ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

B. HELFFER
J. NOURRIGAT
X. P. WANG

Sur le spectre de l'équation de Dirac (dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$) avec champ magnétique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 22, nº 4 (1989), p. 515-533
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1989_4_22_4_515_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 22, 1989, p. 515 à 533.

SUR LE SPECTRE DE L'ÉQUATION DE DIRAC (DANS $\mathbb{R}^2$ OU $\mathbb{R}^2$) AVEC CHAMP MAGNÉTIQUE

PAR B. HELFFER, J. NOURRIGAT ET X. P. WANG

1. Introduction et énoncé des résultats

On s'intéresse dans cet article à la nature du spectre de l'opérateur de Dirac avec champ magnétique opérant *a priori* dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ et défini par :

$$\text{(1.1)} \qquad D_A = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j (D_{x_j} - A_j(x)) + \alpha_4$$

où $A(x) = (A_1(x), A_2(x), A_3(x))$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^3$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ (le potentiel magnétique), où les α_j sont des matrices 4×4 définis par :

$$\text{(1.2)} \qquad \alpha_j = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{bmatrix} \quad (1 \leqq j \leqq 3), \qquad \alpha_4 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix}$$

et où les σ_j ($j = 1, \ldots$) sont trois matrices hermitiennes 2×2 (matrices de Pauli) satisfaisant aux relations :

$$\text{(1.3)} \qquad \sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 2\,\delta_{j,k}; \qquad \sigma_1 \sigma_2 = i\,\sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_3 = i\,\sigma_1, \quad \sigma_3 \sigma_1 = i\,\sigma_2$$

On peut prendre (*cf.* [LA-LI]) par exemple :

$$\text{(1.4)} \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On s'intéressera également à l'analogue dans $\mathbb{R}^2$. Il nous suffit alors d'une fonction $A_1(x)$, C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ (à valeurs réelles) et D_A est défini par :

$$\text{(1.5)} \qquad D_A = \alpha_1 (D_{x_1} - A_1(x)) + \alpha_2 D_{x_2} + \alpha_4$$

Rappelons tout d'abord deux résultats sans doute classiques mais dont nous redonnerons une démonstration au paragraphe 2 (résultats vrais pour $n = 2, 3$).

PROPOSITION 1.1. — *L'opérateur* D_A *est essentiellement auto-adjoint.*

On considère alors son extension auto-adjointe et on a la :

PROPOSITION 1.2. — *Le spectre de* D_A *est disjoint de l'intervalle* $]-1, +1[$. *Le spectre et le spectre essentiel de* D_A *sont tous deux symétriques par rapport à l'origine.*

Rappelons maintenant la relation classique :

$$D_A^2 = (P_A + 1)\, I_4 + i \sum_{j<k} \alpha_j \alpha_k B^{jk} \tag{1.6}$$

où $B^{jk} = (\partial A_j/\partial x_k) - (\partial A_k/\partial x_j))$ désigne le champ magnétique et $P_A = \sum_j (D_{x_j} - A_j)^2$ désigne l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique.

Dans le cas de la dimension 3, on identifiera la 2-forme champ magnétique $\sum_{j<k} B^{jk}\, dx_j \wedge dx_k$ avec le vecteur $B(x) = (B_1, B_2, B_3)$ de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \qquad \ldots \tag{1.7}$$

On introduit une suite de fonctions $\varepsilon(x)$ $(r \geqq 0)$ dont les majorations vont exprimer une croissance tempérée de $B(x)$ à l'infini. On pose :

$$\varepsilon_0(x) = |B(x)|$$

et, si $r \geqq 1$:

$$\varepsilon_r(x) = \frac{\sum_{|\alpha|=r} |D^\alpha B|}{1 + \sum_{|\alpha|<r} |D^\alpha B|} \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{m_r(x)}{1 + \sum_{j=0}^{r-i} m_j(x)} \tag{1.8}$$

On introduit pour tout $r \geqq 0$, l'hypothèse suivante :

(H_r) Il existe une suite de boules B_n disjointes, de rayon $\geqq 1$, telles que la fonction $\varepsilon_r(x)$ soit bornée sur la réunion de ces boules.

On démontrera le :

THÉORÈME 1.3. — *Si* $n=2$ *ou* 3 *et s'il existe un entier* $r \geqq 0$ *tel que l'hypothèse* (H_r) *soit vérifiée, alors la résolvante de* D_A *n'est pas compacte.*

Il est clair que (H_r) est une hypothèse très faible satisfaite dans des cas très variés comme :

(1) le cas où $A(x)$ est polynômial;

(2) le cas où $|B(x)| \to 0$ (où le résultat est connu compte tenu d'un résultat de Leinfelder [LE] (*cf.* [C.F.K.S.], Thm. 6.1).

