ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PATRICK GÉRARD

Moyennisation et régularité deux-microlocale

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 23, nº 1 (1990), p. 89-121

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1990_4_23_1_89_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 23, 1990, p. 89 à 121.

MOYENNISATION ET RÉGULARITÉ DEUX-MICROLOCALE

PAR PATRICK GÉRARD

RÉSUMÉ. — On étudie la régularité de la moyenne par rapport à un groupe de variables de la solution d'une équation aux dérivées partielles linéaires générale, en fonction de la géométrie de l'opérateur. On en déduit un résultat général de sous-ellipticité dans les espaces de Sobolev à deux indices associés à une variété involutive. On applique ce résultat à l'étude de la sous-ellipticité de certains systèmes surdéterminés, et à un problème de passage à la limite faible dans un produit de deux suites bornées de L^2.

Mots clés : deuxième microlocalisation, transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer, moyennisation; convergence faible.

Notations et rappels

Si U et V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, la notation $U \subset\subset V$ signifie que l'adhérence de U est compacte et contenue dans V.

La distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est notée d; la boule euclidienne de centre x et de rayon r est notée $B(x, r)$. La mesure de Lebesgue est notée m.

Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $C_0^\infty(X)$ désigne les fonctions C^∞ à support compact dans X. Si u est une distribution sur X, $\operatorname{supp} u$ désigne le support de u.

$S'(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$. Si $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, on note $\hat{u}$ sa transformée de Fourier, donnée par

$$\hat{u}(\xi) = \int \exp(-ix.\xi)\, u(x)\, dx \in S'(\mathbb{R}^n).$$

Si $\xi \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$.

Si $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ désigne comme d'habitude l'espace de Sobolev

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n),\ \langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

muni de la norme $\|u\|_s = \left(\int \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$.

On rappelle qu'une distribution u est dite microlocalement H^s près de $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ [ce que l'on notera $u \in H^s(x_0, \xi_0)$] s'il existe une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ non nulle en x_0 et un voisinage conique Γ de ξ_0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que

$$\int_\Gamma \langle \xi \rangle^{2s} |(\chi u)^\wedge (\xi)|^2 \, d\xi < +\infty.$$

De même, si (u_j) est une suite (faiblement) bornée de l'espace des distributions, on dit que u_j reste dans un compact de H^s près de (x_0, ξ_0) s'il existe une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ non nulle en x_0 et un voisinage conique Γ de ξ_0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que

$$\int_{\xi \in \Gamma, \, |\xi| \geqq R} \langle \xi \rangle^{2s} |(\chi u_j)^\wedge (\xi)|^2 \, d\xi \to 0 \qquad \text{si} \quad R \to +\infty, \text{ uniformément en } j.$$

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{O}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans Ω.

Si v est continue sur Ω, $\omega \subset \Omega$ et $\lambda \geqq 1$, on pose

$$|v|_{\lambda, \omega} = \left(\int_\omega |v(z)|^2 \exp(-\lambda (\operatorname{Im} z)^2) \, |dz \wedge d\bar{z}| \right)^{1/2}.$$

Il est clair que $|v|_{\lambda, \omega} < +\infty$ dès que $\omega \subset\subset \Omega$.

Dans le cas où $v = v(z, \lambda)$ dépend de plus du paramètre λ, on écrira par abus

$$|v|_{\lambda, \omega} = |v(\,.\,, \lambda)|_{\lambda, \omega}.$$

0. Introduction et énoncé du résultat

Soit P un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^n$, et soit u une distribution à support compact telle que

$$u \in H^s \quad \text{et} \quad P u \in H^s. \tag{0.1}$$

On suppose choisie une décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^d$, $x = (x', x'')$, et l'on se propose d'étudier la régularité (Sobolev) de la moyenne $v(x') = \int u(x', x'') \, dx''$ sur $\mathbb{R}^r$.

Ce problème apparaît naturellement dans l'étude des équations de la Cinétique Physique (*voir* [BGPS], [DPL1, 2], [Go1], [Gé4]) et a déjà reçu des réponses dans un certain nombre de cas ([GLPS], [Gé1, 2, 3], [Go2], [Gé-Go]).

Notons tout d'abord que, si l'on s'intéresse à la régularité microlocale de v près de $(x'_0, \xi'_0) \in T^* \mathbb{R}^r \setminus 0$, seule intervient la régularité microlocale de u près de $F_{x'_0, \xi'_0} = \{(x'_0, x'', \xi'_0, 0), |x''| \leqq R\}$, où R est assez grand par rapport aux dimensions du support de u. En particulier, si P est elliptique près de cet ensemble, on en déduit que $v \in H^{s+1}(x'_0, \xi'_0)$. Dans le cas général, on s'attend à ce que le gain de régularité sur v soit d'autant plus grand que le symbole principal p de P ne s'annule pas trop sur $F_{x'_0, \xi'_0}$. En ce sens, la situation la plus simple correspond à la condition de transversalité

(0.2) $$\partial p/\partial x'' \neq 0 \quad \text{sur } F_{x'_0,\, \xi'_0} \cap \{p=0\}.$$

On a montré dans [Gé-Go] que, si p est réel et vérifie (0.2), alors $v \in H^{s+1/2}(x'_0, \xi'_0)$; on peut vérifier que ce résultat est optimal [Gé3].

Dans des situations plus dégénérées, on dispose d'une analyse complète des opérateurs du type $P = p(x'', D_{x'})$ (*voir* [GLPS], [Gé1]), qui montre que, pour $\delta \in]0, 2[$, une condition nécessaire et suffisante pour que $v \in H^{s+\delta/2}(x'_0, \xi'_0)$ pour toute distribution u vérifiant (0.1) est

(0.3) $$m\{\rho \in F_{x',\, \xi'},\ |p(\rho)| \leqq \varepsilon\} \leqq C\varepsilon^{\delta},$$

pour tout (x', ξ') dans un voisinage de (x'_0, ξ'_0).

Du point de vue des singularités des applications différentiables, des estimations telles que (0.3) ont été étudiées (dans le domaine complexe) par F. Loeser [Lo]. Le meilleur exposant δ intervenant dans (0.3) est bien sûr relié à l'ordre d'annulation de p sur l'ensemble $\{p=0\}$ sur $F_{x'_0,\, \xi'_0}$.

Néanmoins il représente une mesure plus précise des singularités de p. Quelques points élémentaires sur cette question sont brièvement présentés dans un appendice, à la fin de cet article. Le théorème suivant montre que cette mesure des singularités est pertinente pour notre problème dans le cas d'un opérateur pseudodifférentiel général :

THÉORÈME 1. — *Soit* P *un opérateur pseudodifférentiel d'ordre* 1 *sur* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^d$, *de symbole principal p, et soit* $(x'_0, \xi'_0) \in T^*\mathbb{R}^r \setminus 0$.

(i) *On suppose qu'il existe un voisinage* U *de* (x'_0, ξ'_0), *un réel* $\delta \in]0, 2[$, *et une constante* C *tels que, pour* R *assez grand,*

(H_δ) $$\forall (x', \xi') \in U, \qquad m\{x'',\ |x''\leqq R,\ |p(x', x'', \xi', 0)| \leqq \varepsilon\} \leqq C\varepsilon^{\delta}.$$

Alors, si u est à support compact et vérifie

$$u \in H^s \qquad \text{et} \qquad Pu \in H^{s-\sigma} \quad \text{avec } \sigma \in [0, 1[,$$

on a

$$\int u\, dx'' \in H^{s+\gamma}(x'_0, \xi'_0),$$

avec $\gamma = \delta \min(1-\sigma, 1/2)/2$. *De plus, on a l'inégalité*

$$\left\| \chi(x', D')\left(\int u\, dx''\right)\right\|_{s+\gamma} \leqq C'(\|Pu\|_{s-\sigma})^{\delta/2}(\|u\|_s)^{1-\delta/2} + C'\|u\|_s,$$

où χ *est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre* 0 *elliptique en* (x'_0, ξ'_0).

(ii) *On suppose qu'il existe un voisinage* U *de* (x'_0, ξ'_0) *tel que*

$$(\mathrm{H}_0+) \qquad \forall (x', \xi') \in \mathrm{U}, \qquad m\{x'', p(x', x'', \xi', 0) = 0\} = 0.$$

Alors, si (u_j) *est une suite bornée de* H^s *(avec* $\operatorname{supp} u_j$ *compact) telle que* $\mathrm{P}u_j$ *reste dans un compact de* H^{s-1}, $\int u_j\, dx''$ *reste dans un compact de* H^s *près de* (x'_0, ξ'_0).

Si l'on fait $\sigma = 0$ dans (i), on constate que le gain de régularité sur la moyenne v sous l'hypothèse (0.1) est $\delta/4$, donc inférieur au gain prévu par l'étude du cas $\mathrm{P} = p(x'', \mathrm{D}_{x'})$. Ce phénomène (qui intervient seulement pour $\sigma \leqq 1/2$) se rattache dans la preuve que nous donnons au « Principe d'Incertitude », et peut d'autre part être illustré dans le cas $\delta = 1$ par l'exemple suivant :

$$r = d = 1, \qquad \mathrm{P} = \mathrm{D}_{x''} - ix''\,\mathrm{D}_{x'}, \qquad u(x) = \varphi(x) \int f(x' - y')/(2y' - ix''^2)\, dy',$$

où $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty$ vaut 1 près de 0, $f \in \mathrm{L}^2$, de transformée de Fourier nulle pour $\xi' < 0$. Par une transformation de Fourier en x', on constate que $u \in \mathrm{H}^{1/4}$ près de $(0, x'', 1, 0)$ tandis que $\int u\, dx'' \in \mathrm{H}^{1/2}(0, 1)$ et pas mieux en général. Notons que p n'étant pas réel, cet exemple ne contredit pas le résultat de [Gé-Go] cité plus haut.

Pour un autre exposant δ, le gain γ donné par le théorème 1 peut sans doute être amélioré lorsque $\sigma < 1/2$, sous des hypothèses supplémentaires sur le symbole de p. En revanche, dans le cadre plus souple de la compacité, on peut montrer que l'assertion (ii) du théorème 1 est optimale.

La preuve du théorème 1 est basée sur l'usage de la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI), qui constitue un procédé de microlocalisation particulièrement bien adapté à l'opération de moyennisation, comme en témoigne la formule (1.2). Dans la section 1, nous en rappelons la définition et montrons comment la régularité microlocale H^s d'une distribution se lit sur la décroissance de certaines normes L^2 à poids de sa transformée de FBI dans le domaine complexe.

Après avoir étudié, en section 2, quelques propriétés de ces normes, nous vérifions en section 3 que la transformation de FBI entrelace l'action d'un opérateur pseudodifférentiel à la multiplication par son symbole principal (au premier ordre). Ces préparations permettent de donner en section 4 la démonstration du théorème 1, suivant le même plan que dans [GLPS].

Il se trouve que le théorème 1 peut s'interpréter comme un résultat général de régularité sur la solution *u elle-même*, dans un espace de Sobolev 2-microlocal au sens de J.-M. Bony [B] : c'est l'objet du théorème 2, énoncé à la fin de la section 5. Ce théorème assure que, si p ne s'annule pas trop sur les feuilles d'une variété involutive V, la condition (0.1) fait gagner γ dérivées sur *u à condition* de consentir à perdre suffisamment de dérivées « *tangentes à* V ». La section 5 est consacrée à quelques rappels sur les espaces 2-microlocaux et à la démonstration du théorème 2.

Nous présentons en section 6 deux illustrations du théorème 2. La première concerne la sous-ellipticité de certains systèmes surdéterminés d'ordre 1. Supposons que le symbole p vérifie la condition

$$\sum_{|\alpha| \leqq N} |\partial_{x''}^{\alpha} p(x_0, \xi_0)| \neq 0. \tag{0.4}$$

Cette condition peut s'interpréter comme une condition sur le système

$$L = (D_{x_1''}, \ldots, D_{x_d''}, P)$$

qui est plus forte que la condition de Hörmander [H3] au rang $N+1$, puisque p n'intervient qu'une fois dans les crochets. Si p est réel, on sait [K] que L est hypoelliptique en (x_0, ξ_0) et les méthodes de Fefferman-Phong [FP] ou de Bolley-Camus-Nourrigat [BCN] assurent que $Lu \in L^2(x_0, \xi_0)$ entraîne $u \in H^{1/N+1}(x_0, \xi_0)$, ce qui est optimal. Si p est *complexe*, ces méthodes ne s'appliquent plus. Par ailleurs, l'absence d'hypothèse supplémentaire sur p ne permet pas d'utiliser les travaux récents de J. Nourrigat [N] sur l'hypoellipticité maximale. Nous prouvons néanmoins au théorème 6.1 que $Lu \in L^2(x_0, \xi_0)$ entraîne $u \in H^{(1/2N+1)-\varepsilon}(x_0, \xi_0)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

La seconde illustration du théorème 2 concerne le passage à la limite faible dans le produit de deux suites bornées de L^2. Il est bien connu que, dans une telle situation, le passage à la limite est possible si, près de chaque point de l'espace, l'une ou l'autre des suites reste dans un compact de L^2. On peut raffiner cette condition en supposant que, près de chaque point du fibré cotangent, l'une ou l'autre des suites reste dans un compact de L^2. Un tel résultat est à rapprocher du théorème de compacité par compensation de L. Tartar [T]. Dans le cas étudié ici, les suites peuvent être toutes deux non compactes en certains points du cotangent, mais on suppose qu'il existe une variété involutive V par rapport à laquelle les défauts de compacité de ces deux suites sont de natures différentes et en quelque sorte complémentaires. L'une de ces deux suites est en effet compacte modulo un gain de dérivées tangentielles à V (c'est le cadre du théorème 2), l'autre n'est compacte que du point de vue des dérivées tangentielles à V. Nous montrons au théorème 6.3 qu'alors le passage à la limite faible est possible dans le produit. Ce résultat peut être rapproché de celui de F. Golse [Go1]. Nous espérons revenir sur ce problème dans un prochain travail.

