Z$. On peut enfin déformer u_t en dehors de Y de sorte qu'il se prolonge à Z (par exemple on peut supposer u_t constant pour $t \leqq \varepsilon$ et pour $t \geqq 1 - \varepsilon$, égal à a au voisinage de Y; on choisit une fonction continue φ sur X égale à 1 sur Y, >0 hors de Z, et nulle sur $(X-W)\cap Z$ où W est un voisinage fermé de Y tel que $u_t=a$ au voisinage de W; on remplace alors u_t par $\varphi\|u_t\|^{-1}u_t$ pour $\varepsilon\leqq t\leqq 1-\varepsilon$ (qui se prolonge continûment par 0 sur $Z-W$), et par $((1-t/\varepsilon)+\varphi\|u_t\|^{-1}t/\varepsilon)u_t$ pour $0\leqq t\leqq\varepsilon$, $((1-(1-t)/\varepsilon+\varphi\|u_t\|^{-1}(1-t)/\varepsilon)u_t$ pour $1-\varepsilon\leqq t\leqq 1$, qui est déjà tout prolongé, comme u_t, pour ces valeurs de t).

Cet énoncé se généralise comme suit aux familles d'opérateurs de Fredholm sur X :

LEMME 2.1 bis. — *Soit* X *métrique de dimension finie*, Y, $Z\subset X$ *fermés*, $A_x\in L(H)$ *une famille continue d'opérateurs de Fredholm d'indices nuls, inversible hors de* Z; *on suppose donné un sous-espace* $E\subset H$ *de rang fini tel que* $A\,|\,E^\perp$ *soit injectif sur* Y. *Alors si* $\mathrm{rg}(E)$ *est assez grand, il existe une famille continue* q_t *d'opérateurs compacts tels que* $q_0=0$, $q_t=0$ *sur* Y, $A+q_t$ *soit inversible sur* $X-Z$, *et* $A+q_1$ *soit injectif sur* $E^\perp$. *Deux telles déformations sont isotopes.*

Cela résulte du lemme 2.1 s'il existe $E'\supset E$ tel que A soit injectif sur $E'^\perp$ [la déformation existe si $\mathrm{rg}(E)\geqq\dim(XU(X-Z)\times I]$, deux déformations sont isotopes si $\mathrm{rg}(E)\geqq\dim(X\times I\cup(X-Z)\times I^2))$. Dans le cas général X est de toute façon réunion d'une suite X_n de parties fermées, avec $X_n\subset$ intérieur de X_{n+1}, telles que $A\,|\,E_n^\perp$ soit injectif sur X_n, où E_n est une suite de sous-espaces emboîtés de H contenant E; le résultat précédent, qui permet de déformer sans toucher à rien là où c'est déjà bon, permet donc de faire la déformation de proche en proche.

On montre de même le résultat analogue pour la K^1-théorie [qui se déduit d'ailleurs du précédent en remplaçant (X, Y, Z) par $(X\times\mathbb{R}, Y\times\mathbb{R}, Z\times\{0\})$] :

LEMME 2.2. — *Soit* q *une famille continue sur* X *d'opérateurs compacts telle que* $1+q$ *soit inversible hors de* Z, *et* $q_x\in L(E)\subset L(H)$ *pour* $x\in Y$. *Alors il existe une déformation* $q_t\,(0\leqq t\leqq 1)$ *telle que* $1+q_t$ *soit inversible hors de* Z, $q_t=q$ *pour* $t=0$ *ou* $x\in Y$, *et* $q_1\in L(E)$. *Deux telles déformations sont isotopes.*

La condition ici est $\mathrm{rg}(E)\geqq\dim(X\times I\cup(X-Z)\times I^2)$ pour l'existence d'une déformation, et $\mathrm{rg}(E)\geqq\dim(X\times I^2\cup(X-Z)\times I^3)$ pour que ces déformations soient isotopes.

On peut encore dans les lemmes 2.1 *bis* et 2.2 remplacer H par un fibré hilbertien, et E par un sous-fibré de rang fini assez grand. Si l'indice $i=\mathrm{ind}\,A_x$ n'est pas nul, l'énoncé reste vrai si $\mathrm{rang}(E)\geqq i+\dim(X\times I\cup(X-Z)\times I)$, quantité localement mais peut-être pas globalement bornée.

(*b*) *Indice d'une famille d'opérateurs de Toeplitz.* — Soient X un espace métrique, $Z\subset X$ une partie compacte, $Q\subset\mathbb{C}^n$ la boule unité ou l'ellipsoïde Q_ε (n° 2.1, exemple). Tout fibré vectoriel holomorphe sur Q est trivial, d'après H. Grauert, et de même tout fibré relativement holomorphe au voisinage de $X\times Q$ dans $X\times\mathbb{C}^n$ est isomorphe, avec sa structure complexe relative, à un fibré $p^{-1}E$, où E est un fibré vectoriel sur X et $p: X\times\mathbb{C}^n\to X$ est la projection (cette assertion se démontre par les mêmes arguments que le théorème de Grauert; *cf.* aussi [C-G]).

Soient E, F deux fibrés vectoriels sur X. Nous appellerons famille d'opérateurs de Toeplitz de type $E\to F$ une famille continue d'opérateurs de Toeplitz de type $E\to F$. Une telle famille est dite elliptique si son symbole est inversible; elle définit alors une famille continue, indexée par X, d'opérateurs de Fredholm $E\otimes\mathcal{O}^s(Q)\to F\otimes\mathcal{O}^{s-m}(Q)$

(m = ordre des A_x). Plus généralement une famille A_x de complexes d'opérateurs de Toeplitz est dite elliptique si son symbole est une suite exacte de fibrés vectoriels, ou ce qui revient au même si $(A + A^*)$ ou le carré $(AA^* + A^* A)$ est elliptique au sens précédent.

Nous dirons qu'une telle famille est basique si elle provient d'un morphisme de fibrés $a: E \to F$ sur X, *i.e.* pour $x \in X$, A_x est l'opérateur de Toeplitz « constant » $T_{a(x)}: u \to a(x) u$.

DÉFINITION 2.3. — *Nous appellerons famille admissible* (*relativement à* Z) *d'opérateurs de Toeplitz elliptiques un couple* $(A_x, A_x^t)(0 \leqq t \leqq 1)$, où A_x *est une famille elliptique d'opérateurs de Toeplitz d'ordre* 0 (de type $E \to F$) *sur* Q, *paramétrée par* X, *inversible hors de* Z, *et* $A^t = A_x^t$ *est une homotopie d'opérateurs de Toeplitz inversibles paramétrés par* $x \in X - Z$ *reliant* $A^1 = A_{|X-Z}$ *à une famille basique* A^0.

Soit $A = (A_x)$ une famille elliptique d'opérateurs de Toeplitz, inversible en dehors de Z. Alors A définit une famille continue d'opérateurs de Fredholm dans les $\mathcal{O}^s(Q)$, inversible en dehors de Z, d'où un indice :

$$\operatorname{Ind}_Z(A) \in K_Z(X). \tag{2.8}$$

Cet indice dépend *a priori* du choix de s et du degré de A; en fait pour tout s il existe un opérateur de Toeplitz de degré s, elliptique, inversible, positif donc de symbole homotope à 1, de sorte que l'indice ne dépend pas de s et qu'on peut toujours se ramener à l'étude d'une famille d'opérateurs de Toeplitz d'ordre 0 : $\mathcal{O}^0(E) \to \mathcal{O}^0(F)$.

Soit maintenant $A = (A_x, A_x^t)$ une famille admissible. Pour $x \in X$ (resp. $X - Z$), $z \in \partial Q$ (resp. et $0 \leqq t \leqq 1$), posons $a(x, z) = \sigma_{A_x}(z)$, resp. $a(x, tz) = \sigma_{A_x^t}(z)$; c'est bien défini pour $t = 0$ puisque A^0 est basique. Ainsi défini a est un isomorphisme de fibrés au-dessus de $X \times \partial Q \cup (X - Z) \times Q$. Comme l'homomorphisme $K_{Z \times \{0\}}(X \times Q) \to K_{Z \times \mathring{Q}}(X \times Q)$ est ici un isomorphisme ($X \times Q - Z \times \{0\}$ se déforme sur $X \times Q - Z \times \mathring{Q}$), a définit un élément

$$[A]_Z^{\text{top}} \in K_{Z \times \{0\}}(X \times Q) \tag{2.9}$$

THÉORÈME 2.4. — *On suppose* X *de dimension finie.*

(i) *Tout élément* $\xi \in K_{Z \times \{0\}}(X \times Q)$ *est de la forme* $[A]_Z^{\text{top}}$ *pour une famille admissible* $A = (A_x, A_x^t)$ *convenable.*

(ii) *Si* $A = (A_x, A_x^t)$ *est une famille admissible d'opérateurs de Toeplitz* $\operatorname{Ind}_Z(A)$ *ne dépend que de* $[A]_Z^{\text{top}}$.

(iii) *L'application* $[A]_Z^{\text{top}} \to \operatorname{Ind}_Z(A)$ *de* $K_{Z \times \{0\}}(X \times Q)$ *dans* $K_Z(X)$ *ainsi définie est l'inverse de l'homomorphisme de Bott.*

Cet énoncé implique aussitôt :

THÉORÈME 2.5. — *Si* $A = (A_x, A_x^t)$ *est une famille admissible d'opérateurs de Toeplitz, on a*

$$\operatorname{Ind}_Z(A) = p_* ([A]_Z^{\text{top}}$$

où p_* *est l'image directe* K-*théorique.*

Démonstration. — (1) Soient E, F deux fibrés sur X et $a : p^* \mathrm{E} \to p^* \mathrm{F}$ un morphisme de fibrés sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Q}$, inversible hors de $\mathrm{Z} \times \{0\}$. Posons $a_t = a(x, tz)$ pour $0 \leqq t \leqq 1$. Quitte à rétrécir X on peut supposer l'opérateur de Toeplitz T_a injectif sur $\mathrm{E}_0^\perp$ pour $t=1$, où E_0 est un sous-fibré de rang assez grand du fibré hilbertien $\mathrm{X} \times \mathcal{O}^0(\mathrm{Q}, \mathrm{E})$ sur X; T_{a_t} est inversible pour $t=0$ (sur $\mathrm{X}-Z$). Appliquant le lemme 2.1 *bis* à la famille $(\mathrm{T}_a, \mathrm{T}_{a_t})$ sur $\mathrm{X} \times \{1\} \cup (\mathrm{X}-\mathrm{Z}) \times \mathrm{I}$ on voit qu'il en existe une déformation $\mathrm{A}' = (\mathrm{T}_a + q, \mathrm{T}_{a_t} + q_t)$, avec $q_0 = 0$, injective sur $\mathrm{E}_0^\perp$; posant $\mathrm{F}_0 = \mathrm{A}'(\mathrm{E}_0^\perp)^\perp$ le lemme 2.2 montre qu'il en existe une deuxième déformation $\mathrm{A} = \mathrm{A}' + (q', q_t')$ de A avec $q_0' = 0$, $(q', q_t') \in \mathrm{L}(\mathrm{E}_0, \mathrm{F}_0)$, inversible dans $\mathrm{X}-\mathrm{Z}$. Ceci montre l'existence d'une famille admissible de symbole a donné, et donc que tout $\xi \in \mathrm{K}_\mathrm{Z}(\mathrm{X} \times \mathrm{Q})$ est l'élément K-théorique correspondant à une famille admissible.

(ii) Comme $\mathrm{Ind}_\mathrm{Z}(\mathrm{A})$ et $[\mathrm{A}]_\mathrm{Z}^{\mathrm{top}}$ sont additifs il suffit de démontrer qu'on a $\mathrm{Ind}_\mathrm{Z}(\mathrm{A}) = 0$ si $[\mathrm{A}]_\mathrm{Z}^{\mathrm{top}} = 0$. Dans ce cas le symbole $\sigma_{\mathrm{A}, \mathrm{A}_t}$ se déforme stablement en le symbole 1; par suite d'après (2.7) $(\mathrm{A}, \mathrm{A}_t)$ se déforme stablement à travers les familles admissibles en une famille $1 + (q, q_t)$ où (q, q_t) est compact, $q_0 = 0$. Le lemme 2.2 montre qu'on peut encore déformer en une famille de la forme $1 + (q, q_t)$ avec $q, q_t \in \mathrm{L}(\mathrm{E}_0)$ si E_0 est un sous-fibré de rang assez grand : $\mathrm{Ind}_\mathrm{Z}(\mathrm{A})$ est alors représenté par le morphisme $1 + q \mid \mathrm{E}_0$ et est nul puisque $1 + q_t \mid \mathrm{E}_0$ est une déformation de ce morphisme sur 1_{E_0} (à travers les isomorphismes sur $\mathrm{X}-\mathrm{Z}$). Ceci montre que $\mathrm{ind}_\mathrm{Z}(\mathrm{A})$ ne dépend que de $[\mathrm{A}]_\mathrm{Z}^{\mathrm{top}}$ et donc que $(\mathrm{A}, \mathrm{A}_t) \to \mathrm{Ind}_\mathrm{Z}(\mathrm{A})$ définit un homomorphisme $\mathrm{K}_{\mathrm{Z} \times \{0\}}(\mathrm{X} \times \mathrm{Q}) \to \mathrm{K}_\mathrm{Z}(\mathrm{X})$.

(iii) Notons k_Q le complexe de Koszul

$$(2.10) \qquad k_\mathrm{Q} : \quad \ldots \to \Lambda^{-k} \mathbb{C}^n \to \Lambda^{-k+1} \mathbb{C}^n \to \ldots \to \mathbb{C} \to 0$$

où la différentielle au point $z \in \mathrm{Q}$ est le produit intérieur $\omega \to \mathrm{Z} \llcorner \omega$ (les degrés sont négatifs). k_Q est considéré ici comme un complexe d'opérateurs de Toeplitz. Soit $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ un morphisme de fibrés vectoriels sur X, représentant un élément de $\mathrm{K}_\mathrm{Z}(\mathrm{X})$. La famille de complexes d'opérateurs de Toeplitz $\mathrm{A} = u \otimes k_\mathrm{Q}$ est admissible [homotopie : $\mathrm{A}^t = u \otimes k(tz)$], exacte dans $\mathrm{X}-\mathrm{Z}$ parce que u l'est. Par construction $[\mathrm{A}]_\mathrm{Z}^{\mathrm{top}}$ est l'image de $[u]_z$ par l'homomorphisme de Bott. D'autre part on sait que l'homologie de k_Q est nulle en degré <0 et égale $\mathbb{C}$ en degré 0. Par suite $u \otimes k_\mathrm{Q}$ est quasi-isomorphe à u, de sorte qu'on a $\mathrm{Ind}_\mathrm{Z}(\mathrm{A}) = [u]_\mathrm{Z}$. L'homomorphisme indice défini ci-dessus est donc inverse à gauche de l'homomorphisme de Bott qui est donc injectif.

