ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PASCALE HARINCK

# Fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série*, tome 23, nº 1 (1990), p. 1-38

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1990_4_23_1_1_0>

*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*,
4e série, t. 23, 1990, p. 1 à 38.

# FONCTIONS GÉNÉRALISÉES SPHÉRIQUES SUR $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$

PAR PASCALE HARINCK

## Introduction

Soit G un groupe de Lie semi-simple complexe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$ et soit $G_{\mathbb{R}}$ le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. On a alors $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+q$ avec $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et $q=i\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Dans cet article, nous étudions les fonctions généralisées sur $G/G_{\mathbb{R}}$ qui sont $G_{\mathbb{R}}$-invariantes et solutions propres des opérateurs différentiels G-invariants sur $G/G_{\mathbb{R}}$. De telles fonctions seront dites sphériques.

Les espaces symétriques du type $G/G_{\mathbb{R}}$ présentent une analogie avec les groupes de Lie semi-simples réels. En effet, l'espace tangent en $G_{\mathbb{R}}$ de $G/G_{\mathbb{R}}$ s'identifie naturellement à l'espace $i\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et l'algèbre $D(G/G_{\mathbb{R}})$ des opérateurs différentiels G-invariants sur $G/G_{\mathbb{R}}$ est isomorphe (par un isomorphisme noté $\mu$) à l'algèbre $S((\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}})^{G_{\mathbb{R}}}$ des opérateurs différentiels $G_{\mathbb{R}}$-invariants à coefficients constants sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. La multiplication par $i$ induit un isomorphisme de l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ dans l'ensemble des sous-espaces de Cartan de $i\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Remarquons que par cet isomorphisme, une sous-algèbre de Cartan compacte correspond à un sous-espace de Cartan déployé de $q$ et donc, dans cette analogie, les notions de séries discrètes et de séries continues sont inversées.

Le but de cet article est de construire, lorsque le groupe $G_{\mathbb{R}}$ a une série discrète, c'est-à-dire lorsque l'algèbre $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ admet une sous-algèbre de Cartan compacte, une série continue de fonctions généralisées sphériques sur $G/G_{\mathbb{R}}$.

On sait décrire les caractères de la série discrète de $G_{\mathbb{R}}$ en termes de transformées de Fourier d'orbites de la représentation coadjointe de $G_{\mathbb{R}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$ (formule de Rossmann [R]). Nous allons de manière analogue, construire une série continue $(\bar{T}_\lambda)$ de fonctions généralisées sphériques pour $G/G_{\mathbb{R}}$ à partir des transformées de Fourier d'orbites $T_\lambda$ de la représentation coadjointe de $G_{\mathbb{R}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$. Ceci donne un lien entre la «méthode des orbites» et l'analyse harmonique sur $G/G_{\mathbb{R}}$.

Les fonctions sphériques sur $G/G_{\mathbb{R}}$ ont été étudiées dans divers cas. Des séries discrètes de fonctions sphériques pour un espace symétrique $G/G_{\mathbb{R}}$ ont été décrites par S. Sano [S 4]. Elles sont concentrées sur une classe de conjugaison d'un seul sous-ensemble de Cartan et leurs formules sont l'analogue des formules de caractères de la série principale de $G_{\mathbb{R}}$. Des formules d'inversion ont été prouvées sur un certain nombre d'exemples: on peut citer les travaux de S. Sano et S. Sekiguchi pour $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})/\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ [S.1], de S. Sano pour $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})/\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})/\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ ([S.2] et [S.3]) et de N. Bopp pour $\mathrm{Gl}(3,\mathbb{C})/\mathrm{U}(2,1)$ [B]. Le calcul de fonctions généralisées fait sur ces exemples a inspiré la construction de la série continue $(\bar{\mathrm{T}}_\lambda)$ de fonctions généralisées sphériques que nous donnons ici. Pour les espaces $\mathrm{Gl}(3,\mathbb{C})/\mathrm{U}(2,1)$ et $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})/\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$, les travaux de N. Bopp [B] et de J. Faraut [F1] montrent que les fonctions $\bar{\mathrm{T}}_\lambda$ sont proportionnelles à des coefficients de séries principales de G. On pense que ce résultat se généralise. Ceci reste un problème ouvert qu'il serait important de résoudre.

Décrivons maintenant d'une façon plus détaillée le contenu de cet article.

Dans le premier paragraphe, nous fixons les notations et nous donnons des résultats préliminaires concernant les éléments semi-simples de $G/G_{\mathbb{R}}$. Dans le deuxième paragraphe, nous rappelons des résultats généraux sur les fonctions généralisées sphériques annoncés par S. Sano [S.4]. Une fonction généralisée sphérique $\Theta$ sur un ouvert $G_{\mathbb{R}}$-invariant $\Omega$ de $G/G_{\mathbb{R}}$ est une fonction localement intégrable sur $\Omega$ et analytique sur l'ouvert $\Omega'$ des éléments réguliers de $\Omega$ (théorème 2.3).

La suite de l'article consiste en la construction d'une série continue de fonctions généralisées sphériques.

On notera $\sigma$ la conjugaison de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. On fixe $\theta$ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ commutant à $\sigma$ et on note $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan correspondante. On note $p$ la projection canonique de G sur $G/G_{\mathbb{R}}$ et $\varphi$ l'application de $G/G_{\mathbb{R}}$ dans G qui à $p(g)$ associe $g\sigma(g)^{-1}$.

Du paragraphe 3 jusqu'à la fin de l'article, on suppose que l'on a $\operatorname{rang}\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}=\operatorname{rang}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}\cap\mathfrak{k})$ et on fixe $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}\cap\mathfrak{k}$. On note T le sous-ensemble de Cartan associé à $i\mathfrak{t}$, c'est-à-dire l'ensemble des $x\in G/G_{\mathbb{R}}$ tels que $\varphi(x)$ centralise $i\mathfrak{t}$. L'ensemble T est déployé et non connexe en général.

Le premier résultat obtenu permet de caractériser les fonctions généralisées sphériques par leur restriction à T.

THÉORÈME 4.1. — *Soit* $Y_0\in\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ *tel que, pour toute racine* $\alpha$ *de la paire* $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}},\mathfrak{t})$, *l'on ait* $\langle Y_0,H_\alpha\rangle\notin 2i\mathbb{Z}$. *Soit* $\Theta$ *une fonction généralisée* $G_{\mathbb{R}}$*-invariante sur* $G/G_{\mathbb{R}}$ *telle que*:

(1) *pour tout* $D\in D(G/G_{\mathbb{R}})$, *l'on ait* $D\Theta=\mu(D)(Y_0)\Theta$,

(2) $\Theta=0$ *sur l'ouvert* $T'$ *des éléments réguliers de* T.

*Alors la fonction généralisée* $\Theta$ *est nulle sur* $G/G_{\mathbb{R}}$.

On peut remarquer que, contrairement au théorème d'unicité obtenu par Harish-Chandra lors de la construction de la série discrète dans le cas du groupe ([Ha 4], lemme 44), il n'y a pas de conditions de croissance sur la fonction généralisée $\Theta$. Ceci est remplacé par la structure topologique particulière des sous-ensembles de Cartan de $G/G_{\mathbb{R}}$. En particulier, la condition de nullité à l'infini est remplacée par une condition de nullité sur les murs d'alcôves relativement au groupe de Weyl affine. La structure des sous-ensembles de Cartan est étudiée dans le paragraphe 3 et la preuve du théorème 4.1 fait l'objet du paragraphe 4.

Les paragraphes 5 et 6 consistent en la construction de fonctions généralisées sphériques.

On note Exp l'application de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ dans $G/G_{\mathbb{R}}$ qui à X associe $p(\exp iX)$ et J le jacobien de l'application Exp. Soit $\omega$ la composante connexe de 0 de l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ tels que $J(X) \neq 0$.

On fixe un élément régulier $Y_0$ de $i\mathfrak{t}^*$ et soit $\Theta$ une fonction généralisée $G_{\mathbb{R}}$-invariante sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ telle que :

(1) $\Theta$ est tempérée,

(2) pour tout $P \in S((\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}})^{G_{\mathbb{R}}}$, l'on ait $P\Theta = P(Y_0)\Theta$.

On a alors les deux résultats suivants :

THÉORÈME 5.2. — *On définit la fonction* $\tilde{\Theta}$ *sur* $\omega'$ *par*

$$\tilde{\Theta}(Z)\,|J(Z)|^{-1/2} = \sum_{\substack{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \\ \operatorname{Exp} X = \operatorname{Exp} Z}}' \Theta(X)\,|J(X)|^{-1/2}.$$

*alors* $\tilde{\Theta}$ *définit une fonction généralisée* $G_{\mathbb{R}}$-*invariante sur* $\omega$ *telle que, pour tout* $P \in S((\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}})^{G_{\mathbb{R}}}$, *l'on ait* $P\tilde{\Theta} = P(Y_0)\tilde{\Theta}$.

THÉORÈME 6.3. — *Soit* $\bar{\Theta}$ *la fonction définie sur* $(G/G_{\mathbb{R}})'$ *par* :

*si* $x \notin (\operatorname{Exp}\omega)'$ *alors* $\bar{\Theta}(x) = 0$,

*si* $X \in \omega'$ *alors* $\bar{\Theta}(\operatorname{Exp} X) = |J(X)|^{-1/2}\,\tilde{\Theta}(X)$,

*alors* $\bar{\Theta}$ *définit une fonction généralisée sphérique sur* $G/G_{\mathbb{R}}$.

Le théorème 5.2 a été annoncé dans [H.1] et il fait l'objet du paragraphe 5. Le théorème 6.3 est démontré dans le paragraphe 6.

Considérons la fonction généralisée $G_{\mathbb{R}}$-invariante (tempérée et solution propre des opérateurs $G_{\mathbb{R}}$-invariants à coefficients constants sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$) donnée par la transformée de Fourier $T_\lambda$ d'une orbite $G_{\mathbb{R}}.\lambda$ d'un élément régulier $\lambda$ de $\mathfrak{t}^*$. La famille $(\bar{T}_\lambda)$ est alors une série continue de fonctions généralisées sphériques.

Précisons ces résultats pour $Sl(2,\mathbb{C})/Sl(2,\mathbb{R})$. Dans ce cas, la partie continue de la formule de Plancherel démontrée par S. Sano et S. Sekiguchi [S.1] s'écrit $\int_0^\infty \langle \bar{T}_\lambda + \bar{T}_{-\lambda}, f \rangle \lambda\, d\lambda$. D'autre part, les travaux de J. Faraut [F1] prouvent que les fonctions $(1/\lambda)\bar{T}_\lambda$, $(1/\lambda)\bar{T}_{-\lambda}$ s'expriment comme coefficient d'une série principale de $Sl(2,\mathbb{C})$ et donc elles sont de type positif et extrémales.

On pose

$$\mathfrak{t} = \left\{ X_t = \begin{vmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{vmatrix};\ t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{a} = \left\{ Z_\Theta = \begin{vmatrix} \theta & 0 \\ 0 & -\theta \end{vmatrix};\ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'algèbre $\mathfrak{t}$ est compacte. Le sous-ensemble de Cartan T a deux composantes connexes

$$T_0 = \{ x_0(t) = p(\exp iX_t);\ t \in \mathbb{R} \}$$

et

$$T_1 = \{ x_1(t) = p((\exp iX_t)\, g_0);\ t \in \mathbb{R} \}$$

où $g_0=\begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix}$. Le sous-ensemble de Cartan A associé à $\mathfrak{a}$ est formé des éléments $a(\theta)=p(\exp iZ_\theta)$ pour $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$. Il est connexe. On a $T_0\cap A=\{x_0(0)=a(0)\}$ et $T_1\cap A=\{x_1(0)=p(g_0)=a(\pi/2)\}$.

Soit $Y_0=i\begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix}$ avec $\lambda>0$. Soit $T_\lambda$ la transformée de Fourier de l'orbite $Sl(2,\mathbb{R}).\begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix}$. On a alors :

$$T_\lambda(X_t)=\frac{e^{-i\lambda t}}{2it}\qquad\text{pour}\quad t\in\mathbb{R},$$

$$T_\lambda(Z_\theta)=\frac{e^{-\lambda\theta}}{2\theta}\qquad\text{si}\quad\theta>0\qquad\text{et}\qquad T_\lambda(Z_\theta)=-\frac{e^{\lambda\theta}}{2\theta}\qquad\text{si}\quad\theta<0.$$

On obtient alors
pour $t\in\mathbb{R}$,

$$\tilde{T}_\lambda(X_t)=T_\lambda(X_t),$$

pour $\theta\in]0,\pi/2[$

$$\tilde{T}_\lambda(Z_\theta)=\frac{1}{2\theta}\Big[\sum_{n\geqq 0}e^{-\lambda(\theta+n\pi)}+\sum_{n<0}e^{\lambda(\theta+n\pi)}\Big]=\frac{1}{4\theta\, sh(\pi\lambda/2)}(e^{\lambda(\theta-\pi/2)}+e^{-\lambda(\theta-\pi/2)}).$$

On en déduit alors:

Pour $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\bar{T}_\lambda(x_0(t))=\frac{e^{-i\lambda t}}{i\, sh\, 2t}$$

$$\bar{T}_\lambda(x_1(t))=0.$$

Pour $\theta\in]0,\pi/2[$, on a

$$\bar{T}_\lambda(a(\theta))=\frac{1}{2\, sh(\pi\lambda/2)}\,\frac{e^{\lambda(\theta-\pi/2)}+e^{-\lambda(\theta-\pi/2)}}{\sin 2\theta}.$$

Si l'on pose $\bar{T}_\lambda(a(\theta))=(\alpha e^{\lambda\theta}-\beta e^{-\lambda\theta})/\sin 2\theta$ pour $\theta\in]0,\pi/2[$, les conditions suffisantes et nécessaires pour que $\bar{T}_\lambda$ soit sphérique se traduisent alors par les relations $\alpha+\beta=-1$ qui exprime la condition de recollement au point $a(0)\in T_0\cap A$, et $\alpha e^{\lambda\pi/2}+\beta e^{-\lambda\pi/2}=0$ qui exprime la condition de recollement au point $a(\pi/2)\in T_1\cap A$. Ces deux relations permettent de retrouver l'expression précédente de $\bar{T}_\lambda(a(\theta))$.

Dans le paragraphe 7, nous calculons les fonctions généralisées sphériques $\bar{T}_\lambda$ dans le cas particulier de $Sp(2,\mathbb{C})/Sp(2,\mathbb{R})$. Nous montrons que les fonctions $\bar{T}_\lambda$, pour $\lambda\in it^*$ coïncident, à une constante près, avec les fonctions intervenant dans la série continue de la formule d'inversion démontrée par S. Sano [S 2].

Je remercie vivement M. Vergne et M. Andler qui m'ont suggéré d'entreprendre ce travail et ont dirigé mes recherches. Je remercie Y. Benoist, A. Bouaziz, M. Duflo et D. Vogan pour de nombreuses remarques utiles.

## 1. Notations et rappels

Tout au long de cet article, on utilisera les notations suivantes:

Soit V un espace vectoriel réel. On notera V* l'espace dual de V et $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié.

Soit M une variété différentiable. On notera $C^\infty(M)$ l'espace des fonctions de classe $C^\infty$ sur M, $C_c^\infty(M)$ le sous-espace de $C^\infty(M)$ formé des fonctions à support compact, $M_c^\infty(M)$ l'espace des densités de classe $C^\infty$ à support compact sur M, F(M) l'espace des fonctions généralisées sur M, c'est-à-dire le dual de $M_c^\infty(M)$. Si N est une partie de M, pour toute fonction $f$ définie sur M, on notera $f_{/N}$ la restriction de $f$ à N.

Soit G un groupe agissant sur M. Si N est une partie de M, on notera $N_G(N)$ le normalisateur de N dans G, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in G$ tels que $g.N=N$, $Z_G(N)$ le centralisateur de N dans G, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in G$ tels que, pour tout $n \in N$, l'on ait $g.n=n$ et G[N] l'ensemble des transformés de N par G, c'est-à-dire $G[N]=\bigcup_{g \in G} g.N$. On notera $\bar{N}$ l'adhérence de N dans M.

Si X est un ensemble, on notera $|X|$ son cardinal.

Soit $\mathfrak{m}$ une algèbre de Lie réductive réelle et soit M le groupe adjoint de $\mathfrak{m}$.

On note $\mathrm{Car}(\mathfrak{m})$ l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{m}$. Plus généralement, si $X \subseteq \mathfrak{m}$, on notera $X'=X \cap \mathfrak{m}'$.

Pour $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, on adoptera les notations suivantes:

(1.1) Soit $\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, $\Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ un système positif pour $\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$. Pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$, on désignera par $\mathfrak{m}_\alpha$ l'espace radiciel de $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ relativement à $\alpha$. On note $H_\alpha$ la coracine de $\alpha$ et $s_\alpha$ la réflexion de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ d'hyperplan Ker $\alpha$.

On pose $\mathfrak{a}_{\mathbf{R}}=(\sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})} \mathbb{R} H_\alpha) \cap \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}_{\mathbf{I}}=(i \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})} \mathbb{R} H_\alpha) \cap \mathfrak{a}$ de telle sorte que l'on ait $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_{\mathbf{I}}+\mathfrak{a}_{\mathbf{R}}$.

Une racine $\alpha$ est dite réelle si $\alpha_{/\mathfrak{a}_{\mathbf{I}}}=0$. Ceci est équivalent à $H_\alpha \in \mathfrak{a}_{\mathbf{R}}$.

Une racine $\alpha$ est dite imaginaire si $\alpha_{/\mathfrak{a}_{\mathbf{R}}}=0$. Ceci est équivalent à $i H_\alpha \in \mathfrak{a}_{\mathbf{I}}$.

Une racine qui n'est ni imaginaire ni réelle sera dite complexe. Si $\alpha$ est une racine complexe de $\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$, alors il en est de même de $\bar{\alpha}$. De plus, on peut choisir $\Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ de telle sorte que si $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ est une racine complexe alors $\bar{\alpha} \in \Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$.

L'ensemble des racines réelles de $\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ forme un sous-système réduit de racines de $\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ que l'on notera $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$. On pose

$$\Phi^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})=\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}) \cap \Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}).$$

(1.2) On note $U(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})$ et $S(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre enveloppante et l'algèbre symétrique de $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$. Soit $Z(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})$ le centre de $U(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})$ et $S(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})^M$ l'ensemble des éléments M-invariants de $S(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})$.

Les algèbres $Z(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})$ et $S(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})^{M}$ sont isomorphes par un isomorphisme $\lambda_{\mathfrak{m}}$ canonique et elles s'identifient à l'algèbre des opérateurs différentiels M-invariants à coefficients constants sur $\mathfrak{m}$. Pour $\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, on note $W(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ le groupe de Weyl de la paire $(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ et soit $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})}$ l'ensemble des éléments $W(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$-invariants de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$.

Rappelons quelques propriétés des fonctions généralisées M-invariantes sur $\mathfrak{m}$ solutions propres des opérateurs différentiels de $S(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})^{M}$.

Pour $\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, on note

$$(1.3)\qquad \pi_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}}=\prod_{\alpha\in\Delta^{+}(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})}\alpha.$$

(1.4) Le polynôme $\pi_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}}\in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*})^{W(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})}\simeq S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})}$ définit un opérateur différentiel sur $\mathfrak{a}$ que l'on note $\partial(\omega_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}})$.

L'opérateur $\partial(\omega_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}})\circ\pi_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}}$ (où $\pi_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}}$ agit par multiplication) est indépendant du choix de $\Delta^{+}(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ et il existe un opérateur M-invariant $\nabla^{\mathfrak{m}}$ sur $\mathfrak{m}$ tel que pour toute fonction différentiable F sur $\mathfrak{m}$ et tout $\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, l'on ait: $(\nabla^{\mathfrak{m}}F)_{/\mathfrak{a}}=(\partial(\omega_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}})\circ\pi_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}})(F_{/\mathfrak{a}})$ ([Ha 1], lemme 24).

Pour $\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, on note $\mathfrak{a}'_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des $X\in\mathfrak{a}$ tels que, pour tout $\alpha\in\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$, l'on ait $\alpha(X)\neq 0$.

Un ouvert de $\mathfrak{m}$ est dit complètement invariant s'il contient les parties semi-simples de ses éléments.

THÉORÈME 1.5. — *Soit* V *un ouvert complètement invariant de* $\mathfrak{m}$. *Soit* $Y_0$ *un élément régulier de* $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^{*}$. *Soit* $\Theta$ *une fonction généralisée* M-*invariante sur* V *telle que, pour tout* $P\in S(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})^{M}$, *l'on ait* $P\Theta=P(Y_0)\Theta$. *Alors*

(i) *la fonction* $\Theta$ *est localement intégrable sur* V *et analytique sur* V′,

(ii) *pour tout* $\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, *la fonction* $\pi_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}}\Theta$ *se prolonge en une fonction analytique sur* $\mathfrak{a}'_{\mathbb{R}}\cap V$,

(iii) *la fonction* $\nabla^{\mathfrak{m}}\Theta$ *se prolonge en une fonction continue sur* V.