Nous conjecturons que la résolvante de l'opérateur D_A défini en (1.5) (sans champ électrique) n'est jamais compacte. Il est alors naturel de caractériser le spectre essentiel de D_A [qui est clairement le complémentaire de $]-1, +[$ dans le cas où $B(x) \to 0$]. Pour cela, nous introduisons l'hypothèse plus forte :

(H'_r) Il existe une suite de boules B_n disjointes, dont les rayons tendent vers $+\infty$, telles que la fonction $\varphi_r(x)$ restreinte à la réunion de ces boules, tende vers 0 à l'infini.

On a le :

THÉORÈME 1.4. — *Si $n=3$, et s'il existe un entier $r \geqq 0$ tel que l'hypothèse (H'_r) soit vérifiée, alors le spectre essentiel de l'opérateur D_A est le complémentaire de l'intervalle* $]-1, +1[$.

En particulier, si les composantes de $B(x)$ sont des polynômes de degré $\leqq r$, l'hypothèse (H'_{r+1}) est vérifiée, donc, si $n=3$, le spectre essentiel de D_A est le complémentaire de l'intervalle $]-1, +1[$. Ce phénomène est *spécifique* de la dimension 3 car le résultat devient faux en dimension 2, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 1.5. — *Si $n=2$ et si $|B(x)| \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$, le spectre essentiel de D_A ne peut contenir d'autres points que* 1 *et* -1.

Pour étudier ce spectre essentiel dans d'autres cas, en dimension 2, on introduit un ensemble $\mathscr{B}_\infty$ de réels, analogue à celui de [HE-MO], lui-même inspiré de travaux de Helffer-Nourrigat [HE-NO]. On désigne par $\mathscr{B}_\infty$ l'ensemble des réels l tels qu'il existe une suite (x_n) tendant vers l'infini, telle que $B(x_n) = -(\partial A_1/\partial x_2)(x_n)$ tende vers l. On note S_∞ l'ensemble suivant :

$$S_\infty = \{\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda = \pm\sqrt{1+2k|l|},\ k \in \mathbb{N},\ l \in \mathscr{B}_\infty\} \qquad \text{si} \quad 0 \notin \mathscr{B}_\infty$$
$$S_\infty =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\qquad \text{si} \quad 0 \in \mathscr{B}_\infty$$

qui est évidemment fermé (mais qui peut être vide, par exemple si $|B(x)| \to \infty$).

THÉORÈME 1.6. — *Si $n=2$ et si l'une des fonctions $\varepsilon_0(x)$ ou $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 à l'infini alors le spectre essentiel de D_A est formé de l'ensemble S_∞, ainsi que des points* 1 *et* -1.

Si $\varepsilon_r(x)$ tend vers 0 à l'infini ($r \geqq 2$), le spectre essentiel contient les points 1 *et* -1.

Ce travail a son origine dans les résultats concernant l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique P_A. A la suite des travaux de J. Avron, I. Herbst et B. Simon [AV-HE-SI], A. Dufresnoy [DUF], S. I. Kuroda [KUR], et surtout des plus récents de A. Iwatsuka [IWA] (1), (2), un théorème de [HE-MO], combiné avec une condition nécessaire d'Iwatsuka [IWA], caractérise les champs magnétiques pour lesquels la résolvante de P_A est compacte lorsque le champ électrique est nul, et lorsque la fonction $\varepsilon_r(x)$ définie en (1.8) est bornée. Il faut et il suffit alors, pour que la résolvante soit compacte, que :

$$\sum_{j=0}^{r} m_j(x) \to \infty \quad \text{quand } |x| \to \infty$$

Il était alors naturel de se demander si on avait des résultats analogues pour l'opérateur de Dirac. Le théorème 1.3 montre qu'il n'en est rien, puisque, sous les hypothèses de [HE-MO], la résolvante de D_A n'est jamais compacte. Nous pouvons conjecturer que la résolvante de D_A n'est jamais compacte lorsque le champ électrique est nul.

Nous renvoyons à [BE-GE] pour des résultats sur le spectre ponctuel. Dans certains cas, l'appartenance de $\{1\}$ et $\{-1\}$ au spectre essentiel résulte du fait que Ker $(D_A \pm L)$ est de dimension infinie. Cela est lié au résultat de Aharonov-Casher dont on trouvera une présentation au paragraphe 6.4 de [CFKS]. Pour d'autres calculs dans des cas particuliers ou annexes, nous renvoyons à [GA-LA], [AV-SE], [LO-YA], ... En particulier, on trouvera un noyau de dimension infinie chaque fois qu'on aura trouvé une solution φ de $\Delta\varphi = B$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que e^{φ} ou $e^{-\varphi}$ soit dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ (*cf.* la démonstration de [AH-CA], p. 126-127 dans [CFKS] et [AV-SE]).

