ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

R. W. THOMASON

Erratum "Algebraic *K*-theory and etale cohomology"

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 22, nº 4 (1989), p. 675-677
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1989_4_22_4_675_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 22, 1989, p. 675 à 677.

ERRATUM

Algebraic K-theory and etale cohomology

(R. W. Thomason)

Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 18, 1985, p. 437-552

J. F. Jardine m'a signalé que la méthode usuelle de déduire l'existence de la flèche (2.106), qui sort d'une colimite d'homotopie d'un système filtrant, à partir de l'existence d'une famille de flèches (2.105) concordante à homotopie près, mais sans plus haute homotopies de cohérence, marche seulement quand le système est au plus dénombrable. A cause de cela, la démonstration donnée de la proposition 2.42 (technique, mais importante) n'est exacte que sous l'hypothèse supplémentaire que l'extension Galoisienne de corps L''/L soit de type au plus dénombrable. Pourtant, on peut facilement démontrer un énoncé un peu plus faible que la proposition 2.42, valable sans l'hypothèse supplémentaire au moyen d'approximation par des sous-extensions dénombrables. Cet énoncé révisé suffit pour démontrer tous les résultats déduits de l'énoncé originel qui se trouvent dans cet article et dans l'article [129]. Donc, aucun des théorèmes et aucune des autres propositions n'est atteint.

L'énoncé corrigé de la proposition 2.42 a deux parts, 2.42 *a* et 2.42 *b*. Étant donnés L'', L, M'', M et A comme dans les hypothèses de l'énoncé originel, et notamment avec le groupe pro-fini de Galois $\mathrm{Gal}(L''/L)$ de l-dimension cohomologique 1, on suppose que L'/L soit une sous-extension Galoisienne tel que $\mathrm{Gal}(L'/L)$ soit aussi de l-dimension cohomologique égale à 1. La nouvelle proposition 2.42 *a* dit que si l'on suppose aussi que l'extension L'/L soit de type dénombrable, il existe une flèche $\varphi(L'/L;\, A)$ qui donne un diagramme commutatif à homotopie près comme (2.97) mais où on remplace tous les L'' par les L'. De plus, toutes les autres conclusions de l'ancienne proposition 2.42 sont vraies si l'on remplace L'' par L'. La seconde partie 2.42 *b* ne fait pas l'hypothèse que L'/L soit de type dénombrable, et conclut non pas qu'il existe une flèche $\varphi(L'/L;\, A)$, mais seulement que la multiplication par l'élément de Bott β est zéro sur les noyaux et les conoyaux des flèches des groupes d'homotopie $\pi_*(\eta)$ induites par la flèche

$$\eta(L'/L):\quad K/l^\nu(A) \to \mathbb{H}^{\cdot}(L'/L;\, K/l^\nu(A \otimes_L L'))$$

comme en (2.97).

Pour démontrer 2.42*a*, on n'a qu'à modifier légèrement la notation de l'ancienne démonstration et éclaircir le passage de (2.105) à (2.106) sous les hypothèses corrigées. Maintenant, L_α parcourt le système inductif filtrant des corps qui sont sous-extensions Galoisiennes finies de L'/L. On remarque que la famille d'inducteurs de l'élément de Bott donnée par la proposition 2.40 à l'extension L''/L se restreint à une famille d'inducteurs pour la sous-extension L'/L. Après avoir remplacé L'' par L' partout dans la démonstration, il ne reste qu'à expliquer un peu plus précisément pourquoi (2.106) résulte de (2.105) dans ce cas. En énumérant un ensemble de générateurs pour L'/L et en prenant pour chaque entier positif k la plus petite sous-extension Galoisienne L_k/L qui contient les k premiers éléments de l'ensemble, on trouve une suite croissante d'extensions L_k/L qui est cofinale dans le système filtrant des L_α. On considère donc un système indexé par les entiers positifs. On rappelle que le télescope d'une suite d'ensembles simpliciaux

$$Z_1 \to Z_2 \to Z_3 \to \dots$$

est le quotient de la somme disjointe des $Z_k \times [0, 1]$ qui identifie chaque bord $Z_k \times 1$ avec le bord $Z_{k+1} \times 0$ par la flèche $Z_k \to Z_{k+1}$. Donner une flèche à partir du télescope équivaut à donner pour chaque k une flèche à partir de Z_k et une homotopie entre la flèche de Z_k et le composé de la flèche de Z_{k+1} et de la flèche donnée du système $Z_k \to Z_{k+1}$. La flèche canonique du télescope vers la limite directe $\varinjlim Z_k$ est une équivalence faible d'homotopie, puisque les groupes d'homotopie de chacun sont isomorphes à $\varinjlim \pi_*(Z_k)$. Cette construction du télescope se généralise facilement au cas où les Z_k sont des spectres, et elle conserve les propriétés analogues.