Nous allons donner maintenant des conditions suffisantes pour qu'une fonction M-invariante sur $\mathfrak{m}$ soit solution propre des opérateurs différentiels de $S(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})^{M}$ sur $\mathfrak{m}$. Ce résultat nous servira lors de la construction de la série continue de fonctions généralisées sphériques sur G/H (§ 5).

Rappelons tout d'abord la notion de sous-algèbres de Cartan adjacentes.

Soit $\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. On pose $\Phi=\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ et $\Phi^{+}=\Phi^{+}(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$.

Pour $\alpha\in\Phi$, on note $H_\alpha$ la coracine de $\alpha$ et on choisit des éléments $X_\alpha$ et $X_{-\alpha}$ de $\mathfrak{m}$ appartenant aux espaces radiciels respectifs $\mathfrak{m}_\alpha$ et $\mathfrak{m}_{-\alpha}$ de telle sorte que l'on ait $[X_\alpha, X_{-\alpha}]=H_\alpha$. Il existe un élément $c_\alpha$ du groupe adjoint de $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ tel que $c_\alpha(H_\alpha)=i(X_\alpha-X_{-\alpha})$ et $c_\alpha(X)=X$ pour $X\in\mathrm{Ker}\,\alpha$.

On pose

$$(1.6)\qquad b=\mathbb{R}(X_\alpha-X_{-\alpha})\oplus\mathrm{Ker}\,\alpha.$$

La sous-algèbre $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}$ et on a $\mathfrak{b}+i\mathfrak{b}=c_\alpha(\mathfrak{a}+i\mathfrak{a})$. On dit que l'algèbre $\mathfrak{b}$ définie en (1.6) est la sous-algèbre de Cartan adjacente à $\mathfrak{a}$ relativement à $\alpha$. On dira plus généralement que $\mathfrak{b}\in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$ est adjacente à $\mathfrak{a}$ s'il existe $m\in \mathrm{M}$ tel que $\mathrm{Ad}(m)\,\mathfrak{b}$ soit adjacente à $\mathfrak{a}$ relativement à une racine de $\Phi$.

Pour $\mathfrak{a}\in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$ et $\alpha\in\Phi$, on notera $\mathfrak{a}(\alpha)$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}$ adjacente à $\mathfrak{a}$ relativement à $\alpha$.

Soit $\alpha\in\Phi$. On notera $\Phi_\alpha$ l'ensemble des $\beta\in\Phi$ othogonales à $\alpha$ et soit $\Phi_\alpha^+=\Phi^+\cap\Phi_\alpha$. Les ensembles $c_\alpha(\Phi_\alpha)$ et $c_\alpha(\Phi_\alpha^+)$ ne dépendent pas du choix de $c_\alpha$. Ce sont respectivement le système de racines réelles de $(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}(\alpha)_{\mathbb{C}})$ et un système positif. On pose $\Phi(\alpha)=c_\alpha(\Phi_\alpha)$ et $\Phi^+(\alpha)=c_\alpha(\Phi_\alpha^+)$.

THÉORÈME 1.7 ([Hi], thm. 3). — *Soit* $\mathrm{Y}_0$ *un élément régulier de* $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$. *Soit* V *un voisinage ouvert complètement invariant de* 0 *dans* $\mathfrak{m}$. *Soit* F *une fonction* M-*invariante et localement intégrable sur* V *telle que* :

(i) *pour tout* $\mathrm{P}\in \mathrm{S}(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})^{\mathrm{M}}$, *l'on ait* $\mathrm{PF}=\mathrm{P}(\mathrm{Y}_0)\,\mathrm{F}$ *sur* V′,

(ii) *pour tout* $\mathfrak{a}\in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, *la fonction* $\pi_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{a}}\mathrm{F}$ *se prolonge en une fonction analytique sur* $\mathfrak{a}'_{\mathbb{R}}\cap \mathrm{V}$,

(iii) *pour tout* $\mathfrak{a}\in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, *on note* $\mathrm{C}^+$ *la chambre de Weyl de* $\mathfrak{a}$ *associée au choix de* $\Phi^+$. *On écrit pour* $\mathrm{X}\in \mathrm{C}^+\cap \mathrm{V}$

$$(\nabla^{\mathfrak{m}}\mathrm{F})(\mathrm{X})=\sum_{\mathrm{Y}\in(\mathrm{M}_{\mathbb{C}}.\mathrm{Y}_0)\cap\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*} d(\mathfrak{a},\Phi^+,\mathrm{Y})\,e^{\langle \mathrm{Y},\mathrm{X}\rangle}$$

*et on suppose que, pour tout* $\mathrm{Y}\in(\mathrm{M}_{\mathbb{C}}.\mathrm{Y}_0)\cap\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *et pour toute racine simple* $\alpha$ *de* $\Phi^+$, *on a* :

$$d(\mathfrak{a},\Phi^+,\mathrm{Y})+d(\mathfrak{a},\Phi^+,s_\alpha\mathrm{Y})=d(\mathfrak{a}(\alpha),\Phi^+(\alpha),c_\alpha\mathrm{Y})+d(\mathfrak{a}(\alpha),\Phi^+(\alpha),c_\alpha s_\alpha\mathrm{Y}).$$

*Alors, pour tout* $\mathrm{P}\in \mathrm{S}(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})^{\mathrm{M}}$, *on a* $\mathrm{PF}=\mathrm{P}(\mathrm{Y}_0)\,\mathrm{F}$ *en tant que fonction généralisée sur* V.

T. Hiraï démontre ce résultat dans le cas du groupe, mais sa démonstration et les résultats de ([Va], thm. 29, p. 91 et thm. 9, p. 97) permettent facilement d'obtenir le théorème 1.7.

On suppose dans toute la suite de cet article que G est un groupe de Lie semi-simple complexe, connexe et simplement connexe. Soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et soit $\mathfrak{h}$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$. On a donc $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}\simeq\mathfrak{g}$. On note $\sigma$ la conjugaison de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{q}$ l'ensemble des X de $\mathfrak{g}$ tels que $\sigma(\mathrm{X})=-\mathrm{X}$. On a donc $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}=i\mathfrak{h}$. Soit H le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. L'espace symétrique G/H est donc du type « $\mathrm{G}/\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ ».

Soit $\theta$ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ commutant avec $\sigma$ (pour l'existence de $\theta$ *voir* [Be] et [Lo] théorème 2.1, p. 153) et soit $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan correspondante. On note K le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$.

On note $p$ la projection canonique de G sur G/H. Soit M l'ensemble des éléments $g\,\sigma(g)^{-1}$ lorsque $g$ parcourt G. L'ensemble M est une sous-variété fermée de G ([O.M.1], § 1, lemme 1). L'espace symétrique G/H s'identifie naturellement à M par l'application $\varphi$ qui à $p(g)$ associe $g\,\sigma(g)^{-1}$. Remarquons que si $x\in \mathrm{M}$ alors on a $\sigma(x)=x^{-1}$. Le groupe

G agit sur G/H par l'application qui à $(g, p(g'))$ associe $p(gg')$. Si $g \in G$ et $x \in G/H$, on notera $g.x$ l'action de $g$ sur $x$.

On note $(G/H)'$ l'ensemble des points réguliers de G/H c'est-à-dire l'ensemble des $x \in G/H$ tels que $\varphi(x)$ est un élément régulier de G. Plus généralement, si X est une partie de G/H, on notera $X' = X \cap (G/H)'$ l'ensemble des points réguliers de X.

Pour $g \in G$, on note $d_g p$ la différentielle de $p$ en $g$. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on a $(d_g p)(X) = (d/dt) p(g \exp tX)/t = 0$. Par suite, on en déduit que $\mathfrak{h} = \operatorname{Ker} d_g p$ et donc l'espace tangent en $x \in G/H$ à G/H s'identifie à l'espace $q$.

On note exp l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G et soit Exp l'application de $\mathfrak{h}$ dans G/H qui à X associe $p(\exp iX)$. On a :

PROPOSITION 1.8 ([He 1], chap. 4, thm. 4.1). — *Soit* J *le jacobien de l'application* Exp. *Pour* $X \in \mathfrak{h}$, *on a* $J(X) = \det [(sh \operatorname{ad} iX)/\operatorname{ad} iX]_{/\mathfrak{h}}$.

*Soit* $\mathfrak{a} \in \operatorname{Car}(\mathfrak{h})$. *L'espace* $i\mathfrak{a}$ *est un sous-espace de Cartan de* $q$ *c'est-à-dire un sous-espace maximal abélien de* $q$ *dont tout élément est semi-simple.*

DÉFINITION 1.9. — Un sous-ensemble A de G/H est appelé sous-ensemble de Cartan de G/H s'il existe $\mathfrak{a} \in \operatorname{Car}(\mathfrak{h})$ tel que l'on ait $a \in A$ si et seulement si $\varphi(a) \in Z_G(\mathfrak{a})$. On dira que A est associé à $\mathfrak{a}$. On note Car (G/H) l'ensemble des sous-ensembles de Cartan de G/H.

Soit $A \in \operatorname{Car}(G/H)$ associé à $\mathfrak{a} \in \operatorname{Car}(\mathfrak{h})$. L'étude des sous-ensembles de Cartan a été faite dans ([O.M.1], § 3, prop. 1). Pour $A \in \operatorname{Car}(G/H)$, il existe un nombre fini d'éléments $(k_j)_{j \in J}$ de G/H tels que l'on ait $A = \bigcup_{j \in J} (\exp i\mathfrak{a}) . k_j$. Par suite, on peut identifier l'espace tangent de A en $a \in A$ à $\mathfrak{a}$.

DÉFINITION 1.10. — Soit S le sous-ensemble de G/H formé des points $s$ tels que l'élément $\varphi(s)$ soit semi-simple dans G. Un élément de S est appelé point semi-simple de G/H.

Soit $s \in S$. On note $\mathfrak{z}_s$ le centralisateur de $\varphi(s)$ dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{r}_s$ l'image de $1 - \operatorname{Ad} \varphi(s)$, Fixons $s \in S$ et notons $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_s$ et $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_s$. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{r}$. L'algèbre $\mathfrak{z}$ est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$ de même rang que $\mathfrak{g}$.

LEMME 1.11. — *Les espaces* $\mathfrak{z}$ *et* $\mathfrak{r}$ *sont* $\sigma$*-stables.*

*Démonstration.* — On a $\sigma(\varphi(s)) = \varphi(s)^{-1}$. On obtient donc que $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{r}$ sont $\sigma$-stables. □

Soit Z le centralisateur de $\varphi(s)$ dans G. Le groupe Z est un sous-groupe réductif $\sigma$-stable de G. On définit sur $Z/Z \cap H$ la fonction $\delta_{s, \mathfrak{g}}$ par : pour $x \in Z/Z \cap H$

$$\delta_{s, \mathfrak{g}}(x) = |\det(1 - \operatorname{Ad} \varphi(x) \varphi(s)_{/\mathfrak{r}}|^{1/2}. \tag{1.12}$$

Soit $'(Z/Z \cap H)$ l'ensemble des éléments $x$ de $Z/Z \cap H$ tels que $\delta_{s, \mathfrak{g}}(x) \neq 0$.

LEMME 1.13. — *L'application* $\gamma$ *de* $H \times Z/Z \cap H$ *dans* G/H *qui à* $(h, p(g))$ *associe* $(hg).s$ *est submersive en tout point de* $H \times '(Z/Z \cap H)$.

*Démonstration.* — On fixe un représentant de $s$ dans G que l'on note encore par $s$. Si $h \in Z \cap H$ alors on a $hs\sigma(hs)^{-1} = hs\sigma(s)^{-1}h^{-1} = s\sigma(s)^{-1}$. Par suite, l'application $\gamma$ est bien définie.

Soit $(h_0, p(g_0)) \in H \times '(Z/Z \cap H)$ et soit $(X, Y) \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{z} \cap q$. On a :

$$\gamma(h_0 \exp tX, p(g_0 \exp tY)) = p(h_0 g_0 s \exp t \operatorname{Ad}(g_0 s)^{-1} X \exp t \operatorname{Ad} s^{-1} Y).$$

Pour montrer que $\gamma$ est submersive, il suffit donc de prouver que l'on a :

$$\operatorname{Ad}(g_0 s)^{-1} \mathfrak{h} + \operatorname{Ad} s^{-1}(\mathfrak{z} \cap q) + \mathfrak{h} = \mathfrak{g},$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{h} + \operatorname{Ad} g_0(\mathfrak{z} \cap q) + \operatorname{Ad}(g_0 s)\mathfrak{h} = \mathfrak{g}.$$

Or, on a $\operatorname{Ad} g_0 \mathfrak{z} = \mathfrak{z}$ et $\operatorname{Ad} g_0(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}) = \operatorname{Ad}(g_0 s)(\operatorname{Ad} s^{-1})(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h})$. Si $X \in \mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}$ alors $\sigma(\operatorname{Ad}(s^{-1})(X)) = \operatorname{Ad} \sigma(s)^{-1}(X) = \operatorname{Ad} s^{-1}(X)$. Donc $(\operatorname{Ad} s^{-1})(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}$.

Il faut donc prouver que l'on a $\mathfrak{h} + \mathfrak{z} \cap q + \operatorname{Ad}(g_0 s)\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Si $X \in \mathfrak{h}$ alors on peut écrire

$$\operatorname{Ad}(g_0 s)(X) = 1/2\,([\operatorname{Ad}(g_0 s) + \operatorname{Ad} \sigma(g_0 s)](X) + [\operatorname{Ad}(g_0 s) - \operatorname{Ad} \sigma(g_0 s)](X)).$$

L'élément $[\operatorname{Ad}(g_0 s) + \operatorname{Ad} \sigma(g_0 s)](X)$ appartenant à $\mathfrak{h}$, on en déduit que l'on a $\mathfrak{h} + \operatorname{Ad}(g_0 s)\mathfrak{h} = \mathfrak{h} + [\operatorname{Ad}(g_0 s) - \operatorname{Ad} \sigma(g_0 s)]\mathfrak{h}$. Comme $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + q$ et $q = \mathfrak{z} \cap q + \mathfrak{r} \cap q$, pour avoir le lemme il faut montrer que l'on a

$$\mathfrak{r} \cap q \subseteq h + [\operatorname{Ad}(g_0 s) - \operatorname{Ad} \sigma(g_0 s)]\mathfrak{h}.$$

Soit $X \in \mathfrak{r} \cap q$. Comme $p(g_0) \in '(Z/Z \cap H)$, l'application $1 - \operatorname{Ad} g_0 \sigma(g_0)^{-1} s \sigma(s)^{-1}$ est bijective de $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{r}$. Il existe donc $Y \in \mathfrak{g}$ tel que l'on ait :

$$X = (1 - \operatorname{Ad} g_0 \sigma(g_0)^{-1} s \sigma(s)^{-1})(Y) = [\operatorname{Ad} \sigma(g_0 s) - \operatorname{Ad}(g_0 s)] \operatorname{Ad} \sigma(g_0 s)^{-1}(Y).$$

Comme $X \in \mathfrak{r} \cap q$, on a $X = -\sigma(X)$ et par suite

$$X = \frac{1}{2}[\operatorname{Ad} \sigma(g_0 s) - \operatorname{Ad}(g_0 s)](\operatorname{Ad} \sigma(g_0 s)^{-1} Y + \operatorname{Ad}(g_0 s)^{-1} \sigma(Y)).$$

Donc $X \in (\operatorname{Ad}(g_0 s) - \operatorname{Ad} \sigma(g_0 s))\mathfrak{h}$. $\square$

(1.14) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $s \in S$, on note $\mathfrak{z}_{s,\varepsilon}$ l'ensemble des X de $\mathfrak{z}_s$ tels que toute valeur propre de ad X (considéré comme endomorphisme de $\mathfrak{g}$) soit de module strictement inférieur à $\varepsilon$.

Soit $s \in S$. On choisit $\varepsilon(s)$ tel que

(i) la restriction de Exp à $\mathfrak{z}_{s,\varepsilon(s)} \cap \mathfrak{h}$ soit un difféomorphisme sur son image,

(ii) $\operatorname{Exp}(\mathfrak{z}_{s,\varepsilon(s)} \cap \mathfrak{h}) \subseteq '(Z/Z \cap H)$.

COROLLAIRE 1.15. — *L'ensemble* $(H \exp i(z_{s,\varepsilon(s)} \cap \mathfrak{h})).s$ *est un voisinage ouvert* H-*invariant de* $s$ *dans* G/H.

LEMME 1.16. — *Soit* F *un fermé* H-*invariant de* G/H. *Si* $F \cap S = \varnothing$ *alors* $F = \varnothing$.

*Démonstration.* — Si $F \neq \emptyset$, on choisit $p(g) \in F$ et on note $x = g\sigma(g)^{-1}$. Soit $x = x_s x_u$ sa décomposition de Jordan. D'après ([O.M.1], § 5, prop. 2), il existe $s_0 \in S$ et $n \in G/H$ tels que $x_s = \varphi(s_0)$ et $x_u = \varphi(n)$. De plus, l'élément $x_s$ appartient à la clôture de $\bigcup_{h \in H} hxh^{-1}$. Comme F est un fermé H-invariant de G/H, on obtient $s_0 \in F$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $F \cap S = \emptyset$. □

COROLLAIRE 1.17. — $G/H = \bigcup_{s \in S} (H \exp i(\mathfrak{z}_{s, \varepsilon(s)} \cap \mathfrak{h})) . s.$

## 2. Généralités sur les fonctions généralisées sphériques

Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats généraux annoncés par S. Sano concernant les fonctions généralisées sphériques [S 4]. Ces résultats peuvent être obtenus par la méthode de descente d'Harish-Chandra. On pourra se référer à ([H 2], § 3 et 4) pour des démonstrations complètes. Elles sont analogues à celles d'Harish-Chandra dans le cas du groupe [Ha 4].

Soit D(G/H) l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants sur G/H. Cette algèbre s'identifie à $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}/U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \cap U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}$ par l'action à droite de $\mathfrak{g}$ sur G ([He 2], chap. II, thm. 4.6). Nous allons tout d'abord donner quelques précisions concernant cette algèbre. On pourra se référer à ([S 3], p. 205).

Soit $\Psi$ l'application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus \sqrt{-1}\,\mathfrak{g}$ définie par : pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\Psi(X) = 1/2(X - \sqrt{-1}\, iX)$. L'application $\Psi$ est injective et linéaire complexe. Elle définit un isomorphisme de $U(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Or les algèbres $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ et $U(\mathfrak{g})$ sont canoniquement isomorphes. Par suite, on en déduit un isomorphisme d'algèbres $\Psi_0$ de $Z(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ dans D(G/H).

(2.1) On obtient donc un isomorphisme $\lambda_{\mathfrak{h}} \circ \Psi_0^{-1}$ de D(G/H) dans $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^H$ que l'on note $\mu_{\mathfrak{g}}$.

DÉFINITION 2.2. — Soit $\Omega$ un ouvert H-invariant de G/H et soit $\Theta$ une fonction généralisée sur $\Omega$. La fonction généralisée $\Theta$ est dite sphérique si elle vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\Theta$ est H-invariante sur $\Omega$,

(ii) il existe un caractère $\chi$ de D(G/H) tel que, pour tout $D \in D(G/H)$, l'on ait $D\Theta = \chi(D)\Theta$.

THÉORÈME 2.3 ([S 4], thm. 4.3). — *Soit $\chi$ un caractère de* D(G/H). *Soit $\Omega$ un ouvert* H-*invariant de* G/H. *Soit $\Theta$ une fonction généralisée* H-*invariante sur $\Omega$ telle que, pour tout* $D \in D(G/H)$, *l'on ait* $D\Theta = \chi(D)\Theta$. *Alors $\Theta$ est une fonction localement intégrable sur $\Omega$. De plus, $\Theta$ est analytique sur $\Omega'$.*

Pour $s \in S$, on note $\delta_{s, \mathfrak{g}}$, $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}_\varepsilon$ comme en (1.12) et (1.14).

(2.4) Soit $J_{\mathfrak{z}}$ le jacobien de $\mathrm{Exp}_{/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}}$

On a alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.5. — *Soit* $\Omega$ *un ouvert* H-*invariant de* G/H. *Soit* $\Theta$ *une fonction généralisée sphérique sur* $\Omega$. *Alors, on peut écrire pour* $s \in S \cap \Omega$ *et* $X \in (\mathfrak{z}_\varepsilon \cap \mathfrak{h})'$,

$$\Theta((\exp iX).s) = \delta_{s,\mathfrak{g}}^{-1/2}(\operatorname{Exp} X) J_{\mathfrak{z}}^{-1/2}(X) f_{\mathfrak{z}}(X)$$

*où* $f_{\mathfrak{z}}$ *est une fonction localement intégrable* $Z \cap H$-*invariante sur* $\mathfrak{z}_\varepsilon \cap \mathfrak{h}$, *solution propre des opérateurs différentiels d'un idéal de codimension finie de* $S((\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z})_{\mathbb{C}})^{Z \cap H}$ *sur* $\mathfrak{z}_\varepsilon \cap \mathfrak{h}$.