Remerciements

Ce travail doit beaucoup aux conseils de G. Lebeau, et je tiens à lui en exprimer ma vive gratitude. Je remercie également S. Alinhac, F. Golse, N. Lerner, F. Loeser et G. Métivier pour leurs suggestions fructueuses. ■

1. Espaces de Sobolev et transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer

Soit u une distribution à support compact sur $\mathbb{R}^n$. La transformée de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI) de u, dans sa version la plus standard, est définie par la formule suivante (*voir* par exemple [H4, chap. 9]) :

$$\mathrm{T}u(z, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\lambda(z-y)^2/2)\, u(y)\, dy$$

pour $z \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \geqq 1$ étant un paramètre destiné à tendre vers $+\infty$.

La fonction $\mathrm{T}u$ est entière par rapport à z, et si z reste dans un compact de $\mathbb{C}^n$, on vérifie aisément qu'elle satisfait à l'inégalité

$$(1.1) \qquad |\mathrm{T}u(z, \lambda)| \leqq \mathrm{C}\lambda^{\mathrm{M}} \exp[\lambda((\mathrm{Im}\, z)^2 - d(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{supp}\, u)^2)/2]$$

pour un certain entier M.

Notons que cette transformation se comporte très bien vis-à-vis de l'opération de moyennisation, puisqu'on a la formule élémentaire

$$(1.2) \qquad \mathrm{T}\left(\int u\, dx''\right)(z', \lambda) = (\lambda/2\pi)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{T}u(z', x'', \lambda)\, dx''.$$

Par ailleurs, on montre ([BI], [S]) que u est microlocalement analytique en $(x_0, \xi_0) \in \mathrm{T}^* \mathbb{R}^n \setminus 0$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$|\mathrm{T}u(z, \lambda)| \leqq \mathrm{C} \exp(\lambda(\mathrm{Im}\, z)^2/2 - \varepsilon\lambda)$$

pour tout élément z d'un voisinage de $z_0 = x_0 - i\xi_0$ dans $\mathbb{C}^n$.

De même, la croissance de $\mathrm{T}u$ par rapport à λ décrit les régularités C^∞ et Gevrey de u (*voir* [L]); par exemple, $u \in \mathrm{C}^\infty(x_0, \xi_0)$ si et seulement si, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, on a

$$|\mathrm{T}u(z, \lambda)| \leqq \mathrm{C}_{\mathrm{N}} \lambda^{-\mathrm{N}} \exp(\lambda(\mathrm{Im}\, z)^2/2)$$

pour tout élément z d'un voisinage de $z_0 = x_0 - i\xi_0$ dans $\mathbb{C}^n$.

Dans cette section, nous nous proposons de décrire comment la croissance de $\mathrm{T}u$ rend également compte de la régularité H^s de u.

PROPOSITION 1.1. — (i) *La distribution u est H^s en (x_0, ξ_0) si et seulement s'il existe un voisinage ω de $z_0 = x_0 - i\xi_0$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que :*

$$(1.3) \qquad \int_1^\infty \lambda^{3n/2 + 2s - 1} (|\mathrm{T}u|_{\lambda, \omega})^2\, d\lambda < +\infty.$$

(ii) *Si (u_j) est une suite bornée de distributions à supports compacts, u_j reste dans un compact de H^s près de (x_0, ξ_0) si et seulement s'il existe un voisinage ω de $z_0 = x_0 - i\xi_0$*

dans $\mathbb{C}^n$ *tel que :*

$$(1.3)' \qquad \int_\rho^\infty \lambda^{3n/2+2s-1}(|\mathrm{T}u_j|_{\lambda,\omega})^2 d\lambda \to 0 \qquad \text{si} \quad \rho \to +\infty, \textit{ uniformément en } j.$$

Remarques 1.2. — (1) Compte tenu de l'inégalité (1.1), la borne inférieure en λ de l'intégrale dans (1.3) n'importe pas; la condition (1.3) porte seulement sur le comportement asymptotique en λ de la norme L^2 à poids $|\mathrm{T}u|_{\lambda,\omega}$.

(2) On peut montrer que la proposition 1.1 se généralise à toutes les transformations de FBI introduites par Sjöstrand [S, § 7], la norme $|\,.\,|_{\lambda,\omega}$ devant alors être modifiée selon la formule

$$|v|_{\lambda,\omega,\varphi} = \left(\int_\omega |v(z)|^2 \exp(-2\lambda\varphi(z))\,|dz\wedge d\bar{z}|\right)^{1/2},$$

φ étant la fonction poids associée à la transformation. On obtient ainsi une formulation invariante par transformation canonique complexe. Nous ne l'utiliserons pas dans cet article.

Preuve de la propositon 1.1. — Nous prouvons seulement l'assertion (i), et laissons au lecteur le soin de vérifier que l'assertion (ii) se démontre par la même méthode.

(*a*) *Localisation en espace.* — Notons $\gamma_s(u)$ le cône ouvert de $\mathbb{R}^n\diagdown\{0\}$ formé des ξ_0 admettant un voisinage conique Γ pour lequel

$$(1.4) \qquad \int_\Gamma \langle\xi\rangle^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

Nous allons prouver dans ce paragraphe que l'assertion (i) est entraînée par le lemme suivant :

LEMME 1.3. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\xi_0 \in \gamma_s(u)$.

(ii) *Il existe un voisinage* V *de* ξ_0 *dans* $\mathbb{R}^n\diagdown\{0\}$ *tel que* (1.3) *ait lieu avec* $\omega = \mathbb{R}^n - i\mathrm{V}$.

Supposons en effet le lemme 1.3 prouvé. Alors $u\in\mathrm{H}^s(x_0, \xi_0)$ si et seulement s'il existe $\chi\in\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi(x_0)\neq 0$ et $\xi_0\in\gamma_s(\chi u)$, c'est-à-dire

$$(1.4) \qquad \int_1^\infty \lambda^{3n/2+2s-1}(|\mathrm{T}(\chi u)|_{\lambda,\omega})^2 d\lambda < +\infty, \qquad \omega = \mathbb{R}^n - i\mathrm{V}, \quad \xi_0\in\mathrm{V}.$$

Dans ce cas (1.4) est *a fortiori* vraie avec $\omega = \mathrm{U} - i\mathrm{V}$, où U est un voisinage relativement compact de x_0 près duquel χ vaut 1. Alors le support de $(1-\chi)u$ ne rencontre pas l'adhérence de U, et l'estimation (1.1) entraîne

$$(1.5) \qquad \forall z\in\mathrm{U}-i\mathrm{V}, \qquad |\mathrm{T}u(z,\lambda) - \mathrm{T}(\chi u)(z,\lambda)| \leqq \mathrm{C}\exp(\lambda(\mathrm{Im}\,z)^2/2 - \varepsilon\lambda).$$

On en déduit (1.3), avec $\omega = \mathrm{U} - i\mathrm{V}$.

Inversement, si (1.3) a lieu, soit $\chi \in C_0^\infty(\operatorname{Re}\omega)$ valant 1 près de x_0. Pour comparer Tu à $T(\chi u)$ sur tout $\mathbb{R}^n$, on introduit le « paquet d'onde » au sens de Cordoba-Fefferman [C-F] suivant la formule

$$\text{(1.6)} \qquad W u(x, \xi, \lambda) = \exp(-\lambda |\xi|^2/2)\, T u(x - i\xi, \lambda),$$

c'est-à-dire

$$W u(x, \xi, \lambda) = \int \exp(-\lambda (x-y)^2/2 + i\lambda (x-y).\xi)\, u(y)\, dy.$$

En écrivant la formule d'inversion de Fourier pour χ, on obtient :

$$W(\chi u)(x, \xi, \lambda) = (\lambda/2\pi)^n \int W u(x, \zeta, \lambda) \exp(i\lambda x.(\xi-\zeta))\, \hat{\chi}(\lambda(\xi-\zeta))\, d\zeta.$$

En utilisant la décroissance rapide à l'infini de $\xi \to \exp(ix.\xi)\hat{\chi}(\xi)$, on en déduit

$$\int_{\operatorname{Re}\omega - i V} |W(\chi u)(x, \xi, \lambda)|^2\, dx\, d\xi$$

$$\leqq C \int_\omega |W u(x, \xi, \lambda)|^2\, dx\, d\xi + 0(\lambda^{-\infty}) \qquad \text{si} \quad -V \subset\subset \operatorname{Im}\omega.$$

L'usage de l'estimation (1.1) sous la forme

$$\text{(1.7)} \qquad |W f(x, \xi, \lambda)| \leqq C \lambda^M \exp(-\lambda\, d(x, \operatorname{supp} f)^2/2)$$

nous permet de remplacer $\operatorname{Re}\omega$ par $\mathbb{R}^n$ dans l'estimation ci-dessus et de retrouver ainsi (1.4), *i. e.* $u \in H^s(x_0, \xi_0)$.

(*b*) *Localisation en fréquence : preuve du lemme* 1.3. — Nous allons vérifier que W « localise » aussi bien en fréquence qu'en espace, c'est-à-dire que l'on peut établir une estimation du type (1.7), où, dans le second membre, x est remplacé par sa variable duale et supp f est remplacé par une ensemble relié au spectre singulier de f.

Précisément, la transformée de Fourier en x de $W u$ n'est autre que

$$G u(\zeta, \xi, \lambda) = (2\pi/\lambda)^{n/2} \exp(-\lambda(\xi - \zeta/\lambda)^2/2)\, \hat{u}(\zeta)$$

de sorte que, par la formule de Plancherel,

$$\text{(1.8)} \qquad (|T u|_{\lambda,\, \mathbb{R}^n - iV})^2 = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} d\zeta \int_V d\xi \exp(-\lambda(\xi - \zeta/\lambda)^2)\, |\hat{u}(\zeta)|^2.$$

Notons d'abord que la contribution du domaine $\{|\zeta| \leqq 1\}$ à l'intégrale ci-dessus est exponentiellement petite en λ pour toute distribution à support compact u.

Nous avons donc à étudier la convergence de l'intégrale

$$\mathrm{J}=\int_1^{\infty}\lambda^{n/2-1}\int_{|\zeta|\geqq 1}\lambda^{2s}\,\mathrm{G_V}(\zeta,\lambda)\,|\hat{u}(\zeta)|^2\,d\zeta\,d\lambda,$$

(1.9) où

$$\mathrm{G_V}(\zeta,\lambda)=\int_{\mathrm{V}}\exp(-\lambda(\xi-\zeta/\lambda)^2)\,d\xi,$$

avec $\xi_0\in\mathrm{V}$ et $\mathrm{V}\subset\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

LEMME 1.4. — *Soit* V′ *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ *contenant l'adhérence de* V, *et soient* $\Gamma=\bigcup_{t\geqq 1}t\mathrm{V}$, $\Gamma'=\bigcup_{t\geqq 1}t\mathrm{V}'$. *Il existe des constantes* $\mathrm{K}>0$, $\varepsilon>0$ *telles que, pour tout* $\lambda\geqq 1$, *pour tout* $\zeta\in\mathbb{R}^n$, $|\zeta|\geqq 1$, *on ait les inégalités suivantes :*

$$\lambda^{2s}\,\mathrm{G_V}(\zeta,\lambda)\leqq \mathrm{K}\,\lambda^{-n/2}\,|\zeta|^{2s}\,1_{\Gamma'}(\zeta)\,\mathrm{G}_{\lambda\mathrm{V}'}(\lambda\zeta,1)+\mathrm{K}\exp(-\varepsilon(\lambda+|\zeta|^2/\lambda)) \tag{1.10}$$

$$\lambda^{-n/2}\,|\zeta|^{2s}\,1_{\Gamma}(\zeta)\,\mathrm{G}_{\lambda\mathrm{V}}(\lambda\zeta,1)\leqq \mathrm{K}\,\lambda^{2s}\,\mathrm{G}_{\mathrm{V}'}(\zeta,\lambda)+\mathrm{K}\exp(-\varepsilon(\lambda^2+|\zeta|^2)). \tag{1.11}$$

Preuve du lemme 1.4. — Notons V″ un ouvert tel que $\mathrm{V}\subset\subset\mathrm{V}''\subset\subset\mathrm{V}'$.

Si $\zeta/\lambda\notin\mathrm{V}''$, alors, pour tout $\xi\in\mathrm{V}$,

$$|\xi-\zeta/\lambda|^2\geqq\varepsilon(1+|\zeta|/\lambda)^2$$

et (1.10), (1.11) sont vérifiées trivialement grâce au second terme du membre de droite.

Si $\zeta/\lambda\in\mathrm{V}''$, alors $1_{\Gamma'}(\zeta)=1$, $|\zeta|\geqq c\lambda$ pour un $c>0$ et, posant $r=d(\mathrm{V}'',\partial\mathrm{V}')$,

$$\lambda^{-n/2}\,|\zeta|^{2s}\,\mathrm{G}_{\lambda\mathrm{V}'}(\lambda\zeta,1)\geqq\lambda^{n/2}(c\lambda)^{2s}\int_{|\alpha|\leqq r}\exp(-\lambda^2\,|\alpha|^2)\,d\alpha\geqq c'\,\lambda^{2s-n/2},$$

tandis que

$$\lambda^{2s}\,\mathrm{G_V}(\zeta,\lambda)\leqq\lambda^{2s}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\lambda\,|\xi|^2)\,d\xi\leqq \mathrm{C}\,\lambda^{2s-n/2},$$

ce qui donne (1.10).