Nous tenons à remercier A. Mohamed pour d'utiles conversations autour de la proposition 1.5 et du théorème 1.6, et M. Loss pour d'utiles remarques.

2. Préliminaire

Preuve de la proposition 1.1 — Il suffit de montrer que :

$$u \in L^2 \quad \text{et} \quad (D_A \pm i)\,u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$$

Soit donc $u \in L^2$ tel que $(D_A + i)\ u = 0$. Remarquons que u est C^∞, d'après l'ellipticité locale du système de Dirac. Soit χ une fonction réelle égale à 1 sur la boule $B(0, 1)$, et à support compact. On a, pour tout $n \geqq 1$

$$(D_A + i)\left(\chi\left(\frac{x}{n}\right)u\right) = -i \sum_{j=1}^{3} \frac{\alpha_j}{n} \frac{\partial \chi}{\partial x_j}\left(\frac{x}{n}\right)u$$

et, par conséquent

$$\left\|\chi\left(\frac{x}{n}\right)u\right\|^2 + \left\|D_A\left(\chi\left(\frac{x}{n}\right)u\right)\right\|^2 = \left\|(D_A + i)\left(\chi\left(\frac{x}{n}\right)u\right)\right\|^2 \leqq \frac{C}{n^2}\|u\|^2$$

où $C > 0$ est indépendant de n. En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $u = 0$.

Preuve de la proposition 1.2. — On introduit l'opérateur suivant, agissant dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$:

$$D_A^{\text{red}} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_j (D_{x_j} - A_j(x)) \tag{2.1}$$

Pour tout $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$, on peut écrire $(D_A - \lambda)\ \Psi = (f_1, f_2)$, avec

$$f_1 = D_A^{\text{red}}\,\Psi_2 + (1-\lambda)\,\Psi_1$$
$$f_2 = D_A^{\text{red}}\,\Psi_1 - (1+\lambda)\,\Psi_2$$

On en déduit, en intégrant par parties que :

$$(1-\lambda)\,\|\Psi_1\|^2 + (1+\lambda)\,\|\Psi_2\|^2 = \mathrm{Re}\,[(f_1, \Psi_1) - (f_2, \Psi_2)]$$

Si $\lambda \in]-1, 1[$, soit $c(\lambda)=\inf(1-\lambda, 1+\lambda)>0$. On en déduit que :

$$c(\lambda)\|\Psi\| \leqq \|f\|, \qquad \forall \Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$$

de sorte que λ n'est pas dans le spectre de D_A.

Pour prouver la seconde affirmation, il suffit de remarquer que, si l'on pose $\gamma=\alpha_1 \ldots \alpha_4$, on a $D_A \gamma = -\gamma D_A$.

La preuve des théorèmes 1.3 à 1.6 utilisera les deux remarques suivantes :

REMARQUE 2.1. — *Soit* λ *un réel tel que* $|\lambda| \geqq 1$. *Si* $\sqrt{\lambda^2-1}$ est dans le spectre essentiel de D_A^{red} *[défini en* (2.1)], *alors* λ *est dans le spectre essentiel de* D_A.

Démonstration. — Si $k=\sqrt{\lambda^2-1}$ est dans le spectre essentiel de D_A^{red}, il existe une suite (φ_n) dans $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, engendrant un espace de dimension infinie, telle que $\|\varphi_n\|=1$ et $\|(D_A^{red}-k)\varphi_n\| \to 0$. Si $\lambda>1$, posons

$$\Psi_n = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda+1}\,\varphi_n \\ \sqrt{\lambda-1}\,\varphi_n \end{bmatrix}$$

On voit facilement que $\|(D_A-\lambda)\Psi_n\|$ tend vers 0. Le raisonnement est identique si $\lambda<-1$.

REMARQUE 2.2. — *Pour montrer qu'un réel* λ *est dans le spectre essentiel de* D_A, *il suffit donc de construire une suite de fonctions* φ_n *dans* $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, *à supports dans des boules* B_n *disjointes, telles que*

$$(2.2) \qquad \|\varphi_n\|=1 \quad et \quad \|(D_A^{red}-\sqrt{\lambda^2-1})\varphi_n\| \to 0$$

Pour prouver que la résolvante de D_A *n'est pas compacte, il suffit de construire une suite de fonctions* φ_n *dans* $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, *à supports dans des boules* B_n *disjointes, telles que*

$$(2.2) \qquad \|\varphi\|=1 \quad et \quad \|(D_A^{red}-\sqrt{\lambda^2-1})\varphi_n\| \leqq C$$

où $C>0$ *est indépendant de n.*

Les démonstrations de (2.2) et (2.2′) étant très voisines, nous ne détaillerons pas la preuve du théorème 1.3.