Par ce qui précède, une fonction généralisée sphérique est déterminée par ses restrictions aux sous-ensembles de Cartan de G/H. Nous donnons maintenant quelques précisions concernant ces restrictions.

Soit $Y_0$ un élément régulier de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$. Soit $\Omega$ un ouvert H-invariant de G/H et soit $\Theta$ une fonction généralisée H-invariante sur $\Omega$ telle que, pour tout $D \in D(G/H)$, l'on ait $D\Theta = \mu_{\mathfrak{g}}(D)(Y_0)\Theta$ sur $\Omega$.

Soit $\mathfrak{a} \in \operatorname{Car}(\mathfrak{h})$ et soit A le sous-ensemble de Cartan associé à $\mathfrak{a}$. On définit $\Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, $\Delta^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, $\Phi^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ comme en (1.1).

Pour $\beta$ un poids de $\mathfrak{a}$, on définit la fonction $\xi_\beta$ sur A de la manière suivante : si $a \in A$ alors $\varphi(a) \in Z_G(\mathfrak{a}) = \exp(\mathfrak{a} + i\mathfrak{a})$. On écrit $\varphi(a) = \exp X$ et on pose $\xi_\beta(a) = e^{\beta(X)}$.

Soit $\rho = 1/2 \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})} \alpha$. On définit la fonction $\Delta_A$ sur A par :

$$\text{pour} \quad a \in A, \qquad \Delta_A(a) = \xi_{-\rho}(a) \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})} (1 - \xi_\alpha(a)).$$

Soit $s \in A \cap \Omega$. On note $\mathfrak{z} = Z_{\mathfrak{g}}(\varphi(s))$. On a alors $\mathfrak{a} \in \operatorname{Car}(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h})$. Soit $\pi_{\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}$ comme en (1.3). On vérifie facilement le lemme suivant.

LEMME 2.6. — *Il existe une constante non nulle c ne dépendant que de* $\mathfrak{z}$ *telle que, pour tout* $X \in \mathfrak{a}$, *l'on ait* :

$$\pi_{\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}(X) J_{\mathfrak{z}}(X)^{1/2} \delta_{s,\mathfrak{g}}(\operatorname{Exp} X)^{1/2} = c\,\Delta_A((\exp iX).s).$$

*Soit* $A'_{\mathbb{R}}$ *l'ensemble des* $a \in A$ *tels que, pour tout* $\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, *l'on ait* $\xi_\alpha(a) \neq 1$.

THÉORÈME 2.7 ([S 4], thm. 5.1). — *La fonction* $\Psi_A$ *définie sur* $A' \cap \Omega$ *par* $\Psi_A = \Delta_A \Theta$ *se prolonge en une fonction analytique sur* $A'_{\mathbb{R}} \cap \Omega$.

THÉORÈME 2.8 ([S 4], thm. 5.1). — *Soient* A *et* B *deux sous-ensembles de Cartan de* G/H *associés respectivement aux sous-algèbres* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *de* $\operatorname{Car}(\mathfrak{h})$.

*Alors, la fonction* $\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}})\Psi_A$ *se prolonge en une fonction continue sur* $A \cap \Omega$ *et on a* :

$$\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}})\Psi_A = \partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{b}})\Psi_B \quad \text{sur } A \cap B \cap \Omega.$$

On garde les notations précédentes. En utilisant le corollaire 2.5 et les propriétés de la fonction $f_{\mathfrak{z}}$, on obtient l'expression suivante de $\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}})\Psi_A$. Notons $C^+(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ la chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ associée au choix de $\Phi^+(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$. Alors, il existe des constantes

$d(\mathfrak{a}, \Phi^+(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{a}), Y)$ telles que, pour tout $X \in C^+(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{a}) \cap \Omega \cap \mathfrak{z}_\varepsilon$, l'on ait:

$$\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}) \Psi_A((\exp iX).s) = \sum_{Y \in (G.Y_0) \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*} d(\mathfrak{a}, \Phi^+(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{a}), Y) e^{\langle Y, X \rangle} \tag{2.9}$$

Nous allons maintenant donner des conditions suffisantes pour qu'une fonction généralisée H-invariante et localement intégrable sur G/H soit sphérique.

Définition 2.10. — Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ dans $\mathrm{Car}(\mathfrak{h})$ et soient A et B les sous-ensembles de Cartan associés respectivement à $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. Le sous-ensemble B est dit adjacent à A (relativement à $\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$) si $\mathfrak{b}$ est adjacente à $\mathfrak{a}$ (relativement à $\alpha$).

Pour $\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, on notera $A(\alpha)$ le sous-ensemble de Cartan de G/H adjacent à A relativement à $\alpha$.

Théorème 2.11 ([S 4], thm. 5.1). — *Soit $\Theta$ une fonction H-invariante et localement intégrable sur G/H telle que*:

(2.12) *pour tout* $D \in \mathbf{D}(G/H)$, *l'on ait* $D\Theta = \mu_{\mathfrak{g}}(D)(Y_0)\Theta$ *sur* $(G/H)'$,

(2.13) *pour tout* $A \in \mathrm{Car}(G/H)$, *la fonction* $\Psi_A$ *se prolonge en une fonction analytique sur* $A'_{\mathbb{R}}$,

(2.14) *pour tout* $A \in \mathrm{Car}(G/H)$ *associé à* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{h})$, *la fonction* $\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}})\Psi_A$ *se prolonge en une fonction continue sur* A *et, pour tout* $\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, *l'on ait*:

$$\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}})\Psi_A = \partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}(\alpha)})\Psi_{A(\alpha)} \quad \text{sur } A \cap A(\alpha)$$

*Alors, pour tout* $D \in \mathbf{D}(G/H)$, *on a* $D\Theta = \mu_{\mathfrak{g}}(D)(Y_0)\Theta$ *sur* G/H.

## 3. Étude topologique des sous-ensembles de Cartan

*Dans toute la suite de cet article, on suppose que* $\mathrm{rang}(\mathfrak{h}) = \mathrm{rang}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k})$.

Soit $A \in \mathrm{Car}(G/H)$ associé à $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{h})$. L'étude des composantes connexes de A a été faite dans [O.M.1]. Nous allons donner quelques précisions concernant ces composantes connexes.

Lemme 3.1 ([O.M.1], § 3). — *Il existe un ensemble fini* $\{k_j\}_{j \in J}$ *d'éléments de* $p(K)$ *tel que l'on ait* $A = \bigcup_{j \in J} (\exp i\mathfrak{a}).k_j$.

Par définition de A, on a $\varphi(k_j) \in Z_G(i\mathfrak{a}) = \exp(\mathfrak{a} + i\mathfrak{a})$. On peut donc écrire $\varphi(k_j) = \exp(Z_j + iY_j)$. Par suite, on obtient

$$A = \bigcup_{j \in J} (\exp i\mathfrak{a}).s_j \qquad \text{avec} \quad \varphi(s_j) = \exp Z_j \qquad \text{et} \qquad Z_j \in \mathfrak{a}.$$

Comme $\exp Z_j \in M$, on a $\sigma(\exp Z_j) = \exp - Z_j$. Comme $\exp Z_j \in H$, on en déduit que l'on a $\exp 2Z_j = 1$. Par suite, pour tout $\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, on a $\alpha(Z_j) = 0$. L'élément $s_j$ appartient donc à tout sous-ensemble de Cartan B adjacent à A et détermine une composante connexe de B.

On notera $A_0 = \operatorname{Exp} \mathfrak{a}$ la composante connexe de $p(1)$ dans A.

Soient $\Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, $\Delta^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ et $\Phi^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ comme en (1.1).

(3.2) Soit $\Gamma = \sum_{\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})} \mathbb{Z} \pi H_\alpha$.

(3.3) On note W le groupe engendré par les réflexions $s_\alpha$ lorsque $\alpha$ parcourt $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$.

LEMME 3.4. — *Soit* X *et* Y *deux éléments de* $\mathfrak{a}$. *Alors*, $\operatorname{Exp} X = \operatorname{Exp} Y$ *si et seulement si* $X - Y \in \Gamma$.

*Démonstration.* – On a $\operatorname{Exp} X = \operatorname{Exp} Y$ si et seulement si $\exp 2iX = \exp 2iY$. Comme le groupe G est simplement connexe, ceci est équivalent à $X - Y \in \sum_{\beta \in \Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})} \mathbb{Z} \pi H_\beta$. Pour avoir le lemme, il suffit de prouver que l'on a

$$(3.5) \qquad \Big(\sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})} \mathbb{Z} \pi H_\alpha\Big) \cap \mathfrak{a} = \Gamma.$$

On définit $\mathfrak{a}_I$ et $\mathfrak{a}_R$ comme en (1.1). Par suite, on a

$$\Big(\sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})} \mathbb{Z} \pi H_\alpha\Big) \cap \mathfrak{a} = \Big(\sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})} \mathbb{Z} \pi H_\alpha\Big) \cap \mathfrak{a}_R.$$

Il existe un choix de $\Delta^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ tel que si $\Psi$ est la base de $\Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ associée à ce choix alors $\Psi \cap \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ est une base de $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ ([Bo], chap. 6, § 1, prop. 4 et § 1, n° 7, corollaire 4). Comme par hypothèse, on a $\operatorname{rang}(\mathfrak{h}) = \operatorname{rang}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k})$, les $H_\alpha$ pour $\alpha \in \Psi \cap \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ forment une base de $\mathfrak{a}_R$. L'assertion (3.5) est alors immédiate. □

(3.6) On définit l'alcôve $Al^+$ comme étant l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}$ tels que, pour tout $\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, l'on ait $\alpha(X) \in ]0, \pi[$.

(3.7) Soit $\mathfrak{a}(\pi)$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}$ tels que, pour tout $\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, l'on ait $|\alpha(X)| \leqq \pi$.

L'adhérence $\overline{Al^+}$ de $Al^+$ est un domaine fondamental pour le groupe des déplacements engendré par $\Gamma$ et W ([Bo], chap. VI, § 2). De plus , on a $\Gamma \cap \overline{Al^+} = \{0\}$.

En utilisant le lemme 3.4, on a donc:

$$(3.8) \qquad A = \bigcup_{j \in J} (\exp i\,\mathfrak{a}(\pi)) . s_j.$$

Nous allons maintenant étudier les composantes connexes de $A \cap B$ lorsque B est un sous-ensemble de Cartan adjacent à A.

On se place dans la situation suivante:

Soit $A \in \operatorname{Car}(G/H)$ associé à $\mathfrak{a} \in \operatorname{Car}(\mathfrak{h})$. Soit $\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ et soit $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de Cartan adjacente à $\mathfrak{a}$ relativement à $\alpha$ définie en (1.6). On note B le sous-ensemble de Cartan de G/H associé à $\mathfrak{b}$.

PROPOSITION 3.9. — (i) $A_0 \cap B = \{\operatorname{Exp} Y, \operatorname{Exp}(Y + \pi H_\alpha/2);\ Y \in \operatorname{Ker} \alpha\}$,

(ii) $\operatorname{Exp}(\pi H_\alpha/2) \in B_0$ *si et seulement si il existe un élément* $X \in \Gamma$ *tel que* $\alpha(X) = \pi$.

*Soit* $j \in J$ *et soit* $A_j = (\exp i\,\mathfrak{a}) . s_j$ *une composante connexe de* A *distincte de* $A_0$.

(iii) $A_j \cap B = \{(\exp iX).s_j,\ (\exp iX).u_j;\ X \in \operatorname{Ker}\alpha\}$ *où l'élément* $u_j$ *est tel que* $\varphi(u_j) = \varphi(s_j) \exp \pi (X_\alpha - X_{-\alpha})$,

(iv) $A_j \cap B_0 = \varnothing$.

*Démonstration.* — On peut tout d'abord remarquer que $\operatorname{Ad} \varphi(b)(X_\alpha - X_{-\alpha}) = X_\alpha - X_{-\alpha}$ pour tout $b \in B$ et $\operatorname{Ad} \varphi(a)(H_\alpha) = H_\alpha$ pour tout $a \in A$.

Soit $y \in A$. On peut écrire $\varphi(y) = \exp(X + iY)$ avec X et Y dans $\mathfrak{a}$. Si $y \in A \cap B$ alors on a $\exp \operatorname{ad}(X + iY)\ (X_\alpha - X_{-\alpha}) = X_\alpha - X_{-\alpha}$. Par suite, on obtient $\alpha(X + iY) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et donc $\alpha(X) = 0$ et $Y \in \pi \mathbb{Z} H_\alpha \oplus \operatorname{Ker}\alpha$.

Or, on a $\exp i\pi H_\alpha = \exp \pi (X_\alpha - X_{-\alpha}) \in A \cap B$.

Si $y \in A_0$, alors on écrit $\varphi(y) = \exp iY$. L'assertion (i) devient immédiate par ce qui précède.

Si $y \in A_j$, alors $\exp X = \varphi(s_j)$ et (iii) devient immédiat.

Prouvons (ii): supposons qu'il existe $X \in \Gamma$ tel que $\alpha(X) = \pi$. Dans ce cas, on a $\alpha(\pi H_\alpha/2 - X) = 0$. Par suite, on a $\pi H_\alpha/2 - X \in \mathfrak{b}$ et $\operatorname{Exp}(\pi H_\alpha/2) = \operatorname{Exp}(\pi H_\alpha/2 - X)$ d'après le lemme 3.4.

Réciproquement, si $\operatorname{Exp}(\pi H_\alpha/2) \in B_0$ alors il existe $Y \in \mathfrak{b}$ tel que l'on ait $\exp i\pi H_\alpha = \exp 2iY$. On écrit $Y = t(X_\alpha - X_{-\alpha}) + Z$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $Z \in \operatorname{Ker}\alpha$. Comme $\operatorname{Exp} Y \in A$, on a $(\exp \operatorname{ad} 2iY)(H_\alpha) = H_\alpha$. On en déduit donc que $t = 0$. Ceci implique $Y \in \operatorname{Ker}\alpha$. Par définition de Y, on a $\operatorname{Exp}(\pi H_\alpha/2) = \operatorname{Exp} Y$. En utilisant le lemme 3.4, on obtient que $\pi H_\alpha/2 - Y \in \Gamma$. Comme $\alpha(Y) = 0$, on a $\alpha(\pi H_\alpha/2 - Y) = \pi$. La démonstration de (ii) est achevée.

Prouvons (iv): on note $\varphi(s_j) = \exp Z_j$ avec $Z_j \in \mathfrak{a}$.

Supposons qu'il existe $y \in A_j \cap B_0$. On peut écrire $\varphi(y) = \exp(Z + iY)$ avec $Z = Z_j$ ou $Z = Z_j + \pi(X_\alpha - X_{-\alpha})$ et $Y \in \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker}\alpha$.

Puisque $y \in B_0$, il existe $X \in \mathfrak{b}$ tel que $\exp(Z + iY) = \exp 2iX$. On écrit $X = t(X_\alpha - X_{-\alpha}) + U$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $U \in \operatorname{Ker}\alpha$. Comme $\operatorname{Exp} X \in A$, on a $(\exp \operatorname{ad} 2X)(H_\alpha) = H_\alpha$. On en déduit que $t = 0$ et par suite $X \in \operatorname{Ker}\alpha$. Dans ce cas, on aurait $\exp Z \in \exp i\mathfrak{a}$ ce qui est impossible puisque par hypothèse $A_j \neq A_0$. □

Soit $A_j = (\exp i\mathfrak{a}).s_j$ et $A_k = (\exp i\mathfrak{a}).s_k$ deux composantes connexes distinctes de A. Si $X \in \mathfrak{b}$ est tel que $\varphi(s_j) = \varphi(s_k) \exp iX$ alors on a $\operatorname{Exp}(X/2) \in A \cap B$. Dans ce cas, on aurait $A_j = A_k$ ce qui est impossible. Donc, les composantes connexes $(\exp i\mathfrak{b}).s_j$ et $(\exp i\mathfrak{b}).s_k$ de B sont distinctes. On note $u_j$ et $u_k$ comme dans la proposition 3.9. Si $X \in \mathfrak{b}$ est tel que $\varphi(s_j) = \varphi(u_k) \exp iX$ alors on a $\operatorname{Exp}(X/2) \in A \cap B$. On obtient une contradiction comme précédemment.

Finalement, on en déduit que si B est un sous-ensemble de Cartan adjacent à A alors B a au moins le même nombre de composantes connexes que A.

Soit $\mathfrak{t} \in \operatorname{Car}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k})$. Le sous-ensemble de Cartan T associé à $\mathfrak{t}$ est déployé et non connexe en général. D'après (3.7) et (3.8), on peut écrire $T = \bigcup_{j \in J} (\exp i\mathfrak{t}).s_j$ où chaque composante connexe $(\exp i\mathfrak{t}).s_j$ est isomorphe à $\mathfrak{t}$. Par ce qui précède, l'ensemble T est le sous-ensemble de Cartan de G/H ayant le plus de composantes connexes.

## 4. Théorème d'unicité pour les fonctions généralisées sphériques

On a supposé que $\operatorname{rang}\mathfrak{h} = \operatorname{rang}\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$. Soit $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ et soit T le sous-ensemble de Cartan de G/H associé à $\mathfrak{t}$.

Le résultat de ce paragraphe (théorème 4.1) permet de caractériser les fonctions généralisées sphériques par les valeurs qu'elles prennent sur T'.

Théorème 4.1. — *Soit* $\mu_\mathfrak{g}$ *l'isomorphisme de* $\mathrm{D}(\mathrm{G/H})$ *dans* $\mathrm{S}(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^\mathrm{H}$ *défini en* (2.1). *Soit* $\mathrm{Y}_0 \in \mathfrak{t}_\mathbb{C}^*$ *tel que, pour tout* $\beta \in \Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{t})$, *l'on ait* $\langle \mathrm{Y}_0, \mathrm{H}_\beta \rangle \notin 2i\mathbb{Z}$. *Soit* $\Theta$ *une fonction généralisée* H-*invariante sur* G/H *telle que*:

(i) *pour tout* $\mathrm{D} \in \mathrm{D}(\mathrm{G/H})$, *l'on ait* $\mathrm{D}\Theta = \mu_\mathfrak{g}(\mathrm{D})(\mathrm{Y}_0)\Theta$,

(ii) $\Theta = 0$ *sur* T'.

*Alors,* $\Theta$ *est nulle sur* G/H.

Corollaire 4.2. — *On garde les notations du théorème* 4.1. *Soit* $\Theta_1$ *et* $\Theta_2$ *deux fonctions généralisées* H-*invariantes sur* G/H *telles que*:

(i) *pour* $k \in \{1, 2\}$ *et pour tout* $\mathrm{D} \in \mathrm{D}(\mathrm{G/H})$, *l'on ait*

$$\mathrm{D}\Theta_k = \mu_\mathfrak{g}(\mathrm{D})(\mathrm{Y}_0)\Theta_k,$$

(ii) $\Theta_1 = \Theta_2$ *sur* T',

*Alors* $\Theta_1$ *et* $\Theta_2$ *sont égales sur* G/H.

*Remarques.* — (1) Il est essentiel dans le théorème 4.1 que la fonction généralisée $\Theta$ soit définie sur tout G/H.

(2) Contrairement au résultat d'unicité prouvé par Harish-Chandra dans le cas du groupe ([Ha 4], lemme 44), il n'y a pas ici de condition de croissance sur la fonction généralisée $\Theta$. C'est la structure topologique particulière des sous-ensembles de Cartan qui « remplace » cette hypothèse. Précisons ceci. Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{Car}(\mathrm{G/H})$ associé à $\mathfrak{a}$, on note $\mathrm{A} = \bigcup_{j \in \mathrm{J}} (\exp i\,\mathfrak{a}(\pi)).s_j$ comme en (3.8). La condition à l'infini est « remplacée » ici par les conditions de recollement (2.15) au voisinage des points $(\exp i\mathrm{X}).s_j$ où X est tel qu'il existe une racine $\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ vérifiant $|\alpha(\mathrm{X})| = \pi$.

*Démonstration du théorème* 4.1. — Il suffit de prouver que $\Theta$ est nulle sur (G/H)'. Ceci est équivalent à prouver que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{Car}(\mathrm{G/H})$, la fonction généralisée $\Theta$ s'annule sur A'.

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{Car}(\mathrm{G/H})$ associé à $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{h})$ et soit $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ le système de racines réelles de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{h}$. La démonstration se fait par récurrence sur $|\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})|$.