De même, puisque $|\zeta|\leqq \mathrm{C}\lambda$,

$$\lambda^{-n/2}\,|\zeta|^{2s}\,\mathrm{G}_{\lambda\mathrm{V}}(\lambda\zeta,1)\leqq \mathrm{C}'\,\lambda^{2s+n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\lambda^2\,|\xi|^2)\,d\xi\leqq \mathrm{C}''\,\lambda^{2s-n/2},$$

tandis que

$$\lambda^{2s}\,\mathrm{G}_{\mathrm{V}'}(\zeta,\lambda)\geqq\lambda^{2s}\int_{|\alpha|\leqq r}\exp(-\lambda\,|\alpha|^2)\,d\alpha\geqq c\,\lambda^{2s-n/2},$$

pour un $c>0$, ce qui donne (1.11). ■

Revenons à la preuve du lemme 1.3. D'après le lemme 1.4, la convergence de l'intégrale J définie en (1.9) est, quitte à modifier légèrement le voisinage V, équivalente à celle de

$$\int_\Gamma \left\{ \int_1^\infty G_{\lambda V}(\lambda\zeta, 1)\, d\lambda/\lambda \right\} |\zeta|^{2s} |\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta \tag{1.12}$$

avec $\Gamma = \bigcup_{t \geqq 1} t\mathrm{V}$.

Estimons la quantité entre accolades; on peut supposer que V est de la forme

$$\mathrm{V} = \{\xi \in \gamma,\ a < |\xi| < b\},$$

γ étant un cône ouvert de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b > a > 0$.
Alors $\Gamma = \{\xi \in \gamma,\ |\xi| > a\}$ et

$$\int_1^\infty G_{\lambda V}(\lambda\zeta, 1)\, d\lambda/\lambda = \int_\Gamma \exp(-(\xi-\zeta)^2) \left\{ \int_1^\infty 1_{\{\xi \in \lambda V\}}(\lambda)\, d\lambda/\lambda \right\} d\xi$$
$$= \operatorname{Log}(b/a) \int_\Gamma \exp(-(\xi-\zeta)^2)\, d\xi$$

et cette dernière quantité est uniformément majorée lorsque $\zeta \in \mathbb{R}^n$, et uniformément minorée par $c_1 > 0$ lorsque $d(\zeta, \Gamma^c) \geqq c_2 > 0$.

On en conclut que la convergence de l'intégrale (1.12) est équivalente, quitte à modifier légèrement V, à celle de

$$\int_\Gamma |\zeta|^{2s} |\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta, \tag{1.13}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1.3 et, compte tenu de (*a*), de la proposition 1.1 (i). ■

2. Estimations L^2 à poids dans le domaine complexe

Dans cette section, on se fixe un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$ et on se propose d'établir deux inégalités concernant les normes $|\,.\,|_{\lambda, \omega}$ sur $\mathcal{O}(\Omega)$, pour $\omega \subset\subset \Omega$. La première s'apparente aux inégalités de Cauchy; la seconde permet de contrôler en norme L^2 la trace sur le domaine réel d'une fonction holomorphe dont on connaît la norme $|\,.\,|_\lambda$ près du réel.

2.1. Estimation de dérivées. — Pour $1 \leqq j \leqq n$, on pose

$$L_{\lambda, j} = \exp(\lambda (\operatorname{Im} z)^2)\, \partial/\partial z_j \exp(-\lambda (\operatorname{Im} z)^2) = \partial/\partial z_j + i\lambda \operatorname{Im} z_j.$$

Proposition 2.1. — *Soient* $\omega \subset\subset \Omega$, *et* $a > 0$. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *il existe une constante* C_α *telle que*

$$\forall \lambda \geqq 1, \quad \forall v \in \mathcal{O}(\Omega), \qquad |L_\lambda^\alpha v|_{\lambda, \omega} \leqq C_\alpha \lambda^{|\alpha|/2} |v|_{\lambda, \omega_\lambda} \tag{2.1}$$

pour tout ouvert ω_λ *tel que* $d(\omega, \omega_\lambda^c) \geqq a\lambda^{-1/2}$.

Preuve. — Notons $Z_{\lambda, j} = \lambda^{-1/2} L_{\lambda, j}$. Puisque v est holomorphe, on a

$$Z_\lambda^\alpha \bar{Z}_\lambda^\alpha (|v|^2) = |Z_\lambda^\alpha v|^2 + \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} Z_\lambda^\beta v (\lambda^{-1/2} \partial)^{\alpha-\beta} \bar{Z}_\lambda^\alpha \bar{v}. \tag{2.2}$$

En remarquant que

$$[\lambda^{-1/2} \partial_k, \bar{Z}_{\lambda, j}] = -1/2\, \delta_{kj} \text{ (symbole de Kronecker)} \tag{2.3}$$

et que $\bar{v}$ est antiholomorphe, on peut écrire (2.2) sous la forme

$$Z_\lambda^\alpha \bar{Z}_\lambda^\alpha (|v|^2) = |Z_\lambda^\alpha v|^2 + \sum_{\beta < \alpha} c_{\alpha\beta} |Z_\lambda^\beta v|^2.$$

En inversant le système triangulaire ci-dessus, on aboutit à

$$|Z_\lambda^\alpha v|^2 = \sum_{\beta \leqq \alpha} c_{\alpha\beta} Z_\lambda^\beta \bar{Z}_\lambda^\beta (|v|^2) \tag{2.4}$$

avec d'autres constantes $c_{\alpha\beta}$.

Soit alors $\chi_\lambda \in C_0^\infty(\omega_\lambda)$ positive ou nulle telle que

$$\chi_\lambda = 1 \text{ sur } \omega; \qquad |\partial^\beta \bar{\partial}^\gamma \chi_\lambda| \leqq C_{\beta\gamma} \lambda^{(|\beta|+|\gamma|)/2} \qquad \text{pour tous multiindices } \beta, \gamma. \tag{2.5}$$

Il vient, d'après l'identité (2.4),

$$|Z_\lambda^\alpha v|_{\lambda, \omega}^2 \leqq \int |Z_\lambda^\alpha v|^2 \chi_\lambda \exp(-\lambda (\operatorname{Im} z)^2) |dz \wedge d\bar{z}|$$

$$\leqq C_\alpha \sup_{\beta \leqq \alpha} \left| \int Z_\lambda^\beta \bar{Z}_\lambda^\beta (|v|^2) \chi_\lambda \exp(-\lambda (\operatorname{Im} z)^2) |dz \wedge d\bar{z}| \right|.$$

Mais

$$Z_\lambda^\beta \bar{Z}_\lambda^\beta = \lambda^{-|\beta|} \exp(\lambda (\operatorname{Im} z)^2) \partial^\beta \bar{\partial}^\beta \exp(-\lambda (\operatorname{Im} z)^2)$$

donc, en intégrant par parties,

$$\int Z_\lambda^\beta \bar{Z}_\lambda^\beta (|v|^2) \chi_\lambda \exp(-\lambda (\operatorname{Im} z)^2) |dz \wedge d\bar{z}|$$

$$= \lambda^{-|\beta|} \int |v|^2 \partial^\beta \bar{\partial}^\beta (\chi_\lambda) \exp(-\lambda (\operatorname{Im} z)^2) |dz \wedge d\bar{z}|$$

ce qui, compte tenu de (2.5), conduit à l'inégalité cherchée. ■

Remarque 2.2. — On généralise sans difficulté la proposition 2.1 aux normes $|\,.\,|_{\lambda, \omega, \varphi}$ introduites à la remarque 1.2.2, φ étant C^∞ sur Ω, à valeurs réelles. Les champs $L_{\lambda, j}$

étant modifiés trivialement, (2.3) doit être remplacée par

$$[\lambda^{-1/2}\,\partial_k,\ \bar{Z}_{\lambda,\,j}] = -2\,\partial^2\varphi/\partial z_j\,\partial\bar{z}_k. \tag{2.3}'$$

On inverse alors un système triangulaire en les $Z_\lambda^\alpha v\,\bar{Z}_\lambda^\beta\,\bar{v}$ pour obtenir

$$|Z_\lambda^\alpha v|^2 = \sum_{\beta\leqq\alpha,\ \gamma\leqq\alpha} c_{\alpha\beta\gamma}(z)\,Z_\lambda^\beta\,\bar{Z}_\lambda^\gamma(|v|^2), \tag{2.4}$$

où $c_{\alpha\beta\gamma}\in C^\infty(\Omega)$.

2.2. Estimation de traces sur le réel.

Proposition 2.3. — *Soient* U, V, *deux ouverts bornés de* $\mathbb{R}^n$ *tels que* $U \subset\subset V$, $V \subset \Omega$, *et soit* $b>0$. *Il existe une constante* C *telle que*

$$\forall\lambda\geqq 1,\quad \forall v\in\mathcal{O}(\Omega),\qquad \left(\int_U |v(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqq C\,\lambda^{n/4}\,|v|_{\lambda,\,\omega_\lambda}, \tag{2.6}$$

où $\omega_\lambda = V + i\,B(0,\ b\,\lambda^{-1/2})$.

Preuve. — En recouvrant U par des cubes contenus dans Ω, et en utilisant la densité des sommes de produits tensoriels de fonctions holomorphes d'une variable dans l'espace des fonctions holomorphes sur un polydisque, on se ramène au cas où $n=1$, $U=]-1,\ 1[$ et $V=]-1-\alpha,\ 1+\alpha[$.

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 2.4. — *Pour tout réel* $\beta\in[0,\ \alpha]$, *pour toute fonction continue sousharmonique positive* f *définie près de* $R=[-1-\alpha,\ 1+\alpha]+i\,[-\beta,\ \beta]$, *on a l'inégalité :*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leqq 1/2\int_{\partial R} f(z)\,|dz|. \tag{2.7}$$

Preuve du lemme 2.4. — On définit sur R une fonction h de la manière suivante :

si $y\in[-\beta,\ \beta]$, $|x|\leqq\alpha\,|y|/\beta+1$, $h(x+iy)=1-|y|/\beta$;

si $|x|\in[1,\ 1+\alpha]$, $|y|\leqq\beta\,(|x|-1)/\alpha$, $h\,(x+iy)=1-(|x|-1)/\alpha$.

La fonction h est positive ou nulle sur R et vérifie à l'intérieur de R

$$\Delta h \leqq -2/\beta\,1_{]-1,\,1[}\,dx.$$

Puisque h est nulle sur ∂R, la formule de Green donne alors, si ν est la normale extérieure à R,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leqq -(\beta/2)\int_R f\,\Delta h\,dx\,dy$$

$$= -(\beta/2)\left(\int_R h\,\Delta f\,dx\,dy + \int_{\partial R} f\,\partial h/\partial\nu\,|dz|\right) \leqq -(\beta/2)\int_{\partial R} f\,\partial h/\partial\nu\,|dz|.$$

Par ailleurs $\partial h/\partial \nu$ vaut $-1/\alpha$ sur les bords verticaux et $-1/\beta$ sur les bords horizontaux; puisque $\alpha \geqq \beta$, on en déduit l'inégalité (2.7). ■

Revenons à la démonstration de la proposition 2.3. On applique le lemme 2.4 à $f=|v|^2$, $\beta \in [0, b\lambda^{-1/2}]$ pour λ assez grand (le cas où λ reste borné ne pose bien sûr aucune difficulté). En multipliant (2.7) par $\exp(-\lambda\beta^2)$ et en intégrant de 0 à $b\lambda^{-1/2}$ par rapport à β, on obtient

$$\lambda^{-1/2}\int_{-1}^{1} |v(x)|^2\,dx \leqq C(|v|_{\lambda,\,\omega_\lambda})^2 + C\,r, \tag{2.8}$$

où

$$\omega_\lambda =]-1-\alpha, 1+\alpha[+i]-b\lambda^{-1/2}, b\lambda^{-1/2}[\tag{2.9}$$

et où r est la contribution des bords verticaux :

$$r = \sum_{+,\,-}\int_0^{b\lambda^{-1/2}} \exp(-\lambda\beta^2)\int_{-\beta}^{\beta} |v(\pm(1+\alpha)+iy)|^2\,dy\,d\beta,$$

soit

$$r \leqq C\lambda^{-1/2}\sum_{+,\,-}\int_{]-b\lambda^{-1/2},\, b\lambda^{-1/2}[} \exp(-\lambda y^2)\,|v(\pm(1+\alpha)+iy)|^2\,dy. \tag{2.10}$$

Dans les estimations (2.8) et (2.10), remplaçons α par $\alpha' \in [\alpha/2, \alpha]$ et moyennons par rapport à α'. On obtient l'inégalité (2.6) cherchée. ■

Remarque 2.5. — La présence du facteur $\lambda^{-1/2}$ dans l'estimation (2.10) permet de raffiner l'inégalité (2.6) dans sa version monodimensionnelle en permettant que α dépende de λ comme $a\lambda^{-1/2}$, $a \geqq b$, ω_λ étant toujours donné par (2.9).

De même, la version multidimensionnelle énoncée dans la proposition 2.3 peut être améliorée lorsque, par exemple, U et V sont des parallélépipèdes tels que $d(\mathrm{U}, \mathrm{V}^c) \geqq a\lambda^{-1/2}$, $a \geqq b$.