Rappelons que ceci implique que l'homomorphisme de Bott est bijectif : si $p : \mathrm{N} \to \mathrm{X}$ est un fibré spin^c sur X notons $b_p : \mathrm{K}_\mathrm{Z}(\mathrm{X}) \to \mathrm{K}_\mathrm{Z}(\mathrm{N})$ l'homomorphisme de Bott, et lorsque N est complexe trivial $\mathrm{I}_p : \mathrm{K}_\mathrm{Z}(\mathrm{N}) \to \mathrm{K}_\mathrm{Z}(\mathrm{X})$ l'homomorphisme indice. Ce sont des homomorphismes de $\mathrm{K}(\mathrm{X})$ modules, et leur construction commute (de façon évidente) aux changements de base. Ceci étant soit $p_1 : \mathrm{N}_1 \to \mathrm{X}$ un fibré complexe trivial; comme G. Segal introduisons une deuxième copie $p_2 : \mathrm{N}_2 \to \mathrm{X}$ de ce fibré et soient M le produit fibré, q_1 (resp. q_2) la projection $\mathrm{M} \to \mathrm{N}_2$ (resp. N_1) déduite de p_1 (resp. p_2) par changement de base. On a alors $\mathrm{I}_{q_2} b_{q_1} = b_{p_1} \mathrm{I}_{p_2}$ (par changement de base de X à N_1, et parce que b_{p_1} est la multiplication par l'élément de Bott $\beta_{p_1} \in \mathrm{K}_\mathrm{Z}(\mathrm{N}_1)$, dont l'image inverse est β_{q_1}). En faisant tourner d'un quart de tour, on voit qu'il existe une déformation de M qui échange N_1 et N_2 donc $b_{p_1} = b_{p_2}$, et $b_{p_1} \mathrm{I}_{p_2} = \mathrm{Id}$. Par suite b_{p_1} est aussi surjectif, donc bijectif. Dans le cas général le fibré spin^c N est facteur direct d'un fibré complexe trivial L (au voisinage du support Z, qui est supposé compact), et comme $b_{L\to X}=b_{L\to N}b_{N\to X}$, l'homomorphisme de Bott est injectif; le même argument montre alors qu'il est bijectif. Ceci démontre, lorsque X est métrisable de dimension finie, que l'homomorphisme de Bott est bijectif, et justifie dans ce cadre les constructions du paragraphe 1.

Remarque 1. — Soit E^k une famille de fibrés gradués sur X : $E^k=\oplus_I E^k_I$. Soit

$$D: \quad \ldots E^k\otimes\mathcal{O}\to E^{k+1}\otimes\mathcal{O}\to\ldots$$

un complexe d'opérateurs différentiels à coefficients holomorphes sur les $Q\times E^k$ (à coefficients holomorphes en $z\in Q$, continus en $x\in X$). On suppose D de degré 0, *i.e.* dans la matrice $D=(D_{ij})$ (pour les décompositions $E^k=\oplus_I E^k_I$), D_{ij} est d'ordre $\leqq i-j$; en particulier $D_{ij}=0$ si $i<j$.

Alors dire que D est exact revient à dire que sa partie diagonale d'ordre 0 l'est, en tout point de Y.

Supposons D elliptique, exact hors de Z. Alors à D est canoniquement associée une famille admissible, qu'on construit en deux crans :

1° pour $1/2\leqq t\leqq 1$ on pose $D^t=((2t-1)^{i-j}D_{ij})$; c'est bien défini parce que $D_{ij}=0$ si $i-j<0$; $D^{1/2}$ est « diagonal », d'ordre 0;

2° pour $0\leqq t\leqq 1/2$ on pose $D^t=D^{1/2}(2tz)$; D^0 est basique.

Le symbole $[D]^{\text{top}}_Z$ associé à cette famille peut encore être décrit ainsi : c'est l'élément de K-théorie associé à $\sigma_D(\eta)$, où η est une section de $X\times T^*Y$ de direction voisine de celle de $d'u$ au voisinage de $X\times\partial Y$ (où $u<0$ est une inéquation de définition de Y, comme plus haut). Une description équivalente est donnée au paragraphe 4.

Le théorème 2.5 est donc encore vrai dans ce cas : $\operatorname{Ind}_Z(D)=p_*[D]^{\text{top}}_Z$. C'est sous cette forme que nous l'utiliserons au paragraphe 5.

Remarque 2. — Le théorème 2.4 implique que toute famille elliptique d'opérateurs de Toeplitz sur X, inversible hors de Z, admet (à homotopie stable près) un unique prolongement admissible (A, A_t). Comme le prolongement n'est pas en général évident, au contraire de ce qui se passe dans la remarque 1, nous avons préféré garder l'énoncé sous la forme ci-dessus, avec des familles admissibles.

Remarque 3. — Pour les constructions ci-dessus, lorsque X est de dimension finie, l'hypothèse de compacité du support est en fait superflue; tous les énoncés restent vrais à condition de remplacer le groupe d'Atiyah $K_Z(X)$ par le groupe des fibrés virtuels (avec supports) de dimension localement mais non globalement bornée, qui est toujours isomorphe au groupe des classes d'homotopie $F_Z(X)$ d'après le lemme 2.1. Le théorème de périodicité de Bott reste vrai dans ce cadre (la version du théorème 2.4 où on remplace Q par le fibré en boules d'un fibré vectoriel complexe est vraie et tout fibré $\text{spin}^c N$ se plonge dans un fibré complexe, par exemple $N\oplus iN$). Cette généralisation serait pour l'instant illusoire car nous devrons définir plus loin l'élément K-théorique [M] associé à un $\mathcal{D}$-module bien filtrable M, et cette définition demande une forme de compacité.

3. Rappels sur les $\mathscr{D}$-modules

Dans cette section nous décrivons les $\mathscr{D}$-modules qui forment le cadre dans lequel nous énoncerons et démontrerons le théorème d'indice relatif. Nous rappelons la définition de l'image directe d'un $\mathscr{D}$-module, due à Sato, Kawai, Kashiwara [K-K-S]. Nous aurons besoin d'associer à un $\mathscr{D}$-module M possédant une bonne filtration un élément [M] de K-théorie à supports, défini à partir de son symbole. Si i est une immersion fermée, M un $\mathscr{D}$-module et $i_+ \mathrm{M}$ son image, $[i_+ \mathrm{M}]$ est l'image directe K-théorique de [M] (*cf.* [K 2]). Ceci est le point de départ de la formule de l'indice, relative ou absolue. Notre méthode pour décrire le symbole, et le symbole de l'image directe par immersion, consiste à passer du cas complexe au cas réel, où tout est de Stein, en ajoutant les équations de Cauchy-Riemann, ce qui est naturel dans le cadre des $\mathscr{D}$-modules. La construction est à rapprocher de celle de P. Baum, W. Fulton et R. MacPherson pour le théorème de Riemann-Roch [B-F-MPh], où cette construction est faite, dans le cas projectif, par déformation.

Pour la définition et les propriétés des $\mathscr{D}$-modules, le lecteur pourra utilement se reporter à [B], où ces objets sont décrits avec précision (dans un cadre algébrique), ainsi qu'à [K-K-S], [BM-L-M], [K 4], [Bj].

3.1. $\mathscr{D}$-MODULES. — Soit X une variété analytique, réelle ou complexe. On note $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$, ou simplement $\mathscr{O}$, le faisceau des fonctions analytiques sur X et Ω_{X} ou Ω le faisceau des formes différentielles de degré maximal. On note $\mathscr{D}_{\mathrm{X}}$ (ou $\mathscr{D}$) le faisceau des opérateurs différentiels sur X; c'est un faisceau filtré : $\mathrm{F}_m \mathscr{D} = \mathscr{D}_m =$ les opérateurs d'ordre $\leq m$. $\mathscr{D}$ opère à gauche sur $\mathscr{O}$ et à droite sur Ω (par $\omega f = f\omega$, $\omega\xi = -\theta_\xi \omega$ si $\omega \in \Omega$, $f \in \mathscr{O}$, ξ est un champ de vecteurs, θ_ξ désigne la dérivée de Lie).

Dans la suite on désignera de la même manière les fibrés vectoriels et leurs faisceaux de sections. A un complexe d'opérateurs différentiels

$$\mathrm{P}: \quad \ldots \mathrm{E}^k \xrightarrow{\mathrm{P}_k} \mathrm{E}^{k+1} \to \ldots \tag{3.1}$$

où les E^k sont des fibrés vectoriels analytiques sur X, on associe une complexe de $\mathscr{D}$-modules à droite localement libres

$$\mathrm{P}^d: \quad \ldots \to \mathscr{E}^k \to \mathscr{E}^{k+1} \to \ldots \tag{3.2}$$

où $\mathscr{E}^k = \mathrm{Diff}(\mathscr{O}, \mathrm{E}^k)$ est le faisceau des opérateurs différentiels de type $\mathscr{O} \to \mathrm{E}^k$, la différentielle étant donnée en degré k par $\mathrm{Q} \to \mathrm{P}_k \circ \mathrm{Q}$.

De même on associe à P un complexe de $\mathscr{D}$-modules à gauche localement libres :

$$\mathrm{P}^g: \quad \ldots \mathscr{E}'^k \to \mathscr{E}'^{k+1} \to \ldots \tag{3.3}$$

où $\mathscr{E}'^k = \mathrm{Diff}(\mathrm{E}^{-k}, \mathscr{O})$ est le faisceau des opérateurs différentiels de type $\mathrm{E}^{-k} \to \mathscr{O}$, la différentielle étant donnée par $\mathrm{Q} \to \mathrm{Q} \circ \mathrm{P}_{k-1}$ en degré k.

Exemples 1. — Soit $f: \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ une submersion. Notons $\mathrm{T}^*_{\mathrm{Y/X}}$ le fibré cotangent relatif ($\mathrm{T}^*_{\mathrm{Y/X}} = \mathrm{T}^* \mathrm{Y} / f^* \mathrm{T}^* \mathrm{X}$). Le complexe de De Rham relatif $d_{\mathrm{Y/X}}$ est le complexe

$$d_{\mathrm{Y/X}}: \quad 0 \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \to \mathrm{T}^*_{\mathrm{Y/X}} \to \ldots \Lambda^k \mathrm{T}^*_{\mathrm{Y/X}} \to \Lambda^{k+1} \mathrm{T}^*_{\mathrm{Y/X}} \to \ldots \tag{3.4}$$

déduit par passage au quotient du complexe de De Rham (différentielle extérieure) de Y : $d_{Y/X}$(classe de ω) = classe de $d\omega$. Il lui correspond un complexe de $\mathscr{D}_Y$-modules à droite (en degrés positifs) $DR^d_{Y/X}$, et un complexe de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche (en degrés négatifs) $DR^g_{Y/X}$. Le symbole de $d_{Y/X}$ est le complexe de l'algèbre extérieure

$$(3.4)\,bis \qquad 0 \to \mathbb{C} \to T^*_{Y/X} \to \ldots \Lambda^k T^*_{Y/X} \to \Lambda^{k+1} T^*_{Y/X} \to \ldots$$

dont la différentielle au point $\eta \in T^* Y$ est le produit extérieur $\omega \to \eta' \wedge \omega$, où $\eta' = \eta \bmod . f^* T^* X$ est la partie verticale (projection) de $\eta \in T^* Y$.

Si m est un complexe de $\mathscr{O}_X$-modules, on lui associe le complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à droite

$$(3.5) \qquad M = \mathfrak{m} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X$$

3. Si $E \xrightarrow{p} X$ est un fibré complexe, Y la variété analytique sous-jacente à E, le complexe de Koszul de E est le complexe de $\mathscr{O}_Y$-modules (en degrés négatifs)

$$(3.6) \qquad k_E : \quad \ldots p^{-1} \Lambda^{-k} E' \to p^{-1} \Lambda^{-k+1} E' \to \ldots p^{-1} E' \to \mathscr{O}_Y \to 0$$

dont la différentielle au point $y \in Y = E$ est le produit intérieur $\omega \to y_{\text{L}}\, \omega$ (E' désigne le dual de E). Il lui correspond un complexe de $\mathscr{D}_Y$-modules à droite $K^d_E = k_E \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{D}_Y$ (il y a aussi un $\mathscr{D}_Y$-module à gauche K^g_E qu'on n'utilisera pas).

3.2. Modules de transfert. — Soient X, Y des variétés analytiques et $f : Y \to X$ une application analytique. On note $\mathscr{D}_{Y \to X}$ le faisceau sur Y des opérateurs différentiels de type $f^{-1} \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Y$ (f^{-1} désigne l'image inverse faisceautique); localement un tel opérateur s'écrit sous la forme $u \in \mathscr{O}_X \to P_Y (Q_X u \circ f)$ (avec $P_Y \in \mathscr{D}_Y$, $Q_X \in \mathscr{D}_X$).

De même on note $\mathscr{D}_{X \leftarrow Y}$ le faisceau sur Y des opérateurs différentiels de type $f^{-1} \Omega_X \to \Omega_Y$, *i.e.* localement de la forme $\omega \in \Omega_X \to P_Y (f^{-1} \omega Q_x)$, avec $Q_X \in \mathscr{D}_X$, P_Y opérateur différentiel de type $f^* (\Omega_X) \to \Omega_Y$.

$\mathscr{D}_{Y \to X}$ est un $(\mathscr{D}_Y, f^{-1} \mathscr{D}_X)$-bimodule monogène, engendré comme bimodule par l'opérateur $\varepsilon : u \to u \circ f$. De même $\mathscr{D}_{X \leftarrow Y}$ est un $(f^{-1} \mathscr{D}_X, \mathscr{D}_Y)$-bimodule, localement monogène (il n'y a pas de générateur canonique).

Exemple 4. — Supposons f submersive. Alors $\mathscr{D}_{Y \to X}$ est déjà monogène, de générateur ε, comme $\mathscr{D}_Y$-module à gauche. Le complexe $DR^g_{Y/X}$ en est une résolution localement libre, d'augmentation $P \in \mathscr{D}_Y \to P \circ \varepsilon$.

De même $\mathscr{D}_{X \leftarrow Y}$ est localement monogène comme $\mathscr{D}_Y$-module à droite. $DR^d_{Y/X}$ est une résolution localement libre de $\mathscr{D}_{X \leftarrow Y}[-d]$ ($d = \dim Y - \dim X$) sur $\mathscr{D}_Y$. L'augmentation est définie ainsi : un élément de degré maximal de ce complexe est un opérateur différentiel P de type $\mathscr{O}_Y \to \Omega_{Y/X}$; par transposition P définit un opérateur différentiel P' de type $\Omega^{-1}_{Y/X} \otimes \Omega_Y \to \Omega_Y$. L'image de P par l'augmentation est alors l'opérateur $P'_0 i$ (de type $f^{-1} \Omega_X \to \Omega_Y$), où i est l'injection canonique $f^{-1} \Omega_X \to \Omega^{-1}_{Y/X} \otimes \Omega_Y$.

Exemple 5. — Soit $p : E \to Y$ un fibré vectoriel, et soient X la variété sous-jacente à E, $f : Y \to X$ la section nulle. Alors $f_* (\mathscr{D}_{Y \to X})$ est un $\mathscr{D}_X$-module à droite de support Y, monogène engendré par ε. Il admet pour résolution localement libre le complexe K_E^d déduit du complexe de Koszul (augmentation : $P \in \mathscr{D}_X \to \varepsilon \circ P$, en degré 0).

3.3. IMAGE DIRECTE. — Pour Z variété analytique, on notera $D^b(\mathscr{D}_Z)$ la catégorie dérivée (fabriquée avec les complexes à cohomologie bornée) de la catégorie des $\mathscr{D}_Z$-modules à droite.