On applique cette construction du téléscope à la suite de spectres $Map_*(\mathbb{H}.(\mathrm{Gal}(L_k/L); K/l^\nu(L_k)), K/l^\nu(A)\langle n\rangle)$ induite par la suite des corps L_k avec leurs hypertransferts, qui figure en (2.106). La famille de flèches $\Sigma^\infty S^2 \to \mathbb{H}.(\mathrm{Gal}(L_k/L); K/l^\nu(L_k))$ fournie par (2.105), ensemble avec un choix d'homotopies de compatibilité sous l'hypertransfert, induit donc par évaluation une flèche à partir du télescope vers $\Omega^2 K/l^\nu(A)\langle n\rangle$. Cette flèche est strictement naturelle en A et en n puisque les flèches et les choix d'homotopies en (2.105) qui induisent la flèche du télescope n'a rien à voir avec A ni n. On peut donc prendre la limite projective d'homotopie en n, ce qui donne la flèche requise (2.106) puisque le télescope équivaut à la colimite inductive filtrante à homotopie près. Cette flèche n'est définie qu'à homotopie près, mais on peut accomplir tout ci-dessus dans la catégorie des foncteurs de A en spectres, ce qui donne la flèche (2.106) dans la catégorie d'homotopie de tel foncteurs, comme il faut. Donc, 2.42*a* est démontré.

Pour démontrer 2.42*b*, d'abord on remarque que si L'/L est aussi de type dénombrable la conclusion de 2.42*b* résulte immédiatement d'une chasse dans le diagramme (2.97) donné par 2.42*a*. Pour en déduire le cas général, on réduit le problème au cas où $\mathrm{Gal}(L'/L)$ est aussi un pro-l-groupe, en remplaçant L par le corps fixé par un sous-groupe l-Sylow, et en utilisant le transfert (la corestriction) comme dans la preuve du théorème 2.43 pour démontrer que la conclusion pour le nouveau L implique celle pour l'ancien. Maintenant que $\mathrm{Gal}(L'/L)$ est un pro-l-groupe de l-dimension 1, il est un pro-l-groupe libre, et donc est la limite projective filtrante de ses pro-l-groupes quotients libres de rang fini (*cf.* [102], I-37, Cor. 2 et I-5, 1.5; ou [104], § 3, Prop. 23 et Prop. 21). Ainsi L' est la colimite inductive filtrante de sous-extensions $L^{\#}/L$ avec $\mathrm{Gal}(L^{\#}/L)$ un pro-l-groupe libre de rang fini. Un tel $\mathrm{Gal}(L^{\#}/L)$ est de l-dimension cohomologique 1, et $L^{\#}/L$ est de type dénombrable parce que $\mathrm{Gal}(L^{\#}/L)$ est une limite projective filtrante d'un système dénombrable de groupes finis (e. g., [102], I-38, Ex. 3), ce qui donne que $L^{\#}$ est une colimite inductive filtrante d'un système dénombrable de sous-extensions de type fini. Donc, on a déjà vérifié la conclusion de 2.42 *b* pour $\eta(L^{\#}/L)$. Elle est donc vraie pour la colimite inductive filtrante des $\eta(L^{\#}/L)$. Mais comme $\mathrm{Gal}(L'/L)$ et tous les $\mathrm{Gal}(L^{\#}/L)$ ont une l-dimension cohomologique bornée (par 1), proposition 1.41 montre que cette colimite est équivalente à $\eta(L'/L)$. Donc, on a démontré 2.42 *b*.

Il reste à remarquer que la proposition 2.42 corrigée suffit pour les applications faites de l'ancienne. Comme $\mathrm{Gal}(L''/L)$ est de l-dimension cohomologique bornée, la proposition 1.39 donne que l'inversion de l'élément β et le foncteur hypercohomologie $\mathbb{H}^{\bullet}(\mathrm{Gal}(L''/L);\ )$ commutent. Cette observation et 2.42 *b* pour $L' = L''$ suffisent à démontrer que la flèche (2.116) est une équivalence faible d'homotopie. Ceci est le seul emploi de 2.42 dans l'article, et donc tous les autres résultats restent sans changement. Dans [129], l'énoncé technique (2.2) que β^2 soit nullhomotopique sur $WK/l^{\nu}(A\otimes L'/A\otimes L)$ maintenant ne résulte de la nouvelle proposition 2.42 que si l'on a l'hypothèse supplémentaire que L'/L soit de type dénombrable, mais sans cette hypothèse on a encore que β^2 en (2.2) induit zéro sur tous les groupes d'homotopie $\pi_*(WK/l^{\nu})$ et cela suffit à démontrer toutes les autres assertions de [129]. La généralisation du théorème 2.43 donné par 3.10 de « Equivariant algebraic vs. topological K-homology Atiyah-Segal style », *Duke Math. J.*, 56, 1988, p. 589-639 est valide comme énoncé mais sa preuve a besoin d'un petit ajustement pour corriger l'étape analogue à la proposition 2.42.