Nous ne ferons pas usage de cette amélioration dans la suite.

COROLLAIRE 2.6. — *Sous les hypothèses de la proposition* 2.3, *pour tout multi-indice* α, *il existe une constante* C_α *telle que*

$$\forall \lambda \geqq 1,\quad \forall v \in \mathcal{O}(\Omega),\qquad \left(\int_{\mathrm{U}} |\partial^\alpha v(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqq C_\alpha \lambda^{n/4+|\alpha|/2}\,|v|_{\lambda,\,\omega_\lambda}. \tag{2.11}$$

Preuve. — Avec les notations de la proposition 2.3, on applique l'inégalité (2.6) à $\partial^\alpha v$ et à $\omega'_\lambda = \mathrm{V}' + i\,\mathrm{B}(0, b'\lambda^{-1/2})$, où $\mathrm{U} \subset\subset \mathrm{V}' \subset\subset \mathrm{V}$, $0 < b' < b$.

$$\left(\int_{\mathrm{U}} |\partial^\alpha v(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqq C\lambda^{n/4}\,|\partial^\alpha v|_{\lambda,\,\omega'_\lambda}. \tag{2.12}$$

Par ailleurs, si $w \in \mathcal{O}(\Omega)$, on a, d'après la formule donnant $L_{\lambda, j}$,

$$|\partial_j w|_{\lambda, \omega'_\lambda} \leqq |L_{\lambda, j} w|_{\lambda, \omega'_\lambda} + b' \lambda^{1/2} |w|_{\lambda, \omega'_\lambda} \leqq C \lambda^{1/2} |w|_{\lambda, \omega''_\lambda}$$

d'après la proposition 2.1, avec $\omega''_\lambda = V'' + i B(0, b'' \lambda^{-1/2})$, $V' \subset\subset V'' \subset\subset V$, et $b' < b'' < b$.

Par récurrence sur $|\alpha|$, on en déduit que

$$\forall \alpha, \qquad |\partial^\alpha w|_{\lambda, \omega'_\lambda} \leqq C_\alpha \lambda^{|\alpha|/2} |w|_{\lambda, \omega_\lambda}$$

et on conclut en reportant dans (2.12) avec $w = v$. ■

3. Transformation de FBI et opérateurs pseudodifférentiels

Dans cette section, nous montrons comment les propriétés de localisation en espace et en fréquence de la transformation de FBI permettent de réduire, au premier ordre, l'action d'un opérateur pseudodifférentiel à la multiplication par son symbole sur l'espace cotangent identifié au domaine complexe par l'application

$$(3.1) \qquad \begin{cases} T^* \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n \\ (x, \xi) \to x - i\xi \end{cases}$$

Ce fait a déjà été observé par Cordoba-Fefferman [C-F] et Sjöstrand [S].

Donnons d'abord une définition adaptée au contexte. On désigne toujours par Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Définition 3.1. — *Une application linéaire* $A : L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n) \to C(\Omega \times [1, +\infty[)$ *est dite d'ordre* m *si, pour toute décomposition* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^d$, $0 \leqq d < n$, *pour tous* $\omega' \subset\subset \mathbb{C}^r$, $U'' \subset\subset \mathbb{R}^d$, $\omega \subset\subset \Omega$ *contenant l'adhérence de* $\omega' \times U''$, *pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}^n$, *et pour tout* $N \in \mathbb{N}$, *il existe une constante* C_N *telle que*

$$\forall \lambda \geqq 1, \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n), \qquad \operatorname{supp} u \subset K,$$

$$(3.2) \qquad \int |A u(z', x'', \lambda)|^2 \exp(-\lambda (\operatorname{Im} z')^2) \, |dz' \wedge d\bar{z}'| \, dx'' \leqq C_N (\lambda^{d/4+m} |T u|_{\lambda, \omega} + \lambda^{-N} \|u\|_0)^2.$$

Les estimations de la section précédente fournissent une première illustration de cette définition. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, posons

$$(3.3) \qquad A_\alpha u(z, \lambda) = L^\alpha_\lambda T u(z, \lambda)$$

$$(3.4) \qquad B_\alpha u(z, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\lambda (z-y)^2/2) (\operatorname{Re} z - y)^\alpha u(y) \, dy.$$

Lemme 3.2. — (*i*) *L'application* A_α *est d'ordre* $|\alpha|/2$ *sur* $\mathbb{C}^n$.

(ii) *L'application* B_α *est d'ordre* $-|\alpha|/2$ *sur* $\mathbb{C}^n$.

Preuve du lemme 3.2. — (i) Pour $d=0$, l'estimation (3.2) sur $A_\alpha u$ est donnée par la proposition 2.1.

Si $d>0$, on écrit $\alpha=(\alpha', \alpha'')$, et l'on remarque que $A_\alpha u(z', x'', \lambda)$ est combinaison linéaire de termes du type

$$\partial^{\beta''} L_\lambda^{\alpha'} T u(z', x'', \lambda), \qquad \beta'' \leqq \alpha''.$$

Il suffit alors d'appliquer le corollaire 2.6 à $v(z'')=L_\lambda^{\alpha'} T u(z', z'', \lambda)$ dans $\mathbb{C}^d$, puis la proposition 2.1 dans $\mathbb{C}^r$.

(ii) On exprime $B_\alpha u$ à l'aide des $A_\beta u$, $\beta \leqq \alpha$. Pour cela, observons que

$$L_{\lambda, j}(e^{-\lambda(z-y)^2/2}(\operatorname{Re} z-y)^\alpha)=e^{-\lambda(z-y)^2/2}(\alpha_j(\operatorname{Re} z-y)^{\alpha-e_j}/2-\lambda(\operatorname{Re} z-y)^{\alpha+e_j})$$

ou encore

$$L_{\lambda, j} B_\alpha=\alpha_j B_{\alpha-e_j}/2-\lambda B_{\alpha+e_j}.$$

Par récurrence, on en déduit une formule du type

$$\lambda^{-|\alpha|/2} A_\alpha=(-1)^{|\alpha|} \lambda^{|\alpha|/2} B_\alpha+\sum_{\beta<\alpha} c_{\alpha\beta} \lambda^{|\beta|/2} B_\beta.$$

En inversant le système triangulaire ci-dessus et en utilisant (i), on obtient le résultat annoncé. ■

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de cette section, qui est très proche du théorème de [CF] (*voir* aussi Lascar-Sjöstrand [S]).

Proposition 3.3. — *Soit* P *un opérateur pseudodifférentiel d'ordre* 1 *sur* $\mathbb{R}^n$, *de symbole* p. *Alors il existe une application* R *d'ordre* 1/2 *sur* $\{z \in \mathbb{C}^n, \operatorname{Im} z \neq 0\}$ *telle que*

$$T(Pu)(z, \lambda)=p(x, \lambda\xi) T u(z, \lambda)+R u(z, \lambda), \tag{3.5}$$

où l'on a posé $z=x-i\xi$.

Remarques 3.4. — (1) Compte tenu de la proposition 2.3, le terme $p(x, \lambda\xi) T u(z, \lambda)$ intervenant dans (3.5) est d'ordre 1. C'est donc aussi le cas de $T(Pu)(z, \lambda)$. La transformation de FBI conjugue en fait le calcul pseudodifférentiel (analytique) sur $\mathbb{R}^n$ à un calcul pseudodifférentiel à grand paramètre agissant sur des espaces de fonctions holomorphes avec poids, comme l'a montré Sjöstrand [S].

(2) Dans le cas où P admet un symbole principal homogène p_1, (3.5) peut encore s'écrire

$$T(Pu)(z, \lambda)=\lambda p_1(x, \xi) T u(z, \lambda)+R'(z, \lambda), \qquad \text{avec } R' \text{ d'ordre } 1/2. \tag{3.6}$$

(3) Le décalage de 1/2 (et non pas 1) entre le terme prépondérant de (3.5) et le reste R est une expression du « Principe d'Incertitude »; dans le cas d'une procédure de

microlocalisation légèrement différente, fondée sur un découpage en « boîtes » de l'espace des phases $T^* \mathbb{R}^n$, il était déjà mis en évidence par Hörmander dans [H2].

Preuve de la proposition 3.3. — Notons Q le transposé de P, et q son symbole, de sorte que

$$q(x, \xi) = p(x, -\xi) + r(x, \xi), \tag{3.7}$$

où r est un symbole d'ordre 0. On peut écrire, avec les notations de la section 1 :

$$W(Pu)(x, \xi, \lambda) = \int K(x, y, \xi, \lambda)\, e^{i\lambda(x-y).\xi}\, u(y)\, dy, \tag{3.8}$$

$$K(x, y, \xi, \lambda) = \exp(-i\lambda(x-y).\xi)\, Q(y, D_y)(\exp(-\lambda(x-y)^2/2 + i\lambda(x-y).\xi)). \tag{3.9}$$

Nous allons étudier le comportement de $K(x, y, \xi, \lambda)$ lorsque λ tend vers l'infini, localement uniformément en (x, y, ξ), $\xi \neq 0$. On a

$$K(x, y, \xi, \lambda) = (\lambda/2\pi)^n \iint e^{i\lambda(y-y').(\zeta+\xi)}\, e^{-\lambda(x-y')^2/2}\, q(y, \lambda\zeta)\, dy'\, d\zeta. \tag{3.10}$$

Le symbole q n'étant pas supposé analytique, nous préférons rejeter la partie imaginaire de la phase de cette intégrale oscillante dans son amplitude. Du fait que

$$|\partial_{y'}^{\alpha}(e^{-\lambda(x-y')^2/2})| \leqq C_\alpha \lambda^{|\alpha|/2}$$

uniformément en (x, y'), on déduit que l'amplitude

$$a(x, y, y', \zeta, \lambda) = e^{-\lambda(x-y')^2/2}\, q(y, \lambda\zeta)$$

vérifie

$$|\partial_{y'}^{\alpha}\partial_{\zeta}^{\beta} a| \leqq C_{\alpha\beta} \lambda^{|\alpha|/2+|\beta|} (1+\lambda|\zeta|)^{1-|\beta|}$$

uniformément en x, y, y', ζ. En particulier, pour $|\zeta| \geqq \varepsilon > 0$,

$$|\partial_{y'}^{\alpha}\partial_{\zeta}^{\beta} a| \leqq C_{\alpha\beta} \lambda^{1+|\alpha|/2} |\zeta|, \tag{3.11}$$

tandis que, pour $|\zeta| \leqq M$ et $\beta = 0$,

$$|\partial_{y'}^{\alpha} a| \leqq C_\alpha \lambda^{1+|\alpha|/2}. \tag{3.12}$$

La phase $\Phi(y', \zeta, y, \xi)$ stationne par rapport aux variables d'intégration en $y' = y$, $\zeta = -\xi$. Par les intégrations par parties habituelles (*voir* par exemple [H4], théorèmes 7.7.1 et 7.8.2), on montre à l'aide de (3.11) que la contribution d'un voisinage de l'infini en (y', ζ) à l'intégrale (3.10) est à décroissance rapide en λ, localement uniformément en (y, ξ), uniformément en x. La contribution de ce terme à $T(Pu)$ par l'intermédiaire de (3.8) est donc d'ordre arbitrairement petit. On peut donc, dans (3.10), remplacer $q(y, \lambda\zeta)$ par $\varphi(y, y', \zeta, \xi)\, q(y, \lambda\zeta)$, où φ est C^∞, à support compact en (y', ζ) pour tout (y, ξ), et vaut 1 près de $y' = y$, $\zeta = -\xi$. Par ailleurs, on élimine la contribution d'un voisinage de

$\zeta=0$ de la façon suivante : dans un tel voisinage, la phase Φ ne stationne pas en y', donc les mêmes intégrations par parties ([H4], théorème 7.7.1), cette fois seulement en y', et l'estimation (3.12), montrent que la contribution de ce terme à $T(Pu)$ est d'ordre arbitrairement petit.

On est ainsi ramené à étudier l'asymptotique d'une intégrale du type

$$K(x, y, \xi, \lambda)=(\lambda/2\pi)^n \iint e^{i\lambda(y-y').(\zeta+\xi)} a(x, y, y', \zeta, \xi, \lambda)\, dy'\, d\zeta \tag{3.13}$$

où a est à support compact en (y', ζ) et vérifie, localement uniformément en (x, y, y', ξ, ζ),

$$|\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{\zeta}^{\beta} a| \leqq C_{\alpha\beta} \lambda^{1+|\alpha|/2}. \tag{3.14}$$

Le théorème de la phase stationnaire ([H4], théorème 7.7.7) donne alors, pour tout N,

$$\begin{aligned} K(x, y, \xi, \lambda) \\ = \sum_{0 \leqq j \leqq N} \lambda^{-j}/j!\,(\partial_{y'} . D_{\zeta})^j (a(x, y, y', \xi, \zeta, \lambda))_{|y'=y,\, \zeta=-\xi} + R_N(x, y, \xi, \lambda), \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$|R_N(x, y, \xi, \lambda)| \leqq C_N \lambda^{1-N/2} \quad \text{localement uniformément en } (x, y, \xi). \tag{3.16}$$

La contribution de R_N à $T(Pu)$ dans l'estimation (3.2) est donc majorée par $(C_N \lambda^{1-N/2} \|u\|_0)^2$, N pouvant être choisi arbitrairement grand. Il reste à estimer chaque terme du développement (3.15). Le terme de rang j dans ce développement s'écrit

$$K_j=\lambda^{j/2} \sum_{|\alpha|=j} P_\alpha(\lambda^{1/2}(y-x))\, e^{-\lambda(x-y')^2/2}\, D_\xi^\alpha q(y, -\lambda\xi),$$

où l'on a posé

$$\partial_X^\alpha(e^{-X^2/2})=P_\alpha(X)\, e^{-X^2/2}.$$

En développant $D_\xi^\alpha q(y, -\xi)$ près de $y=x$, on trouve que K_j est combinaison linéaire de termes du type

$$K_{\alpha\beta\gamma}=\lambda^{(j+|\gamma|)/2}(x-y)^{\gamma+\beta}\, e^{-\lambda(x-y)^2/2}\, \partial_x^\beta D_\xi^\alpha q(x, -\lambda\xi), \qquad |\gamma| \leqq j,\ |\alpha|=j,$$

modulo un reste dont la décroissance en λ peut être rendue arbitrairement petite à condition de pousser le développement de Taylor assez loin. La contribution d'un tel terme à $T(Pu)$ dans l'estimation (3.2) sera donc majorée par $(C_N \lambda^{-N} \|u\|_0)^2$, N pouvant être choisi arbitrairement grand.