Soit $f: Y \to X$ un morphisme de variétés analytiques. Si $M \in \operatorname{ob} D^b(\mathscr{D}_Y)$ l'image directe $f_+(M)$ est l'élément

$$f_+ M = Rf_* (M \overset{L}{\otimes}_{\mathscr{D}_Y} \mathscr{D}_{Y \to X}) \in \operatorname{ob} D^b(\mathscr{D}_X). \tag{3.7}$$

Pour $M \in \operatorname{ob} D^b(\mathscr{D}_X)$ on définit l'image inverse extraordinaire $f^!(M)$ par

$$f^! M = f^{-1}(M) \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathscr{D}_X} \mathscr{D}_{X \leftarrow Y}[d] \in \operatorname{ob} D^b(\mathscr{D}_X) \qquad (d = \dim Y - \dim X) \tag{3.8}$$

L'image inverse ordinaire peut aussi être définie dans certains cas, *cf.* [B]. Nous en aurons besoin dans le seul cas où f est une submersion. Elle est alors définie par

$$f^+ M = f^! M[-2d]. \tag{3.8 bis}$$

Dans ce qui précède Rf_* désigne le foncteur dérivé du foncteur image directe faisceautique, f^{-1} le foncteur image inverse (il est exact), $\overset{L}{\otimes}$ le produit tensoriel dérivé. Il y a des constructions similaires pour les $\mathscr{D}$-modules à gauche.

Exemple 6. — Supposons que f soit une immersion fermée. Alors l'image directe f_* est exacte, et $\mathscr{D}_{Y \to X}$ est localement libre sur $\mathscr{D}_Y$. Donc si M est un $\mathscr{D}_Y$-module à droite, $f_+(M)$ est le $\mathscr{D}_X$-module (= complexe pur de degré 0)

$$f_+(M) = f_*(M \otimes_{\mathscr{D}_Y} \mathscr{D}_{Y \to X}). \tag{3.9}$$

D'après M. Kashiwara, $M \to f_+(M)$ est une équivalence de la catégorie des $\mathscr{D}_Y$-modules à droite sur la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules à droite portés par $f(Y)$ [*i.e.* dont toute section est tuée par une puissance de l'idéal de définition de $f(Y)$]; une équivalence quasi-inverse est $N \to f^! N$. Si f est propre, $f_+(M)$ est $\mathscr{D}_X$-cohérent si et seulement si M est $\mathscr{D}_Y$-cohérent. Il y a un résultat analogue pour les $\mathscr{D}$-modules à gauche.

Exemple 7. — Supposons que f soit une submersion, et soit $d = \dim Y/X$ la dimension relative. On notera $\mathscr{D}_{Y/X}$ le faisceau des opérateurs différentiels verticaux, et $T_{Y/X} \subset \mathscr{D}_{Y/X}$ le faisceau des champs de vecteurs verticaux. On notera $H \subset T^* Y$ le fibré des covecteurs horizontaux (orthogonal de $T_{Y/X}$).

Les modules $\mathscr{D}_{Y \to X}$ et $\mathscr{D}_{X \leftarrow Y}$ sont plats sur $f^{-1}\mathscr{D}_X$ (*cf.* exemple 4), de même que $\mathscr{O}_Y$ est plat sur $f^{-1}\mathscr{O}_X$. Comme on a vu dans l'exemple 4, $DR^g_{Y/X}$ est une résolution de $\mathscr{D}_{Y \to X}$ et $DR^d_{Y/X}$ est une résolution du module décalé $\mathscr{D}_{X \leftarrow Y}[-d]$. Le produit tensoriel total $\mathscr{D}_{X \leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathscr{D}_Y} \mathscr{D}_{Y \to X}[-d]$ est quasi-isomorphe à $DR^d_{Y/X} \otimes_{\mathscr{D}_Y} \mathscr{D}_{Y \to X}$ donc à $f^{-1}\mathscr{D}_X$

(localement Y est un produit $Z \times X$; le complexe ci-contre est le complexe des f-opérateurs différentiels de type $\mathcal{O}_X \to \Omega_{Y/X}$ *i.e.* de la forme $P(z, x, (\partial/\partial x))$ à coefficients formes relatives, muni de la différentielle $P \to d_{Y/X} P = d_z P$; la cohomologie se réduit aux opérateurs dont les coefficients ne dépendent pas de z en degré 0, et est nulle en degré >0).

Plus généralement soit M un $\mathcal{O}_X$-module à gauche et $N = f^+ M$. On a $N \simeq \mathcal{D}_{Y \to X} \otimes_{f^{-1} \mathcal{D}_X} f^{-1} M$ puisque f^{-1} est exact et $\mathcal{D}_{Y \to X}$ plat sur $f^{-1} \mathcal{D}_X$ (en particulier N est pur de degré 0), et $\mathcal{D}_{X \leftarrow Y \otimes_{\mathcal{D}_Y}} f^+ M \simeq f^{-1} M$ s'identifie au sous-faisceau N^0 des sections de N annulées par $T_{Y/X}$. On a $\operatorname{car} N \subset \operatorname{car} d_{Y/X} = H$ (en fait $\operatorname{car} N = F \bar{f}^{-1} (\operatorname{car} M)$ si $\bar{f}$ est la projection $Y \times_X T^* X \to T^* X$ et F l'application cotangente $Y \times_X T^* X \to T^* Y$, d'image H). En outre N est « régulier le long de H », *i.e.* il possède de bonnes filtrations $N = \cup N_k$ telles que $T_{Y/X} N_k \subset N_k$ (ou $\mathcal{D}_{Y/X} N_k \subset N_k$), par exemple celle déduite d'une bonne filtration de M ($N_k = \sum_{p+q=k} \mathcal{D}_{Y \to X, p} \otimes f^{-1} M_q$).

Inversement soit N un $\mathcal{D}_Y$-module cohérent à gauche, tel que $\operatorname{car} N \subset H$, régulier le long de H. Supposons d'abord $Y = Z \times X$ où Z est un ouvert de la droite contenant 0 ($d = \dim Y/X = 1$). Alors, parce que N est régulier, il est engendré localement par un sous-$\mathcal{O}_Y$-module cohérent stable par $T_{Y/X}$; autrement dit il est engendré localement par un espace vectoriel fini E de sections n vérifiant $(\partial/\partial z) n = A n$ où $A \in L(E)$ est une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}_Y$. Si R est la résolvante, solution de $(\partial/\partial z) R = -RA$, $R(0, x) = \mathrm{Id}_E$, les sections $m = Rn$, $n \in E$, engendrent N et vérifient $(\partial/\partial z) m = 0$. Ainsi il existe au voisinage de chaque point de Y un homomorphisme surjectif $u : f^+ M^0 \to N$, où M^0 est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent (ici libre). Le noyau K de u est lui-même cohérent, à caractéristiques $\subset H$ et régulier le long de H car ces propriétés passent évidemment aux sous-modules et aux quotients cohérents : répétant la construction précédente pour K, on voit que c'est l'image d'un morphisme $f^+ M^1 \to f^+ M^0$, nécessairement de la forme $f^+ u^1$, où u^1 est un morphisme de $\mathcal{D}_X$-modules cohérents : $M^1 \to M^0$ (parce qu'il préserve les sections horizontales). Ainsi N est localement isomorphe à un $\mathcal{D}_Y$-module de la forme $f^+ M$. Dans le cas général, on voit alors, par récurrence sur la dimension relative, que tout $\mathcal{D}_Y$-module à gauche cohérent N tel que $\operatorname{car} N \subset H$, régulier le long de H, est localement isomorphe à des images inverses de $\mathcal{D}_X$-modules cohérents; de façon équivalente, si N est un tel module, le sous-faisceau $N^0 \subset N$ annulé par $T_{Y/X}$ est un $f^{-1} \mathcal{D}_X$-module cohérent et l'homomorphisme canonique $\mathcal{D}_{Y \to X} \otimes_{f^{-1} \mathcal{D}_X} N^0$ est un isomorphisme. Notons que N^0 est localement constant le long des fibres de f : il est donc muni d'une action du groupoïde des chemins verticaux. Ainsi si les fibres sont connexes et la monodromie triviale, N est canoniquement isomorphe à $f^+ M$, avec $M = f_* N^0$ (l'image directe, pas le foncteur dérivé). Si de plus f est localement contractile, par exemple si Y est un germe de variété au voisinage d'une section de f, l'homomorphisme canonique $f^+ f_+ N \to N$ est un isomorphisme (la monodromie est nulle, et $f^+ M$ se réduit à $f_* N^0$ car f_* est exact sur les faisceaux localement constants dans les fibres). Dans ce cas $M \to f^+ M$ est donc une équivalence, analogue à celle de Kashiwara (exemple 6) de la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules à gauche cohérents dans celle des $\mathcal{D}_Y$-modules à gauche cohérents, à caractéristiques horizontales, et réguliers le long de H, de quasi-inverse $N \to f_+ N$.

Dualement, si M est un $\mathscr{D}_X$-module à droite cohérent, $f^+ M$ est un complexe de $\mathscr{D}_Y$-modules cohérent, pur de degré $d = \dim Y/X$. Il est à caractéristiques régulières le long de H. Inversement si N est un $\mathscr{D}_Y$-module à droite cohérent, à caractéristiques $\subset$ H et régulier le long de H, N est isomorphe à $f^+ f_+ N$ si f est localement contractile, par exemple si Y est le germe d'une variété au voisinage d'une section de f, de sorte que f^+ et f_+ sont des équivalences quasi inverses comme plus haut. Dans le cas général le germe N_s de N le long d'une section continue de f est isomorphe à $f^+ f_+ N_s$ (l'analogue de N^0 est moins agréable à manier : à cause du décalage, ce n'est plus un sous-faisceau de N).

Exemple 8. — Soit X une variété complexe. Notons $\bar{X}$ la variété complexe conjuguée, et X_R la variété réelle sous-jacente : diagonale de $X \times \bar{X}$ munie de la restriction de $\mathcal{O}_{X \times \bar{X}}$ (ou ce qui revient au même, germe de la diagonale dans $X \times \bar{X}$). Soit $f : X_R \to X$ la projection. Le complexe de De Rham relatif $d_{X_R/X}$ est le complexe de Dolbeault d''. Si M est un $\mathscr{D}_X$-module, on note $M_R = f^+(M)$ (c'est le « produit tensoriel externe complété analytiquement » de M et d''); si M correspond à un système d'équations différentielles, M_R correspond au même système, auquel on a adjoint le système des équations de Cauchy-Riemann. Il résulte de la remarque 7 que $M \to M_R$ est une équivalence de la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules sur la catégorie des $\mathscr{D}_{X_R}$-modules à caractéristiques $\subset$ card'', et réguliers le long de card''; l'image directe f^+ fournit une équivalence inverse [l'homomorphisme canonique $M \to f_+(M_R)$ est toujours un isomorphisme].

Remarque 1. — On a $(fg)_+ = f_+ g_+$ si g est propre, en particulier si c'est une immersion fermée. D'autre part la définition de l'image directe f_+ pour f analytique $Y \to X$ est locale sur la base X (elle commute aux restrictions). Un peu plus généralement l'image directe commute aux images inverses dans le cas suivant : soit un diagramme commutatif d'applications analytiques

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow{G} & X \end{array}$$

où X, Y, X', Y' sont des variétés analytiques, Y' s'identifie au produit fibré $X' \times_X Y$ (f et G sont transverses). On suppose en outre f propre et G submersive. Alors si M est un $\mathscr{D}_Y$-module, on a un isomorphisme canonique $G^+ f_+ M \xrightarrow{\sim} F_+ g^+ M$.

3.4 Symbole. — Dans cette section les variétés sont supposées complexes. Une variété réelle sera considérée comme germe d'une variété complexe au voisinage des points réels. Rappelons qu'une bonne filtration sur un $\mathscr{D}_X$-module M à droite (ou à gauche) est une filtration croissante $M = \mathrm{U} M_k = \mathrm{U} F_k M$ telle que

(F1) M_k est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, nul pour $k \ll 0$;

(F2) $M_k \mathscr{D}_p \subset M_{k+p}$, avec égalité si $k \gg 0$.

Ici $\mathscr{D} = \bigcup \mathscr{D}_k$ est la filtration canonique de $\mathscr{D}$; c'est une bonne filtration et $\operatorname{gr} \mathscr{D}$ s'identifie à l'algèbre graduée $\mathcal{O}_X[TX]$ des fonctions analytiques sur $T^* X$, polynomiales en la variable verticale.

Si M est muni d'une bonne filtration, il est cohérent et le gradué associé $\operatorname{gr} M$ (symbole de M) est un $\operatorname{gr} \mathscr{D}$-module cohérent. On note $\operatorname{Car}(M) \subset T^* X$ le support de $\operatorname{gr} M$. C'est un sous-ensemble analytique, homogène (conique) et involutif de T^*X. Il ne dépend pas du choix d'une bonne filtration. On note aussi, si $Z \supset \mathrm{Car}(M)$

$$(3.12) \qquad [M]_Z^{an} \in K_Z^{an}(T^*X)$$

l'élément du groupe de Grothendieck des $\mathrm{gr}\,\mathscr{D}_X$-modules cohérents à support dans Z défini par $\mathrm{gr}\,M$. Si Z est conique de base compacte, $[M]_Z^{an}$ ne dépend que de M, et pas du choix d'une bonne filtration. (*cf.* [Bj], [BM-L-M]). $[M]_Z^{an}$ est encore défini si M est un complexe borné de $\mathscr{D}$-modules, bien filtré ou à cohomologie bien filtrée, à caractéristiques dans Z : $[M]_Z^{an} = \Sigma(-1)^j [H^j M]_Z^{an}$.

Toujours sous les hypothèses ci-dessus, on définit axiomatiquement l'élément

$$(3.13) \qquad [M]_Z^{top} \in K_Z(T^*X)$$

par les trois conditions suivantes :

(ST1) $[M]_Z^{top}$ est additif : si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathscr{D}_X$-modules bien filtrés, à caractéristiques $\subset Z$, on a $[M]_Z^{top} = [M']_Z^{top} + [M'']_Z^{top}$.

(ST2) Si $M = \mathrm{Diff}(\mathscr{O}, P)$ provient d'un complexe P d'opérateurs différentiels tel que le symbole $\sigma(P)\,(=\mathrm{gr}\,P)$ soit exact en dehors de Z, on a :

(3.14) $[M]_Z^{top} = [\sigma(P)]_Z$, élément de $K_Z(T^*X)$ défini par le complexe de fibrés $\sigma(P)$.

Soit $f: Y \to X$ une submersion. Notons $F: f^{-1}T^*X = Y \times_X T^*X \hookrightarrow T^*Y$ l'application cotangente. Son image $Z_h \subset T^*Y$ est l'ensemble des covecteurs horizontaux, *i. e.* le fibré orthogonal du fibré tangent vertical $T_{Y/X}$. Notons $\bar{f}: f^{-1}T^*X \to T^*X$ la projection. Le $\mathscr{D}_Y$-module à droite $\mathscr{D}_{X \leftarrow Y}$ est bien filtré, et on a

$$(3.16) \qquad \mathrm{Car}(f^+(M)) = F\bar{f}^{-1}(\mathrm{Car}\,M) \subset Z_h.$$

La troisième condition s'énonce alors :

(ST3) Si $f: Y \to X$ est une submersion, M un $\mathscr{D}_X$-module à droite bien filtré, on a avec les notations ci-dessus, et $Z \supset \mathrm{Car}\,M$, $f^+Z = F\bar{f}^{-1}(Z)$

$$(3.17) \qquad [f^+M]_{f^+Z}^{top} = \bar{f}^{-1}[M]_Z^{top}.(-1)^d [\mathscr{D}_{X \leftarrow Y}]_{Z'}^{top} = \tilde{F}_*\bar{f}^{-1}[M]_Z^{top} \qquad (d = \dim Y - \dim X)$$

où $\tilde{F}_*$ désigne le conjugué de l'image K-théorique [multiplication par l'élément de $K_{Z'}(T^*Y)$ correspondant au complexe de l'algèbre extérieure, symbole de $d_{Y/X}$].