Si $|\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})| = 0$, alors, comme $\operatorname{rang}\mathfrak{h} = \operatorname{rang}\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$, l'algèbre $\mathfrak{a}$ est conjuguée à une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$. Il existe donc un élément $h \in \mathrm{H}$ tel que l'on ait $\mathrm{Ad}(h)\mathfrak{a} = \mathfrak{t}$. La fonction généralisée $\Theta$ étant H-invariante et nulle sur T', elle est également nulle sur A'.

On fixe $A \in \operatorname{Car}(G/H)$ associé à $\mathfrak{a} \in \operatorname{Car}(\mathfrak{h})$ tels que l'on ait $|\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})|>0$. On suppose (hypothèse de récurrence) que:
(4.3) pour tout $B \in \operatorname{Car}(G/H)$ associé à $\mathfrak{b} \in \operatorname{Car}(\mathfrak{h})$ tel que $|\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})|>|\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})|$, alors la fonction généralisée $\Theta$ s'annule sur $B'$.

En utilisant les résultats du paragraphe 2, on va prouver que $\Theta$ est nulle sur $A'$. On écrit $A=\bigcup_{j \in J}(\exp i\,\mathfrak{a}(\pi)) . s_j$ comme en (3.8) et on va montrer que $\Theta$ est nulle sur chaque composante connexe de A.

On fixe $j \in J$ et on note $s=s_j$, $\mathfrak{z}=Z_{\mathfrak{g}}(\varphi(s))$ et $\varphi(s)=\exp Z_0$. L'algèbre $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}$. D'autre part, on a vu que toute racine de $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ s'annule sur $Z_0$. On obtient que

$$\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})=\Phi(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}, \mathfrak{a}).$$

Dans toute la suite, on notera $\Phi=\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ et $\Phi^{+}=\Phi^{+}(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$. Soit $\Sigma$ la base de $\Phi$ associée au choix de $\Phi^{+}$ et soit $C^{+}$ la chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ définie par $\Sigma$. Pour $\varepsilon>0$, on note $\mathfrak{a}(\varepsilon)$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}$ tels que, pour tout $\alpha \in \Phi$, l'on ait $|\alpha(X)|<\varepsilon$.

On définit la fonction $\Psi_A$ sur $A'$ comme dans le théorème 2.7. Soit $\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}})$ comme en (1.4). La fonction $\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}) \Psi_A$ caractérise $\Theta$ sur $A'$ car $Y_0$ est régulier. D'autre part, il existe des constantes $d(s, \mathfrak{a}, \Phi^{+}, Y)$ telles que, pour tout $X \in C^{+} \cap \mathfrak{a}(\varepsilon)$, l'on ait:

$$(4.4) \qquad (\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}) \Psi_A)((\exp i X) . s)=\sum_{Y \in(G . Y_0) \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*} d(s, \mathfrak{a}, \Phi^{+}, Y) e^{\langle Y, X\rangle}.$$

Nous allons prouver que les constantes $d(s, \mathfrak{a}, \Phi^{+}, Y)$ sont toutes nulles.

Soit $\alpha \in \Sigma$ et soit $\mathfrak{a}(\alpha)$ et $A(\alpha)$ comme en (1.6) et (2.11). D'après le théorème 2.8, on a $\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}) \Psi_A=\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}(\alpha)}) \Psi_{A(\alpha)}$ au voisinage de $s$ dans $A \cap A(\alpha)$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $A(\alpha)$ puisque que $|\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})|>|\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}(\alpha))|$. On en déduit que $\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}(\alpha)}) \Psi_{A(\alpha)}$ est nulle au voisinage de $s$. Comme $(\exp i X) . s \in A \cap A(\alpha)$ pour tout $X \in \operatorname{Ker} \alpha$, on obtient les relations suivantes:

$$\text{pour tout } \alpha \in \Sigma \quad \text{et pour tout } Y \in(G . Y_0) \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*,$$
$$d(s, \mathfrak{a}, \Phi^{+}, Y)+d(s, \mathfrak{a}, \Phi^{+}, s_\alpha Y)=0$$

et donc, pour tout $w \in W$, on a:

$$(4.5) \qquad d(s, \mathfrak{a}, \Phi^{+}, Y)=\varepsilon(w) d(s, \mathfrak{a}, \Phi^{+}, w Y).$$

Soit $\tilde{\alpha}$ la plus grande racine de $\Phi^{+}$.
(4.6) Soit $X \in \mathfrak{a}(\varepsilon/2) \cap \operatorname{Ker} \tilde{\alpha}$ tel que, pour toute racine $\beta \in \Phi^{+}$ orthogonale à $\tilde{\alpha}$, l'on ait $\beta(X)>0$.

Comme la racine $\tilde{\alpha}$ est la plus grande racine de $\Phi^{+}$, on déduit de ([Bo], chap. VI, § 1, prop. 25) que, pour tout $\beta \in \Phi^{+}$, l'on a $\beta(H_{\tilde{\alpha}})=0$ ou 1 ou $\beta=\tilde{\alpha}$. Donc, pour X choisi comme en (4.6) et pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\beta(t \pi H_{\tilde{\alpha}}/2+X)=\beta(X) \in ]0, \varepsilon/2[ \qquad \text{si} \quad \beta \in \operatorname{Ker} \tilde{\alpha},$$

$\beta(t\pi H_{\tilde{\alpha}}/2+X)=\beta(X)+t\pi/2\in]-\varepsilon/2+t\pi/2, \varepsilon/2+t\pi/2[$

si $\beta(H_{\tilde{\alpha}})=1$, $\tilde{\alpha}(t\pi H_{\tilde{\alpha}}/2+X)=t\pi$.

Donc, pour X choisi comme en (4.6), pour tout $t\in]\varepsilon/\pi, 1[$ et pour tout $\beta\in\Phi^+$, l'on a $\beta(t\pi H_{\tilde{\alpha}}/2+X)\in]0, \pi[$. Par suite, pour tout X comme en (4.6) et pour $t\in]\varepsilon/\pi, 1[$, on a:

(i) $t\pi H_{\tilde{\alpha}}/2+X\in C^+$,

(ii) $(\exp i(t\pi H_{\tilde{\alpha}}/2+X)).s\in A'_{\mathbb{R}}$ (l'ensemble $A'_{\mathbb{R}}$ étant défini en 2.7).

D'après les théorèmes 2.7 et 2.8, la fonction $\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}})\Psi_A$ est analytique sur $A'_{\mathbb{R}}$ et continue sur A. Par l'expression (4.4) et par (i) et (ii), on a alors, pour X choisi comme en (4.6), l'expression suivante:

$$(4.7)\quad \partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}})\Psi_A((\exp i(\pi H_{\tilde{\alpha}}/2+X)).s)=\sum_{Y\in(G.Y_0)\cap\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*} d(s, \mathfrak{a}, \Phi^+, Y)\, e^{\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}}/2+X\rangle}.$$

Soit B le sous-ensemble de Cartan adjacent à A relativement à $\tilde{\alpha}$. D'après la proposition 3.9, pour X choisi comme en (4.6), l'élément $(\exp i(\pi H_{\tilde{\alpha}}/2+X)).s$ appartient à B. En appliquant l'hypothèse de récurrence (4.3) à B et d'après le théorème 2.8, on en déduit que l'on a $\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}})\Psi_A((\exp i(\pi H_{\tilde{\alpha}}/2+X)).s)=0$. Ceci se traduit, en utilisant (4.7), par les relations suivantes:

Pour tout $Y\in(G.Y_0)\cap\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, on a

$$(4.8)\qquad d(s, \mathfrak{a}, \Phi^+, Y)\, e^{\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}}/2\rangle}+d(s, \mathfrak{a}, \Phi^+, s_{\tilde{\alpha}}Y)\, e^{-\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}}/2\rangle}=0.$$

Par la relation (4.5), on a également, pour tout $Y\in(G.Y_0)\cap\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$,

$$(4.9)\qquad d(s, \mathfrak{a}, \Phi^+, Y)+d(s, \mathfrak{a}, \Phi^+, s_{\tilde{\alpha}}Y)=0.$$

Comme $Y_0$ est choisi de telle sorte que, pour tout $\beta\in\Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{t})$, l'on ait $\langle Y_0, H_\beta\rangle\notin 2i\mathbb{Z}$, on en déduit que, pour tout $Y\in(G.Y_0)\cap\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, on a $\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}}\rangle\notin 2i\pi\mathbb{Z}$. Par suite, le déterminant du système défini par (4.8) et (4.9) est non nul. Finalement, on obtient que, pour tout $Y\in(G.Y_0)\cap\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, l'on a:

$$d(s, \mathfrak{a}, \Phi^+, Y)=0.$$

La fonction $\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}})\Psi_A$ étant analytique sur $A'_{\mathbb{R}}$, on en déduit qu'elle est nulle sur $(\exp i\mathfrak{a}(\pi)).s$. Ceci étant valable pour tout $s$ de A, la fonction $\partial(\omega_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}})\Psi_A$ est donc nulle sur $A'_{\mathbb{R}}$. Finalement, on obtient que la fonction généralisée Θ est nulle sur A′. Ceci achève la démonstration du théorème. □

## 5. Construction de fonctions généralisées H-invariantes sur $\mathfrak{h}$ solution propre des opérateurs de $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^H$

Dans ce paragraphe et le suivant, nous donnons une méthode de construction de fonctions généralisées sphériques sur G/H. Cette méthode se décompose en deux étapes:

Tout d'abord, à partir d'une fonction généralisée H-invariante, tempérée Θ, solution propre des opérateurs de $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^H$ sur $\mathfrak{h}$, on construit une autre fonction généralisée

H-invariante $\tilde{\Theta}$ solution propre des opérateurs de $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^{H}$. Ce résultat a été annoncé et partiellement démontré dans [H. 1]. Il fera l'objet de ce paragraphe 5.

La deuxième étape consiste à construire une fonction généralisée sphérique $\bar{\Theta}$ sur G/H à partir de $\tilde{\Theta}$. Nous expliquerons cette deuxième étape dans le paragraphe 6.

On suppose toujours que $\operatorname{rang}(\mathfrak{h}) = \operatorname{rang}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k})$. On fixe $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ et soit T le sous-ensemble de Cartan de G/H associé à $\mathfrak{t}$. On note $T = \bigcup_{j \in J} (\exp i\mathfrak{t}) . s_j$ comme en (3.8).

On fixe dans toute la suite un élément régulier $Y_0$ de $i\mathfrak{t}^*$.

(5.1) Soit $\omega$ la composante connexe de 0 de l'ensemble des $X \in \mathfrak{h}$ tels que $J(X) \neq 0$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on fixe $\Theta$ une fonction généralisée H-invariante et tempérée sur $\mathfrak{h}$ telle que, pour tout $P \in S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^{H}$, l'on ait $P\Theta = P(Y_0)\Theta$. Dans ce cas, la fonction $\Theta$ est une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'orbites d'éléments de $\mathfrak{t}^*$.

THÉORÈME 5.2. — *On définit la fonction $\tilde{\Theta}$ sur $\omega'$ par*

$$\tilde{\Theta}(Z)\,|J(Z)|^{-1/2} = \sum_{X \in \mathfrak{h}',\ \operatorname{Exp} X = \operatorname{Exp} Z} \Theta(X)\,|J(X)|^{-1/2}.$$

*Alors* :

(i) *cette série est convergente*,

(ii) $\tilde{\Theta}$ *définit sur $\omega$ une fonction généralisée* H-*invariante solution propre des opérateurs de* $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^{H}$.

Pour prouver ce théorème, on va utiliser le théorème 1.7. La partie difficile est de montrer que $\tilde{\Theta}$ vérifie l'hypothèse (iii) de ce théorème. Pour cela, nous allons tout d'abord démontrer des résultats intermédiaires.

Pour $\mathfrak{a} \in \operatorname{Car}(\mathfrak{h})$, on note $\Delta = \Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, $\Delta^+ = \Delta^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, $\Phi = \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ et $\Phi^+ = \Phi \cap \Delta^+$ comme en (1.1). Soit $\Sigma$ la base de $\Phi$ associée au choix de $\Phi^+$ et soit $C^+$ la chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ définie par $\Sigma$. On pose $\Gamma = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Z}\pi H_\alpha$ et soit W le groupe engendré par les réflexions $s_\alpha$ lorsque $\alpha$ parcourt $\Phi$ (comme en 3.2 et 3.3).

(5.3) Pour $\alpha \in \Phi$, on note $\mathfrak{a}(\alpha)$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$ adjacente à $\mathfrak{a}$ relativement à $\alpha$. Soit $c_\alpha$ l'élément du groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ tel que $c_\alpha(\mathfrak{a} + i\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}(\alpha) + i\mathfrak{a}(\alpha)$. On note $\Phi_\alpha$ l'ensemble des $\beta \in \Phi$ orthogonales à $\alpha$ et on pose $\Phi_\alpha^+ = \Phi^+ \cap \Phi_\alpha$, $\Gamma_\alpha = \sum_{\beta \in \Phi_\alpha} \mathbb{Z}\pi H_\beta$. Soit $C_\alpha^+$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}$ tels que, pour tout $\beta \in \Phi_\alpha^+$, l'on ait $\beta(X) > 0$ et soit $W_\alpha$ le groupe engendré par les $s_\beta$ lorsque $\beta$ parcourt $\Phi_\alpha$.

On pose $c_\alpha(\Phi_\alpha) = \Phi(\alpha)$, $c_\alpha(\Phi_\alpha^+) = \Phi^+(\alpha)$, $c_\alpha(W_\alpha) = W(\alpha)$, $c_\alpha(\Gamma_\alpha) = \Gamma(\alpha)$. Les ensembles $\Phi(\alpha)$, $\Phi^+(\alpha)$ et $W(\alpha)$ sont respectivement le système de racines réelles de la paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}(\alpha))$, un système positif, le groupe engendré par les $s_\beta$ lorsque $\beta$ parcourt $\Phi(\alpha)$.

On note $\pi_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}=\prod_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$. Pour tout $\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{h})$, il existe des constantes $c'(\mathfrak{a},\Delta^+,\Phi^+,\mathrm{Y})$ et $c(\mathfrak{a},\Phi^+,\mathrm{Y})$ telles que, pour tout $\mathrm{X}\in\mathrm{C}^+\cap\mathfrak{h}'$, l'on ait

$$\Theta(\mathrm{X})=(\pi_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}(\mathrm{X}))^{-1}\sum_{\mathrm{Y}\in(\mathrm{G}\,.\,\mathrm{Y}_0)\cap\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*} c'(\mathfrak{a},\Delta^+,\Phi^+,\mathrm{Y})\,e^{\langle \mathrm{Y},\mathrm{X}\rangle}$$

$$\nabla^{\mathfrak{h}}\Theta(\mathrm{X})=\sum_{\mathrm{Y}\in(\mathrm{G}\,.\,\mathrm{Y}_0)\cap\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*} c(\mathfrak{a},\Phi^+,\mathrm{Y})\,e^{\langle \mathrm{Y},\mathrm{X}\rangle}.$$

On a $c(\mathfrak{a},\Phi^+,\mathrm{Y})=c'(\mathfrak{a},\Delta^+,\Phi^+,\mathrm{Y})\,\pi_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}(\mathrm{Y})$.

Les propriétés de $\Theta$ se traduisent sur les constantes $c(\mathfrak{a},\Phi^+,\mathrm{Y})$ par les relations suivantes :

(5.4) pour tout $w\in\mathrm{W}$, on a $c(\mathfrak{a},\Phi^+,w\mathrm{Y})=c(\mathfrak{a},w^{-1}\Phi^+,\mathrm{Y})$ (H-invariance de $\Theta$),

(5.5) pour tout $\alpha\in\Sigma$, on a

$$c(\mathfrak{a},\Phi^+,\mathrm{Y})+c(\mathfrak{a},\Phi^+,s_\alpha\mathrm{Y})=c(\mathfrak{a}(\alpha),\Phi^+(\alpha),c_\alpha\mathrm{Y})+c(\mathfrak{a}(\alpha),\Phi^+(\alpha),c_\alpha s_\alpha\mathrm{Y}))$$

(continuité de $\nabla^{\mathfrak{h}}\Theta$),

(5.6) si $c(\mathfrak{a},\Phi^+,\mathrm{Y})\neq 0$ alors, pour tout $\mathrm{X}\in\mathrm{C}^+$, on a $\mathrm{Re}\langle \mathrm{Y},\mathrm{X}\rangle\leqq 0$ (car la fonction $\Theta$ est tempérée).

Soit $\mathrm{X}^+$ un élément de $\mathrm{C}^+\cap\omega$, l'ouvert $\omega$ étant défini en (5.1).

LEMME 5.7. — *Soit* $\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{h})$ *et soit* $\mathrm{Y}\in(\mathrm{G}.\mathrm{Y}_0)\cap\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. *Soit* $w\in\mathrm{W}$ *tel que* $c(\mathfrak{a},\Phi^+,w\mathrm{Y})\neq 0$. *Alors* :

(i) *la série* $\sum_{\substack{\mathrm{X}\in\Gamma\\ w(\mathrm{X}+\mathrm{X}^+)\in\mathrm{C}^+}} e^{\langle \mathrm{Y},\mathrm{X}\rangle}$ *est convergente,*

(ii) *l'ensemble des* $\mathrm{X}\in\Gamma$ *tels que* $w(\mathrm{X}+\mathrm{X}^+)\in\mathrm{C}^+$ *ne dépend pas du choix de* $\mathrm{X}^+$ *dans* $\omega\cap\mathrm{C}^+$.

*Démonstration.* — Si $|\Phi|=0$ alors $\Gamma=\{0\}$ et la convergence de la série est immédiate. On suppose donc que $|\Phi|>0$.

Soit $\mathrm{X}\in\Gamma$ tel que $w(\mathrm{X}+\mathrm{X}^+)\in\mathrm{C}^+$. On a donc $\mathrm{X}\in\overline{w^{-1}\mathrm{C}^+}$. Par hypothèse, on a $c(\mathfrak{a},\Phi^+,w\mathrm{Y})\neq 0$. On déduit alors de (5.6) que l'on a $\mathrm{Re}\langle \mathrm{Y},\mathrm{X}\rangle=\mathrm{Re}\langle w\mathrm{Y},w\mathrm{X}\rangle\leqq 0$. On écrit $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}+\mathfrak{a}_{\mathrm{R}}$ comme en (1.1). Comme $\mathrm{Y}_0$ est un élément régulier de $i\mathfrak{t}^*$, l'élément Y ne prend que des valeurs réelles sur $\mathfrak{a}_{\mathrm{R}}$ et il est régulier. D'autre part, la fonction $\nabla^{\mathfrak{h}}\Theta$ est décroissante à l'infini sur $\overline{\mathrm{C}^+}$. On en déduit donc que, pour tout $\mathrm{X}\in\overline{w^{-1}\mathrm{C}^+}\cap\mathfrak{a}_{\mathrm{R}}-\{0\}$, on a $\langle \mathrm{Y},\ \mathrm{X}\ \rangle<0$. Soit $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_k$ les racines simples de $\Phi$ relativement à la chambre $w^{-1}\mathrm{C}^+$. On note $\alpha_1^*,\ \alpha_2^*\ldots\alpha_k^*$ la base de $\mathfrak{a}_{\mathrm{R}}$ duale de $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_k$. On a alors $\Gamma\cap\overline{w^{-1}\mathrm{C}^+}\subseteq\left(\sum_{i=1}^{k}\mathbb{N}\,\alpha_i^*\right)$ et $\langle \mathrm{Y},\alpha_i^*\rangle<0$ pour tout $i\in\{1\ldots k\}$.

Par suite, la série $\sum_{\substack{\mathrm{X}\in\Gamma\\ w(\mathrm{X}+\mathrm{X}^+)\in\mathrm{C}^+}} e^{\langle \mathrm{Y},\mathrm{X}\rangle}$ est convergente.

Prouvons (ii) : soit $X_0^+ \in \omega \cap C^+$ tel que $X_0^+ \neq X^+$. Soit $X \in \Gamma$ tel que $w(X+X^+) \in C^+$. Il suffit de prouver que, pour tout $\beta \in \Phi^+$, l'on a :

$$(*) \qquad \beta(X+X^+)\,\beta(X+X_0^+)>0.$$

Or, pour tout $\beta \in \Phi^+$, l'on a $\beta(X^+) \in ]0, \pi[$, $\beta(X_0^+) \in ]0, \pi[$ et $\beta(X) \in 2\pi\mathbb{Z}$. L'assertion $(*)$ devient immédiate. Ceci achève la démonstration du lemme. □

On pose, pour tout $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{h})$ et pour tout $Y \in (G.Y_0) \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$,

$$(5.8) \qquad \begin{aligned} d'(\mathfrak{a}, \Delta^+, \Phi^+, Y) &= \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, c'(\mathfrak{a}, \Delta^+, \Phi^+, wY) \sum_{\substack{X \in \Gamma \\ w(X+X^+) \in C^+}} e^{\langle Y, X \rangle} \\ d(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) &= \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, c(\mathfrak{a}, \Phi^+, wY) \sum_{\substack{X \in \Gamma \\ w(X+X^+) \in C^+}} e^{\langle Y, X \rangle} \end{aligned}.$$

PROPOSITION 5.9. — *Soit* $\tilde{\Theta}$ *la fonction définie dans le théorème* 5.2. *Soit* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{h})$ *et soit* $Z \in C^+ \cap \omega'$. *Alors, on a :*

$$\tilde{\Theta}(Z) = (\pi_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}(Z))^{-1} \sum_{Y \in (G.Y_0) \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*} d'(\mathfrak{a}, \Delta^+, \Phi^+, Y)\, e^{\langle Y, Z \rangle}$$

*et*

$$(\nabla^{\mathfrak{h}} \tilde{\Theta})(Z) = \sum_{Y \in (G.Y_0) \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*} d(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)\, e^{\langle Y, Z \rangle}.$$

*En particulier, la fonction* $\tilde{\Theta}$ *est localement intégrable sur* $\omega$.