Enfin, la contribution de $K_{\alpha\beta\gamma}$ à $T(Pu)$ compte tenu de (3.8) est égale à

$$\lambda^{(j+|\gamma|)/2}\, \partial_x^\beta D_\xi^\alpha q(x, -\lambda\xi)\, B_{\gamma+\beta} u(x-i\xi, \lambda),$$

où Bu a été défini en (3.4); d'après le lemme 3.2, ce terme est d'ordre $1-(j+|\beta|)/2$. Modulo un terme d'ordre 1/2, le seul terme à conserver est donc

$$q(x, -\lambda\xi)\, T u(x-i\xi, \lambda)$$

ce qui, compte tenu de (3.7), achève la démonstration. ■

4. Démonstration du théorème 1

Les hypothèses ne faisant intervenir que le symbole principal de P, on peut supposer que $s=0$.

(i) Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, à support compact, telle que $Pu \in H_{loc}^{-\sigma}(\mathbb{R}^n)$; on peut bien sûr supposer Pu à support compact. Estimons la transformée de FBI de $\int u dx''$ près de $z'_0 = x'_0 - i\xi'_0$, avec $\xi'_0 \neq 0$, à l'aide de la formule (1.2). Introduisons pour cela un petit paramètre ε, à fixer plus loin, et écrivons

$$\text{(4.1)} \quad T\left(\int u dx''\right)(z', \lambda) = T_0(z', \lambda) + T_1(z', \lambda) + 0(\exp(\lambda(\operatorname{Im} z')^2/2 - \alpha\lambda), \qquad \alpha > 0,$$

$$T_i(z', \lambda) = (\lambda/2\pi)^{d/2} \int_{\Omega_i} Tu(z', x'', \lambda)\, dx'', \qquad i=0, 1,$$

(4.2) avec

$$\Omega_0 = \{x'' \in \mathbb{R}^d, \, |x''| \leqq R, \, |p(x', x'', \xi', 0)| \leqq \varepsilon\},$$
$$\Omega_1 = \{x'' \in \mathbb{R}^d, \, |x''| \leqq R, \, |p(x', x'', \xi', 0)| > \varepsilon\},$$

R étant fixé suffisamment grand par rapport au diamètre du support de u.

L'hypothèse (H_δ) permet d'écrire, compte tenu de l'inégalité de Schwarz,

$$|T_0(z', \lambda)|^2 \leqq C\lambda^d \varepsilon^\delta \int_{|x''| \leqq R} |Tu(z', x'', \lambda)|^2 dx''$$

et, en utilisant la proposition 2.3,

$$\text{(4.3)} \qquad (|T_0|_{\lambda, \omega'})^2 \leqq C\lambda^{3d/2} \varepsilon^\delta (|Tu|_{\lambda, \omega})^2,$$

si ω' est un voisinage de z'_0 dans $\mathbb{C}^r \diagdown \mathbb{R}^r$, et $\omega' \times \{|x''| \leqq R\} \subset \omega \subset\subset \mathbb{C}^n \diagdown \mathbb{R}^n$.

Évaluons maintenant T_1. Par l'inégalité de Schwarz,

$$|T_1(z', \lambda)|^2 \leqq (\lambda/2\pi)^d \int_{\Omega_1} dx''/|p(x', x'', \xi', 0)|^2 \times \int_{|x''| \leqq R} |p(x', x'', \xi', 0)|^2 \, |Tu(z', x'', \lambda)|^2 dx''$$

soit, en utilisant à nouveau (H_δ) et le fait que $\delta < 2$,

$$|T_1(z', \lambda)|^2 \leqq C\lambda^d \varepsilon^{\delta - 2} \int_{|x''| \leqq R} |p(x', x'', \xi', 0)|^2 \, |Tu(z', x'', \lambda)|^2 dx''.$$

La proposition 3.4 et la remarque 3.4.2 permettent d'écrire

$$|p|\ |\mathrm{T}\,u| \leqq (|\mathrm{T}(\mathrm{P}\,u)| + |\mathrm{R}|)/\lambda,$$

avec R d'ordre 1/2; on en déduit, utilisant à nouveau la proposition 2.3 :

$$(4.4)\qquad |\mathrm{T}_1|_{\lambda,\,\omega'} \leqq \mathrm{C_N}\,\lambda^{3\,d/4}\,\varepsilon^{\delta/2-1}\,\{\lambda^{-1}\,|\mathrm{T}(\mathrm{P}\,u)|_{\lambda,\,\omega} + \lambda^{-1/2}\,|\mathrm{T}\,u|_{\lambda,\,\omega} + \lambda^{-\mathrm{N}}\,\|u\|_0\}$$

En reportant (4.3) et (4.4) dans (4.1), on obtient

$$(4.5)\qquad \left|\mathrm{T}\left(\int u\,dx''\right)\right|_{\lambda,\,\omega'} \leqq \mathrm{C_N}\,\lambda^{3\,d/4}\,\varepsilon^{\delta/2}\,\{(\lambda\varepsilon)^{-1}\,|\mathrm{T}(\mathrm{P}\,u)|_{\lambda,\,\omega} + (1+(\lambda\varepsilon^2)^{-1/2})\,|\mathrm{T}\,u|_{\lambda,\,\omega} + \lambda^{-\mathrm{N}}\,\varepsilon^{-2}\,\|u\|_0\}.$$

On choisit alors $\varepsilon = \mathrm{M}\,\lambda^{-1/2}$ si $\sigma \leqq 1/2$, $\varepsilon = \mathrm{M}\,\lambda^{\sigma-1}$ si $\sigma \in [1/2,\, 1[$, avec $\mathrm{M} \geqq 1$ à choisir plus loin; on obtient

$$(4.6)\qquad \lambda^{3\,r/4}\left|\mathrm{T}\left(\int u\,dx''\right)\right|_{\lambda,\,\omega'} \leqq \mathrm{C_N}\,\lambda^{3\,n/4}\,\mathrm{M}^{\delta/2}\,\lambda^{-\delta\min(1-\sigma,\ 1/2)/2}\,(\mathrm{M}^{-1}\,\lambda^{-2\,\sigma}\,|\mathrm{T}(\mathrm{P}\,u)|_{\lambda,\,\omega} + |\mathrm{T}\,u|_{\lambda,\,\omega} + \lambda^{-\mathrm{N}}\,\|u\|_0).$$

En choisissant N assez grand, et en utilisant la proposition 1.1 (i), on obtient l'estimation

$$\left\|\chi(x',\,\mathrm{D}')\left(\int u\,dx''\right)\right\|_{\gamma} \leqq \mathrm{C}\mathrm{M}^{\delta/2}\,(\mathrm{M}^{-1}\,\|\mathrm{P}\,u\|_{-\sigma} + \|u\|_0),$$

et on conclut en choisissant $\mathrm{M} = 1 + \|\mathrm{P}\,u\|_{-\sigma}/\|u\|_0$.

Prouvons maintenant l'assertion (ii). Remarquons tout d'abord qu'un argument élémentaire de compacité permet d'affirmer que l'hypothèse (H_{0+}) équivaut en fait à

$$\sup_{(x',\,\xi')\in \mathrm{U}'} m\,\{x''\in\mathbb{R}^d,\ |x''| \leqq \mathrm{R},\ |p(x',\,x'',\,\xi',\,0)| \leqq \varepsilon\} \to 0 \qquad \text{si}\quad \varepsilon\to 0,$$

où U' est un voisinage compact de $(x'_0,\,\xi'_0)$. Supposons en effet le contraire et posons, pour alléger les notations, $y = (x',\,\xi')$, $f(x'',\,y) = p(x',\,x'',\,\xi',\,0)$.

Il existerait alors $\alpha > 0$, une suite (ε_k) tendant vers 0 et une suite (y_k) de U' tendant vers y tels que

$$\forall k,\qquad m\,\{x'',\ |f(x'',\,y_k)| \leqq \varepsilon_k\} \geqq \alpha.$$

Notant $\mathrm{E} = \bigcap_h \bigcup_{k\geqq h} \{x'',\ |f(x'',\,y_k)| \leqq \varepsilon_k\}$, on aurait $m(\mathrm{E}) \geqq \alpha$ et $f(x'',\,y) = 0$ pour tout x'' dans E, ce qui est absurde.

On écrit alors les formules (4.1) à (4.5) pour chaque u_j, en remplaçant ε^δ par $\mu(\varepsilon)$, où $\mu(\varepsilon)\to 0$ si $\varepsilon\to 0$, et à l'exception de l'estimation de $\int_{\Omega_1} dx''/|p|^2$ qui se fait plus grossièrement :

$$\int_{\Omega_1} dx''/|p|^2 \leqq C\varepsilon^{-2}.$$

La formule (4.5) s'écrit alors

$$(4.5)' \quad \left| T\left(\int u_j\, dx''\right)\right|_{\lambda,\,\omega'}$$
$$\leqq C_N \lambda^{3\,d/4} \{(\lambda\varepsilon)^{-1} |T(Pu_j)|_{\lambda,\,\omega} + (\mu(\varepsilon)+(\lambda\varepsilon^2)^{-1})^{1/2} |Tu_j|_{\lambda,\,\omega} + \lambda^{-N}\varepsilon^{-2}\}.$$

Par hypothèse, compte tenu de la proposition 1.1, les fonctions

$$\psi_j(\lambda) = \lambda^{3\,n/4} |Tu_j|_{\lambda,\,\omega};$$
$$\varphi_j(\lambda) = \lambda^{3\,n/4} (\lambda^{-1} |T(Pu_j)|_{\lambda,\,\omega} + \lambda^{-1/2} |Tu_j|_{\lambda,\,\omega} + \lambda^{-N})$$

vérifient respectivement (pour N fixé assez grand) :

$$(4.7) \qquad \sup_j \int_1^\infty \psi_j(\lambda)^2\, d\lambda/\lambda < +\infty$$

$$(4.8) \qquad \sup_j \int_\rho^\infty \varphi_j(\lambda)^2\, d\lambda/\lambda \to 0 \quad \text{si} \quad \rho \to +\infty.$$

On choisit alors

$$\varepsilon = \varepsilon(\lambda, j) = \left(\int_\lambda^\infty \varphi_j(\lambda')^2\, d\lambda'/\lambda'\right)^{1/4}.$$

L'estimation (4.5)' devient, en posant $\mu_j(\lambda) = \mu(\varepsilon(j, \lambda))$:

$$(4.6)' \quad \lambda^{3\,r/4} \left| T\left(\int u_j\, dx''\right)\right|_{\lambda,\,\omega'} \leqq C\left(\mu_j(\lambda)^{1/2}\, \psi_j(\lambda) + \varphi_j(\lambda) \left(\int_\lambda^\infty \varphi_j(\lambda')^2\, d\lambda'/\lambda'\right)^{-1/4}\right).$$

De (4.8) on déduit que

$$\sup_j \mu_j(\lambda) \to 0 \quad \text{si} \quad \lambda \to +\infty,$$

et donc, d'après (4.7),

$$\sup_j \int_\rho^\infty \mu_j(\lambda)\, \psi_j(\lambda)^2\, d\lambda/\lambda \to 0 \quad \text{si} \quad \rho \to +\infty.$$

D'autre part,

$$\int_\rho^\infty \varphi_j(\lambda)^2 \left(\int_\lambda^\infty \varphi_j(\lambda')^2\, d\lambda'/\lambda'\right)^{-1/2} d\lambda/\lambda = 2\left(\int_\rho^\infty \varphi_j(\lambda)^2\, d\lambda/\lambda\right)^{1/2}$$

qui, par (4.8), tend vers 0 si ρ tend vers $+\infty$, uniformément en j.

Compte tenu de (4.6)′ et de la proposition 1.1 (ii), ceci achève la démonstration de l'assertion (ii), donc du théorème 1. ■

5. Régularité 2-microlocale

Dans cette section, nous montrons comment le théorème 1 conduit également à un résultat de régularité sur la fonction u *elle-même*, et pas seulement sur sa moyenne par rapport à x''. Pour cela, nous utilisons la classe d'espaces suivante, introduite par Hörmander [H1] et utilisée par divers auteurs, notamment dans l'étude des problèmes au bord.