L'analyse de $[\mathscr{D}_{X \leftarrow Y}]_{Z'}^{top}$ ci-dessus (exemple 1) montre que les axiomes (ST2) et (ST3) sont compatibles.

En général $[M]_Z^{top}$ est construit comme suit, lorsque X est une variété analytique compacte à bord (plus généralement une partie compacte d'une variété analytique) : si X est de Stein et M bien filtré, M possède une bonne résolution P localement libre ($\mathrm{gr}\,M$ possède une résolution graduée localement libre finie d'après le théorème de syzygies et la compacité, et toute résolution graduée de $\mathrm{gr}\,M$ provient d'une bonne résolution de M). Dans le cas général, X_R est de Stein, donc $[M_R]_{Z_R}^{top}$ est défini d'après ce qui précède. Or l'homomorphisme $\xi \in K_Z(T^*X) \to F_*f^{-1}\xi \in K_{fZ}(T^*X_R)$ est bijectif dans ce cas, conjugué de l'isomorphisme de Bott (f désignant la projection $X_R \to X$). L'élément $[M]_Z^{top}$ est ainsi bien défini dans tous les cas, et on vérifie aussitôt qu'avec cette définition il satisfait aux axiomes (ST1, 2, 3).

PROPOSITION 3.1. — *Soit* $f: Y \to X$ *une immersion fermée entre variétés analytiques. Notons* $\bar{f}: f^{-1}(T^*X) \to T^*X$ *la projection, et* $F: f^{-1}(T^*X) \to T^*Y$ *l'application cotangente* (c'est un morphisme de fibrés vectoriels, de noyau $f^{-1}(T_Y^*X)$; $\bar{f}$ est un plongement). *Soit* M *un* $\mathscr{D}_Y$*-module bien filtré,* $Z = \operatorname{Car} M$. *Alors* $f_+ M$ *est bien filtré, on a* $\operatorname{Car} f_+ M = Z' = \bar{f} F^{-1}(Z)$, *et*

$$[f_+ M]_{Z'}^{top} = \bar{f}_* F^{-1} [M]_Z^{top}. \tag{3.18}$$

Les deux premières assertions ($f_+ M$ est bien filtré, $\operatorname{Car} f_+ M = \bar{f} F^{-1}(Z)$] sont immédiates. La troisième est vraie si M admet une bonne résolution localement libre et si f est la section nulle d'un fibré vectoriel $X \to Y$ (exemples 3 et 5), donc plus généralement si $f(Y)$ possède un voisinage tubulaire analytique (*i.e.* un voisinage ouvert dans X, isomorphe comme variété complexe à un voisinage de la section nulle d'un fibré vectoriel sur Y). En particulier elle est vraie si X est de Stein : dans ce cas M possède de bonnes résolutions localement libres (au voisinage de tout compact), et Y a un voisinage tubulaire (en effet Y est de Stein donc TY possède un supplémentaire holomorphe $N \subset TY_{|Y}$; les géodésiques issues de N d'une connexion linéaire holomorphe de X définissent alors un tel voisinage).

Dans le cas général, remplaçons Y par Y_R, M par M_R, X par le germe X' de $X \times \bar{Y}$ au voisinage de l'image $(f \times \operatorname{Id}_{\bar{Y}})(Y_R)$, et f par $f' = f \times \operatorname{Id}_{\bar{Y}}$. Alors X' est une sous-variété fermée de X_R donc est de Stein, et l'assertion est vraie pour M_R, f' d'après ce qui précède, donc aussi pour M, f d'après (ST2).

Remarque 2. — Soient X, compact d'une variété analytique, $Z \subset X$ fermé, $\mathfrak{m}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent de support $\subset Z$. Alors par définition $[\mathfrak{m}]_Z^{top} \in K_Z(X)$ est l'élément dont l'image inverse dans $K_{p^{-1}Z}(T^*X)$ par la projection $p: T^*X \to X$ est $[\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X]_{p^{-1}Z}^{top}$ [p^{-1} est un bijection $K_Z(X) \to K_{p^{-1}Z}(T^*X)$]. Il résulte de la proposition 1 qu'on a $[Rf_* \mathfrak{m}]_{fZ}^{top} = f_* [\mathfrak{m}]_Z^{top}$ (image K-théorique) si f est une immersion fermée. La définition ci-dessus coïncide évidemment avec celle de Baum, Fulton, MacPherson [B-F-MPh] lorsque X est une variété et $\mathfrak{m}$ admet une résolution localement libre finie (par exemple X de Stein ou projective), donc dans tous les cas. Dans [B-F-MPh] le résultat sur l'image directe par immersion est démontré par « déformation au cône normal ».

Cette définition se généralise aussi au cas où X est un fibré vectoriel, $Z \subset X$ une partie fermée conique, et $\mathfrak{m}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent homogène ($\Leftrightarrow \operatorname{gr} \mathcal{O}_X$-module gradué cohérent).

Remarque 3. — Si M est un $\mathscr{D}_X$-module bien filtré, $Z \subset \operatorname{Car} M$, on a encore $[M]_Z^{top} = [\operatorname{gr} M]_Z^{top}$ (où le premier terme est pris au sens des $\mathscr{D}_X$-modules bien filtrés, le deuxième au sens des $\mathcal{O}_{T^*X}$-modules cohérents homogènes) : cela résulte de (ST3), en remplaçant X par X_R et M par M_R.

Remarque 4. — Si X est une variété complexe, $Y = X_R$, et f est la projection canonique $X_R \to X$, f est surjective et ses fibres sont contractiles; comme on a vu (exemples 7 et 8) $M \to M_R = f^+ M$ est une équivalence de la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules cohérents sur celle des $\mathscr{D}_{X_R}$-modules cohérents à caractéristiques $\subset$ card'', et réguliers le long de car d'' (avec un décalage pour les modules à droite). Cette équivalence se prolonge aux complexes et à la catégorie dérivée. Si $\operatorname{car} M = Z$, on a $\operatorname{car} M_R = Z' = F\bar{f}^{-1} Z$ ($= \operatorname{car} M \times \operatorname{car} d''$), et si M est bien filtré on a $[M_R]^{an}_{Z'} = F_* \bar{f}^{-1} [M]^{an}_Z$ [*i.e.* $\sigma(M_R) = \sigma(M) \otimes \sigma(d'')$]. Mais l'image K-théorique $K^{an}_{Z'}(T^* X) \to K^{an}_{Z'}(T^* Y)$ n'est pas un isomorphisme : en fait comme Y est de Stein on a $K^{an}_{Z'}(T^* Y) = K^{top}_{Z'}(T^* Y)$, et on a perdu au passage tous les modules continus de déformation.

Remarque 5. — La définition de $[M]^{top}_Z$ suppose que X (ou du moins la projection de Z) est compact. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, il convient de tout restreindre à une partie compacte de X. Sans hypothèse de compacité on peut, si M est un $\mathscr{D}_X$-module bien filtrable et $Z = \operatorname{car} M$, définir $[M]^{top}_Z$ comme élément de lim proj $K_Z(T^* X_n)$ où X_n est une suite exhaustive de compacts de X; pour ce dernier groupe certaines propriétés de K^{top}_Z restent vraies, par exemple le théorème d'excision, et le théorème de périodicité de Bott; mais l'application canonique $K_Z(X) \to$ lim proj $K_Z(X_n)$, bien que toujours surjective, n'est en général pas injective, de sorte que le second membre ne donne pas lieu à une théorie cohomologique (et n'est pas raisonablement calculable).

4. Énoncé du théorème. Ellipticité relative

Nous définissons dans cette section l'ellipticité relative pour une application analytique $f : Y \to X$, Y variété à bord. Dans le cas d'une submersion cette notion a été introduite (sous un autre nom) par Houzel et Schapira [H-Sch], qui montrent que l'image directe $f_+ M$ d'un $\mathscr{D}$-module M relativement elliptique est cohérente et donnent une majoration naturelle de la variété caractéristique de cette image en fonction de $Z = \operatorname{car} M$: $\operatorname{car} f_+ M \subset Z' = f_+ Z = \bar{f} F^{-1}(Z)$ [où comme au paragraphe 3 $\bar{f} : f^{-1}(T^* X) \to T^* X$ est la projection, et $F : f^{-1}(T^* X) \to T^* Y$ l'application cotangente]. Lorsque f est propre Malgrange [M] a démontré qu'on a $[f_+ M]^{an}_{Z'} = \bar{f}_+ F^{-1} [\bar{M}]^{an}_Z$ ce qui implique aussi $[f_+ M]^{top}_{Z'} = \bar{f}_* F^{-1} [\bar{M}]^{top}_Z$ (image K-théorique) d'après le théorème de Riemann-Roch (*cf.* introduction). Nous proposons ici une formule analogue lorsque Y a un bord (f non propre sur l'intérieur $\mathring{Y}$); dans ce cas il n'y a plus de formule en K-théorie analytique : si f n'est pas propre l'image directe ne préserve pas la cohérence des $\mathscr{O}$-modules et n'est plus définie pour la K-théorie analytique. Le théorème d'indice relatif montre que si M est relativement elliptique et possède une bonne filtration (donc $f_+ M$ est cohérent) $[f_+ M]^{top}_{Z'}$ ne dépend que de $[M]^{top}_Z$. C'est l'image K-théorique d'un « prolongement » canonique de $[M]^{top}_Z$ à un ensemble sur lequel $\bar{f}$ est propre. L'élément K-théorique correspondant est tout à fait naturel; sa description lorsqu'il y a un bord fait l'objet du paragraphe 4.1 (§ 4.3 pour le cas réel). La démonstration de la formule de l'indice est faite au paragraphe 5.

4.1. ELLIPTICITÉ RELATIVE GÉOMÉTRIQUE, LE CAS COMPLEXE. — Soient X, Y des variétés analytiques (ou plus généralement des parties compactes de variétés analytiques), et $f: X \to Y$ une application analytique.

On note

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \bar{f}: & f^{-1}(T^* X) = Y \times_X T^* X \to T^* X \text{ la projection} \\ F: & f^{-1}(T^* X) \to T^* Y \text{ l'application cotangente} \end{cases}$$

On suppose désormais que Y est une variété à bord, *i.e.* définie par une inéquation analytique réelle $u \leqq 0$ dans une variété ambiante $\tilde{Y}$ avec $du \neq 0$ sur le bord ∂Y, qui est donc une hypersurface analytique réelle de $\tilde{Y}$. On définit alors les épaississements :

$$(4.2) \qquad Y_e = Y \cup_{\partial Y} N^+ (\partial Y)$$

obtenu en recollant à Y le long de ∂Y le fibré conormal sortant $N^+(\partial Y) \subset T^* Y_{|\partial Y}$, ensemble des multiples positifs de $d'u$ (la partie holomorphe de du); $N^+(\partial Y)$ est un fibré en demi-droites réelles sur ∂Y, et ∂Y est identifié à la section nulle.

L'application f se prolonge en une application f_e continue, analytique par morceaux, constante sur les fibres de $N^+(\partial Y)$: $Y_e \to X$, et Y possède un voisinage tubulaire, homéomorphe à Y_e, dans $\tilde{Y}$. On note encore

$$(4.3) \qquad \begin{array}{ll} \bar{f}_e: & Y_e \times_X T^* X \to T^* X \text{ la projection} \\ F_e: & Y_e \times_X T^* X \to T^* Y \text{ le prolongement de F} \\ \text{tel que } & F_e(\eta, \xi) = \eta + F(\xi) \qquad \text{pour} \quad (\eta, \xi) \in N^+(\partial Y) \times_X T^* X. \end{array}$$

Soit $Z \subset T^* \tilde{Y}$ une partie fermée, conique. Posons $Z_e = F_e^{-1}(Z)$. La condition d'ellipticité relative géométrique pour Z s'énonce :

(E) Z_e ne contient pas de point $(\eta, \xi) \in N^+(\partial Y) \times_X T^* X$ tel que $\eta \neq 0$.

De façon équivalente : Z ne contient pas de covecteur $\eta + F(\xi)$, avec $\xi \in T^* X$, $\eta \neq 0$, partie holomorphe d'un covecteur orthogonal à ∂Y (*i.e.* de la forme $\lambda\, d'u$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, où $u = 0$ est une équation de ∂Y).

Supposons maintenant f propre sur $\operatorname{pr}(Z) \cap Y$. Si la condition d'ellipticité géométrique (E) est satisfaite, $\bar{f}_e$ est propre sur Z_e, et on définit l'image K-théorique :

$$(4.4) \qquad \bar{f}_{e*} F_e^{-1}: \quad K_Z(T^* Y) \to K_{Z'}(T^* X) \qquad \text{avec} \quad Z' = \bar{f}_e F_e^{-1}(Z).$$

C'est le composé de l'image inverse $F_e^{-1}: K_Z(T^* Y) \to K_{Z_e}(Y_e \times_X T^* X)$, et de l'image directe K-théorique (propre) $\bar{f}_{e*}: K_{Z_e}(Y_e \times_X T^* X) \to K_{Z'}(T^* X)$.

Remarque 1. — Cette construction K-théorique suppose que Z (donc aussi Z′) est à base compacte, par exemple que X est compact. Si ce n'est pas le cas, il convient de tout restreindre à une partie compacte de X (par exemple une sous-variété à bord compacte) : remplacer X par une partie compacte $X_0 \subset X$, Y par l'image réciproque $Y \cap f^{-1}(X_0)$, etc.

Remarque 2. — Lorsque le bord ∂Y est vide, et Z analytique, Z′ est image propre d'un ensemble analytique complexe donc est analytique.

4.2. Ellipticité relative, énoncé du théorème. Le cas complexe. — Soit $f: Y \to X$ comme ci-dessus, avec Y à bord. Soit M un $\mathscr{D}_{\tilde{Y}}$-module.

On dit que M est relativement elliptique le long du bord ∂Y :

— lorsque f est une submersion, si toute section de M au voisinage d'un point de ∂Y est tuée par un opérateur différentiel vertical $P \in \mathscr{D}_{Y/X}$ elliptique, *i.e.* pour lequel le bord ∂Y est non caractéristique (vertical = dans l'algèbre d'opérateurs différentiels engendrée par les champs de vecteurs verticaux);

— dans le cas général, si $i_+ M$ est relativement elliptique pour p le long de $\partial Y \times X$, où $i: Y \to Y \times X$ est le graphe de f et $p: Y \times X \to X$ la projection.

Remarque 3. — M est toujours relativement elliptique si le bord ∂Y est vide.

Si M est relativement elliptique, $Z = \operatorname{Car} M$ vérifie la condition d'ellipticité géométrique (E) (la réciproque est fausse) : c'est évident si f est une submersion, et le cas général s'en déduit aussitôt. Le théorème d'indice relatif s'énonce alors comme suit :

Théorème 4.1. — *Soient* M *un* $\mathscr{D}_{\tilde{Y}}$*-module bien filtré, relativement elliptique,* $Z = \operatorname{Car} M$, $Z' = \bar{f}_e F_e^{-1}(Z)$. *Supposons en outre f propre sur* supp $M \cap Y$. *Alors :*

1. $f_+(M)$ *est à cohomologie cohérente et bien filtrée.*

2. *On a* $\operatorname{Car} f_+(M) \subset Z'$.