*Démonstration.* — Soit $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{h})$ et soit $Z \in C^+ \cap \omega$. Si l'élément $X \in \mathfrak{h}'$ vérifie $\mathrm{Exp}\,X = \mathrm{Exp}\,Z$ alors on a $\exp 2iX \in Z_G(\mathfrak{a}+i\mathfrak{a})$. Donc, on a $\mathfrak{a}+i\mathfrak{a} \subset Z_{\mathfrak{g}}(\exp 2iX)$. Les éléments $X$ et $\exp 2iX$ étant réguliers, on en déduit que $X \in \mathfrak{a}$. D'après le lemme 3.4, on a donc $X - Z \in \Gamma$. On en déduit donc que

$$\tilde{\Theta}(Z)\,|\,J(Z)\,|^{-1/2} = \sum_{X \in \Gamma} \Theta(X+Z)\,|\,J(X+Z)\,|^{-1/2}.$$

On choisit $\Delta^+$ de telle sorte que si $\alpha \in \Delta^+$ est une racine complexe alors $\bar{\alpha} \in \Delta^+$.

Pour $X \in \mathfrak{a}$, on a

$$J(X)^{1/2} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} (e^{i\alpha(X)} - e^{-i\alpha(X)})/2i\alpha(X).$$

Si $\alpha$ est une racine imaginaire de $\Delta^+$ alors $i\alpha(X) \in \mathbb{R}$ et par suite, on a

$$(e^{i\alpha(X)} - e^{-i\alpha(X)})/2i\alpha(X) = sh(i\alpha(X))/i\alpha(X) > 0.$$

Si $\alpha$ est une racine complexe de $\Delta^+$, alors $\bar{\alpha} \in \Delta^+$, par suite, on a

$$[(e^{i\alpha(X)} - e^{-i\alpha(X)})/i\alpha(X)]\,[(e^{i\bar{\alpha}(X)} - e^{-i\bar{\alpha}(X)})/i\bar{\alpha}(X)] = |\,(e^{i\alpha(X)} - e^{-i\alpha(X)})/i\alpha(X)\,|^2 > 0.$$

Si $\alpha\in\Phi^+$ alors on a

$$(e^{i\alpha(X)}-e^{-i\alpha(X)})/2\,i\,\alpha(X)=\sin\alpha(X)/\alpha(X).$$

Le signe de $J(X)^{1/2}$ est donc le signe de $\prod_{\alpha\in\Phi^+}\sin\alpha(X)/\alpha(X)$.

Comme $Z\in\omega\cap C^+$, pour tout $\alpha\in\Phi^+$, on a $\alpha(Z)\in]0,\pi[$. On obtient donc $|J(Z)|^{1/2}=J(Z)^{1/2}$.

Soit $X\in\Gamma$. Pour tout $\alpha\in\Delta^+$, on a $\alpha(X)\in\pi\mathbb{Z}$. Par suite, on obtient $\sin\alpha(X+Z)/\alpha(X+Z)=\sin\alpha(Z)/\alpha(X+Z)\times e^{i\alpha(X)}$ et donc le signe de $J(X+Z)^{1/2}$ est égal au signe de $\prod_{\alpha\in\Phi^+}\alpha(X+Z)\times e^{i\alpha(X)}$. Comme $X\in\Gamma$ et $Z\in\omega\cap C^+$, l'élément $X+Z$ appartient à $\mathfrak{a}'_{\mathbb{R}}$. Il existe donc un unique élément $w\in W$ tel que $w(X+Z)\in C^+$. Le signe de $\prod_{\alpha\in\Phi^+}\alpha(X+Z)$ est égal à $\varepsilon(w)$. Finalement, on a :

$$\tilde{\Theta}(Z)\,J(Z)^{-1/2}=\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\sum_{\substack{X\in\Gamma\\ w(X+Z)\in C^+}}\Theta(X+Z)\,J(X+Z)^{-1/2}\Big(\prod_{\alpha\in\Phi^+}e^{i\alpha(X)}\Big).$$

Soit $\pi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{h}}$ comme en (1.3). Soit $X\in\Gamma$. On a

$$J(X+Z)^{1/2}=\Big(\prod_{\alpha\in\Delta^+}(e^{i\alpha(X+Z)}-e^{-i\alpha(X+Z)})/2\,i\,\alpha(X+Z)=\frac{J(Z)^{1/2}\,\pi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{h}}(Z)}{\pi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{h}}(Z+X)}\times\prod_{\alpha\in\Delta^+}e^{i\alpha(X)}.$$

Par le choix de X, on a $\prod_{\alpha\in\Delta^+}e^{i\alpha(X)}=\prod_{\alpha\in\Phi^+}e^{i\alpha(X)}$.

On en déduit l'expression suivante de $\tilde{\Theta}$ :

$$(\pi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{h}}\tilde{\Theta})(Z)=\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\sum_{\substack{X\in\Gamma\\ w(X+Z)\in C^+}}\Theta(X+Z)\,\pi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{h}}(X+Z).$$

Comme $Z\in\omega\cap C^+$, si $X\in\Gamma$ et si $w\in W$ alors $w(X+Z)\in C^+$ si et seulement si $w(X+X^+)\in C^+$ [lemme 5.7 (ii)]. Les expressions de $\tilde{\Theta}$ et de $\nabla^{\mathfrak{b}}\tilde{\Theta}$ sont alors immédiates.

Pour $X\in\mathfrak{h}$, on note $\xi(X)=\det(\mathrm{ad}\,X)_{/\mathfrak{h}}$. D'après ([Va], partie I, § 4, prop. 15, p. 63), la fonction $|\xi|^{-1/2}$ est localement intégrable sur $\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{h})$ alors on a $|\xi|_{/\mathfrak{a}}^{-1/2}=|\pi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{h}}|^{-1}$. Vu l'expression de $\tilde{\Theta}$, il est clair qu'elle est localement intégrable sur $\omega$. □

On fixe $\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{h})$ et on utilisera toutes les notations de (5.3).

LEMME 5.10. — *Soit* $\alpha\in\Phi$. *Alors* $\Gamma\cap\mathrm{Ker}\,\alpha=\Gamma_\alpha$.

*Démonstration.* — La démonstration se fait par récurrence sur $|\Phi|$. Si $|\Phi|=0$, le lemme est immédiat. Si $|\Phi|>0$, alors on fixe $\alpha\in\Phi$. D'après (3.5), on a :

$$\begin{aligned}\Gamma\cap\mathrm{Ker}\,\alpha&=\Big(\sum_{\beta\in\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a})}\mathbb{Z}\,\pi\,H_\beta\Big)\cap\mathfrak{a}_R\cap\mathrm{Ker}\,\alpha\\&=\Big(\sum_{\beta\in\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a}(\alpha))}\mathbb{Z}\,\pi\,H_\beta\Big)\cap\mathfrak{a}(\alpha)_R\end{aligned}$$

$$= \Gamma(\alpha) = \Gamma_\alpha.$$

On obtient donc le résultat voulu. □

LEMME 5.11. — *Soit* $\alpha \in \Sigma$ *et soit* $X \in \Gamma$ *tel que* $\alpha(X) \neq 0$. *Soit* $w \in W$. *Alors* $w(X + X^+) \in C^+$ *si et seulement si* $w(X + s_\alpha X^+) \in C^+$.

*Démonstration.* — On peut caractériser $w^{-1} C^+$ de la manière suivante: il existe $\Psi \subseteq \Phi^+$ tel que, pour tout $Z \in w^{-1} C^+$, l'on ait $\beta(Z) < 0$ si $\beta \in \Psi$ et $\beta(Z) > 0$ si $\beta \in \Phi^+ - \Psi$.

Soit $X \in \Gamma$ tel que $\alpha(X) \neq 0$ et $X + X^+ \in w^{-1} C^+$. Pour $\beta \in \Phi^+$, on écrit $\beta(X) = \pi\, n(\beta, X)$ avec $n(\beta, X) \in \mathbb{Z}$. Comme $w(X + X^+) \in C^+$, on en déduit que $n(\beta, X) < 0$ si $\beta \in \Psi$ et $n(\beta, X) \geqq 0$ si $\beta \in \Phi^+ - \Psi$. Comme pour tout $\beta \in \Phi^+ - \{\alpha\}$, on a $\beta(s_\alpha X^+) \in ]0, \pi[$ et $\beta(X^+) \in ]0, \pi[$, on en déduit que pour tout $\beta \in \Phi^+ - \{\alpha\}$, $\beta(X + X^+)$ et $\beta(X + s_\alpha X^+)$ sont de même signe. Il suffit de regarder le signe de $\alpha(X + s_\alpha X^+)$. Si $\alpha \in \Psi$ alors $n(\alpha, X) < 0$ et $\alpha(s_\alpha X^+) \in ]-\pi, 0[$, donc $\alpha(X + s_\alpha X^+) < 0$. Si $\alpha \in \Phi^+ - \Psi$ alors $n(\alpha, X) > 0$ et $\alpha(s_\alpha X^+) \in ]\pi, 0[$, donc $\alpha(X + s_\alpha X^+) > 0$. Dans tous les cas, on obtient $X + s_\alpha X^+ \in w^{-1} C^+$. La réciproque se montre de façon analogue. □

LEMME 5.12. — *Soit* $\alpha \in \Phi$ *et soit* $W_1$ *l'ensemble des* $w \in W$ *tels que* $w_1^{-1} C^+ \subset C_\alpha^+$. *Pour tout* $w \in W$ *il existe un unique couple* $(w_0, w_1) \in W_\alpha \times W_1$ *tel que* $w = w_1 w_0$.

*Démonstration.* — On considère la chambre de Weyl $w^{-1}\ C^+$. Il existe un unique $w_0 \in W_\alpha$ tel que $w_0 w^{-1} C^+ \subseteq C_\alpha^+$. Par définition de $W_1$, il existe donc $w_1 \in W_1$ tel que $w_1^{-1} C^+ = w_0 w^{-1} C^+$. Le groupe W agissant simplement transitivement sur les chambres de Weyl définies par $\Phi$, on en déduit que $w = w_1 w_0$. □

LEMME 5.13. — *Soit* $w \in W$ *et soit* $\alpha \in \Sigma$. *S'il existe* $X \in \Gamma_\alpha$ *tel que* $w(X + X^+) \in C^+$ *alors* $w\alpha \in \Sigma$.

*Démonstration.* — On suppose qu'il existe $X \in \Gamma_\alpha$ tel que $w(X + X^+) \in C^+$. On fixe un tel X. Montrons d'abord que, pour tout $X' \in w^{-1} C^+$, on a:

$$\text{(5.14)} \qquad \text{pour tout } \beta \neq \alpha, \qquad \beta(X')\, s_\alpha \beta(X') > 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha(X') > 0.$$

Il suffit de montrer qu'il existe $Z \in w^{-1} C^+$ tel que Z vérifie (5.14). On pose $Z = X + X^+$. On a: $\alpha(Z) = \alpha(X^+) > 0$. Soit $\beta \neq \alpha$. On peut supposer $\beta \in \Phi^+$. On a $s_\alpha \beta(X) = \beta(X) \in \pi \mathbb{Z}$. Comme $\beta(X^+)$ et $s_\alpha \beta(X^+)$ sont dans $]0, \pi[$, on obtient que Z vérifie (5.14).

Montrons le lemme: si $Z \in w^{-1} C^+$ alors $\alpha(Z) > 0$, donc $w\alpha \in \Phi^+$. Si $\beta$ est une racine positive par rapport à $w^{-1} C^+$ distincte de $\alpha$, alors $s_\alpha \beta$ est une racine positive par rapport à $w^{-1} C^+$ d'après (5.14). On en déduit que $w\alpha \in \Sigma$. □

LEMME 5.15. — *Soit* $\alpha \in \Sigma$ *et soit* $w_1 \in W_1$ *tel que* $w_1 \alpha \in \Sigma$. *On a* $\varepsilon(w_1) = 1$.

*Démonstration.* — Pour montrer que $\varepsilon(w_1) = 1$, il suffit de montrer que l'ensemble D des $\gamma \in \Phi^+$ tels que $w_1 \gamma \in -\Phi^+$ est de cardinal pair.

Soit $\gamma \in D$. On a $\gamma \notin \Phi_\alpha^+$ puisque $w_1 \Phi_\alpha^+ \subset \Phi^+$. Comme $w_1 \alpha \in \Sigma$, on a $\gamma \neq \alpha$. Par suite, l'élément $s_\alpha \gamma$ appartient à $\Phi^+$ et $\gamma \neq s_\alpha \gamma$. Or, $w_1(s_\alpha \gamma) = s_{w_1 \alpha}(w_1 \gamma)$. Comme par hypothèse $w_1 \gamma \in -\Phi^+$ et $w_1 \gamma \neq w_1 \alpha$, on en déduit que $s_{w_1 \alpha}(w_1 \gamma) \in -\Phi^+$. Par suite, les éléments $\gamma$ et $s_\alpha(\gamma)$ sont deux éléments distincts de D. □

*Démonstration du théorème* 5.2. — La série considérée est convergente d'après la proposition 5.9.

D'après la démonstration de la proposition 5.9, on a, pour tout $\mathfrak{a}\in \mathrm{Car}(\mathfrak{h})$ et pour tout $Z\in\omega\cap C^+$,

$$\pi_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}(Z)\,\tilde{\Theta}(Z)=\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\sum_{\substack{X\in\Gamma\\ w(X+X^+)\in C^+}}\pi_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}(X+Z)\,\Theta(X+Z).$$

Comme la fonction $\Theta$ vérifie les hypothèses (i) et (ii) du théorème 1.7, on en déduit donc qu'il en est de même pour $\tilde{\Theta}$.

Pour prouver le théorème, il suffit donc de prouver que $\tilde{\Theta}$ vérifie l'hypothèse (iii) du théorème 1.7.

D'après l'expression de $\nabla^{\flat}\tilde{\Theta}$ obtenue dans la proposition 5.9, il suffit de montrer que, pour tout $\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{h})$, pour tout $\alpha\in\Sigma$ et pour tout $Y\in(G.Y_0)\cap\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, l'on a :

$$d(\mathfrak{a},\Phi^+,Y)+d(\mathfrak{a},\Phi^+,s_\alpha Y)=d(\mathfrak{a}(\alpha),\Phi^+(\alpha),c_\alpha Y)+d(\mathfrak{a}(\alpha),\Phi^+(\alpha),c_\alpha s_\alpha Y).$$

On fixe $\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{h})$, $\alpha\in\Sigma$ et $Y\in(G.Y_0)\cap\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$.

D'après la relation (5.8), on a :

$$\begin{aligned}
&d(\mathfrak{a},\Phi^+,Y)+d(\mathfrak{a},\Phi^+,s_\alpha Y)\\
&\quad=\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\,c(\mathfrak{a},\Phi^+,wY)\Big[\sum_{\substack{X\in\Gamma\\ w(X+X^+)\in C^+}}e^{\langle Y,X\rangle}-\sum_{\substack{X\in\Gamma\\ w(X+s_\alpha X^+)\in C^+}}e^{\langle Y,X\rangle}\Big]\\
&\quad=\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\,[c(\mathfrak{a},\Phi^+,wY)+c(\mathfrak{a},\Phi^+,ws_\alpha Y)]\sum_{\substack{X\in\Gamma_\alpha\\ w(X+X^+)\in C^+}}e^{\langle Y,X\rangle}
\end{aligned}$$

(d'après les lemmes 5.10 et 5.11).

$$=\sum_{w_0\in W_\alpha}\varepsilon(w_0)\sum_{\substack{w_1\in W_1\\ w_1\alpha\in\Sigma}}[c(\mathfrak{a},\Phi^+,w_1w_0Y)+c(\mathfrak{a},\Phi^+,w_1s_\alpha w_0Y)]\sum_{\substack{X\in\Gamma_\alpha\\ w_1w_0(X+X^+)\in C^+}}e^{\langle Y,X\rangle}$$

(d'après les lemmes 5.12, 5.13 et 5.15).

Soit $w_1\in W_1$ tel que $w_1\alpha\in\Sigma$. On a $w_1^{-1}\Phi^+\cap\Phi_\alpha=\Phi_\alpha^+$. Par les hypothèses (5.4) et (5.5), on en déduit que l'on a :

$$\begin{aligned}
&c(\mathfrak{a},\Phi^+,w_1w_0Y)+c(\mathfrak{a},\Phi^+,w_1w_0s_\alpha Y)\\
&\quad=c(\mathfrak{a},w_1^{-1}\Phi^+,w_0Y)+c(\mathfrak{a},w_1^{-1}\Phi^+,s_\alpha w_0Y)\\
&\quad=c(\mathfrak{a}(\alpha),\Phi^+(\alpha),c_\alpha w_0Y)+c(\mathfrak{a}(\alpha),\Phi^+(\alpha),c_\alpha s_\alpha w_0Y).
\end{aligned}$$

Par suite, on a:

$$d(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) + d(\mathfrak{a}, \Phi^+, s_\alpha Y) = \sum_{w_0 \in W_\alpha} \varepsilon(w_0) [c(\mathfrak{a}(\alpha), \Phi^+(\alpha), c_\alpha w_0 Y) + c(\mathfrak{a}(\alpha), \Phi^+(\alpha), c_\alpha s_\alpha w_0 Y)] \times \sum_{\substack{X \in \Gamma_\alpha \\ w_0(X+X^+) \in C_\alpha^+}} e^{\langle Y, X \rangle}.$$

D'après le lemme 5.7 (ii), l'ensemble des $X \in \Gamma_\alpha$ tels que $w(X+X^+) \in C_\alpha^+$ ne dépend pas du choix de $X^+$ dans $\omega \cap C_\alpha^+$. Soit $X_\alpha^+ \in C_\alpha^+ \cap \omega \cap \operatorname{Ker} \alpha$ et soit $X(\alpha)^+ = c_\alpha(X_\alpha^+)$. On obtient alors:

$$d(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) + d(\mathfrak{a}, \Phi^+, s_\alpha Y) = \sum_{w \in W(\alpha)} \varepsilon(w) [c(\mathfrak{a}(\alpha), \Phi^+(\alpha), w c_\alpha Y) + c(\mathfrak{a}(\alpha), \Phi^+(\alpha), w c_\alpha s_\alpha Y)] \times \sum_{\substack{X \in \Gamma(\alpha) \\ w(X+X(\alpha)^+) \in C(\alpha)^+}} e^{\langle c_\alpha Y, X \rangle},$$

où $C^+(\alpha)$ est la chambre de Weyl de $\mathfrak{a}(\alpha)$ définie par $\Phi^+(\alpha)$.

Cette expression coïncide avec

$$d(\mathfrak{a}(\alpha), \Phi^+(\alpha), c_\alpha Y) + d(\mathfrak{a}(\alpha), \Phi^+(\alpha), c_\alpha s_\alpha Y).$$

Ceci achève la démonstration du théorème. □

## 6. Construction de fonctions généralisées sphériques sur G/H

Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant: on choisit $\mathfrak{t} \in \operatorname{Car}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k})$ et $Y_0$ un élément régulier de $i\mathfrak{t}^*$ comme dans le paragraphe 5. On note T le sous-ensemble de Cartan de G/H associé à $\mathfrak{t}$ et $T_0 = \operatorname{Exp} \mathfrak{t}$ la composante connexe de $p(1)$ dans T.

THÉORÈME 6.1. — *Soit* $\mu_{\mathfrak{g}}$ *l'isomorphisme de* $D(G/H)$ *dans* $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^H$ *défini en* (2.1). *Soit* $\Theta$ *une fonction généralisée* H-*invariante tempérée sur* $\mathfrak{h}$ *telle que, pour tout* $P \in S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^H$, *l'on ait* $P\Theta = P(Y_0)\Theta$. *Alors, il existe une unique fonction généralisée* H-*invariante* $\bar{\Theta}$ *sur* G/H *telle que*:

(i) *pour tout* $D \in D(G/H)$, *l'on ait* $D\bar{\Theta} = \mu_{\mathfrak{g}}(D)(Y_0)\bar{\Theta}$,

(ii) *pour tout* $x \in T'$, *l'on ait*

*si* $x \in T' - T'_0$ *alors* $\bar{\Theta}(x) = 0$;

*si* $X \in \mathfrak{t}'$ *alors* $\bar{\Theta}(\operatorname{Exp} X) = J(X)^{-1/2}\Theta(X)$.