Définition 5.1. — *Soient s, k deux réels. On pose*

$$H^{s,k}(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^d)=\{u\in S'(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^d),\ \langle\xi\rangle^s\langle\xi''\rangle^k\hat{u}(\xi',\xi'')\in L^2(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^d)\}$$

et l'on munit cet espace de la norme (hilbertienne)

$$\|u\|_{s,k}=\left(\int\langle\xi\rangle^{2s}\langle\xi''\rangle^{2k}|\hat{u}(\xi',\xi'')|^2\,d\xi'\,d\xi''\right)^{1/2}.$$

Il est classique (*voir* par exemple [H4], lemme 20.1.9) que les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre m sont bornés de $H^{s,k}$ dans $H^{s-m,k}$. Ceci permet notamment de microlocaliser l'appartenance à $H^{s,k}$. On remarque alors que, en dehors de la variété involutive $V=\{\xi''=0\}$, $H^{s,k}$ coïncide avec l'espace de Sobolev usuel H^{s+k}.

Introduisons enfin la notation standard $H^{s,-\infty}=\bigcup_{k\in\mathbb{R}}H^{s,k}$.

La proposition suivante fait le lien entre la propriété de moyennisation mise en évidence au théorème 1 et un résultat de régularité dans un espace $H^{s,-\infty}$.

Proposition 5.2. — *Soit* P *un opérateur pseudodifférentiel d'ordre* 1 *sur* $\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^d$, *et soient* $s\in\mathbb{R}$, $\sigma\in[0,1[$, $\gamma>0$, $\theta\in[0,1]$, $(x'_0,\xi'_0)\in T^*\mathbb{R}^r\setminus 0$, $x''_0\in\mathbb{R}^d$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *Pour toute* $u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $Pu\in H^{s-\sigma}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *il existe* $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *telle que* $\varphi(x''_0)\neq 0$ *et* $\int\varphi\,u\,dx''\in H^{s+\gamma}(x'_0,\xi'_0)$.

(ii) *Pour toute* $u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $Pu\in H^{s-\sigma}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $u\in H^{s+\gamma,-\infty}(x'_0,x''_0,\xi'_0,0)$.

De plus, s'il existe un opérateur pseudodifférentiel χ *elliptique d'ordre* 0 *en* (x'_0,ξ'_0) *et une fonction* $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *telle que* $\varphi(x''_0)\neq 0$ *pour lesquels on a l'estimation*

$$\left\|\chi(x',D')\left(\int\varphi\,u\,dx''\right)\right\|_{s+\gamma}\leqq C\|u\|_s+C(\|Pu\|_{s-\sigma})^\theta(\|u\|_s)^{1-\theta}, \tag{5.1}$$

alors on peut conclure dans (ii) *que* $u\in H^{s+\gamma,k}(x'_0,x''_0,\xi'_0,0)$ *pour tout* $k<-d/2-\theta(1-\sigma)$.

Preuve. — On peut bien sûr supposer $s=0$. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) résulte clairement du

LEMME 5.3. — *Soit* $u \in \mathrm{H}^{t,\,-\infty}(x_0', x'', \xi_0', 0)\ \forall x''$, *à support compact. Alors* $\int u\, dx'' \in \mathrm{H}^t(x_0', \xi_0')$.

Preuve du lemme 5.3. — Un argument élémentaire de compacité en x'' assure qu'il existe un symbole $\chi(x', \xi)$ d'ordre 0, supporté dans un voisinage conique de $(x_0', (\xi_0', 0))$ tel que

(5.2) χ est elliptique en $(x_0', \xi_0', 0)$ et $v=\chi(x', \mathrm{D})\, u \in \mathrm{H}^{t,\,-\infty}(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^d)$.

Soit $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^r)$ valant 1 près de la projection du support de u sur $\mathbb{R}^d$.

Calculons

$$\int \varphi(x'')\, v(x', x'')\, dx'' = (2\pi)^{-n} \times \iint \hat{u}^1(\xi', y'') \left(\iint e^{i(x''-y'').\xi''} \varphi(x'')\, \chi(x', \xi', \xi'')\, dx''\, d\xi'' \right) d\xi'\, dy''$$

où $\hat{u}^1$ désigne la transformée de Fourier par rapport aux variables x'.

Le théorème de la phase stationnaire assure que

$$(2\pi)^{-d} \iint e^{i(x''-y'').\xi''} \varphi(x'')\, \chi(x', \xi', \xi'')\, dx''\, d\xi'' \sim \sum_{k \geqq 0} 1/k!\,(-\partial_{x''}.\mathrm{D}_{\xi''})^k (\varphi\chi)_{\,|\, x''=y'',\ \xi''=0}$$

au sens des développements asymptotiques de symboles en (x', y'', ξ').

Le terme de rang k du développement ci-dessus est combinaison linéaire de termes du type

$$\partial^\alpha \varphi(y'')\, \mathrm{D}_{\xi''}^\alpha\, \chi(x', \xi', 0), \qquad |\alpha| = k,$$

qui sont nuls si $k \geqq 1$ pour (x', y'') dans un voisinage du support de u. On en déduit que

$$\text{(5.3)} \qquad \int \varphi\, v\, dx'' = \chi(x', \mathrm{D}', 0) \left(\int u\, dx'' \right) \bmod \mathrm{H}^{+\infty}(x_0', \xi_0').$$

Par ailleurs la transformée de Fourier de $\int \varphi\, v\, dx''$ est égale à

$$(\varphi\, v)^\wedge(\xi', 0) = (2\pi)^{-d} \int \hat{\varphi}(-\xi'')\, \hat{v}(\xi', \xi'')\, d\xi''.$$

Or, par l'inégalité de Peetre,

$$\langle \xi' \rangle^t \leqq \mathrm{C}_t \langle \xi \rangle^t \langle \xi'' \rangle^{t^-}, \qquad \text{où} \quad t^- = \max(-t, 0).$$

L'inégalité de Schwarz donne alors, pour tout $k \in \mathbb{R}$,

$$\langle \xi' \rangle^t |(\varphi v)^\wedge (\xi', 0)| \leqq C\left(\int \langle \xi'' \rangle^{-2k+2t^-} |\hat{\varphi}(-\xi'')|^2 d\xi''\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\int \langle \xi \rangle^{2t} \langle \xi'' \rangle^{2k} |\hat{v}(\xi', \xi'')|^2 d\xi''\right)^{1/2},$$

donc, en prenant la norme L^2 par rapport à ξ', compte tenu de (5.2),

$$\int \varphi\, v\, dx'' \in H^t(\mathbb{R}^r).$$

Utilisant (5.3) et (5.2), on en déduit le résultat. ■

Par une application classique du théorème de Baire, l'hypothèse (i) entraîne l'estimation (5.1) avec $\theta = 1$. Il reste donc à prouver la deuxième partie du théorème. Soit donc u comme dans (ii), que l'on peut bien sûr supposer à support compact. Appliquons l'estimation (5.1) à la fonction $ue^{-ix''.\xi''}$. Il vient, en posant $u_1 = \varphi(x'')\chi(x', D')u$,

$$(5.5)\quad \left(\int |\hat{u}_1(\xi', \xi'')|^2 \langle \xi' \rangle^{2\gamma} d\xi'\right)^{1/2}$$

$$\leqq C(\|u\|_0 + (\|u\|_0)^{1-\theta}(\|Pu\|_{-\sigma} + \|[Q, e^{-ix''.\xi''}]u\|_0)^\theta,$$

où l'on a noté

$$Q = \langle D \rangle^{-\sigma} P.$$

L'opérateur Q est d'ordre $1-\sigma$, donc $[Q, e^{-ix''.\xi''}]$ est d'ordre $-\sigma$, en particulier borné sur L^2. Pour estimer sa norme lorsque $|\xi''|$ tend vers l'infini, remarquons que, si $Q = Q(x, D)$, on a

$$[Q, e^{-ix''.\xi''}] = e^{-ix''.\xi''} A(x, D),$$

avec

$$A(x, \zeta) = Q(x, \zeta', \zeta'' - \xi'') - Q(x, \zeta', \zeta'').$$

Nous prétendons que A vérifie les inégalités suivantes :

$$(5.6)\quad |\partial_x^\alpha \partial_\zeta^\beta A(x, \zeta)| \leqq C_{\alpha\beta} \langle \xi'' \rangle^{1-\sigma}.$$

En effet, les estimations (5.6) sont triviales si $|\beta| \geqq 1$, puisqu'alors $\partial_x^\alpha \partial_\zeta^\beta Q(x, \zeta)$ est une fonction bornée. Quitte à remplacer Q par $\partial_x^\alpha Q$, on peut donc supposer $\alpha = \beta = 0$. Alors (5.6) est évidente si $|\zeta| \leqq 2|\xi''|$, puisque $Q(x, \zeta)$ croît au plus comme $\langle \zeta \rangle^{1-\sigma}$; par ailleurs, si $|\zeta| \geqq 2|\xi''|$, on écrit

$$A(x, \zeta) = -\xi''.\int_0^1 \partial_{\zeta''} Q(x, \zeta', \zeta'' - t\xi'')\, dt,$$

et

$$|\partial_{\zeta''} Q(x, \zeta', \zeta''-t\xi'')| \leqq C(1+|\zeta'|+|\zeta''-t\xi''|)^{-\sigma} \leqq C'\langle \xi''\rangle^{-\sigma},$$

ce qui conduit à (5.6).

Il est classique (*voir* par exemple [H4], théorème 18.6.2) que les estimations (5.6) entraînent

$$\|A(x, D)u\|_0 \leqq C\langle \xi''\rangle^{1-\sigma}\|u\|_0.$$

L'estimation (5.5) devient alors

$$\left(\int |\hat{u}_1(\xi', \xi'')|^2 \langle \xi'\rangle^{2\gamma} d\xi'\right)^{1/2} \leqq C(\langle \xi''\rangle^{\theta(1-\sigma)}\|u\|_0+(\|Pu\|_{-\sigma})^{\theta}(\|u\|_0)^{1-\theta}),$$

soit, si $k < -d/2-\theta(1-\sigma)$,

$$(5.7)\quad \iint |\hat{u}_1(\xi', \xi'')|^2 \langle \xi'\rangle^{2\gamma}\langle \xi''\rangle^{2k} d\xi' d\xi'' \leqq C(\|u\|_0+(\|Pu\|_{-\sigma})^{\theta}(\|u\|_0)^{1-\theta})^2.$$

L'estimation (5.7) entraîne que $u_1 \in H^{\gamma, k}$ en tout point (x, ξ) tel que $\xi' \neq 0$, en particulier en $(x'_0, x''_0, \xi'_0, 0)$. Mais $u_1 = \varphi(x'')\chi(x', D')u$, donc s'écrit aussi $\psi(x, D)u$ modulo une distribution régulière en $(x'_0, x''_0, \xi'_0, 0)$, où ψ est pseudodifférentiel d'ordre 0, elliptique en $(x'_0, x''_0, \xi'_0, 0)$. L'existence d'une paramétrix microlocale de ψ achève la démonstration. ■

Le même type d'argument permet de traiter le cas limite de la compacité :

Proposition 5.2 *bis*. — *Soit* P *un opérateur pseudodifférentiel d'ordre* 1 *sur* $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^d$, *et soient* $(x'_0, \xi'_0) \in T^*\mathbb{R}^r \setminus 0$, $x''_0 \in \mathbb{R}^d$, *tels que* $p(x'_0, x''_0, \xi'_0, 0)=0$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *Pour toute suite* (u_j) *bornée dans* $H^s_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* Pu_j *reste dans un compact de* $H^{s-1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *il existe* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *telle que* $\varphi(x''_0) \neq 0$ *et* $\int \varphi u_j dx''$ *reste dans un compact de* H^s *près de* (x'_0, ξ'_0).

(ii) *Pour toute suite* (u_j) *bornée dans* $H^s_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* Pu_j *reste dans un compact de* $H^{s-1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, u_j *reste dans un compact de* $H^{s,k}$ *près de* $(x'_0, x''_0, \xi'_0, 0)$ *pour tout* $k < 0$.

Preuve. — Le fait que (ii) entraîne (i) est conséquence du lemme 5.3. Réciproquement, supposons (i) vérifiée avec, par exemple, $s=0$. Par une application classique du théorème de Baire dans l'espace de Banach des suites (u_j) bornées de L^2 telles que Pu_j reste dans un compact de H^{-1}, il existe une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ non nulle en x''_0 et un symbole $\chi(x', \xi')$ elliptique d'ordre 0 en (x'_0, ξ'_0) tels que, pour toute suite (u_j) de cet espace, la quantité $\chi(x', D')\left(\int \varphi u_j dx''\right)$ reste dans un compact de L^2.

En considérant, pour tout ξ'' dans $\mathbb{R}^d$, la suite $(u_j e^{-ix''.\xi''})$, on en déduit qu'il existe un voisinage conique Γ' de ξ'_0 et une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ non nulle en x''_0 tels que

$$\int_{\Gamma', |\xi'| \geqq R} |(\varphi u_j)^\wedge(\xi', \xi'')|^2 d\xi' \to 0 \qquad \text{si} \quad R \to \infty, \text{ uniformément en } j,$$

Γ' et φ étant indépendants de ξ''.

La suite (u_j) étant bornée dans L^2, la quantité

$$\sup_j \int_{\Gamma'} |(\varphi u_j)^\wedge(\xi', \xi'')|^2 d\xi'$$

est bornée en ξ'', et le théorème de convergence dominée entraîne que

$$\forall M > 0, \iint_{\xi' \in \Gamma', |\xi'| \geqq R, |\xi''| \leqq M} |(\varphi u_j)^\wedge(\xi', \xi'')|^2 d\xi' d\xi'' \to 0$$

si $R \to \infty$, uniformément en j, et l'on peut évidemment remplacer le domaine d'intégration de l'intégrale précédente par $\{\xi \in \Gamma, |\xi| \geqq R, |\xi''| \leqq M\}$ où Γ est un voisinage conique de $(\xi', 0)$ du type $\{\xi' \in \Gamma', |\xi''| \leqq c|\xi'|\}$.