3. *Si* Z *est de base compacte on a* $[f_+(M)]_{Z'}^{\text{top}} = \bar{f}_{e*} F_e^{-1} [M]_Z^{\text{top}}$ (image K-théorique).

Remarque 4. — Les assertions (1) et (2) sont vraies sans hypothèse de compacité sur Z. Dans l'assertion (3) cette hypothèse intervient doublement : pour la définition de $[M]_Z^{\text{top}}$ (notre définition fait intervenir une résolution de rang fini de M et de telles résolutions n'existent en général qu'au voisinage d'un compact sur une base de Stein); et dans la définition des groupes de K-théorie et de l'image K-théorique. Si cette condition n'est pas remplie il convient de tout restreindre à une partie compacte de X, comme dans la remarque 1.

Remarque 5. — La notion d'ellipticité relative, dans le cas d'une submersion, et à la terminologie près, ainsi que les assertions 1 et 2 du théorème 4.1 sont dus à Ch. Houzel et P. Schapira [H-Sch]. En fait leur énoncé, comme celui de 1 et 2 est local sur la base X : il suffit que M possède de bonnes filtrations au voisinage de chaque fibre de f.

Remarque 6. — Il est probable que, sous les hypothèses du théorème 4.1, Z′ est analytique; il suffirait pour montrer cela de montrer que Z′ est inchangé si l'on « épaissit » un peu Y, en vertu du théorème des applications semi-propres de Kuhlman.

Le théorème 4.1 ainsi que l'analogue dans le cas réel, seront démontrés au chapitre 5.

4.3. Ellipticité relative géométrique. Le cas réel. — Soient X, Y des variétés analytiques réelles, $f: Y \to X$ une application analytique. Nous noterons X^c, Y^c des complexifiées de X et Y, et encore f le prolongement. On notera $T_{\mathbb{R}}^* X \subset T^* X^c$ le fibré cotangent réel de X (si $x_1 \ldots x_n$ sont des coordonnées locales réelles sur X, $z_j = x_j + iy_j$

les coordonnée complexifiées correspondantes sur X^c, dz_j correspond à dx_j dans l'inclusion; de même pour Y). On note $Y' = i\,T^*_{\mathbb{R}}\,Y$ le fibré cotangent imaginaire pur de Y, et

$$(4.5)\qquad \begin{cases} \bar{f}_{\mathbb{R}}: & Y' \times_{X^c} T^* X^c \to T^* X^c \text{ la projection} \\ F_{\mathbb{R}}: & Y' \times_{X^c} T^* X^c \to T^* Y^c \text{ l'application } (\eta, \xi) \to \eta + {}^t f' \xi. \end{cases}$$

Soit ρ une fonction analytique réelle sur Y^c telle que $\rho = 0$ sur Y, $\rho > 0$ sur $Y^c - Y$, et ρ soit transversalement elliptique le long de Y (*i.e.* le hessien transverse est $\gg 0$). De telles fonctions existent si Y est paracompacte, à cause du théorème de plongement de Grauert. Quitte à rétrécir Y^c on peut en outre supposer ρ propre, strictement plurisousharmonique, et $d'\rho \neq 0$ dans $Y^c - Y$. Modèle : $\rho = |\operatorname{Im} y|^2$ si $Y = \mathbb{R}^n$, $Y^c = \mathbb{C}^n$.

On suppose maintenant que Y est une variété à bord, définie par une inéquation $u(y) \leqq 0$, avec u analytique réelle, $du \neq 0$ sur ∂Y, dans une variété réelle $\tilde{Y}$. Nous noterons Y^c le complexifié de $\tilde{Y}$, et encore u le prolongement holomorphe. (Le bord ∂Y est donc la partie réelle (*i.e.* $\subset Y$) de l'hypersurface réelle d'équation $\operatorname{Re} u = 0$.) Pour $\varepsilon > 0$ on note

$$(4.6)\qquad Y_\varepsilon = \text{l'ensemble des } y \in Y^c \text{ tels que } \varepsilon \operatorname{Re} u + \rho \leqq \varepsilon^2.$$

Les Y_ε forment un système de voisinages tubulaires complexes de Y dans Y^c (système fondamental si Y est compacte); on a $Y = \bigcap Y_\varepsilon$.

Comme au paragraphe 4.1, introduisons les épaississements

$$(4.7)\qquad Y_e = Y \cup_{\partial Y} N^+(\partial Y)$$

où $N+(\partial Y)$ est le fibré conormal sortant de ∂Y, ensemble des multiples positifs de du au-dessus de ∂Y.
$Y'_e = \operatorname{pr}^{-1}(i\,T^*_{\mathbb{R}}\,Y)$ où pr est la projection $Y_e \to Y$;
$\bar{f}'_e$: $Y'_e \times_{X^c} T^* X^c \to T^* X^c$ la projection;
F'_e: $Y'_e \times_{X^c} T^* X^c \to T^* Y^c$ l'application qui prolonge $F_{\mathbb{R}}$ par

$$F'_e(\eta, i\eta', \xi) = \eta + i\eta' + {}^t f' \xi \qquad \text{pour} \quad (\eta, i\eta', \xi) \in N^+(\partial Y) \times_{Y^c} i\,T^* Y \times_{X^c} T^* X^c.$$

Soit maintenant $Z \subset T^* Y^c$ une partie fermée, conique (*i.e.* stable par homothétie de rapport complexe), telle que f soit propre sur $p(Z) \cap Y$ (où p est la projection $T^* Y^c \to Y^c$). La condition géométrique d'ellipticité relative réelle, pour Z; s'énonce :

(ER) $\bar{f}_e$ est propre sur $F'^{-1}_e(Z)$.

Elle se décompose en deux :

$(\mathrm{ER})_Y$ Z ne contient pas de covecteur imaginaire pur (ou réel) non nul au-dessus de Y.

$(\mathrm{ER})_{\partial Y}$ Z ne contient pas, au-dessus de ∂Y, de covecteur non nul de la forme $\eta + i\xi$, avec $\eta \in N^+(\partial Y)$, ξ réel $\in T^*_{\mathbb{R}}\,Y$.

Exemple. — Dans le cas absolu (X réduit à un point), si Z est la variété caractéristique complexe d'un système d'équations aux dérivées partielles, la condition $(\mathrm{ER})_Y$ signifie que ce système est elliptique sur Y. La condition $(\mathrm{ER})_{\partial Y}$ signifie que ce système satisfait aux conditions d'ellipticité au bord de Lopatinsky-Shapiro sans qu'il soit nécessaire de lui adjoindre d'autres conditions aux limites autrement dit qu'il est aussi hyperbolique pour ∂Y.

Supposons f propre sur Y (ou seulement sur $\mathrm{pr}(Z) \cap Y$). Si la condition géométrique (ER) est satisfaite, $\bar{f}_e$ est propre sur $Z_e = F_e'^{-1}(Z)$ et on définit l'image K-théorique

$$(4.8) \qquad \bar{f}'_{e*} F_e'^{-1} : K_Z(Y'_e) \to K_{Z'}(T^* X)$$

où on a posé $Z' = \bar{f}'_e(Z_e)$, et $T^* X$ est la restriction à X du fibré cotangent complexe $T^* X^c$. C'est le composé de l'image inverse $F_e'^{-1} : K_Z(Y'_e) \to K_{Z_e}(Y'_e \times_{X^c} T^* X^c)$ et de l'image directe K-théorique $\bar{f}'_{e*}$, bien définie ici parce que $\bar{f}'_e$ a une structure spin^c (virtuelle) canonique : en effet son but est la variété complexe $T^* X^c$, et sa source $Y'_e \times_{X^c} T^* X^c$ est homotope au fibré de base $T^*_{\mathbb{R}} Y \times_{X^c} T^* X^c$ de fibre la fibre complexe de $T^* X^c$; elle porte une structure presque complexe canonique (à homotopie près), provenant de la structure complexe des fibres et de la structure symplectique de la base $T^*_{\mathbb{R}} Y$ (la convention de signe pour $T^*_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n$, dont on note la variable ($x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in$ la fibre), plus généralement pour $T(T^*_{\mathbb{R}} Y)$, est que la variable holomorphe est $\xi + ix$).

Si $\mathrm{pr}(Z) \cap Y$ est compact, ou si comme dans la remarque 1 on a restreint à ce qui se passe au-dessus d'un compact de X, la condition (ER) implique que Z est géométriquement elliptique le long de ∂Y_ε (condition E) pour $\varepsilon > 0$ assez petit; sinon il existe des suites $\varepsilon_n \to 0$ ($\varepsilon_n > 0$), $\zeta_n \in N^+(\partial Y_{\varepsilon_n}) \cap Z$, $\zeta_n \neq 0$, et on vérifie aussitôt que toute direction limite de celles des ζ_n fournit un contrexemple à l'une des conditions $(ER)_Y$ ou $(ER)_{\partial Y}$.

La réciproque est fausse, et ceci conduit à poser la définition suivante :

DÉFINITION 4.2. — *Soit* $Z \subset T^*_{\mathbb{R}} Y^c$ *fermé, conique, analytique. On dit que* Z *est géométriquement relativement presqu'elliptique* (*au sens réel*) *s'il est géométriquement relativement elliptique* [*au sens de* (E)] *le long de* ∂Y_ε *pour* $\varepsilon > 0$ *assez petit.*

La notion introduite dans cette définition dépend du choix des fonctions ρ et u qui entrent dans la définition de Y_ε. On peut l'améliorer et la rendre plus intrinsèque, mais nous n'aurons pas besoin de cela dans la suite.

Supposons f propre (ou propre sur $\mathrm{pr}(Z) \cap Y$) et Z géométriquement presqu'elliptique. Alors l'image K-théorique $K_Z(T^* Y) \to K_{Z'}(T^* X)$ est définie par passage à la limite sur les Y_ε ($\varepsilon \to 0$), comme en (4.4). Lorsque Z est géométriquement elliptique, on retrouve la définition ci-dessus (4.7) car les germes de $(Y_{\varepsilon e}, Z_{\varepsilon e})(\varepsilon \to 0)$ et (Y'_e, Z_e) sont homotopes (le premier est voisinage tubulaire du second), et la convention de signe ci-dessus est celle qui rend compatibles la structure spin^c de $\bar{f}_{\varepsilon e}$ provenant des structures complexes, et celle de $\bar{f}'_e$.

4.4. ELLIPTICITÉ, PRESQU'ELLIPTICITÉ RELATIVE. ÉNONCÉ DU THÉORÈME, CAS RÉEL. — Soit $f: Y \to X$ une application analytique réelle comme ci-dessus; nous conservons les notations du n° 4.3. Soit M un $\mathcal{D}_{Y^c}$-module. Si f est une subimmersion nous dirons que f est relativement elliptique (au sens réel, pour Y, ∂Y) si pour tout $y \in Y$ (resp. ∂Y), toute section s de M au voisinage de Y, et tout covecteur $i\xi$ imaginaire pur de projection non nulle dans $T^*_{Y/X}$ (resp. de la forme $\eta + i\xi$ avec ξ réel de projection $\neq 0$ dans $T^*_{Y/X}$, η proportionnel à $d'u$, où $u = 0$ est l'équation de ∂Y), il existe un opérateur vertical

$P \in \mathcal{D}_{Y/X}$, elliptique en ce covecteur [*i.e.* $\sigma_P(i\xi) \neq 0$ resp. $\sigma_P(\eta + i\xi) \neq 0$] tel que $s.P = 0$. Si M est relativement elliptique au sens réel, $Z = \operatorname{Car} M$ est géométriquement elliptique, *i.e.* satisfait à $(ER)_Y$ et $(ER)_{\partial Y}$. En outre M est relativement presqu'elliptique au sens de la définition suivante, qui, elle, est stable par image directe immersive (f quelconque) :

DÉFINITION 4.5. — M *est relativement presqu'elliptique si pour tout* $\varepsilon > 0$ *assez petit* M *est relativement elliptique le long de* ∂Y_ε (*au sens complexe*).

Exemple. — Dans le cas absolu (X réduit à un point) on sait (*cf.* [BM 2]) que tout $\mathcal{D}_{Y^c}$-module holonôme est presqu'elliptique (mais en général pas elliptique). Dans le cas relatif, il est faux qu'un $\mathcal{D}_{Y^c}$-module holonôme ou relativement holonôme soit presqu'elliptique. On a cependant l'assertion suivante : soient i: $\begin{smallmatrix} Y & \rightarrow & Y' \\ & \searrow \ \swarrow & \\ & X & \end{smallmatrix}$ une immersion relative, et M un $\mathcal{D}_{Y^c}$-module cohérent relativement presqu'elliptique. Alors l'image directe $i_+(M)$ est relativement presqu'elliptique (mais en général pas elliptique, même si M l'est). En effet, localement, le complexe de Koszul de l'immersion est exact hors de $i(Y^c)$ ($i_+(M)$ est porté par $i(Y^c)$), et aux points de $i(Y)_\varepsilon$, $i_+(M)$ est elliptique.

Le théorème de l'indice relatif dans le cas réel s'énonce alors comme suit :

THÉORÈME 4.4. — *Supposons f propre sur* $\operatorname{supp}(M) \cap Y$, *où* M *est un* $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$*-module bien filtré, relativement presqu'elliptique. Alors :*

1. $f_+(M)$ *est à cohomologie cohérente et bien filtrée.*
2. *On a* $\operatorname{Car} f_+(M) \subset Z' = \bigcap_{\varepsilon > 0} Z'_\varepsilon$.
3. *Si de plus* Z *est à base compacte, le symbole* $[f_+(M)]^{\text{top}}_{Z'}$ *est l'image* K*-théorique de* $[M]^{\text{top}}_Z$, *obtenue par passage à la limite* ($\varepsilon \to 0$).

Si f est submersive et M relativement elliptique, la troisième formule peut encore s'écrire :

$$[f_+(M)]^{\text{top}}_{Z'} = \bar{f}'_{e*} F'^{-1}_e [M]^{\text{top}}_Z. \tag{4.9}$$

5. Démonstration du théorème

Nous donnons dans cette section la démonstration du théorème d'indice relatif. Il y a deux ingrédients : l'un est essentiellement algébro-géométrique : comparaison de deux éléments de K-théorie obtenus à partir de deux filtrations d'un $\mathcal{D}$-module. L'égalité des deux éléments a été démontré dans [M]. L'autre est analytique : moyennant quelques réductions faciles (5.1) on se ramène au cas où Y est un fibré en ellipsoïdes $Q_\varepsilon \times X$, et on applique le théorème d'indice d'une famille d'opérateurs de Toeplitz du paragraphe 2 (5.2).

5.1. RÉDUCTIONS DIVERSES. — Soit $f: Y \to X$ une application analytique (Y variété à bord), M un $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$-module (où $\tilde{Y}$ est un voisinage de Y, complexe si Y est réelle). Nous allons d'abord montrer comment on peut faire des simplifications sur X, Y et f pour démontrer le théorème d'indice relatif pour M et f.

(*a*) *Plongement*. — Le théorème de l'indice est vrai si f est une immersion (proposition 3.1). Dans le cas général, remplaçons Y par $Y \times X$, M par $i_+ M$, où i est le graphe de f, et f par la deuxième projection $p : Y \times X \to X$. Observons que le théorème d'indice est vrai pour f et M si et seulement s'il l'est pour p et $i_+ M$. On est ainsi ramené au cas où f est la deuxième projection d'un produit de variétés (en particulier est submersive), aussi bien dans le cas complexe que dans le cas réel.