L'unicité d'une telle fonction généralisée a été démontrée dans le paragraphe 4. Pour l'existence, nous allons construire à partir de la fonction généralisée définie dans le théorème 5.2, une fonction généralisée sphérique sur G/H (théorème 6.3). Soit $\omega$ l'ouvert de $\mathfrak{h}$ défini en (5.1).

LEMME 6.2. — *L'application* Exp *est un difféomorphisme de* $\omega'$ *sur son image.*

*Démonstration.* – Soit $X \in \omega'$ et soit $\mathfrak{a}$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$ contenant X. Soit $Y \in \omega'$ tel que l'on ait $\operatorname{Exp} X = \operatorname{Exp} Y$. On a alors $Y \in \mathfrak{a}$ (d'après la démonstration de la proposition 5.9). On note $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, $\Phi^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ comme en (1.1), $\Gamma$ comme en (3.2).

D'après le lemme 3.4, on a donc $X - Y \in \Gamma$. Puisque X et Y appartiennent à $\omega'$, on a $\beta(X-Y) \in \{0, \pi, -\pi\}$ pour tout $\beta \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ et par suite, on a $X - Y \in \Gamma \cap \bar{\omega}$. D'après (3.7), on en déduit donc que $X - Y = 0$. L'application Exp est donc injective sur $\omega'$.

Par définition de $\omega$, on a donc $J(X) \neq 0$. Ceci achève la démonstration du lemme. □

Soit $\Theta$ une fonction généralisée H-invariante tempérée sur $\mathfrak{h}$ telle que, pour tout $P \in S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^H$, l'on ait $P\Theta = P(Y_0)\Theta$. Soit $\tilde{\Theta}$ la fonction généralisée sur $\omega$ définie dans le théorème 5.2.

THÉORÈME 6.3. — *On définit la fonction* $\bar{\Theta}$ *sur* $(G/H)'$ *de la manière suivante*:

*si* $x \in (G/H)' - \operatorname{Exp} \omega'$ *alors* $\bar{\Theta}(x) = 0$,

*si* $X \in \omega'$ *alors* $\bar{\Theta}(\operatorname{Exp} X) = J(X)^{-1/2}\, \tilde{\Theta}(X)$.

*Alors, la fonction* $\bar{\Theta}$ *définit une fonction généralisée* H-*invariante sur* G/H *telle que*:

(i) *pour tout* $D \in D(G/H)$, *l'on ait* $D\bar{\Theta} = \mu_{\mathfrak{g}}(D)\,(Y_0)\,\bar{\Theta}$,

(ii) *pour tout* $X \in \mathfrak{t}'$, *l'on ait* $\bar{\Theta}(\operatorname{Exp} X) = J(X)^{-1/2}\, \Theta(X)$.

Pour démontrer ce théorème, nous allons utiliser le théorème 2.11. La partie difficile est de prouver que la fonction $\bar{\Theta}$ vérifie l'hypothèse (2.14), c'est-à-dire qu'elle vérifie les conditions de recollement sur l'intersection de deux sous-ensembles de Cartan adjacents A et $A(\alpha)$. Les conditions de recollement pour $\tilde{\Theta}$ prouvées au paragraphe 5 se traduisent ici par les conditions de recollement sur l'intersection des composantes connexes $A_0$ et $A(\alpha)_0$. Il faut maintenant étudier ces conditions sur $A_j \cap A(\alpha)_k$ où $A_j$ et $A(\alpha)_k$ sont des composantes connexes quelconques respectivement de A et $A(\alpha)$. Nous allons tout d'abord prouver des résultats intermédiaires similaires à ceux utilisés lors de la démonstration du théorème 5.2.

LEMME 6.4. — *Soit* $\Phi$ *un système de racines réduit irréductible. Soit* $\Phi^+$ *un système positif de* $\Phi$ *et soit* $\tilde{\alpha}$ *la plus grande racine de* $\Phi^+$. *On note* $\Gamma = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Z}\pi H_\alpha$.

(1) *Soit* $D(\tilde{\alpha})$ *l'ensemble des* $\gamma \in \Phi^+$ *tels que* $\gamma(H_{\tilde{\alpha}}) = 1$. *Alors* $|D(\tilde{\alpha})|$ *est pair.*

(2) *Il existe* $X \in \Gamma$ *tel que* $\tilde{\alpha}(X) = \pi$ *si et seulement si* $\Phi$ *est distinct de* $A_1$, $B_2$, $D_2$ *ou* $C_k$ *pour* $k \geqq 2$. *Dans ce cas, on peut choisir* $X_0 \in \Gamma$ *tel que* $\tilde{\alpha}(X_0) = \pi$ *et* $\gamma(X_0) \in \{0, \pi, -\pi\}$ *pour tout* $\gamma \in \Phi$ *tels que* $\gamma(H_{\tilde{\alpha}}) = 0$.

(3) *On suppose qu'il existe* $X_0 \in \Gamma$ *vérifiant les propriétés de* (2). *Soit* $D(X_0)$ *l'ensemble des* $\gamma \in \Phi^+$ *tels que* $\gamma(H_{\tilde{\alpha}}) = 0$ *et* $\gamma(X_0) \neq 0$. *Alors, on a*:

$$|D(X_0)| + 1 = |D(\tilde{\alpha})|/2.$$

*Démonstration.* — Soit $\gamma \in D(\tilde{\alpha})$. La racine $\tilde{\alpha}-\gamma$ est une racine positive distincte de $\gamma$ et on a $(\tilde{\alpha}-\gamma)(H_{\tilde{\alpha}})=1$. On en déduit que $|D(\tilde{\alpha})|$ est pair.

La plus grande racine $\tilde{\alpha}$ est soit un poids fondamental, soit le double d'un poids fondamental soit somme de deux poids fondamentaux ([Bo], appendice). Donc, il existe $X \in \Gamma$ tel que $\tilde{\alpha}(X)=\pi$ si et seulement si $\tilde{\alpha}$ n'est pas le double d'un poids fondamental. Or $\tilde{\alpha}$ est le double d'un poids fondamental si et seulement si $\Phi$ est d'un des types suivants: $A_1$, $B_2$, $D_2$ ou $C_k$ pour $k \geqq 2$. Hormis ces cas, il existe une racine $\beta \in \Phi^+$ simple par rapport à $\Phi^+$ telle que l'on ait $\tilde{\alpha}(H_\beta)=1$. On a alors $\langle \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$. Par suite, si $\gamma \in \Phi^+ - \{\beta\}$, on a $\gamma(H_\beta)=0$ ou $\pm 1$ ([Bo], chap. VI, § 1, prop. 8). L'élément $X_0=\pi H_\beta$ vérifie les propriétés demandées et l'assertion (2) est prouvée.

Prouvons (3). Soit $\gamma \in D(\tilde{\alpha})$. On a $\gamma(H_\beta)=0$ si et seulement si $(\tilde{\alpha}-\gamma)(H_\beta)=1$. Si $\gamma(H_\beta)=-1$ alors $(\tilde{\alpha}-\gamma)(H_\beta)=2$ et par suite, on a $\gamma=\tilde{\alpha}-\beta$. On peut donc écrire $D(\tilde{\alpha})=D_0(\tilde{\alpha}) \cup D_1(\tilde{\alpha})$ où $D_0(\tilde{\alpha})$ est formé des éléments $\gamma \in D(\tilde{\alpha})$ tels que $\gamma(H_\beta)=0$ ou 2 et $D_1(\tilde{\alpha})$ est formé des éléments $\gamma \in D(\tilde{\alpha})$ tels que $\gamma(H_\beta)=\pm 1$. Les ensembles $D_0(\tilde{\alpha})$ et $D_1(\tilde{\alpha})$ sont isomorphes par l'application qui à $\gamma$ associe $\tilde{\alpha}-\gamma$.

Nous allons prouver que l'on a:

$$(*) \qquad s_\beta(D(X_0) \cup \{\tilde{\alpha}\}) = D_1(\tilde{\alpha}).$$

L'assertion (3) sera alors immédiate.

Soit $\alpha_1=\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ la base de $\Phi$ définie par $\Phi^+$. Notons $\omega_i$ les poids fondamentaux définis par $\omega_i(H_{\alpha_j})=\delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker. Par hypothèse sur le système $\Phi$, on a soit $\tilde{\alpha}=\omega_1$ soit $\tilde{\alpha}=\omega_1+\omega_k$. Dans les deux cas, si $\gamma \in \Phi^+$ est orthogonale à $\tilde{\alpha}$, on peut écrire $\gamma=\sum_{i=2}^{k} n_i \alpha_i$ avec $n_i \in \mathbb{N}$ et donc, on a $\gamma(H_\beta) \leqq 0$. Par suite, si $\gamma \in D(X_0)$ alors $\gamma(H_\beta)=-1$.

Soit $\gamma \in D(X_0)$. On a $s_\beta(\gamma)=\gamma+\beta$ avec $(\gamma+\beta)(H_{\tilde{\alpha}})=1$ et $(\gamma+\beta)(H_\beta)=1$. Comme $s_\beta(\tilde{\alpha})=\tilde{\alpha}-\beta$, on en déduit que l'on a $s_\beta(D(X_0) \cup \{\tilde{\alpha}\}) \subseteq D_1(\tilde{\alpha})$. Si $\gamma \in D_1(\tilde{\alpha})$ avec $\gamma \neq \tilde{\alpha}-\beta$ alors, $s_\beta(\gamma)=\gamma-\beta \in D(X_0)$ et $s_\beta(\tilde{\alpha}-\beta)=\tilde{\alpha}$. L'assertion $(*)$ est prouvée ce qui achève la démonstration du lemme. □

Soit $\mathfrak{a} \in \operatorname{Car}(\mathfrak{h})$. On note $\Phi$, $\Phi^+$, $\Sigma$, $C^+$, $\Gamma$ et W comme en (5.3). On fixe $X^+ \in \omega \cap C^+$. On note $\tilde{\alpha}$ la plus grande racine de $\Phi^+$. Soit $\Gamma_{\tilde{\alpha}}=\Gamma \cap \operatorname{Ker}\tilde{\alpha}$, $\Phi_{\tilde{\alpha}}^+$ et $C_{\tilde{\alpha}}^+$ comme en (5.3).

LEMME 6.5. — *Soit* $w \in W$. *Soit* $X \in \Gamma$ *tel que* $\tilde{\alpha}(X) \neq \pi$. *Alors, on a* $w(X-\pi H_{\tilde{\alpha}}+X^+) \in C^+$ *si et seulement si* $w(X+s_{\tilde{\alpha}}X^+) \in C^+$.

*Démonstration.* — Il faut prouver que, pour tout $\beta \in \Phi^+$, l'on a

$$\beta(X-\pi H_{\tilde{\alpha}}+X^+)\,\beta(X+s_{\tilde{\alpha}}X^+)>0.$$

On peut caractériser $w^{-1}C^+$ de la manière suivante:

Il existe $\Psi \subseteq \Phi^+$ tel que, pour tout $Z \in w^{-1}C^+$, l'on ait $\beta(Z)<0$ si $\beta \in \Psi$ et $\beta(Z)>0$ si $\beta \in \Phi^+-\Psi$. Pour $\beta \in \Phi$, on écrit $\beta(X)=\pi n(\beta, X)$ avec $n(\beta, X) \in \mathbb{Z}$.

Si $\beta \in \operatorname{Ker}\tilde{\alpha}$ alors $\beta(X-\pi H_{\tilde{\alpha}}+X^+)=\beta(X+X^+)=\beta(X+s_{\tilde{\alpha}}X^+)$.

Si $\beta=\tilde{\alpha}$ alors

$$\tilde{\alpha}(X-\pi H_{\tilde{\alpha}}+X^{+})=\pi n(\tilde{\alpha},X)-2\pi+\tilde{\alpha}(X^{+}) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\alpha}(X+s_{\tilde{\alpha}}X^{+})=\pi n(\tilde{\alpha},X)-\tilde{\alpha}(X^{+}).$$

Si $\tilde{\alpha}\in\Psi$ alors $n(\tilde{\alpha},X)<0$. Si $\tilde{\alpha}\in\Phi^{+}-\Psi$ alors $n(\tilde{\alpha},X)\geqq 2$ puisque $\tilde{\alpha}(X)\neq\pi$. Dans tous les cas, les réels $\tilde{\alpha}(X-\pi H_{\tilde{\alpha}}+X^{+})$ et $\tilde{\alpha}(X+s_{\tilde{\alpha}}X^{+})$ sont de même signe.

Si $\beta\in\Phi^{+}-\Phi_{\tilde{\alpha}}^{+}-\{\tilde{\alpha}\}$, alors $\beta(H_{\tilde{\alpha}})=1$ et $s_{\tilde{\alpha}}\beta\in-\Phi^{+}$. Par suite, on obtient

$$\beta(X-\pi H_{\tilde{\alpha}}+X^{+})=\pi n(\beta,X)+\beta(X^{+})-\pi$$

et

$$\beta(X+s_{\tilde{\alpha}}X^{+})=\pi n(\beta,X)+(s_{\tilde{\alpha}}\beta)(X^{+}).$$

Les réels $\beta(X^{+})-\pi$ et $(s_{\tilde{\alpha}}\beta)(X^{+})$ appartiennent à $]-\pi,0[$ et $n(\beta,X)\in\mathbb{Z}$. On en déduit que l'on a $\beta(X-\pi H_{\tilde{\alpha}}+X^{+})\beta(X+s_{\tilde{\alpha}}X^{+})>0$. Ceci achève la démonstration du lemme. □

LEMME 6.6. — *On suppose qu'il existe* $X_0\in\Gamma$ *tel que* $\tilde{\alpha}(X_0)=\pi$. *Soit* $W_1$ *l'ensemble des* $w\in W$ *tels que* $w^{-1}C^{+}\subset C_{\tilde{\alpha}}^{+}$. *On note* $D(\tilde{\alpha})$ *comme dans le lemme* 6.4. *Soit* $w\in W_1$. *S'il existe* $X\in\Gamma_{\tilde{\alpha}}$ *vérifiant* $w(X-X_0+X^{+})\in C^{+}$ *alors on a*:

(i) $w(-\tilde{\alpha})\in\Sigma$.

(ii) $\varepsilon(w)=(-1)^{|D(\tilde{\alpha})|/2+1}$.

*Démonstration.* — On fixe $X\in\Gamma_{\tilde{\alpha}}$ tel que $w(X-X_0+X^{+})\in C^{+}$.

Montrons tout d'abord la propriété suivante : pour tout $Z\in w^{-1}C^{+}$, l'on a

$$(*)\qquad \tilde{\alpha}(Z)<0 \qquad \text{et} \qquad \beta(Z)(s_{\tilde{\alpha}}\beta)(Z)>0 \quad \text{pour tout } \beta\in\Phi^{+}-\{\tilde{\alpha}\}.$$

Il suffit de prouver (*) pour un élément particulier de $w^{-1}C^{+}$. Soit $Z=X-X_0+X^{+}$. On a $\tilde{\alpha}(Z)=\tilde{\alpha}(X^{+})-\pi$ et $\tilde{\alpha}(X^{+})\in]0,\pi[$. On a donc $\tilde{\alpha}(Z)<0$.

Soit $\beta\in\Phi^{+}-\{\tilde{\alpha}\}$. Si $\beta(H_{\tilde{\alpha}})=0$ alors on a $\beta=s_{\tilde{\alpha}}\beta$. Si $\beta(H_{\tilde{\alpha}})\neq 0$ alors on a $\beta(H_{\tilde{\alpha}})=1$ et donc $s_{\tilde{\alpha}}\beta=\beta-\tilde{\alpha}\in-\Phi^{+}$. On en déduit donc que

$$\beta(Z)=\beta(X-X_0)+\beta(X^{+}) \qquad \text{et} \qquad (s_{\tilde{\alpha}}\beta)(Z)=\beta(X-X_0)+\pi+(s_{\tilde{\alpha}}\beta)(X^{+}).$$

Les réels $\beta(X^{+})$ et $\pi+(s_{\tilde{\alpha}}\beta)(X^{+})$ appartiennent à $]0,\pi[$ et $\beta(X-X_0)\in\pi\mathbb{Z}$. Par suite, les réels $\beta(Z)$ et $s_{\tilde{\alpha}}\beta(Z)$ sont de même signe. L'assertion (*) est donc prouvée.

D'après (*), si une racine $\beta$ est positive par rapport à $w^{-1}C^{+}$ distincte de $-\tilde{\alpha}$ alors il en est de même de $s_{\tilde{\alpha}}\beta$. Comme $-\tilde{\alpha}$ est positive sur $w^{-1}C^{+}$, on en déduit que $w(-\tilde{\alpha})\in\Sigma$, d'où (i).

Prouvons (ii) : On pose $\beta=w(-\tilde{\alpha})\in\Sigma$. Soit D l'ensemble des $\gamma\in\Phi^{+}$ tels que $w\gamma\in-\Phi^{+}$. On veut prouver que $|D|=|D(\tilde{\alpha})|/2+1$.

On a $\tilde{\alpha}\in D$. Soit $\gamma\in D-\{\tilde{\alpha}\}$. Par hypothèse sur $w$, on a $w^{-1}\Phi^{+}\cap\Phi_{\tilde{\alpha}}=\Phi_{\tilde{\alpha}}^{+}$ et donc $\gamma\notin\Phi_{\tilde{\alpha}}^{+}$. Par suite, on obtient que $\gamma(H_{\tilde{\alpha}})=1$. La racine $-s_{\tilde{\alpha}}\gamma\in\Phi^{+}$ et $(-s_{\tilde{\alpha}}\gamma)(H_{\tilde{\alpha}})=1$. D'autre part, on a $w(-s_{\tilde{\alpha}}\gamma)=-s_{\beta}(w\gamma)$. Donc, on a $w(-s_{\tilde{\alpha}}\gamma)\in\Phi^{+}$. Soit D′ l'ensemble des $\gamma \in \Phi^+$ tels que $w\gamma \in \Phi^+$. D'après ce qui précède, on a

$$D - \{\tilde{\alpha}\} \cup D' = D(\tilde{\alpha})$$
$$s_{\tilde{\alpha}}(D') = -(D - \{\tilde{\alpha}\}).$$

L'assertion (ii) devient immédiate. □

Le lemme suivant va permettre de démontrer que la fonction $\bar{\Theta}$ est localement intégrable sur G/H.

Pour $X \in \mathfrak{h}$, on note $\xi_{\mathfrak{h}}(X) = \det(\operatorname{ad} X)_{/\mathfrak{h}}$.

Si $n = \operatorname{rang}(\mathfrak{h})$ et si $x \in G/H$, on note

$$\det(1 + t - \operatorname{Ad} \varphi(x)) = t^{2n} D_{G/H}(x) \text{ modulo } t^{2n+1}.$$

LEMME 6.7. — *La fonction* $|D_{G/H}|^{-1/4}$ *est localement intégrable sur* G/H.

*Démonstration.* — D'après le lemme 1.15, il suffit de prouver le résultat au voisinage de chaque point semi-simple de G/H.

Soit $s \in S$. On note $\mathfrak{z}$, Z, $\mathfrak{z}_\varepsilon$ comme en (1.10), $\delta_{s, \mathfrak{g}}$ et $J_{\mathfrak{z}}$ comme en (1.12) et (2.4).

Pour $p(g) \in Z/Z \cap H$, on a

$$|D_{G/H}(g.s)|^{1/2} = \delta_{s, \mathfrak{g}}(p(g)) \, |D_{Z/Z \cap H}(p(g))|^{1/2}.$$

Or, pour $X \in \mathfrak{z}_\varepsilon \cap \mathfrak{h}$, on a

$$|D_{Z/Z \cap H}(\operatorname{Exp} X)|^{1/2} = |J_{\mathfrak{z}}(X) \, \xi_{\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}}(X)|.$$

Par suite, on en déduit que, pour tout $X \in \mathfrak{z}_\varepsilon \cap \mathfrak{h}$, l'on a

$$|D_{G/H}((\exp iX).s)|^{1/2} = \delta_{s, \mathfrak{g}}(\operatorname{Exp} X) \, |J_{\mathfrak{z}}(X) \, \xi_{\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}}(X)|.$$

Par le choix de $\mathfrak{z}_\varepsilon$, les fonctions $|\delta_{s, \mathfrak{g}}|^{-1/2}$ et $|J_{\mathfrak{z}}|^{-1/2}$ sont analytiques respectivement sur $\operatorname{Exp}(\mathfrak{z}_\varepsilon \cap \mathfrak{h})$ et $\mathfrak{z}_\varepsilon \cap \mathfrak{h}$. D'autre part, d'après ([Va], partie I, § 4, prop. 15, p. 63), la fonction $|\xi_{\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}}|^{-1/2}$ est localement intégrable sur $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}$. On en déduit le résultat voulu. □

*Démonstration du théorème* 6.3. — Pour montrer que la fonction $\bar{\Theta}$ définit une fonction généralisée sur G/H, il suffit de prouver que c'est une fonction localement intégrable sur $\overline{\operatorname{Exp} \omega}$.