En utilisant à nouveau que (φu_j) est bornée dans L^2, on conclut que, pour toute fonction $\psi = \psi(\xi'')$ continue positive tendant vers 0 à l'infini,

$$\iint_{\xi \in \Gamma, |\xi| \geqq R} \psi(\xi'') |(\varphi u_j)^\wedge(\xi', \xi'')|^2 d\xi' d\xi'' \to 0 \qquad \text{si} \quad R \to \infty, \text{ uniformément en } j,$$

ce qui achève la démonstration. ■

Joint à la proposition 5.2, le théorème 1 conduit à un résultat général de régularité. Nous allons l'énoncer en termes plus intrinsèques. Pour cela, nous introduisons les espaces de Sobolev à deux indices par rapport à une variété involutive, dans l'esprit de J.-M. Bony [B].

DÉFINITION 5.3. — *Soit* V *une sous-variété involutive conique de* $T^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. *Soient* $(q_1, \ldots, q_d)$ *un système d'équations de* V, *et* $Q_1, \ldots, Q_d$ *des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre* 1, *proprement supportés, de symbole principaux respectifs* $q_1, \ldots, q_d$. *Pour* $s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, *on dit qu'une distribution* u *sur un ouvert* Ω *appartient à* $H^{s,k}(V)$ *si*

pour tout $j \leqq k$, *pour toute suite* $(i_1, \ldots, i_j)$ *de* $\{1, \ldots, d\}$, $Q_{i_1} \ldots Q_{i_j} u \in H^s$

localement sur Ω. *Pour les autres valeurs réelles de* k, *l'espace* $H^{s,k}(V)$ *est défini par dualité et interpolation à partir des précédents. Les espaces ainsi définis ne dépendent pas du choix de* $(q_1, \ldots, q_d)$.

Remarques 5.4. — (1) Il est aisé de vérifier que les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre m opèrent de $H^{s,k}(V)$ dans $H^{s-m,k}(V)$, et que l'appartenance à $H^{s,k}(V)$ est une propriété microlocale. On pourra donc parler de l'espace $H^{s,k}(V; x_0, \xi_0)$ et, pour une suite (u_j), du fait de rester dans un compact de $H^{s,k}(V)$ près de (x_0, ξ_0).

(2) Lorsque $V=\{\xi''=0\}$, on retrouve les espaces de la définition 5.1. Nous allons voir que l'on peut toujours se ramener microlocalement à cette situation.

PROPOSITION 5.5. — *Soit* V *une sous-variété involutive conique de* $T^*\mathbb{R}^n\diagdown 0$, *et soit* $(x_0, \xi_0)\in V$.

(*a*) *Si* V *est de codimension* $d<n$, *et si en* (x_0, ξ_0), *le champ de vecteurs radial n'est pas orthogonal à l'espace tangent à* V *pour la forme symplectique, soit* χ *une transformation canonique près de* (x_0, ξ_0) *envoyant* V *sur* $\{\xi''=0\}$, *et soit* F *un opérateur intégral de Fourier elliptique d'ordre* 0 *et associé à* χ. *Alors* $u\in H^{s,k}(V; x_0, \xi_0)$ *si et seulement si* $F u\in H^{s,k}(x_0, \xi_0)$ *au sens de la définition* 5.1.

(*b*) *Dans le cas général, soit* $(q_1, \ldots, q_d)$ *un système d'équations de* V, *et soit* V' *l'involutive de* $T^*(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x)\diagdown 0$ *définie par*

$$(t, x, \tau, \xi)\in V' \quad \text{si et seulement si } \forall i, \qquad \tau+q_i(x, \xi)=0.$$

Alors V' *satisfait les hypothèses de* (*a*) *au point* $(0, x_0, 0, \xi_0)$ *et* $H^{s,k}(V; x_0, \xi_0)$ *s'identifie aux éléments de* $H^{s,k}(V'; 0, x_0, 0, \xi_0)$ *indépendants de* t.

Nous laissons au lecteur la preuve de la proposition 5.5, basée sur les théorèmes de Darboux homogènes et d'Egorov ([H4], théorèmes 21.1.9 et 25.3.5).

Soit maintenant V une sous-variété involutive de $T^*(\mathbb{R}^n)\diagdown 0$. Si (x, ξ) appartient à V, on note $F_{x,\xi}$ la feuille bicaractéristique de V passant par (x, ξ). On se donne $(x_0, \xi_0)\in V$, un voisinage U de (x_0, ξ_0) dans V, et on fait choix d'une famille continue $m=m_{x,\xi}$ de densités strictement positives sur les variétés $U\cap F_{x,\xi}$. Le théorème 1 et les propositions 5.2, 5.2 *bis*, 5.5 entraînent alors immédiatement le

THÉORÈME 2. — *Soit* P *un opérateur pseudodifférentiel d'ordre* 1 *sur* $\mathbb{R}^n$, *caractéristique en* (x_0, ξ_0).

(i) *On suppose que le symbole principal* p *de* P *vérifie, pour* $\delta\in\,]0, 2[$,

$$(\mathrm{H}_\delta) \qquad \sup_{(x,\xi)\in U} m_{x,\xi}\{(y, \zeta)\in U\cap F_{x,\xi}, |p(y, \zeta)|\leqq\varepsilon\}\leqq C\varepsilon^\delta.$$

Alors, si $u\in H^s(x_0, \xi_0)$ *et* $P u\in H^{s-\sigma}(x_0, \xi_0)$ *avec* $\sigma\in[0, 1[$, *on a*

$$u\in H^{s+\gamma,k}(V; x_0, \xi_0)$$

avec $\gamma=\delta\min(1-\sigma, 1/2)/2$, *et* $k<-d/2-\gamma$.

(ii) *On suppose que le symbole principal* p *de* P *vérifie*

$$(\mathrm{H}_{0_+}) \qquad \forall (x, \xi)\in U, \qquad m_{x,\xi}\{(y, \zeta)\in U\cap F_{x,\xi}, p(y, \zeta)=0\}=0.$$

Alors, si (u_j) *est une suite bornée de* $H^s(x_0, \xi_0)$ *telle que* $P u_j$ *reste dans un compact de* H^{s-1} *près de* (x_0, ξ_0), u_j *reste dans un compact de* $H^{s,k}(V)$ *près de* (x_0, ξ_0) *pour tout* $k<0$.

Remarque 5.6. — Parfois l'hypothèse (H_δ) est encore réalisée en remplaçant V par une variété involutive W qui la contient; en d'autres termes, l'estimation (H_δ) n'est parfois due à la variation que *d'une partie des variables* décrivant une feuille isotrope de V; un exemple de cette situation est donné à l'appendice. Dans un tel cas, puisque la codimension d diminue, la limitation sur le second indice de régularité k est plus faible; comme d'autre part on a trivialement l'inclusion $H^{s,k}(W) \subset H^{s,k}(V)$ dès que $k < 0$, on peut améliorer la conclusion de l'assertion (i) dans le théorème ci-dessus comme suit : « $u \in H^{s+\gamma,k}(V; x_0, \xi_0)$ avec $\gamma = \delta \min(1-\sigma, 1/2)$ et $k < -d'/2 - \gamma$, où d' est la codimension minimale d'une involutive contenant V et vérifiant encore (H_δ) ». Cette remarque élémentaire nous sera utile au prochain paragraphe.

6. Applications

Nous présentons ici deux applications du théorème 2. L'une [qui utilise l'assertion (i)] concerne l'ordre de sous-ellipticité de certains systèmes, l'autre [qui utilise l'assertion (ii))] donne une condition de passage à la limite faible dans la suite produit de deux suites de fonctions bornées dans L^2 vérifiant des systèmes d'équations aux dérivées partielles satisfaisant à une condition générale de transversalité.

Dans les deux cas, on se donne des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1 proprement supportés $P, Q_1, \ldots, Q_d$ sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que les symboles principaux q_i des Q_i sont réels et vérifient $\{q_i, q_j\} = 0$ pour tous i, j. On note p le symbole principal de P.

On désigne comme d'habitude par H_q le champ hamiltonien d'une fonction $q = q(x, \xi)$ sur $T^* \mathbb{R}^n$.

THÉORÈME 6.1. — *Soit* $(x_0, \xi_0) \in T^* \mathbb{R}^n \setminus 0$ *tel que* $p(x_0, \xi_0) = 0$, $q_i(x_0, \xi_0) = 0$ *pour tout* i, *et soit* $\delta \in]0, 2[$.

On suppose que, pour un certain entier N,

$$\sum_{|\alpha| \leqq N} |H_q^\alpha p(x_0, \xi_0)| \neq 0 \tag{6.1}$$

Alors, pour $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, *les hypothèses* $P u \in L^2(x_0, \xi_0)$ *et* $Q_i u \in L^2(x_0, \xi_0)$, $1 \leqq i \leqq d$, *entraînent que* $u \in H^{1/(2N+1)-\varepsilon}(x_0, \xi_0)$ *pour tout* $\varepsilon > 0$.

Preuve. — Quitte à rajouter d coordonnées $t_1, \ldots, t_d$ et à remplacer Q_i par $D_{t_i} + Q_i$, microlocalisé près de $\tau_1 = \ldots = \tau_d = 0$, on peut supposer que $q_1, \ldots, q_d$ sont linéairement indépendantes près de $V = \{q_1 = \ldots = q_d = 0\}$. V est donc une variété involutive.

L'argument habituel de « bootstrap » ([H4], lemme 27.1.2) permet par ailleurs de supposer déjà que $u \in L^2(x_0, \xi_0)$. Alors l'hypothèse

$$Q_i u \in L^2(x_0, \xi_0) \quad \text{pour tout } i$$

signifie exactement que $u \in H^{0,1}(V; x_0, \xi_0)$ au sens de la définition 5.3.

D'autre part, d'après la proposition 5.5 et la proposition prouvée en appendice, l'hypothèse (6.1) assure l'existence d'une involutive de codimension 1 contenant V pour laquelle l'hypothèse $(H_{1/N})$ est réalisée. Le théorème 2 et la remarque 5.6 entraînent alors que

$$u \in H^{1/4N, k}(V) \quad \text{pour tout } k < -1/2 - 1/4N.$$

On utilise alors le lemme d'interpolation suivant :

LEMME 6.2. — *Soient $s > 0$, $r > 0$, $k > 0$; on a l'inclusion suivante :*

$$H^{s, k}(V; (x_0, \xi_0)) \cap H^{0, r}(V; (x_0, \xi_0)) \subset H^{sr/(r-k)}(x_0, \xi_0).$$

Preuve du lemme 6.2. — D'après la proposition 5.5, il suffit de montrer l'inclusion lorsque $V = \{\xi'' = 0\}$, auquel cas, après action d'un opérateur pseudodifférentiel, on est ramené à une inclusion entre espaces globaux sur $\mathbb{R}^n$.

Or, si $u \in H^{s, k}(\mathbb{R}^n) \cap H^{0, r}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\langle \xi \rangle^s \langle \xi'' \rangle^k \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n), \qquad \langle \xi'' \rangle^r \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Il suffit alors d'appliquer à $a = \langle \xi \rangle^s$ et $b = \langle \xi'' \rangle$ l'inégalité

$$a^{r/(r-k)} \leqq C_{k, r}(ab^k + b^r),$$

vraie pour tous $a > 0$, $b > 0$, $r > 0 > k$. ■

Terminons la preuve du théorème 6.1. Le lemme 6.2 assure que

$$u \in H^{\sigma_1}(x_0, \xi_0) \quad \text{pour tout } \sigma_1 < 1/(6N+1).$$

On peut alors à nouveau utiliser le théorème 2; d'une façon générale, si l'on sait que $u \in H^{\sigma}(x_0, \xi_0)$ avec $\sigma \in [0, 1/2]$, le théorème 2 donne

$$u \in H^{\sigma + 1/4N, k}(V; (x_0, \xi_0)) \quad \text{pour tout } k < -1/2 - 1/4N,$$

et le lemme 6.2 entraîne

$$u \in H^{\sigma'}(x_0, \xi_0) \quad \text{pour tout } \sigma' < (4N\sigma + 1)/(6N+1).$$

La suite définie par

$$\sigma_0 = 0, \; \sigma_{m+1} = (4N\sigma_m + 1)/(6N+1) \quad \text{pour tout } m$$

croît jusqu'à la valeur limite

$$\sigma_\infty = 1/(2N+1)$$

qui est toujours inférieure à 1/2. On a donc

$$u \in H^{\sigma}(x_0, \xi_0) \quad \text{pour tout } \sigma < \sigma_\infty. \quad ■$$

Avant de passer à la seconde application, donnons une définition. Rappelons que, si Q est un opérateur pseudodifférentiel sur $\mathbb{R}^n$ d'ordre 1 à symbole principal réel, et si $t \in \mathbb{R}$, on note $e^{it\mathrm{Q}}$ l'opérateur vérifiant

$$D_t(e^{it\mathrm{Q}}u) = \mathrm{Q}\, e^{it\mathrm{Q}}u$$

qui vaut l'identité pour $t=0$ (*voir* [H4], théorème 23.1.2).