(*b*) *Réduction du cas complexe au cas réel*. — La cohérence de $f_+ M$, et la majoration de son ensemble caractéristique dans le cas complexe sont démontrés dans [H-Sch] (on peut aussi les déduire du chapitre 5.2, compte tenu que la cohomologie d'un complexe holomorphe d'opérateurs de Fredholm dans des espaces de Banach est cohérente). Nous montrons ici comment la formule de l'indice dans le cas complexe se déduit du cas réel : le théorème de l'indice relatif est stable par image inverse submersive, dans le cas propre. Pour le démontrer dans le cas complexe pour $f : Y \to X$ et pour le $\mathscr{D}_{\tilde{Y}}$-module M (Y complexe), nous allons montrer qu'il suffit de le prouver pour $f_{\mathbf{R}} : Y_{\mathbf{R}} \to X_{\mathbf{R}}$ et le $\mathscr{D}_{\tilde{Y}_{\mathbf{R}}}$-module $M_{\mathbf{R}}$. Ceci se fait en deux crans. Nous nous sommes déjà ramenés au cas où f est la deuxième projection $Y \times X \to X$ où Y est une variété à bord complexe. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Y \times X & \xleftarrow{\;p'\;} & Y \times X_{\mathbf{R}} & \xleftarrow{\;p\;} & Y_{\mathbf{R}} \times X_{\mathbf{R}} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\mathbf{R}}} \\ X & \xleftarrow{\;P\;} & X_{\mathbf{R}} & \xleftarrow{\;\mathrm{Id}\;} & X_{\mathbf{R}} \end{array}$$

où f' est la projection $Y \times X_{\mathbf{R}} \to X_{\mathbf{R}}$, $f_{\mathbf{R}}$ la projection $Y_{\mathbf{R}} \times X_{\mathbf{R}} \to X_{\mathbf{R}}$, p' (resp. p, P) la projection $Y \times X_{\mathbf{R}} \to Y \times X$ (resp. $Y_{\mathbf{R}} \times X_{\mathbf{R}} \to Y \times X_{\mathbf{R}}$, $X_{\mathbf{R}} \to X$). Dans le premier cran M est remplacé par $M' = p'^{+} M$, dans le deuxième par $M_{\mathbf{R}} \simeq p^{+} p'^{+} M$. Le premier cran consiste à ajouter, en haut et en bas, les mêmes variables conjuguées de celles de X et les mêmes équations de Cauchy-Riemann de $X_{\mathbf{R}}$; il ne change donc rien pour la formule de l'indice, qui est vraie pour M', f' si et seulement si elle l'est pour M, f.

Examinons le deuxième cran, et vérifions que $M_{\mathbf{R}}$ est relativement elliptique et *a fortiori* presqu'elliptique. Observons que $M_{\mathbf{R}} = p^{+} M'$ est engendré par les sections $p^{-1}(s) \otimes \alpha$, où s est une section de M' et α un générateur local d'ordre 0 de $\mathscr{D}_{Y \times X_{\mathbf{R}} \leftarrow Y_{\mathbf{R}} \times X_{\mathbf{R}}}$. Pour tout $\xi \in T^* \bar{Y} \simeq T^* Y_{\mathbf{R}}/Y \simeq T^* Y_{\mathbf{R}} \times X_{\mathbf{R}}/Y \times X_{\mathbf{R}}$, $\xi \neq 0$, α est annulé par un opérateur vertical $P \in \mathscr{D}_{\tilde{Y}}$, de symbole non nul en ξ (un coefficient de $d'' = d_{Y_{\mathbf{R}}/Y}$). En particulier $p^{+} M'$ est elliptique à l'intérieur de $Y_{\mathbf{R}}$. Plaçons nous en un point du bord de $Y_{\mathbf{R}} \times X_{\mathbf{R}}$ et soit un covecteur $\eta + i\xi$ avec $\eta \perp \partial Y_{\mathbf{R}}$, ξ réel, de projection verticale non nulle dans $T^* Y_{\mathbf{R}} \times X_{\mathbf{R}}/X_{\mathbf{R}} \simeq T^* Y_{\mathbf{R}}$. Soit $(\eta' + i\xi', \eta'' + i\xi'')$ la décomposition en parties holomorphes et antiholomorphes de la composante verticale de $\eta + i\xi$. Il s'agit, comme au paragraphe 4.4 de construire Q vertical, non caractéristique en $\eta + i\xi$, tel que $p^{-1}(s) \otimes \alpha Q = 0$. Si $\eta'' + i\xi'' \neq 0$, c'est possible d'après ce qui précède. Dans le cas contraire ξ'' est proportionnel à $d''u$ (où $u = 0$ est une équation de $\partial Y_{\mathbf{R}}$), donc puisque ξ est réel, ξ' est proportionnel à $d'u$, ainsi que $\eta' + i\xi'$. D'après la définition du paragraphe 4.2, il existe Q vertical $(Q \in \mathscr{D}_{Y} \simeq \mathscr{D}_{Y \times X_{\mathbf{R}}/X_{\mathbf{R}}} \subset \mathscr{D}_{Y_{\mathbf{R}} \times X_{\mathbf{R}}/X_{\mathbf{R}}})$ tel que $s.Q = 0$ donc

$p^{-1}(s) \otimes \alpha = 0$. Ceci étant on a vu que le morphisme $M' \to p_+ p^+ M'$ est un isomorphisme (§ 3, exemples 7 et 8) compatible par définition avec la formation des symboles. Il en résulte bien que le théorème de l'indice pour M_R, f_R équivaut au même théorème pour M', f'. Ainsi le théorème de l'indice dans le cas réel implique celui-ci dans le cas complexe.

Dans la fin de la démonstration, nous nous placerons en fait dans la situation intermédiaire du diagramme ci-dessus : base réelle, fibre complexe (un ellipsoïde Q_ε).

(*c*) *Réduction du cas réel au cas complexe.* — Inversement supposons X, Y réelles, $f: Y \to X$ analytique, et soit M un $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$-module bien filtré relativement presqu'elliptique. Alors, avec les notations du paragraphe 4, M est elliptique dans le voisinage complexe Y_ε de Y, pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Il en résulte (*cf.* [H-Sch]) que $f_+ (M_\varepsilon)_{|X}$ est constant pour $\varepsilon > 0$ assez petit, *i.e.* les morphismes canoniques déduits des inclusions $Y_\varepsilon \subset Y_{\varepsilon'}$ pour $\varepsilon \leqq \varepsilon'$ sont des quasi-isomorphismes. Compte tenu des identifications, canoniques à homotopie près, faites au paragraphe 4, on voit que le théorème de l'indice relatif dans le cas réel presqu'elliptique (et en particulier dans le cas elliptique) résulte de ce théorème dans le cas complexe.

(*d*) *Plongement dans un fibré en boules.* — Dans cette dernière réduction nous allons montrer comment nous ramener au cas où f est la deuxième projection $B_N \times X \to X$, où B_N est la boule unité d'un espace numérique $\mathbb{R}^N$. Soient donc $f: Y \to X$ une application analytique, M un $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$- module bien filtré ($\tilde{Y}$ voisinage de Y), relativement presqu'elliptique. Nous avons vu qu'on peut supposer X et $\tilde{Y}$ réelles, f submersive. On peut aussi bien sûr modifier $(Y, \partial Y)$ arbitrairement en dehors d'un voisinage de supp $M \cap Y$.

Il existe un plongement $i_0 : \tilde{Y} \hookrightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ pour N assez grand. Si f est propre sur supp $M \cap Y$, il existe une fonction continue $r \geqq 1$ sur X telle que $|i_0(y)| \leqq r(x)/2$ pour $y \in \operatorname{supp} M \cap Y$, $x = f(y)$. Soit d'autre part $u < 0$ une inéquation de définition de Y ($du \neq 0$ sur ∂Y). Quitte à remplacer u par $u/2(u^2+1)^{1/2}$, on peut supposer $|u| < 1/2$. Posons $i_1(y) = i_0(y)/r(x) : \tilde{Y} \to \mathbb{R}^{N-1}$ et soit $Y_1 \subset \tilde{Y}$ l'ensemble $\{ |i_1|^2 - u < 1 \}$: c'est un voisinage ouvert de supp $M \cap Y$. Soit enfin $i : Y_1 \to \mathbb{R}^N \times X$ ($\mathbb{R}^N$ identifié à $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$), défini par

$$i(y) = (i_1(y), (1 - |i_1(y)|^2 + u(y))^{1/2}, f(y)).$$

Alors i est un plongement d'un voisinage Y_2 de supp $M \cap Y$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^N \times X$ qui envoie un voisinage de supp $M \cap \mathring{Y}$ dans Y_2 dans $B_N \times X$, et plonge transversalement $Y_2 \cap \partial Y$ dans $S_N \times X$ ($S_N = \partial B_N$), parce que $du \neq 0$ sur ∂Y. Quitte alors à remplacer Y par $B_N \times X$, f par la deuxième projection, et M par M' avec $M' = i_+(M)$ au voisinage de $i(\operatorname{supp} M \cap Y)$, $M' = 0$ ailleurs, on est ramené au cas indiqué. D'après *c*, en supposant X compacte (ou en restreignant tout au-dessus d'une partie compacte de X), on peut encore gonfler la fibre réelle B_N dans les directions imaginaires, et la remplacer par l'ellipsoïde Q_ε ($|\mathrm{Re}\, z|^2 + \varepsilon^{-1} |\mathrm{Im}\, z|^2 \leqq 1 + \varepsilon$) de $\mathbb{C}^N$ si est assez petit. C'est dans ce dernier cas que nous ferons la démonstration.

5.2. Fin de la démonstration. Bonnes résolutions verticales. — Comme indiqué dans la section précédente nous démontrons le théorème de l'indice relatif dans le cas où X est compact de Stein dans une variété de Stein (par exemple réel), $Y = Q_\varepsilon \times X$ (Y est de Stein), et $f: Y \to X$ est la deuxième projection. Nous démontrons le théorème pour un $\mathscr{D}_{\tilde{Y}}$-module (complexe pur); le cas d'un complexe de $\mathscr{D}_{\tilde{Y}}$-modules à cohomologie bien filtrée s'y ramène aussitôt (il suffit, puisque le deuxième terme de la formule de l'indice est additif, de regarder séparément chaque faisceau de cohomologie).

Comme dans [H-Sch] introduisons sur le faisceau $\mathscr{D}_Y$ des opérateurs différentiels sur Y la filtration verticale :

(5.1) $\quad F_p^f \mathscr{D}_Y =$ les opérateurs différentiels de degré horizontal $\leqq p$

i.e. localement de la forme $\sum_{|\alpha| \leqq p} a_{\alpha\beta}(x, \xi)\, \partial_x^\alpha \partial_z^\beta$, où x désigne la variable de X, z celle de $Q_\varepsilon \subset \mathbb{C}^n$. On a donc en particulier

(5.1) *bis* $\quad F_0^f \mathscr{D}_Y = \mathscr{D}_{Y/X}$, faisceau des opérateurs verticaux

(5.1) *ter* $\quad F_p^f \mathscr{D}_Y = \mathscr{D}_{Y,\, p} \mathscr{D}_{Y/X} = \mathscr{D}_{Y/X} \mathscr{D}_{Y,\, p}$.

Le gradué $\mathrm{gr}^f \mathscr{D}_Y$ s'identifie au faisceau en algèbres graduées, filtrées, non commutatives :

(52) $$\mathrm{gr}^f \mathscr{D}_Y \simeq \mathscr{D}_{Y/X}[TX] \subset \mathscr{D}_{Y \times_X T^*X/T^*X}$$

des opérateurs différentiels verticaux à coefficients polynômes sur les fibres de T^*X. Un élément homogène de degré p, d'ordre $\leqq q$, de cette algèbre, se met donc localement sous la forme

$$\sum_{\substack{|\alpha| = p \\ |\beta| \leqq q}} a_{\alpha\beta}(y)\, \xi^\alpha \partial_z^\beta.$$

Le bigradué $\mathrm{gr}\, \mathrm{gr}^f \mathscr{D}_Y$ s'identifie à l'algèbre bigraduée des fonctions polynomiales dans les fibres sur $T^*_{Y/X} \times_X T^*X$. Soit M un $\mathscr{D}_{\tilde{Y}}$-module à droite bien filtré, $F = (F_j M)$ sa filtration. La filtration verticale de M est

(5.3) $$F_m^f M = \sum_{p+q=m} F_q M F_q^f \mathscr{D}_Y = F_m M \mathscr{D}_{Y/X}.$$

On a $F_p^f M = F_0^f M F_p^f \mathscr{D}_Y$ si M est engendré par M_0, et dans tous les cas $F_{p+1}^f M = F_p^f M F_1^f \mathscr{D}_Y$ pour p grand. Le gradué $\mathrm{gr}^f M$ est un $\mathrm{gr}^f \mathscr{D}_Y$-module gradué (et filtré), cohérent; de même $\mathrm{gr}\, \mathrm{gr}^f M$ est un $\mathrm{gr}\, \mathrm{gr}^f \mathscr{D}_Y$-module bigradué cohérent. Les algèbres bigraduées $\mathrm{gr}\, \mathrm{gr}^f \mathscr{D}_Y$ et $\mathrm{gr}^f\, \mathrm{gr}\, \mathscr{D}_Y$ s'identifient canoniquement. (Il n'en va pas de même en général pour $\mathrm{gr}\, \mathrm{gr}^f M$ et $\mathrm{gr}^f\, \mathrm{gr}\, M$.)

Proposition 5.1. — *On suppose* M *bien filtré. Alors il existe une bonne résolution verticale localement libre finie de* M.

Autrement dit il existe un complexe localement libre

$$L: \quad \ldots L^{-j} \to L^{-j+1} \to \ldots L^{-1} \to L^0 \to 0$$

où les L^j sont munis de bonnes filtrations, et un quasi-isomorphisme (augmentation) $\varepsilon : L \to M$, tel que $\mathrm{gr}^f L \to \mathrm{gr}^f M$, $\mathrm{gr}\, \mathrm{gr}^f L \to \mathrm{gr}\, \mathrm{gr}^f M$ soient aussi des résolutions. (Ceci n'implique pas qu'il s'agisse d'une bonne résolution, *i.e.* gr L n'est pas nécessairement une résolution de gr M.)

Cette proposition se démontre exactement comme celle qui affirme l'existence d'une bonne résolution, pour la filtration usuelle (*cf.* [BM-L-M], [Bj]). Décrivons plus en détail la construction d'une telle résolution. Comme Y est de Stein, gr gr^f M est engendré, au voisinage de tout compact, en tant que module bigradué, par un nombre fini de sections globales bihomogèes; il en existe donc une résolution localement libre bigraduée

$$l: \quad \ldots l^{-j} \to l^{-j+1} \to l^0 \to \mathrm{gr}\,\mathrm{gr}^f \mathrm{M} \to 0$$

dont nous noterons la différentielle d. l^{-j} est construit par récurrence en choisissant des sections bihomogènes au-dessus de Y qui engendrent le noyau de d^{-j+1} (resp. $\mathrm{gr}\,\mathrm{gr}^f \mathrm{M}$ pour $j=0$). C'est donc une somme directe

$$l^{-j} = \oplus\, l^{-j}_{pq}$$

où l^{-j}_{pq} est libre, bigradué, muni du décalage d'ordre $[-p, -q]$ de la bigraduation canonique. Le théorème des syzygies montre que pour j assez grand ($j \geqq 2$ dim Y) le noyau de d^{-j+1} est en fait bigradué localement libre, et la construction s'arrête (le dernier l^{-j} est seulement localement, peut-être pas globalement, libre). Dans la décomposition $l = \oplus\, l_{pq}$, d a une matrice $(d^{pq}_{p'q'})$) où le coefficient $d^{pq}_{p'q'}$ est bihomogène de degré $(p-p', q-q')$; en particulier $d^{pq}_{p'q'}=0$ si $p \leqq p'$ ou $q \leqq q'$.