On note $D_{G/H}$ et $\xi_{\mathfrak{h}}$ comme dans le lemme 6.7.

Pour $X \in \omega'$, on a $|D_{G/H}(\operatorname{Exp} X)|^{1/4} \bar{\Theta}(\operatorname{Exp} X) = |\xi_{\mathfrak{h}}(X)|^{1/2} \tilde{\Theta}(X)$. D'après le lemme 6.7, la fonction $|D_{G/H}|^{-1/4}$ est localement intégrable sur G/H. Par l'expression de $|\xi_{\mathfrak{h}}|^{1/2} \tilde{\Theta}$ (proposition 5.9), on en déduit que la fonction $\bar{\Theta}$ est localement intégrable sur $\overline{\operatorname{Exp} \omega}$ et donc elle définit une fonction généralisée sur G/H.

L'assertion (ii) du théorème 6.3 est immédiate par définition de $\tilde{\Theta}$ et de $\bar{\Theta}$. Pour montrer que $\bar{\Theta}$ vérifie la propriété (i) du théorème 6.3, nous allons prouver qu'elle vérifie les hypothèses du théorème 2.11. Par les propriétés de $\bar{\Theta}$ et la définition de $\tilde{\Theta}$, il est clair que $\bar{\Theta}$ est solution propre des opérateurs de $D(G/H)$ sur $(G/H)'$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on fixe $A \in \mathrm{Car}(G/H)$ associé à $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{h})$. Soit $\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$. On garde les notations de (5.3) et du paragraphe 2. Soit $A(\alpha)$ le sous-ensemble de Cartan de $G/H$ adjacent à $A$ relativement à $\alpha$. L'algèbre de Lie de $A(\alpha)$ est donc $\mathfrak{a}(\alpha)$.

Pour $\varepsilon > 0$, on note $\mathfrak{a}_\varepsilon$ et $a(\alpha)_\varepsilon$ l'ensemble des $X$ respectivement de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}(\alpha)$ tels que, pour toute valeur propre $\lambda$ de $\mathrm{ad}\, X$, l'on ait $|\lambda| < \varepsilon$. On fixe également $s \in A \cap A(\alpha)$.

La démonstration de (2.13) (analycité de la fonction $\Delta_A \bar{\Theta}$ sur $A'_{\mathbb{R}}$) et de (2.14) (conditions de recollement) diffère selon que l'élément $s$ appartienne ou non aux composantes connexes $A_0$ et $A(\alpha)_0$. Nous allons donc envisager plusieurs cas.

1[er] *cas*: $s \notin A_0$.

D'après la proposition 3.9, on a alors $s \notin A(\alpha)_0$. Par définition de $\bar{\Theta}$, on obtient alors que les fonctions $\Psi_A$ et $\Psi_{A(\alpha)}$ sont nulles respectivement sur $(\exp i\, \mathfrak{a}'_\varepsilon) . s$ et $(\exp i\, \mathfrak{a}(\alpha)'_\varepsilon) . s$. Par suite, les assertions (2.13) et (2.14) sont claires.

2[e] *cas*: $s \in A_0$ et $s \notin A(\alpha)_0$.

Soit $Al^+$, $\Gamma$ et $W$ comme en (3.6), (3.2) et (3.3). L'alcôve $\overline{Al^+}$ est un domaine fondamental pour le groupe engendré par $\Gamma$ et $W$.

Or, pour tout $w \in W$, il existe $h \in H$ tel que $\mathrm{Ad}(h) = w$. Comme la fonction $\bar{\Theta}$ est H-invariante, on peut supposer, sans nuire à la généralité du problème, que l'on a: $s = \mathrm{Exp}\, X_0$ avec $X_0 \in \overline{Al^+}$.

Par hypothèse, on a $s \notin A(\alpha)_0$. En utilisant la proposition 3.9, on en déduit que l'on est dans la situation suivante:

(i) $\alpha = \tilde{\alpha}$ est la plus grande racine de $\Phi^+$,

(ii) $X_0 = \pi H_{\tilde{\alpha}}/2$,

(iii) pour tout $X \in \Gamma$, on a $\tilde{\alpha}(X) \neq \pi$.

D'après le théorème 2.7, pour $X \in \mathfrak{a}'_\varepsilon$, on a

$$\Psi_A((\exp iX) . s) = \pi_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}(\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X)\, \tilde{\Theta}(\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X).$$

L'assertion (2.13) découle des propriétés de $\tilde{\Theta}$.

D'après l'expression précédente de $\Psi_A$, pour obtenir (2.14), il suffit de prouver que, pour tout $X \in \mathfrak{a}_\varepsilon \cap \mathrm{Ker}\, \tilde{\alpha}$, l'on a:

$$\lim_{t \to 0} (\nabla^b \tilde{\Theta})((t+1)\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X) = 0. \tag{6.8}$$

Soit $X \in \mathfrak{a}_\varepsilon \cap \mathrm{Ker}\, \tilde{\alpha}$ tel que, pour tout $\gamma \in \Phi_{\tilde{\alpha}}^+$, l'on ait $\gamma(X) > 0$ [$\Phi_{\tilde{\alpha}}^+$ étant défini en (5.3)]. Dans ce cas, pour tout $t \in ]2\varepsilon/\pi - 1, 0[$, l'élément $(1+t)\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X \in \overline{Al^+} \subset \overline{C^+}$ (même raisonnement que dans la démonstration du théorème 4.1).

D'après l'expression de $\nabla^\flat \tilde{\Theta}$ obtenue dans la proposition 5.9, pour avoir (6.8) il suffit de prouver les relations suivantes :

$$\begin{aligned}(6.9)\qquad &\text{pour tout } Y \in (G.Y_0) \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \\ &d(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)\, e^{\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}}/2 \rangle} + d(\mathfrak{a}, \Phi^+, s_{\tilde{\alpha}} Y)\, e^{-\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}}/2 \rangle} = 0.\end{aligned}$$

On fixe $Y \in (G.Y_0) \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. En reprenant la définition (5.8) de $d(\mathfrak{a}., \Phi^+, Y)$, on a :

$$\begin{aligned}&d(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)\, e^{\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}}/2 \rangle} + d(\mathfrak{a}, \Phi^+, s_{\tilde{\alpha}} Y)\, e^{-\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}}/2 \rangle} \\ &= \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, c(\mathfrak{a}, \Phi^+, wY) \sum_{\substack{X \in \Gamma \\ w(X + X^+) \in C^+}} e^{\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X \rangle} \\ &+ \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, c(\mathfrak{a}, \Phi^+, w s_{\tilde{\alpha}} Y) \sum_{\substack{X \in \Gamma \\ w(X + X^+) \in C^+}} e^{\langle s_{\tilde{\alpha}} Y, \pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X \rangle} \\ &= e^{-\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}}/2 \rangle} \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, c(\mathfrak{a}, \Phi^+, wY) \\ &\times \Big[ \sum_{\substack{X \in \Gamma \\ w(X + X^+) \in C^+}} e^{\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}} + X \rangle} - \sum_{\substack{X \in \Gamma \\ w(X + s_{\tilde{\alpha}} X^+) \in C^+}} e^{\langle Y, X \rangle} \Big] \\ &= e^{-\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}}/2 \rangle} \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, c(a, \Phi^+, wY) \\ &\times \Big[ \sum_{\substack{X \in \Gamma \\ w(X - \pi H_{\tilde{\alpha}} + X^+) \in C^+}} e^{\langle Y, X \rangle} - \sum_{\substack{X \in \Gamma \\ w(X + s_{\tilde{\alpha}} X^+) \in C^+}} e^{\langle Y, X \rangle} \Big].\end{aligned}$$

On a supposé que pour tout $X \in \Gamma$, l'on a $\tilde{\alpha}(X) \neq \pi$. En utilisant le lemme 6.5, on obtient alors immédiatement la relation (6.9).

3^e^ *cas* : $s \in A_0$ et $s \in A(\alpha)_0$.

On écrit, comme dans le deuxième cas, $s = \operatorname{Exp} X_0$ avec $X_0 \in \overline{Al^+}$.

Si $\alpha(X_0) = 0$ alors $\alpha \in \Sigma$.

Pour $X \in \mathfrak{a}'_\varepsilon$, on a $\Psi_A(\operatorname{Exp}(X + X_0)) = \pi_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}(X + X_0)\, \tilde{\Theta}(X + X_0)$. Par construction de $\tilde{\Theta}$, les propriétés (2.13) et (2.14) sont donc vérifiées.

On suppose donc maintenant que l'on a $\alpha(X_0) \neq 0$. Comme $X_0 \in \overline{Al^+}$, on est donc dans la situation suivante :

(i) $\alpha = \tilde{\alpha}$ est la plus grande racine de $\Phi^+$,

(ii) $X_0 = \pi H_{\tilde{\alpha}}/2$.

Comme on a $\operatorname{Exp} X_0 \in A(\alpha)_0$, on déduit de la proposition 3.9 que l'on a :

(iii) il existe $Z \in \Gamma$ tel que $\tilde{\alpha}(Z) = \pi$.

La relation liant $\Psi_A$ et $\tilde{\Theta}$ permet d'obtenir la propriété (2.13). Pour démontrer (2.14), il suffit de prouver que, pour tout $X \in \mathfrak{a}_\varepsilon \cap \operatorname{Ker} \tilde{\alpha}$, l'on a

$$(6.10)\qquad \lim_{t \to 0} (\nabla^\flat \tilde{\Theta})((1+t)\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X) = \lim_{t \to 0} (\nabla^\flat \tilde{\Theta})((1+t)(\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 - Z) + X).$$

Dans toute la suite on adoptera les notations de (5.3).

Soit $X \in \operatorname{Ker} \tilde{\alpha} \cap \mathfrak{a}_\varepsilon$ tel que, pour tout $\gamma \in \Phi_{\tilde{\alpha}}^+$, l'on ait $\gamma(X) > 0$. Dans ce cas, on a $\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X \in \overline{Al^+} \subset \overline{C^+}$. Modulo un élément de $\Gamma_{\tilde{\alpha}}$, on peut choisir $Z_0 \in \Gamma$ tel que $\tilde{\alpha}(Z_0) = \pi$ et $\gamma(\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X - Z_0) \in [-\pi, \pi]$ pour tout $\gamma \in \Phi_{\tilde{\alpha}}^+$ [par (3.7) et le fait que $\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X - Z_0 \in \mathfrak{a}(\tilde{\alpha})$].

*Remarque.* — On a $\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X - Z_0 \notin \overline{\mathfrak{a} \cap \omega}$. En effet, si $\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X - Z_0 \in \overline{\mathfrak{a} \cap \omega}$ alors, pour tout $\gamma \in \Phi^+$, on a $\gamma(\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X - Z_0) \in [-\pi, \pi]$. Par suite, pour tout $\gamma \in \Phi^+$, on a $\gamma(Z_0) \in \{0, \pi, -\pi\}$. Or ceci implique que $Z_0 = 0$ ce qui est impossible.

Par le choix de X et de $Z_0$, on a $\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + X - Z_0 \in \overline{\mathfrak{a}(\alpha) \cap \omega}$. D'autre part, on a $\gamma(Z_0) \in \{0, \pi\}$ pour tout $\gamma \in \Phi_{\tilde{\alpha}}^+$. On définit un nouveau système positif $\Phi_0^+(\tilde{\alpha})$ de $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}(\alpha))$ de la manière suivante:

(6.11) Si $\gamma \in \Phi_{\tilde{\alpha}}^+$ alors $c_{\tilde{\alpha}}(\gamma) \in \Phi_0^+(\tilde{\alpha})$ si $\gamma(Z_0) = 0$ et $-c_{\tilde{\alpha}}(\gamma) \in \Phi_0^+(\tilde{\alpha})$ si $\gamma(Z_0) = \pi$.

(6.12) Soit $w_0$ l'unique élément de $W_{\tilde{\alpha}}$ tel que $c_{\tilde{\alpha}}(w_0^{-1} \Phi_{\tilde{\alpha}}^+) = \Phi_0^+(\tilde{\alpha})$.

D'après l'expression de $\nabla^{\mathfrak{h}} \tilde{\Theta}$ obtenue dans la proposition 5.9, pour avoir (6.10), il suffit de prouver les relations suivantes:

$$\text{pour tout } Y \in (G.Y_0) \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$$

$$d(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)\, e^{\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}}/2 \rangle} + d(\mathfrak{a}, \Phi^+, s_{\tilde{\alpha}} Y)\, e^{-\langle Y, \pi, H_{\tilde{\alpha}}/2 \rangle}$$
$$= [d(\mathfrak{a}(\tilde{\alpha}), \Phi_0^+(\tilde{\alpha}), c_{\tilde{\alpha}} Y) + d(\mathfrak{a}(\tilde{\alpha}), \Phi_0^+(\tilde{\alpha}), c_{\tilde{\alpha}} s_{\tilde{\alpha}} Y)]\, e^{\langle Y, \pi, H_{\tilde{\alpha}}/2 - Z_0 \rangle}$$

ou encore

$$(6.13)\quad d(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) + d(\mathfrak{a}, \Phi^+, s_{\tilde{\alpha}} Y)\, e^{-\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}} \rangle}$$
$$= [d(\mathfrak{a}(\tilde{\alpha}), \Phi_0^+(\tilde{\alpha}), c_{\tilde{\alpha}} Y) + d(\mathfrak{a}(\tilde{\alpha}), \Phi_0^+(\tilde{\alpha}), c_{\tilde{\alpha}} s_{\tilde{\alpha}} Y)]\, e^{-\langle Y, Z_0 \rangle}.$$

On fixe $Y \in (G.Y_0) \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Par (5.8), on a alors:

$$d(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) + d(\mathfrak{a}, \Phi^+, s_{\tilde{\alpha}} Y)\, e^{-\langle Y, \pi, H_{\tilde{\alpha}} \rangle} = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, c(\mathfrak{a}, \Phi^+, wY)$$
$$\times \Big[ \sum_{\substack{X \in \Gamma \\ w(X + X^+) \in C^+}} e^{\langle Y, X \rangle} - \sum_{\substack{X \in \Gamma \\ w(\pi H_{\tilde{\alpha}} + X + s_{\tilde{\alpha}} X^+) \in C^+ \\ e^{\langle Y, X \rangle}}} e^{\langle Y, X \rangle} \Big]$$
$$= \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, c(\mathfrak{a}, \Phi^+, wY) \Big[ \sum_{\substack{X \in \Gamma,\, \tilde{\alpha}(X) = -\pi \\ w(X + X^+) \in C^+}} e^{\langle Y, X \rangle} - \sum_{\substack{X \in \Gamma,\, \tilde{\alpha}(X) = -\pi \\ w(X + \pi H_{\tilde{\alpha}} + s_{\tilde{\alpha}} X^+) \in C^+}} e^{\langle Y, X \rangle} \Big]$$

(d'après le lemme 6.5).

Or, si $X \in \Gamma$ avec $\tilde{\alpha}(X) = -\pi$, alors on a $X + Z_0 \in \Gamma_{\tilde{\alpha}}$. Par suite, on obtient :

$$d(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) + d(\mathfrak{a}, \Phi^+, s_{\tilde{\alpha}} Y) e^{-\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}} \rangle} = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) c(\mathfrak{a}, \Phi^+, wY)$$
$$\times \Big[ \sum_{\substack{X \in \Gamma_{\tilde{\alpha}} \\ w(X - Z_0 + X^+) \in C^+}} e^{\langle Y, X - Z_0 \rangle} - \sum_{\substack{X \in \Gamma_{\tilde{\alpha}} \\ w(X + s_{\tilde{\alpha}}(X^+ - Z_0)) \in C^+}} e^{\langle Y, X - Z_0 \rangle} \Big]$$
$$= \sum_{w \in W} \varepsilon(w) [c(\mathfrak{a}, \Phi^+, wY) + c(\mathfrak{a}, \Phi^+, w s_{\tilde{\alpha}} Y)] \sum_{\substack{X \in \Gamma_{\tilde{\alpha}} \\ w(X - Z_0 + X^+) \in C^+}} e^{\langle Y, X - Z_0 \rangle}.$$

On note $W_1$ comme dans le lemme 6.6. En utilisant les lemmes 5.12 et 6.6, on obtient alors :

$$d(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) + d(\mathfrak{a}, \Phi^+, s_{\tilde{\alpha}} Y) e^{-\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}} \rangle}$$
$$= \sum_{w \in W_{\tilde{\alpha}}} \varepsilon(w) \sum_{\substack{w_1 \in W_1 \\ w_1(-\tilde{\alpha}) \in \Sigma}} (-1)^{|D(\tilde{\alpha})/2| + 1} [c(\mathfrak{a}, \Phi^+, w_1 w Y) + c(\mathfrak{a}, \Phi^+, w_1 w s_{\tilde{\alpha}} Y)]$$
$$\times \sum_{\substack{X \in \Gamma_{\tilde{\alpha}} \\ w_1 w(X - Z_0 + X^+) \in C^+}} e^{\langle Y, X - Z_0 \rangle}.$$

Par définition de $W_1$ et par (5.4) et (5.6), pour tout $w_1 \in W_1$ tel que $w_1(-\tilde{\alpha}) \in \Sigma$ et pour tout $w \in W$, on a :

$$c(\mathfrak{a}, \Phi^+, w_1 w Y) + c(\mathfrak{a}, \Phi^+, w_1 s_{\tilde{\alpha}} w Y) = c(\mathfrak{a}(\tilde{\alpha}), \Phi^+(\tilde{\alpha}), c_{\tilde{\alpha}} w Y) + c(\mathfrak{a}(\tilde{\alpha}), \Phi^+(\tilde{\alpha}), c_{\tilde{\alpha}} s_{\tilde{\alpha}} w Y).$$

Soit $w_0 \in W_{\tilde{\alpha}}$ défini en (6.12) et soit $\Phi_0^+(\tilde{\alpha})$ comme en (6.11).

On a donc :

$$d(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) + d(\mathfrak{a}, \Phi^+, s_{\tilde{\alpha}} Y) e^{-\langle Y, \pi H_{\tilde{\alpha}} \rangle} = \sum_{w \in W_{\tilde{\alpha}}} \varepsilon(w) \varepsilon(w_0) (-1)^{|D(\tilde{\alpha})/2| + 1}$$
$$\times [c(\mathfrak{a}(\tilde{\alpha}), \Phi_0^+(\tilde{\alpha}), c_{\tilde{\alpha}} w Y) + c(\mathfrak{a}(\tilde{\alpha}), \Phi_0^+(\tilde{\alpha}), c_{\tilde{\alpha}} s_{\tilde{\alpha}} w Y)]$$
$$\times \sum_{\substack{X \in \Gamma_{\tilde{\alpha}} \\ w(X - Z_0 + X^+) \in w_0^{-1} C_{\tilde{\alpha}}^+}} e^{\langle Y, X - Z_0 \rangle}$$

Pour avoir la relation (6.13), il suffit donc de prouver, d'après le lemme 5.7 (ii), que l'on a d'une part $\varepsilon(w_0) = (-1)^{|D(\tilde{\alpha})|/2 + 1}$ et d'autre part $X^+ - Z_0 \in w_0^{-1} C_{\tilde{\alpha}}^+ \cap \omega$.

Soit $D(Z_0)$ l'ensemble défini dans le lemme 6.4. Par définition de $w_0$ (6.12), on a $\varepsilon(w_0) = (-1)^{|D(Z_0)|}$. En appliquant le lemme 6.4, on obtient donc que $\varepsilon(w_0) = (-1)^{|D(\tilde{\alpha})| 2 + 1}$. Montrons que $X^+ - Z_0 \in w_0^{-1} C_{\tilde{\alpha}}^+ \cap \omega$. Il faut prouver que, pour tout $\gamma \in \Phi_0^+(\tilde{\alpha})$, l'on a $\gamma(X^+ - Z_0) \in ]0, \pi[$. Comme pour tout $\gamma \in \Phi_{\tilde{\alpha}}^+$, on a $\gamma(X^+) \in ]0, \pi[$, le résultat est immédiat par définition de $\Phi_0^+(\tilde{\alpha})$ (6.11).