DÉFINITION 6.2. — On se donne des opérateurs $Q_1, \ldots, Q_d$ comme ci-dessus. Soit (v_j) une suite bornée de L^2. On dit que (v_j) est $(Q_1, \ldots, Q_d)$-compacte si, pour tout k,

$$\|(e^{it\mathrm{Q}_k} - 1)\, v_j\|_0 \to 0 \qquad \text{si} \quad t \to 0, \text{ uniformément en } j.$$

Exemples. — (*a*) Si $(Q_i v_j)$ est bornée dans L^2, $1 \leqq i \leqq d$, alors (v_j) est $(Q_1, \ldots, Q_d)$-compacte.

(*b*) La notion de $(Q_1, \ldots, Q_d)$-compacité est évidemment microlocale; en se ramenant au cas où les q_i sont les équations d'une involutive V, on voit qu'elle est la version « limite » (quand $\varepsilon \to 0$) de la régularité $H^{0, \varepsilon}(V)$ définie au paragraphe précédent.

(*c*) Dans le cas où $q_i = \xi_i''$ (auquel on peut toujours se ramener d'après la proposition 5.5), on montre facilement que (v_j) est microlocalement $(Q_1, \ldots, Q_d)$-compacte près de (x_0, ξ_0) si et seulement s'il existe une troncature φ près de x_0 et un voisinage conique Γ de ξ_0 tels que

$$\int_{|\xi''| \geqq R} |(\varphi v_j)^\wedge (\xi', \xi'')|^2\, d\xi'\, d\xi'' \to 0 \qquad \text{si} \quad R \to \infty, \text{ uniformément en } j.$$

THÉORÈME 6.3. — *Soit (u_j) une suite bornée de L^2_{loc} telle que $u_j \to u$ faiblement et $P u_j$ reste localement dans un compact de H^{-1}.*

Soit par ailleurs (v_j) une suite localement $(Q_1, \ldots, Q_d)$-compacte telle que $v_j \to v$ faiblement.

On suppose que tout $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ tel que $p(x_0, \xi_0) = 0$ et $q_i(x_0, -\xi_0) = 0$ pour tout i, admet un voisinage U pour lequel

$$(\mathrm{H}'_{0+}) \qquad \forall (x, \xi) \in \mathrm{U}, \qquad m\{t \in \mathbb{R}^d, |t| \leqq r, p(\exp(\textstyle\sum t_i \mathrm{H}_{q_i'})(x, \xi)) = 0\} = 0,$$

pour $r > 0$ assez petit [où l'on a posé $q_i'(x, \xi) = q_i(x, -\xi)$].

Alors $u_j v_j \to uv$ au sens des distributions.

Preuve. — Quitte à remplacer u_j par $u_j - u$ et v_j par $v_j - v$, on peut supposer que $u = v = 0$.

Il suffit alors de montrer que, pour tout $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$, il existe un opérateur pseudodifférentiel A elliptique d'ordre 0 en (x_0, ξ_0) tel que

$$(\mathrm{A}\, u_j)\, v_j \to 0 \quad \text{au sens des distributions.}$$

Les seuls points (x_0, ξ_0) à étudier sont ceux près desquels ni u_j ni $\bar{v}_j$ ne restent *a priori* dans un compact de L^2, c'est-à-dire pour lesquels $p(x_0, \xi_0)=0$ et $q_i(x_0, -\xi_0)=0$ pour tout i.

En raisonnant comme dans la démonstration précédente, on se ramène au cas où $d<n$ et $q_i(x, \xi)=\xi_i''$ pour tout i.

Le théorème 2 (ii) entraîne alors que, pour un A comme ci-dessus et φ C^∞ à support compact,

$$(6.2) \qquad \forall M>0, \qquad \int_{|\xi''|\leqq M} |(\varphi A u_j)^\wedge(\xi)|^2 d\xi \to 0 \qquad \text{si} \quad j\to\infty.$$

Pour prouver le théorème, nous devons étudier la limite de la suite

$$(6.3) \qquad \int (A u_j)(x)\, v_j(x)\, \varphi(x)\, dx = (2\pi)^{-n} \int (\varphi A u_j)^\wedge(\xi)\, (\psi v_j)^\wedge(-\xi)\, d\xi,$$

où ψ est C^∞ à support compact et vaut 1 près du support de φ.

Dans la limite pour $j\to\infty$ de (6.3), v_j n'intervient que par son comportement microlocal près de $(x_0, -\xi_0)$. Une fois microlocalisé près de ce point, l'hypothèse sur (v_j) s'écrit

$$(6.4) \qquad \int_{|\xi''|\geqq M} |(\psi v_j)^\wedge(\xi)|^2 d\xi \to 0 \qquad \text{si} \quad M\to\infty, \text{ uniformément en } j.$$

On écrit alors

$$\int (\varphi A u_j)^\wedge(\xi)\, (\psi v_j)^\wedge(-\xi)\, d\xi = \int_{|\xi''|\leqq M} + \int_{|\xi''|>M}.$$

Du fait de (6.4), la seconde intégrale tend vers 0 si $M\to+\infty$ uniformément en j.

Du fait de (6.2), la première intégrale tend vers 0 si $j\to+\infty$, à M fixé, ce qui achève la démonstration. ■

APPENDICE

Le résultat suivant fait le lien entre les conditions (0.4) et (H_δ).

PROPOSITION. — *Soit $f=f(x, y)$ une fonction C^∞ près d'un point $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$.*

On suppose que, pour un certain entier N, $\partial_y^\beta f(x_0, y_0)=0$ pour tout $|\beta|<N$, et $\sum_{|\alpha|=N} |\partial_y^\alpha f(x_0, y_0)| \neq 0$.

Alors il existe une constante C, un voisinage U de x_0, un voisinage V de y_0 et un vecteur Y de $\mathbb{R}^q\setminus\{0\}$ tels que

$$\forall x\in U, \quad \forall y\in V, \qquad m\{t\in[-1, 1],\ |f(x, y+tY)|\leqq\varepsilon\} \leqq C\,\varepsilon^{1/N}.$$

Preuve. — Quitte à faire un changement de variables linéaire en y, on peut supposer que

$$(x_0, y_0)=0, \qquad y=(y_1, y') \qquad \text{et} \qquad \partial_{y_1}^{\mathrm{N}} f(0) \neq 0.$$

Alors le théorème de préparation de Malgrange (*voir* par exemple [H4], théorème 7.5.5) permet d'écrire localement

$$f(x, y)=g(x, y)\, p(x, y),$$

où $g \in \mathrm{C}^\infty$, $g(0) \neq 0$, et $p(x, y)=y_1^{\mathrm{N}}+\sum_{j<\mathrm{N}} a_j(x, y')\, y_1^j$.

On est donc ramenés à étudier la décroissance de

$$m\{y_1, |y_1| \leqq \alpha, |p(x, y_1, y')| \leqq \varepsilon\},$$

pour $\alpha > 0$ assez petit.

Fixons (x, y') proches de (x_0, y'_0). Alors on peut écrire

$$p(x, y_1, y')=\prod_{1 \leqq j \leqq \mathrm{N}} (y_1-\lambda_j) \qquad \text{avec} \quad \lambda_j \in \mathbb{C},$$

et donc

$$\{y_1, |p(x, y_1, y')| \leqq \varepsilon\} \subset \bigcup_{1 \leqq j \leqq \mathrm{N}} \{y_1, |y_1-\lambda_j| \leqq \varepsilon^{1/\mathrm{N}}\}.$$

Or $m\{y_1 \in \mathbb{R}, |y_1-\lambda_j| \leqq \varepsilon'\} \leqq 2\varepsilon'$.

On en déduit

$$m\{y_1, |y_1| \leqq \alpha, |p(x, y_1, y')| \leqq \varepsilon\} \leqq \mathrm{C}\, \varepsilon^{1/\mathrm{N}},$$

ce qui achève la démonstration. ■

Remarque. — Bien entendu, la proposition précédente entraîne en particulier que

$$\forall x \in \mathrm{U}, \qquad m\{y \in \mathrm{V}, |f(x, y)| \leqq \varepsilon\} \leqq \mathrm{C}'\, \varepsilon^\delta, \quad \text{avec } \delta=1/\mathrm{N}.$$

Néanmoins, si la dimension q de l'espace où varie y est supérieure ou égale à 2, l'exposant δ intervenant dans l'estimation ci-dessus peut être supérieur à $1/\mathrm{N}$, comme le montrent déjà les cas élémentaires suivants (sans paramètre x) :

(*a*) f est à croisements normaux près de $y_0=0$, *i.e.* $f(y)=y^\alpha$. Alors le meilleur δ est $1/\max(\alpha_i)$ [à ε près lorsque $\max(\alpha_i)$ apparaît plusieurs fois dans la liste $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$].

(*b*) $f(y_1, y_2)=y_1^\alpha+y_2^\beta$ près de $y_0=0$, avec $1/\alpha+1/\beta < 1$. Alors le meilleur δ est $1/\alpha+1/\beta$.

BIBLIOGRAPHIE

[BGPS] C. BARDOS, F. GOLSE, B. PERTHAME et R. SENTIS, *The Non-Accretive Radiative Transfer Equations; Existence of Solutions and Rosseland Approximation* (*J. Funct. Anal.*, vol. 76, 1988).

[BCN] P. BOLLEY, J. CAMUS et J. NOURRIGAT, *La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudo-différentiels* (*Comm. Part. Diff. Eq.*, vol. 7, 1982, p. 197-222).

[B] J.-M. BONY, *Second Microlocalization and Propagation of Singularities for Semi-Linear Hyperbolic Equations* (*Contribution to the Workshop and Symposium on Hyperbolic Equations and Related Topics*, Kakata and Kyoto, (August 27-September 5, 1984).

[BI] J. BROS et D. IAGOLNITZER, *Support essentiel et structure analytique des distributions* (*Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz*, 1975-1976, exposé n° 18, École Polytechnique, Palaiseau).

[CF] A. CORDOBA et C. FEFFERMAN, *Wave Packets and Fourier Integral Operators* (*Comm. Partial Diff. Eq.*, vol. 3, 1978, p. 979-1005).

[DPL1] R. J. DI PERNA et P.-L. LIONS, *On the Cauchy Problem for Boltzmann equations: Global Existence and Weak Stability* [*Ann. Math.* (à paraître)].

[DPL2] R. J. DI PERNA et P.-L. LIONS, *Global Weak Solutions of Vlasov-Maxwell systems* (*Comm. Pure Appl. Math.* (à paraître)].

[FP] C. FEFFERMAN et D. H. PHONG, *The Uncertainty Principle and Sharp Gårding Inequalities* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 34, 1981, p. 285-331).

[Gé1] P. GÉRARD, *Moyennes de solutions d'équations aux dérivées partielles* (*Séminaire « Équations aux dérivées partielles »*, 1986-1987, École Polytechnique, Palaiseau).

[Gé2] P. GÉRARD, *Regularization by Averaging for Solutions of Partial Differential Equations* [*Actes du colloque « Hyperbolic equations »*, Pise, 1987, Pitman (à paraître)].

[Gé3] P. GÉRARD, *Régularité de moyennes de solutions d'équations aux dérivées partielles* (*Actes des Journées « Équations aux dérivées partielles »*, Saint-Jean-de Monts, 1987).

[Gé4] P. GÉRARD, *Solutions globales du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann* (*Séminaire Bourbaki*, exposé n° 699, juin 1988, Paris).

[Gé-Go] P. GÉRARD et F. GOLSE (à paraître).

[Go1] F. GOLSE, *Remarques sur l'homogénéisation pour l'équation de transport* (*C.R. Acad. Sci. Paris*, 305, série I, 1987, p. 801-804).

[Go2] F. GOLSE, *Quelques propriétés de moyennisation pour les équations aux dérivées partielles* [*Rendiconti del Seminario di Torino*, 1987 (à paraître)].

[GLPS] F. GOLSE, P.-L. LIONS, B. PERTHAME et R. SENTIS, *Regularity of the Moments of the Solution of a Transport Equation* (*J. Funct. Anal.*, 76, 1988, p. 110-125).

[H1] L. HORMANDER, *Linear Partial Differential Operators*, Springer, 1963.

[H2] L. HORMANDER, *Pseudo-Differential Operators and Non-Elliptic Boundary Problems* (*Ann. Math.*, vol. 83, 1966, p. 129-209).

[H3] L. HORMANDER, *Hypoelliptic Second Order Differential Equations* (*Acta Math.*, vol. 119, 1986, p. 147-171).

[H4] L. HORMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, T. 1, 3 et 4, Springer, 1983 et 1985.

[K] J. J. KOHN, *Pseudo-Differential Operators and Non-Elliptic Problems* (*Pseudodifferential Operators, C.I.M.E. Conference*, Stresa, 1968).

[L] G. LEBEAU, *Régularité Gevrey 3 pour la diffraction* (*Comm. Partial Diff. Eq.*, vol. 9, 1984, p. 1437-1494).

[Lo] F. LOESER, *Volume de tubes autour de singularités* (*Duke Math. J.*, vol. 53, 1986, p. 443-455).

[N] J. NOURRIGAT, *Subelliptic systems* (à paraître).

[S] J. SJOSTRAND, *Singularités analytiques microlocales, suivi d'un texte avec B. Lascar* (*Astérisque*, n° 95, Paris, 1982).

[T] L. TARTAR, *Compensated Compactness and Applications to Partial Differential Equations* (*Nonlinear Analysis and Mechanics*, *Heriot-Watt Symposium*, vol. IV, 136-212, *Res. Notes Math.* 39, Pitman, 1979).

(Manuscrit reçu le 3 février 1989).

Patrick GÉRARD,
Laboratoire de Mathématiques
de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm,
75230 Paris Cedex 05
et
Université de Paris-Sud,
Département de Mathématiques,
Bâtiment n° 425,
91405 Orsay.