Cette résolution l se relève en une résolution (graduée-filtrée) $\mathscr{L}$ de gr^f M dont nous noterons la différentielle $\delta = (\delta^{pq}_{p'q'})$. Le coefficient $\delta^{pq}_{p'q'}(z, x, \partial/\partial z, \xi)$ est donc homogène de degré $q-q'$ en ξ, et d'ordre $\leqq p-p'$ en $\partial/\partial z$. Il est aussi nul pour $p<p'$ ou $q<q'$. (On a noté les variables $x \in \mathrm{X}$, $z \in \mathrm{Q}_\varepsilon$.)

Enfin $\mathscr{L}$ se relève en une bonne résolution verticale L de M, comme indiqué (dans le coefficient $\mathrm{D}^{pq}_{p'q'}(z, x, \partial/\partial z, \partial/\partial x)$ de la différentielle D de L, les termes d'ordre maximal $q-q'$ en $\partial/\partial x$ sont d'ordre $\leqq p-p'$ en $\partial/\partial z$; ce coefficient est donc nul si $q<q'$, et d'ordre $<q-q'$ en $\partial/\partial x$ si $p<p'$).

Comme au paragraphe 4 notons $\mathrm{Z} = \mathrm{Car}\ \mathrm{M}$, $\mathrm{Z}_e = \mathrm{Z} \cap (\zeta=0)$ les covecteurs horizontaux de Z, $\mathrm{Z}' \subset \mathrm{T}^*\mathrm{X}$ la projection. Notons encore $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Car}\ \mathrm{gr}^f \mathrm{M} \subset \mathrm{T}^*\mathrm{Q}_\varepsilon \times \mathrm{T}^*\mathrm{X}$ le support de $\mathrm{gr}\,\mathrm{gr}^f \mathrm{M}$, $\mathrm{Z}_{1e} \subset \mathrm{Q}_\varepsilon \times \mathrm{T}^*\mathrm{X}$ la partie horizontale de Z_1, $\mathrm{Z}'' \subset \mathrm{T}^*\mathrm{X}$ sa projection. On a évidemment $\mathrm{Z}_{1e} \subset \mathrm{Z}_e$ et $\mathrm{Z}'' \subset \mathrm{Z}'$.

PROPOSITION 5.2. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) M *est relativement elliptique.*

(ii) gr^f M *est relativement elliptique.*

(iii) *Si* M *est engendré par* M_0, gr^f_0 M *est elliptique.*

(iv) *Les mêmes assertions sont vraies pour une bonne résolution verticale de* M.

L'équivalence de (i) et (ii) est une reformulation de la définition. Les autres assertions sont immédiates : l'ellipticité relative de gr^f M signifie que car gr^f M ne contient pas de covecteur relatif non nul $\eta \in \mathrm{T}^*_\mathrm{Y} \times_\mathrm{X} \mathrm{T}^*\mathrm{X}/\mathrm{T}^*\mathrm{X}$ normal au bord $\partial\mathrm{Y}$ [*i.e.* de la forme $\lambda\, d'u$, avec $\lambda \neq 0$, en un point de $\partial\mathrm{Y}$, où $u=0$ est une équation réelle de $\partial\mathrm{Y}$ et $d'u$ la partie holomorphe de du] (c'est la même définition qu'au paragraphe 4 puisque maintenant tous les opérateurs sont « verticaux »). Elle se lit géométriquement sur l'ensemble $Z_1 = \operatorname{car} \operatorname{gr}^f M$ (pas sur Z). Une bonne résolution verticale de M définit un complexe d'opérateurs de Toeplitz paramétré par $T^* X$, et l'ellipticité relative équivaut à l'ellipticité de ce complexe (au sens du § 2). (iii) correspond au fait que le complexe $\mathscr{L} = \operatorname{gr}^f L$ est elliptique en tous les points $(x, \xi) \in T^*_x X$ d'une fibre si et seulement s'il l'est pour $\xi = 0$ [la matrice $(\delta^{pq}_{p'q'})$ de la différentielle de $\operatorname{gr}^f M$ est triangulaire et tout se lit sur des termes de degré $q = 0$ en ξ]. De même $\mathscr{L}$ est exact au-dessus d'un point (x, ξ) [*i.e.* $\operatorname{gr}^f M$ est nul au-dessus de (x, ξ)] si et seulement si le symbole d de δ est exact pour $\eta = 0$ ($\delta = (\delta^{pq}_{p'q'})$ possède alors une homotopie à coefficients rationnels homogènes de degré $q - q'$ en ξ, et d'ordre $\leqq p - p'$ en $\partial/\partial z$); en regroupant les termes de même degré p en $\partial/\partial z$, on voit qu'on est exactement dans la situation de la remarque 1 du paragraphe 2.

Soit alors M bien filtré, relativement elliptique, sur $Q_\varepsilon \times X$, et soit L une bonne résolution verticale de M comme ci-dessus. L'image directe $f_+ M$ est le complexe $f_*(L \otimes \mathscr{D}_{Y \to X})$, puisqu'ici le produit tensoriel dérivé se réduit à $\otimes$ (L est localement libre), et $R f_*$ se réduit à f_* ($f : Q_\varepsilon \times X \to X$ est relativement de Stein donc les composantes de L sont acycliques pour f_*). Dans la décomposition en produit $Y = Q_\varepsilon \times Y$, $\mathscr{D}_{Y \to X}$ s'identifie au produit externe, complété analytiquement, $\mathscr{O}_{Q_\varepsilon} \hat{\otimes} \mathscr{D}_X$ (opérateurs différentiels « horizontaux »). Comme indiqué on suppose $L = \oplus L_{pq}$, où L_{pq} est localement libre, muni du décalage d'ordre $[-p, -q]$ (p, $q \in \mathbb{Z}$) de la filtration canonique. Le gradué vertical $\operatorname{gr}^f (f_+ L)$ est le complexe d'opérateurs différentiels verticaux $\delta^{pq}_{p'q'}(\partial/\partial z, \xi)$ sur $Y \times_X T^* X = Q_\varepsilon \times T^* X$, à coefficients polynomiaux homogènes dans les fibres (en ξ). Nous le considérons comme un complexe d'opérateurs de Toeplitz sur Q_ε, paramétré par $\xi \in T^* X$. Si L est une bonne résolution verticale, $\mathscr{L} = \operatorname{gr}^f L$ est elliptique, du type décrit au paragraphe 2, remarque 1, et nous pouvons lui appliquer les résultats de ce paragraphe. C'est un complexe de Fredholm analytique, homogène, paramétré par les points de $T^* X$; sa cohomologie est donc $\operatorname{gr} \mathscr{O}_{T^* X}$-cohérente. Il s'agit ici de la cohomologie à coefficients dans les espaces de Sobolev $\mathscr{O}^s$, ou dans $\mathscr{O}^{-\infty} = \bigcup \mathscr{O}^s$, alors que celle qui nous intéresse est la cohomologie à coefficients fonctions holomorphes au voisinage de Y, ou, ce qui revient au même, à coefficients analytiques sur le bord ∂Y. Mais en fait le système d'équations différentielles sur $\partial Y/X$ obtenu en adjoignant aux équations différentielles qui décrivent $\operatorname{gr}^f M$ les équations de Cauchy-Riemann tangentielles (qui décrivent les valeurs au bord de fonctions holomorphes dans Y) est elliptique si M est relativement elliptique, et à coefficients analytiques. La théorie des équations différentielles linéaires à coefficients analytiques montre alors que toutes ces cohomologies sont égales (ceci n'est qu'une reformulation élaborée du fait que les solutions d'une équation elliptique à coefficients analytiques sont analytiques).

Ceci étant l'image directe $\bar{f}_* (\operatorname{gr}^f L)$ est à cohomologie cohérente, où comme au paragraphe 4, $\bar{f}$ désigne la projection $Q_\varepsilon \times T^* X \to T^* X$. Cette image directe est le premier terme de la suite spectrale associée à la filtration verticale pour l'image directe $f_+ (L)$. Par suite les termes suivants de cette suite spectrale sont tous cohérents. Par cohérence noethérienne, cette suite spectrale est stationnaire, et converge donc vers $\operatorname{gr} f_+ (L)$; $f_+ (L)$ est donc à cohomologie cohérente, comme l'ont montré Houzel et Schapira [H-Sch]. En outre les éléments de K-théorie associés aux termes successifs de cette suite spectrale sont tous égaux, donc à la limite, et d'après le théorème 2.5 sur l'indice d'une famille opérateurs de Toeplitz, et la remarque 1 qui le suit (§ 2) on a

$$(5.4)\qquad [f_+ \mathrm{M}]^{\mathrm{top}}_{\mathrm{Z}''} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{Z}''}(\mathrm{gr}^f \mathrm{M}) = \bar{f}_* [\mathrm{gr}^f \mathrm{M}]^{\mathrm{top}}_{\mathrm{Z}''} \quad \text{(image K-théorique)},$$

$\mathrm{gr}^f \mathrm{M} \subset \mathrm{T}^*_{\mathrm{Q/X}} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{T}^* \mathrm{X}$ (le complexe d'opérateurs de Toeplitz correspondant à $\mathrm{gr}^f \mathrm{M}$ est exact en dehors de Z'').

Soit $\mathrm{Z}' \subset \mathrm{T}^* \mathrm{X}$ l'ensemble décrit au paragraphe 4, image dans $\mathrm{T}^* \mathrm{X}$ de l'ensemble des covecteurs horizontaux de car(M). On a $\mathrm{Z}'' \subset \mathrm{Z}'$, et $\mathrm{Z}_1 \subset \mathrm{T}^*_{\mathrm{Q/X}} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Z}'$, de sorte que l'égalité (5.4) se réécrit

$$(5.5)\qquad [f_+ \mathrm{M}]^{\mathrm{top}}_{\mathrm{Z}'} = \bar{f}_{e*} \mathrm{F}_e^{-1} [\mathrm{gr}^f \mathrm{M}]^{\mathrm{top}}_{\mathrm{Z}_1}$$

où $\bar{f}_e$, F_e sont définis comme au paragraphe 4 (on évalue le symbole du complexe d'opérateurs de Toeplitz correspondant à $\mathrm{gr}^f \mathrm{M}$ sur les covecteur normaux du bord $\partial \mathrm{Q/X}$).

Pour terminer il reste à faire le lien entre le membre de droite de (5.5), et l'élément $\bar{f}_{e*} \mathrm{F}_e^{-1} [\mathrm{M}]^{\mathrm{top}}_{\mathrm{Z}}$ qui figure dans l'énoncé du paragraphe 4. Nous reprenons essentiellement la démonstration de [M].

D'abord, par déformation au cône normal, on peut remplacer $[\mathrm{M}]^{\mathrm{top}}_{\mathrm{Z}}$ par $[\mathrm{gr}^f \mathrm{gr}\, \mathrm{M}]^{\mathrm{top}}_{\mathrm{Z}_2} \in \mathrm{K}_{\mathrm{Z}_2}(\mathrm{T}^*_{\mathrm{Q/X}} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{T}^* \mathrm{X})$, où Z_2 est le support de $\mathrm{gr}^f \mathrm{gr}\, \mathrm{M}$. En effet notons h_σ l'homothétie $(\zeta, \xi) \to (\sigma\zeta, \xi)$ de $\mathrm{T}^* \mathrm{Q} \simeq \mathrm{T}^*_{\mathrm{Q/X}} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{T}^* \mathrm{X} \simeq \mathrm{T}^* \mathrm{Q}_\varepsilon \times \mathrm{T}^* \mathrm{X}\ (0 < \sigma \leqq 1)$, et m_σ l'image inverse $h_\sigma^{-1}(\mathrm{gr}\, \mathrm{M})$. On a donc $\mathrm{gr}^f \mathrm{gr}\, \mathrm{M} = \lim m_\sigma$ (pour $\sigma \to 0$). Puisque M est verticalement elliptique il existe un voisinage bihomogène V du fibré conormal N_+ (privé de la section nulle) qui ne contient aucun point de $\mathrm{Z} = \mathrm{car}\, \mathrm{M}$, ni du « cône tangent » Z_2 (ou de Z_1). De façon équivalente il existe un ensemble fermé fixe Z_0 contenant les $h_\sigma^{-1} \mathrm{Z}$ et leur limite Z_2, disjoint de N_+, et tel que $\mathrm{Z}_0 \cap \mathrm{H} = \mathrm{Z} \cap \mathrm{H} = \mathrm{Z}_2 \cap \mathrm{H}\ (= \mathrm{Z}_1 \cap \mathrm{H})$ (où $\mathrm{H} \simeq \mathrm{Q} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{T}^* \mathrm{X}$ désigne l'ensemble des covecteurs horizontaux). Comme supp m_σ ne rencontre pas le voisinage fixe V de N_+ et que les covecteurs horizontaux ($\zeta = 0$) ne bougent pas au cours de la déformation, $\mathrm{F}_e^{-1} [m\,\sigma]^{\mathrm{top}}_{\mathrm{Z}_0}$ est constant, donc on a à la limite $\mathrm{F}_e^{-1} [\mathrm{M}]^{\mathrm{top}}_{\mathrm{Z}} = \mathrm{F}_e^{-1} [\mathrm{M}]^{\mathrm{top}}_{\mathrm{Z}_0} = \mathrm{F}_e^{-1} [\mathrm{gr}^f \mathrm{gr}\, \mathrm{M}]^{\mathrm{top}}_{\mathrm{Z}_0} = \mathrm{F}_e^{-1} [\mathrm{gr}^f \mathrm{gr}\, \mathrm{M}]^{\mathrm{top}}_{\mathrm{Z}_1}$ (dans le cas complexe propre, l'égalité analogue en K-théorie analytique est vraie).

Reste à comparer les images K-théoriques des deux éléments $[\mathrm{gr}\, \mathrm{gr}^f \mathrm{M}]$ et $[\mathrm{gr}^f \mathrm{gr}\, \mathrm{M}]$. Pour cela, suivant [M] on introduit

$$\mathscr{A} = \oplus\, \mathscr{D}_{pq}\, t^p s^q$$

où s, t sont des variables formelles qui commutent avec tout le reste, p et q sont entiers $\geqq 0$, et $\mathscr{D}_{pq} = \mathrm{F}_q \mathrm{F}^f_p \mathscr{D}_{\mathscr{Q}}$, faisceau des opérateurs différentiels de degré total $\leqq q$ et de degré horizontal $\leqq p$. C'est un faisceau cohérent d'algèbres bigraduées noethériennes, et $\mathscr{A}/(\mathscr{A}\, t + \mathscr{A}\, s)$ s'identifie au faisceau bigradué $\mathrm{gr}^f \mathrm{gr}\, \mathscr{D}$.

On choisit la bonne filtration de M de sorte qu'il soit engendré par M_0; on pose $\mathrm{M}_{pq} = M_0 \mathscr{D}_{pq}$, et on introduit le $\mathscr{A}$-module bigradué cohérent

$$\mathscr{M} = \oplus\, \mathrm{M}_{pq}\, t^p s^q$$

de sorte qu'on a les identifications

$$\operatorname{gr}\operatorname{gr}^f \mathrm{M} \simeq \bigoplus \mathrm{M}_{pq}/(M_{p-1,\infty}+\mathrm{M}_{p,q-1})\, t^p s^q$$
$$\operatorname{gr}^f \operatorname{gr} \mathrm{M} \simeq \bigoplus \mathrm{M}_{pq}/(M_{p-1,q}+\mathrm{M}_{\infty,q-1})\, t^p s^q$$

où on a noté, par abus, $\mathrm{M}_{p-1,\infty}$, resp. $\mathrm{M}_{\infty,q-1}$ les éléments de M_{pq} de degré horizontal $\leqq p-1$, resp. de degré total $\leqq q-1$.