Ceci achève la démonstration du théorème. □

## 7. Exemples et applications

La construction de fonctions sphériques sur G/H que nous avons donnée dans le paragraphe 6 se fait à partir d'une fonction généralisée H-invariante, tempérée et solution propre des opérateurs de $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^H$ sur $\mathfrak{h}$. Un exemple de telles fonctions généralisées est donné par les transformées de Fourier d'orbites de la représentation coadjointe de H dans $\mathfrak{h}^*$.

Nous allons tout d'abord expliquer ceci. Puis, dans le cas de $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})/\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$, pour une transformée de Fourier $T_\lambda$, nous allons calculer explicitement les fonctions généralisées $\tilde{T}_\lambda$ et $\bar{T}_\lambda$ construites dans les théorèmes 5.2 et 6.3. Nous ferons ensuite le lien avec les fonctions généralisées intervenant dans la formule d'inversion démontrée par S. Sano dans [S 2].

Soit $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$. Soit $\lambda$ un élément régulier de $\mathfrak{t}^*$. L'orbite $H.\lambda$ a une mesure canonique $d\beta_\lambda$ (mesure de Liouville). Cette mesure est tempérée. On note $T_\lambda$ la transformée de Fourier de $d\beta_\lambda$. La fonction généralisée $T_\lambda$ est une fonction généralisée H-invariante et tempérée sur $\mathfrak{h}$ et pour tout $P \in S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^H$, on a:

$$PT_\lambda = P(i\lambda)\, T_\lambda.$$

La fonction généralisée $T_\lambda$ est caractérisée par les valeurs qu'elle prend sur $\mathfrak{t}'$ ([Ha 4], théorème 2). On note $\Delta_\lambda^+$ le système positif de $\Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{t})$ défini par: $\alpha \in \Delta_\lambda^+$ si et seulement si $i < \lambda, \alpha >\, > 0$. Soit $\Delta_n^+$ l'ensemble des racines non compactes de $\Delta_\lambda^+$ (une racine $\alpha$ est non compacte si et seulement si $\mathfrak{h}_\alpha \subset \mathfrak{p}$). Soit $W_H = N_H(\mathfrak{t})/Z_H(\mathfrak{t})$. On a alors: pour tout $X \in \mathfrak{t}'$

$$T_\lambda(X) = (-1)^{|\Delta_n^+|} \frac{\sum_{w \in W_H} \varepsilon(w)\, e^{i\langle w\lambda, X\rangle}}{\prod_{\alpha \in \Delta_\lambda^+} \alpha(X)}$$

(formule de Rossman [R]).

Le théorème 6.1 se traduit de la manière suivante:

THÉORÈME 7.1. — *On garde les notations précédentes. Soit* $\omega$ *comme en* (5.1). *Alors, il existe une unique fonction généralisée* H-*invariante* $\bar{T}_\lambda$ *sur* G/H *telle que*:

(i) *pour tout* $D \in D(G/H)$, *l'on ait* $D\bar{T}_\lambda = \mu_g(D)\,(i\lambda)\,\bar{T}_\lambda$,

(ii) *si* $X \in \mathfrak{t}'$ *alors*

$$\bar{T}_\lambda(\mathrm{Exp}\, X) = (-1)^{|\Delta_n^+|} (2i)^{|\Delta_\lambda^+|} \frac{\sum_{w \in W_H} \varepsilon(w)\, e^{i\langle w\lambda, X\rangle}}{\prod_{\alpha \in \Delta_\lambda^+} (e^{i\alpha(X)} - e^{-i\alpha(X)})}$$

*et si* $x \in T' - T'_0$ *alors* $\bar{T}_\lambda(x) = 0$.

Nous allons calculer explicitement $\bar{T}_\lambda$ dans le cas de $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})/\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$. On pose donc $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})$, $H = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathrm{sp}(2, \mathbb{C})$, $\mathfrak{h} = \mathrm{sp}(2, \mathbb{R})$.

On définit les sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ et $\mathfrak{a}_3$ de $\mathrm{sp}(2,\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$\mathfrak{a}_0$ est formée des éléments $X_{\varphi_1,\varphi_2}=\begin{bmatrix}\varphi_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varphi_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\varphi_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\varphi_2\end{bmatrix}$;

$\mathfrak{a}_1$ est formée des éléments $X_{t_1,\varphi_2}=\begin{bmatrix}0 & 0 & t_1 & 0\\ 0 & \varphi_2 & 0 & 0\\ -t_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\varphi_2\end{bmatrix}$;

$\mathfrak{a}_2$ est formée des éléments $X_{\tau,\theta}=\begin{bmatrix}\theta & \tau & 0 & 0\\ -\tau & \theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\theta & \tau\\ 0 & 0 & -\tau & -\theta\end{bmatrix}$;

$\mathfrak{a}_3$ est formée des éléments $X_{t_1,t_2}=\begin{bmatrix}0 & 0 & t_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & t_2\\ -t_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -t_2 & 0 & 0\end{bmatrix}$;

les réels $\varphi_1$, $\varphi_2$, $t_1$, $t_2$, $\tau$ et $\theta$ parcourant $\mathbb{R}$.

L'algèbre $\mathfrak{a}_3$ est une sous-algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{h}$. Les algèbres $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ et $\mathfrak{a}_3$ sont deux à deux non H-conjuguées et la famille $\{\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ est maximale pour cette propriété.

On note $A_0$, $A_1$, $A_2$ et $A_3$ les sous-ensembles de Cartan de G/H associés respectivement à $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ et $\mathfrak{a}_3$. On note I la matrice identité de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})$. On pose :

$$g_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & i & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad g_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & i & 0 & 0\end{bmatrix},\quad g_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\\ i & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

On a alors

$$g_1\sigma(g_1)^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad g_2\sigma(g_2)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

et

$$g_3\sigma(g_3)^{-1}=-I.$$

Les ensembles $A_0$ et $A_2$ sont connexes. L'ensemble $A_1$ possède deux composantes connexes déterminées par $p(\mathrm{I})$ et $p(g_1)$. L'ensemble $A_3$ possède quatre composantes connexes déterminées par $p(\mathrm{I})$, $p(g_1)$, $p(g_2)$ et $p(g_3)$.

On identifie $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}^*$ par la forme de Killing. Soit $\lambda = X_{\lambda_1, \lambda_2} \in \mathfrak{a}_3$ avec $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ et soit $T_\lambda$ la transformée de Fourier de l'orbite $H.\lambda$.

Nous donnons maintenant les valeurs prises par $T_\lambda$ sur $\mathfrak{a}'_0$, $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{a}'_2$ et $\mathfrak{a}'_3$.

Si $X_{t_1, t_2} \in \mathfrak{a}'_3$ alors

$$T_\lambda(X_{t_1, t_2}) = \frac{e^{i(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)} - e^{i(\lambda_2 t_1 + \lambda_1 t_2)}}{\pi_3(X_{t_1, t_2})}$$

avec $\pi_3(X_{t_1, t_2}) = 4\, t_1\, t_2\, (t_1 + t_2)(t_2 - t_1)$.

Si $X_{\theta, \tau} \in \mathfrak{a}'_2$ avec $\theta > 0$ alors

$$T_\lambda(X_{\theta, \tau}) = \frac{e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)\tau - (\lambda_1 + \lambda_2)\theta} - e^{-i(\lambda_1 - \lambda_2)\tau - (\lambda_1 + \lambda_2)\theta}}{\pi_2(X_{\theta, \tau})}$$

avec $\pi_2(X_{\theta, \tau}) = -8\, i\theta\tau(\theta - i\tau)(\theta + i\tau)$.

Si $X_{t_1, \varphi_2} \in \mathfrak{a}'_1$ avec $\varphi_2 > 0$ alors

$$T_\lambda(X_{t_1, \varphi_2}) = \frac{e^{i\lambda_1 t_1 - \lambda_2 \varphi_2} - e^{i\lambda_2 t_1 - \lambda_1 \varphi_2}}{\pi_2(X_{t_1, \varphi_2})}$$

avec $\pi_2(X_{t_1, \varphi_2}) = 4\, it_1\, \varphi_2\, (it_1 - \varphi_2)(\varphi_2 + it_1)$.

Si $X_{\varphi_1, \varphi_2} \in \mathfrak{a}'_0$ avec $\varphi_2 > \varphi_1 > 0$ alors

$$T_\lambda(X_{\varphi_1, \varphi_2}) = \frac{e^{-(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)} - e^{-(\lambda_2 \varphi_1 + \lambda_1 \varphi_2)}}{\pi_0(X_{\varphi_1, \varphi_2})}$$

avec $\pi_0(X_{\varphi_1, \varphi_2}) = 4\, \varphi_1\, \varphi_2\, (\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Soit $\tilde{T}_\lambda$ la fonction généralisée définie dans le théorème 5.2. La proposition 5.9 permet de calculer facilement les valeurs prises par $\tilde{T}_\lambda$ sur $\mathfrak{h}'$. On obtient alors :

Si $X_{t_1, t_2} \in \mathfrak{a}'_3$ alors

$$\tilde{T}_\lambda(X_{t_1, t_2}) = \frac{e^{i(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)} - e^{i(\lambda_2 t_1 + \lambda_1 t_2)}}{\pi_3(X_{t_1, t_2})}.$$

Si $X_{\theta, \tau} \in \mathfrak{a}'_2$ avec $\pi/2 > \theta > 0$ alors

$$\tilde{T}_\lambda(X_{\theta, \tau}) = \frac{(e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)\tau} - e^{-i(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})}{\mathrm{sh}(\pi(\lambda_1 + \lambda_2)/2)} \mathrm{ch}(\lambda_1 + \lambda_2)(\theta - \pi/2) \frac{1}{\pi_2(X_{\theta, \tau})}.$$

Si $X_{t_1,\varphi_2}\in\mathfrak{a}_1'$ avec $\pi/2>\varphi_2>0$ alors

$$\tilde{T}_\lambda(X_{t_1,\varphi_2})=\left(\frac{e^{i\lambda_1 t_1}}{\operatorname{sh}(\pi\lambda_2/2)}\times\operatorname{ch}\lambda_2(\varphi_2-\pi/2)-\frac{e^{i\lambda_2 t_1}}{\operatorname{sh}(\pi\lambda_1/2)}\operatorname{ch}\lambda_1(\varphi_2-\pi/2)\right)\times\frac{1}{\pi_1(X_{t_1,\varphi_2})}.$$

Si $X_{\varphi_1,\varphi_2}\in\mathfrak{a}_0'$ avec $\pi/2>\varphi_2>\varphi_1>0$ alors

$$\begin{aligned}\pi_0(X_{\varphi_1,\varphi_2})\tilde{T}_\lambda(X_{\varphi_1,\varphi_2})
&=\sum_{p\geqq n\geqq 0}[e^{-\lambda_1(\varphi_1+n\pi)-\lambda_2(\varphi_2+p\pi)}-e^{-\lambda_2(\varphi_1+n\pi)-\lambda_1(\varphi_2+p\pi)}]\\
&-\sum_{n>p\geqq 0}[e^{-\lambda_1(\varphi_1+n\pi)-\lambda_2(\varphi_2+p\pi)}-e^{-\lambda_2(\varphi_1+n\pi)-\lambda_1(\varphi_2+p\pi)}]\\
&+\sum_{n\geqq -p>0}[-e^{-\lambda_1(\varphi_1+n\pi)+\lambda_2(\varphi_2+p\pi)}+e^{-\lambda_2(\varphi_1+n\pi)+\lambda_1(\varphi_2+p\pi)}]\\
&-\sum_{-p>n\geqq 0}[-e^{-\lambda_1(\varphi_1+n\pi)+\lambda_2(\varphi_2+p\pi)}+e^{-\lambda_2(\varphi_1+n\pi)+\lambda_1(\varphi_2+p\pi)}]\\
&+\sum_{p<n<0}[e^{\lambda_1(\varphi_1+n\pi)+\lambda_2(\varphi_2+p\pi)}-e^{\lambda_2(\varphi_1+n\pi)+\lambda_1(\varphi_2+p\pi)}]\\
&-\sum_{n\leqq p<0}[e^{\lambda_1(\varphi_1+n\pi)+\lambda_2(\varphi_2+p\pi)}-e^{\lambda_2(\varphi_1+n\pi)+\lambda_1(\varphi_2+p\pi)}]\\
&+\sum_{-n>p\geqq 0}[-e^{\lambda_1(\varphi_1+n\pi)-\lambda_2(\varphi_2+p\pi)}+e^{\lambda_2(\varphi_1+n\pi)-\lambda_1(\varphi_2+p\pi)}]\\
&-\sum_{p\geqq -n>0}[-e^{\lambda_1(\varphi_1+n\pi)-\lambda_2(\varphi_2+p\pi)}+e^{\lambda_2(\varphi_1+n\pi)-\lambda_1(\varphi_2+p\pi)}].\end{aligned}$$

Par suite, on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{T}_\lambda(X_{\varphi_1,\varphi_2})=\frac{1}{\pi_0(X_{\varphi_1,\varphi_2})}&(a e^{\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2}-b e^{-\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2}\\
&+ce^{-\lambda_1\varphi_1-\lambda_2\varphi_2}-de^{\lambda_1\varphi_1-\lambda_2\varphi_2}\\
&+ee^{-\lambda_2\varphi_1+\lambda_1\varphi_2}-fe^{\lambda_2\varphi_1+\lambda_1\varphi_2}\\
&+ge^{\lambda_2\varphi_1-\lambda_1\varphi_2}-he^{-\lambda_2\varphi_1-\lambda_1\varphi_2})\end{aligned}$$

où les constantes $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$ et $h$ sont données par :

$$a=\frac{1}{8\operatorname{sh}(\pi\lambda_1/2)\operatorname{sh}(\pi\lambda_2/2)\operatorname{sh}(\pi(\lambda_1+\lambda_2)/2)}(2e^{-\lambda_2\pi}-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\pi}-1)$$

$$b=\frac{-1}{8\operatorname{sh}(\pi\lambda_1/2)\operatorname{sh}(\pi\lambda_2/2)\operatorname{sh}(\pi(\lambda_1+\lambda_2)/2)}(e^{\lambda_1\pi}+e^{-\lambda_2\pi}-2)$$

$$c=\frac{1}{8\operatorname{sh}(\pi\lambda_1/2)\operatorname{sh}(\pi\lambda_2/2)\operatorname{sh}(\pi(\lambda_1+\lambda_2)/2)}(1-2e^{\lambda_2\pi}+e^{(\lambda_1+\lambda_2)\pi})$$

$$d=\frac{-1}{8\,\mathrm{sh}(\pi\lambda_1/2)\,\mathrm{sh}(\pi\lambda_2/2)\,\mathrm{sh}(\pi(\lambda_1+\lambda_2)/2)}(2-e^{-\lambda_1\pi}-e^{\lambda_2\pi})$$

$$e=\frac{1}{8\,\mathrm{sh}(\pi\lambda_1/2)\,\mathrm{sh}(\pi\lambda_2/2)\,\mathrm{sh}(\pi(\lambda_1+\lambda_2)/2)}(2-e^{-\lambda_1\pi}+e^{\lambda_2\pi})$$

$$f=\frac{-1}{8\,\mathrm{sh}(\pi\lambda_1/2)\,\mathrm{sh}(\pi\lambda_2/2)\,\mathrm{sh}(\pi(\lambda_1+\lambda_2)/2)}(1-2\,e^{-\lambda_1\pi}+e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\pi})$$

$$g=\frac{1}{8\,\mathrm{sh}(\pi\lambda_1/2)\,\mathrm{sh}(\pi\lambda_2/2)\,\mathrm{sh}(\pi(\lambda_1+\lambda_2)/2)}(e^{\lambda_1\pi}+e^{-\lambda_2\pi}-2)$$

$$h=\frac{-1}{8\,\mathrm{sh}(\pi\lambda_1/2)\,\mathrm{sh}(\pi\lambda_2/2)\,\mathrm{sh}(\pi(\lambda_1+\lambda_2)/2)}(2\,e^{\lambda_1\pi}-e^{(\lambda_1+\lambda_2)\pi}-1).$$

Dans [S 2], S. Sano définit pour $(\lambda_1, \lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ une fonction généralisée $\Phi(\lambda_1, \lambda_2)$. Lorsque $(\lambda_1, \lambda_2)$ parcourt $\mathbb{R}^2$, cette série de fonctions généralisées forme la partie continue de la formule d'inversion pour $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})/\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$. On a le résultat suivant :

THÉORÈME 7.2. — *Soit* $\lambda = X_{\lambda_1, \lambda_2}\in\mathfrak{a}'_3$ *avec* $\lambda_2>\lambda_1>0$. *Alors, on a* :

$$\bar{T}_\lambda = -2^4\,\Phi(\lambda_1, \lambda_2).$$

*Remarque*. — Une formule d'inversion a été démontrée par S. Sano et S. Sekiguchi dans [S 1] pour $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})/\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ et par N. Bopp dans [B] pour $\mathrm{Gl}(3, \mathbb{C})/\mathrm{U}(2, 1)$. On a un résultat analogue au théorème 7.2 pour ces deux espaces symétriques.

## BIBLIOGRAPHIE

[Be] M. BERGER, *Les espaces symétriques non compacts* (*Ann. Sci. École Norm. Sup.*, vol. 74, 1957, p. 85-117).

[B] N. BOPP, *Analyse harmonique sur un espace symétrique pseudo-riemannien*, (*Thèse*, 1987).

[Bo] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres* 4, 5 *et* 6, *éléments de mathématiques*, Hermann.

[F] J. FARAUT, *Algèbres de Volterra et transformation de Laplace sphérique sur certains espaces symétriques ordonnés* (prépublication).

[F1] J. FARAUT, *Analyse harmonique sur un hyperboloïde à une nappe* (exposé à la *R.C.P.*, vol. 21, 1974).

[F. J.] M. FLENSTED-JENSEN, *Discrete Series for Semisimple Symmetric Spaces* (*Ann. Math.*, vol. 111, 1980, p. 253-311).

[Ha 1] HARISH-CHANDRA, *Invariant Eigendistributions on a Semisimple Lie Algebra* (*Pub. Math., I.H.E.S.*, vol. 27, 1965, p. 5-54).

[Ha 2] HARISH-CHANDRA, *Invariant Eigendistributions on a Semisimple Lie Group* (*Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 69, 1963, p. 117-123).

[Ha 3] HARISH-CHANDRA, *Spherical Functions on a Semisimple Lie Group I, II* (*Am. J. Math.*, vol. 80, 1958, p. 241-310, p. 553-613).

[Ha 4] HARISH-CHANDRA, *Discrete Series for Semisimple Lie Groups I* (*Acta Math.*, vol. 113, 1965, p. 241-318).

[H. 1] P. HARINCK, *Fonctions généralisées sur une algèbre de Lie semi-simple réelle* (*C.R. Acad. Sci. Paris*, série I, 305, 1987, p. 853-856).

[H. 2] P. HARINCK, *Fonctions généralisées sphériques sur* $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ (*Thèse de doctorat*, Université Paris-VI).

[He 1] S. HELGASON, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[He 2] S. HELGASON, *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, Inc. 1984.

[Hi] T. HIRAÏ, *Invariant Eigendistributions of Laplace Operators on Real Simple Groups II* (*Jpn J. Math.*, New Ser., vol. 2, 1976, p. 27-89).

[Lo] O. LOOS, *Symmetric Spaces I*, Benjamin, New York, 1962.

[O.M.1] T. OSHIMA et T. MATSUKI, *Orbits on Affine Symmetric Spaces under the Action of the Isotropy Subgroups* (*J. Math. Soc. Jpn*, vol. 32, 1980, p. 399-414).

[O.M.2] T. OSHIMA et T. MATSUKI, *A Description of Discrete Series for Semisimple Symmetric Spaces*, (*Adv. Studies Pure Math.*, vol. 4, 1984, p. 331-390).

[R] W. ROSSMAN, *Kirillov's Character Formula for Reductive Lie Groups* (*Inv. Math.*, vol. 48, 1978, p. 207-220).

[S 1] S. SANO et J. SEKIGUCHI, *The Plancherel Formula for* $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})/\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ (*Scient. Papers of the college of general education*, vol. 30, 1980, p. 93-105).

[S 2] S. SANO, *Some Properties of Spherical Distributions on* $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})/\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ (*Bull. of the Institute of Vocational Training*, vol. 13, 1984, p. 111-116).

[S 3] S. SANO, *Invariant Spherical Distributions and the Fourier Inversion Formula on* $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})/\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ (*J. Math. Soc. Jpn*, n° 2, 1984, p. 191-218).

[S 4] S. SANO, *Distributions sphériques invariantes sur l'espace semi-simple et son c-dual* (*Lect. Notes Math.*, vol. 1243. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1985).

[Va] V. S. VARADARAJAN, *Harmonic Analysis on Real Reductive Groups*, Springer Verlag, Berlin, New York, 1977.

(Manuscrit reçu le 13 octobre 1988,
révisé le 24 avril 1989).

U.F.R. de Mathématiques,
Université Paris-VII,
2, place de Jussieu,
75251 Paris Cedex 05.