Or on a $\mathscr{M}/\mathscr{M}\, t = \bigoplus\, (\mathrm{M}_{pq}/\mathrm{M}_{p-1,q})\, t^p s^q$ et le sous-module de s-torsion de $\mathscr{M}/\mathscr{M}\, t$ est $\bigoplus\, (\mathrm{M}_{p-1,\infty}/\mathrm{M}_{p-1,q})\, t^p s^q$. Ainsi si $\mathscr{N}$ désigne le $\mathscr{A}$-module $\mathscr{M}/\mathscr{M}\, t$ mod. sa s-torsion, on a $\operatorname{gr}\operatorname{gr}^f \mathrm{M} \simeq \mathscr{N}/\mathscr{N} s$.

De même $\operatorname{gr}^f \operatorname{gr} \mathrm{M}$ s'identifie à $\mathscr{K}/\mathscr{K} s$, où $\mathscr{K} = \mathscr{M}/\mathscr{M} s$ mod. sa t-torsion.

Posons $\mathscr{M}^{1,\infty} = \mathscr{M}/(\mathscr{M} s + \mathscr{M} t)$. C'est un $\mathscr{A}$-module cohérent, porté par $s=t=0$ donc cohérent sur $\operatorname{gr}\operatorname{gr}^f \mathscr{D}$. Son support Z_3 contient Z_1 et Z_2 puisque $\operatorname{gr}\operatorname{gr}^f \mathrm{M}$ et $\operatorname{gr}^f \operatorname{gr} \mathrm{M}$ sont quotients de $\mathscr{M}^{1,\infty}$ et on a $\mathrm{Z}_1 \cap \mathrm{H} = \mathrm{Z}_2 \cap \mathrm{H} = \mathrm{Z}_3 \cap \mathrm{H}$ (les trois contiennent les mêmes covecteurs horizontaux). Enfin Z_3 comme les autres est disjoint de N_+ si M est relativement elliptique.

Si on effectue la multiplication par s dans la suite exacte

$$0 \to (\mathscr{M}/\mathscr{M}\, t)_s \to \mathscr{M}/\mathscr{M}\, t \to \mathscr{N} \to 0$$

on voit que le noyau de la surjection $\mathscr{M}/(\mathscr{M} s + \mathscr{M} t) \to \mathscr{N}/\mathscr{N}\, t$ est le conoyau de la multiplication par s dans la s-torsion $(\mathscr{M}/\mathscr{M}\, t)_s$ de $\mathscr{M}/\mathscr{M}\, t$. Celle-ci est aussi portée par Z_3. On a donc

$$[\operatorname{gr}\operatorname{gr}^f \mathrm{M}]^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Z}_3} = [\mathscr{M}^{1,\infty}]^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Z}_3} - [\operatorname{coker} s]^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Z}_3},$$

et exactement de même

$$[\operatorname{gr}^f \operatorname{gr} \mathrm{M}]^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Z}_3} = [\mathscr{M}^{1,\infty}]^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Z}_3} - [\operatorname{coker} t]^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Z}_3},$$

égalités dans la K-théorie des $\mathscr{A}/(\mathscr{A}\, t + \mathscr{A} s) \simeq \operatorname{gr}\operatorname{gr}^f \mathscr{D}$-modules cohérents portés par Z_3. On a d'autre part la suite exacte de $\mathscr{A}$-modules

$$0 \to \ker s \to (\mathscr{M}/\mathscr{M}\, t)_s \xrightarrow{s} (\mathscr{M}/\mathscr{M}\, t)_s \to \operatorname{coker} s \to 0.$$

Bien que $(\mathscr{M}/\mathscr{M}\, t)_s$ ne soit pas un $\mathscr{A}/(\mathscr{A}\, t + \mathscr{A} s)$-module il est de (s, t)-torsion, porté par Z_3, et cela implique l'égalité en K-théorie analytique :

$$[\ker s]^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Z}_3} = [\operatorname{coker} s]^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Z}_3}$$

et de même $[\ker t]^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Z}_3} = [\operatorname{coker} t]^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Z}_3}$ où $\ker t$, $\operatorname{coker} t$ désignent les noyau et conoyau de la multiplication par t dans la t-torsion de $(\mathscr{M}/\mathscr{M} s)$.

Or M est par construction sans t-torsion ni s-torsion, de sorte que les sous modules de $\mathscr{M}/\mathscr{M}\, t$ resp. $\mathscr{M}/\mathscr{M} s$ annulés par s resp. t sont isomorphes [tous deux isomorphes au quotient du sous-module de $\mathscr{M} \times \mathscr{M}$ annulé par $(x, y) \to xs - yt$ par le sous module engendré par les sections (zt, zs)]. On a donc $[\operatorname{coker} s]^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Z}_3} = [\operatorname{coker} t]^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Z}_3}$; ceci démontre l'égalité $[\mathrm{gr}\,\mathrm{gr}^f\,M]^{an}_{Z_3}=[\mathrm{gr}^f\,\mathrm{gr}\,M]^{an}_{Z_3}$, donc *a fortiori* l'égalité en K-théorie topologique ou celle qui s'en déduit par image inverse F_e^{-1}, et termine la démonstration.

Remarque. — Soit X un espace métrique compact, $f: Q \to X$ une variété analytique à bord relative propre, réelle ou complexe, *i.e.* localement Q est fermé dans un produit $X \times \mathbb{R}^n$ ou $X \times \mathbb{C}^n$, défini par une inéquation $u(x, z) \leqq 0$ où u est continue, partiellement analytique en z, et $d_z u \neq 0$ sur le bord; dans le cas complexe on impose en outre que Q soit strictement pseudo-convexe, *i.e.* Q est de Stein et u peut être choisi de sorte que la matrice $\partial^2 u/\partial z_j \partial \bar{z}_k$ soit hermitienne $\geqslant 0$ (les changements de carte doivent respecter la fibration et l'analyticité partielle). On dispose alors du faisceau $\mathcal{O}_Y$ des fonctions analytiques dans les fibres, et du faisceau $\mathcal{D}_{Y/X}$ des opérateurs différentiels verticaux analytiques dans les fibres; on a une notion de complexe d'opérateurs différentiels verticaux et pour un tel complexe, d'ellipticité relative (*i.e.* le bord est non caractéristique) ou de presqu'ellipticité relative dans le cas réel (*i.e.* le système est relativement elliptique sur une famille à un paramètre de voisinages complexes à bord Y_s de Y, d'intersection Y). Un tel complexe P a un symbole σ_P, qui est un complexe de fibrés vectoriels sur $T^* Y/X$. Définissons $Y_e \subset T^* Y/X$ comme au paragraphe 4, réunion de la section nulle de Y et du fibré en demi-droites N_+. Soient $Z = \mathrm{car}\ P$, et $Z_1 = Z \cap Y_e$; on a $Z_1 \subset Y$ si P est relativement elliptique, et le symbole σ_P définit alors un élément $[P]_{Z_1} \in K^{top}_{Z_1}(Y_e)$. Au complexe P correspond une « famille continue d'opérateurs de Toeplitz » T_P, elliptique, paramétrée par X, dont il est naturel de penser que l'indice est donné par la formule du paragraphe 4 : dans le cas complexe $\mathrm{Ind}_Z\, Tp = $ image K-théorique de $[P]_{Z_1}$, où $Z' = f(Z_1) \subset X$ (T_P est exact en dehors de Z'), et la formule qui s'en déduit par passage à la limite dans le cas réel. Dans le cas réel sans bord elliptique, cette formule n'est autre que la formule d'indice relative d'Atiyah et Singer (avec en plus l'indication sur les supports), Lorsque Y est un produit $Q_\varepsilon \times X$, c'est la formule du paragraphe 2. Lorsque X et Y sont des variétés, que f est une submersion analytique, et que P correspond à un $\mathcal{D}_{Y/X}$-module cohérent, elle se ramène aussitôt à l'énoncé du paragraphe 4 appliqué au $\mathcal{D}_Y$-module $P \otimes \mathcal{Q}_{Y/X} \mathcal{D}_Y$. Dans le cas général la formule est vraie et se démontre comme ci-dessus, en remplaçant P par le système réel P_R, puis en plongeant dans un produit (boule) $\times$ X qu'on approche par des produits $Q_\varepsilon \otimes X$. La seule difficulté nouvelle réside dans la définition de l'indice $\mathrm{Ind}_Z\, T_p$, car T_p n'est pas une famille continue au sens de la norme d'opérateurs de Fredholm, sauf dans le cas où Y est un produit (il n'y a pas de fibré hilbertien naturel au sens fort où T_p opère : même dans le cas réel où Y est une fibration localement triviale, les automorphismes des fibres qui servent de changement de cartes induisent des familles fortement continues, mais pas continues en norme, de transformations de $L^2(Y/X)$; dans le cas complexe $Y \to X$ n'est en général pas une fibration localement triviale).

Comme dans [A – S] | V on contourne cette difficulté de la façon suivante : $\mathcal{O}(X/Y)$ (resp. $L^2(X/Y)$) définit un fibré hilbertien de groupe structural le groupe des opérateurs intégraux de Fourier adaptés (au sens de [BM1]) d'une fibre (resp. des difféomorphismes préservant le bord d'une fibre dans le cas réel); bien que non continu pour la norme, ce groupe a le bon goût de préserver les familles continues d'opérateurs de Toeplitz. Ceci suffit pour définir l'indice. Ainsi si Y est complexe, si E et F sont deux fibrés partiellement analytiques sur Y, p une section continue de L(E, F), T_p la famille correspondante d'opérateurs de Toeplitz (le cas général se ramène à ce cas), et si on suppose p elliptique, il existe, comme dans le cas où Y est un produit, un espace vectoriel fini F_0 et une application linéaire $u : F_0 \to \mathcal{O}_Y(Y; F)$ tels que $T_{P,x} \oplus u_x$ soit surjectif pour tout $x \in X$; le noyau $E_0 = ker(T_{P,x} \oplus u_x)$ est alors un fibré vectoriel sur X; si T_P est inversible hors de $Z \subset X$ l'inverse définit un isomorphisme de fibrés $v : E_0 \to F_0 \times X$ en dehors de Z et on définit comme Jänisch $\mathrm{Ind}_Z T_p =$ (la classe de $v : E_0 \to F_0$). (Une autre méthode consisterait à tout ramener au bord ∂Y et rendre réel en ajoutant les équation de Cauchy-Riemann tangentielles; on est alors dans la situation de [A-S].)

BIBLIOGRAPHIE

[A] M. F. ATIYAH, *K-theory*, Benjamin, Amsterdam.

[A-S] M. F. ATIYAH et I. M. SINGER, *the Index of Elliptic Operators I* (*Ann. Math.* vol. 87, 1968, p. 484-530; III, *loc. cit.*, p. 546-604; *IV loc. cit.*, vol. 92, 1970, p. 119-138).

[A-B-S] M. F. ATIYAH, R. BOTT et A. SCHAPIRO, *Clifford Modules* (*Topology*, vol. 3, supplément, 1964, p. 3-83).

[Bj] J. E. BJÖRK, *Rings of Differential Operators*, North Holland, 1979.

[B] A. BOREL *et al.*, *Algebraic D-modules*, Perspect. in *Math. n°* 2, Academic Press 1987.

[B-F-MPh] P. BAUM, W. FULTON et R. MACPHERSON, *Riemann-Roch and Topological K-theory for singular Varieties* (*Acta Math.*, vol. 143, n° 3-4, 1979, p. 155-192).

[BM1] L. BOUTET DE MONVEL, *On the Index of Toeplitz Operators of Several Complex Variables* (*Inventiones Math.*, vol. 50, 1979, p. 249-272).

[BM2] L. BOUTET DE MONVEL, *Systèmes presqu'elliptiques : une autre démonstration de la formule de l'indice* (*Astérisque*, vol. 131, 1985, p. 201-216).

L. BOUTET DE MONVEL, *The Index of Almost Elliptic Systems. E. de Giorgi Colloquium* (*Research notes in Math.*, vol. 125, Pitman, 1985, p. 17-29).

[BM-L-M] L. BOUTET DE MONVEL, M. LEJEUNE et B. MALGRANGE, *Opérateurs différentiels et pseudodifférentiels* (*Séminaire*, Grenoble, 1975-1976).

[BM-Sj] L. BOUTET DE MONVEL et J. SJÖSTRAND, *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö* (*Astérisque*, vol. 34-35, 1976, p. 123-164).

[C-B] H. CORNALBA-P. GRIFFITHS, *Analytic Cycles and Vector Bundles in Non Compact Algebraic Varieties* (*Invent. Math.*, vol. 28, 1975, p. 1-106).

[Gra] H. GRAUERT, *Ein Theorem der analytischen Garben-theorie und die modulräume komplexe Structuren* (*IHES Sci. Publ. Math.*, n° 5, 1960).

[Gro] A. GROTHENDIECK, *SGA V*, *théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch* (*Lecture Notes in Math.*, vol. 225, Springer-Verlag, 1971).

[Hi] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraiche Geometrie*, Springer-Verlag, Berlin.

[Hö] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vol. III et IV, *Grundlehren der Math. Wiss*, 124.

[H-Sch] Ch. HOUZEL et P. SCHAPIRA, *Images directes de modules différentiels*, (*C.R.A.S.*, 298, 1984, p. 461-464).

[K1] M. KASHIWARA, *Index Theorem for a Maximally Overdetermined System of Linear Differential Equations* (*Proc. Jap. Acad.*, vol. 49-10, 1973, p. 803-804).

[K2] M. KASHIWARA, *b-fonctions and Holonomic Systems* (*Invent. Math.*, vol. 38, 1976, p. 33-54).

[K3] M. KASHIWARA, *Analyse microlocale du noyau de Bergmen.* (*Séminaire Goulaouic-Schwartz*, 1976-1977, exp. n° 8, École Polytechnique).

[K4] M. KASHIWARA, *Systems of microdifferential equations*, Birkhaüser, 1983.

[K-K-S] M. Kashiwara, T. Kawai et M. Sato. *Microfunctions and pseudo-differential Equations* (*Lecture Notes*, vol. 287, 1973, Springer-Verlag).

[La] G. Laumon, *Sur la catégorie dérivée des D-modules filtrés* (*Thèse*, Orsay, 1983).

[L] R. N. Levy, *Riemann-Roch Theorem for Complex Spaces* (*Acta Math.* vol. 158, 1987, p. 149-188).

[M] B. Malgrange, *Sur les images directes de $\mathscr{D}$-modules* (*Manuscripta Math.*, vol. 50, 1985, p. 49-71).

[Me-Sj] A. Melin et J. Sjöstrand, *Fourier Integral Operators with Complex Valued Phase Functions* (*Lecture Notes*, vol. 459, 1974, p. 120-223).

(Manuscrit reçu le 16 mai 1988,
révisé le 2 juin 1989.)

L. Boutet de Monvel,
Université Paris-VI,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05

B. Malgrange,
Institut Fourier,
B.P. 74,
38402 Saint Martin-d'Hères Cedex, France.