Preuve du théorème 1.4 *quand* $r=0$. — Soit λ un réel tel que $|\lambda| \geqq 1$. Soient (B_n) la suite des boules de l'hypothèse (H_0'), et (x_n) leurs centres. Pour tout n, soit $A^n(x)$ le potentiel magnétique défini :

$$A^n(x) = \int_0^1 t\,B(x_n + t(x-x_n)) \wedge (x-x_n)\,dt$$

Le rotationnel de A^n est égal à B. Il existe donc une fonction réelle $\varphi_n(x)$ telle que $\operatorname{grad} \varphi_n = A - A^n$. Pour tout $\rho \geqq 1$, on a évidemment

$$\sup_{B(x_n, \rho)} |A^n(x)| \leqq \rho \sup_{B(x_n, \rho)} |B(x)|$$

Il existe un entier $n_0(\rho)$ tel que, pour $n \geqq n_0(\rho)$, la boule $B(x_n, \rho)$ soit contenue dans B_n et

$$\sup_{B(x_n, \rho)} |B(x)| \leqq \frac{1}{\rho^2} \quad \text{donc} \quad \sup_{B(x_n, \rho)} |A^n(x)| \leqq \frac{1}{\rho} \tag{2.3}$$

Soit q un vecteur de $\mathbb{C}^2$ tel que $|q|=1$ et $\sigma_3 = q$. Soit χ une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, à support dans la boule unité, dont la norme L^2 est égale à 1. Posons, pour tout $\rho \geqq 1$ et pour tout $n \geqq n_0(\rho)$

$$\Phi_{n,\rho}(x) = \frac{1}{\rho^{3/2}} \chi\left(\frac{x-x_n}{\rho}\right) e^{i\varphi_n(x) + ikx_3} q$$

où $k = \sqrt{\lambda^2 - 1}$. On vérifie facilement que :

$$\|\Phi_{n,\rho}\| = 1 \quad \operatorname{supp} \Phi_{n,\rho} \subset B_n$$

et, d'après (2.3), il existe $C>0$, indépendant de ρ et n, tel que :

$$\|(D_A^{\text{red}} - \sqrt{\lambda^2 - 1})\, \Phi_{n,\rho}\| \leqq \frac{C}{\rho}$$

Soit φ_k la fonction obtenue en faisant $\rho = k$ et $n = n_0(k)$. Cette suite de fonctions vérifie (2.2). D'après les remarques 2.1 et 2.2, λ est donc dans le spectre essentiel de D_A.

REMARQUE 2.3. — La même méthode prouve que, si $n=2$, et si $\varepsilon_0(x)$ tend vers 0 à l'infini, le spectre essentiel est $S_\infty =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$, et aussi que, si $n=2$ et si l'hypothèse (H_0') est vérifiée, le spectre essentiel contient les points 1 et -1.

Lorsque $r=1$, le théorème 1.4 sera démontré au paragraphe suivant. Il s'en déduira facilement pour tout $r \geqq 2$ grâce à la proposition suivante :

PROPOSITION 2.4. — *S'il existe $r \geqq 2$ tel que l'hypothèse (H_r') soit vérifiée, alors l'une des hypothèses (H_0') ou (H_1') est vérifiée.*

Démonstration. — On suppose que (H_r') est vérifiée ($r \geqq 2$) et que (H_0') ne l'est pas. Soient (B_n) la suite des boules de l'hypothèse (H_r'), x_n leurs centres, et R_n leurs rayons. Puisque (H_0') n'est pas vérifiée, il existe y_n tel que $|y_n - x_n| \leqq R_n/2$ et tel que la suite $|B(y_n)|$ ne tende pas vers 0. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $C_0 > 0$ tel que :

$$|B(y_n)| \geqq C_0 \tag{2.4}$$

Pour tout $\rho \geqq 1$, soit z_n un point tel que:

$$|z_n - y_n| \leqq \rho \quad \text{et} \quad |B(z_n)| = \sup_{|z-y_n| \leqq \rho} |B(z)| \tag{2.5}$$

Nous allons démontrer le lemme suivant :

LEMME 2.5. — *Avec les notations ci-dessus, il existe* $C>0$ *et* $a>0$, *indépendants de* ρ, *et, pour tout* $\rho \geqq 1$, *il existe un entier* $n_0(\rho)$, *tels que*

$$\left.\begin{array}{l} n \geqq n_0(\rho), \quad |\alpha|<r \\ |x-z_n| \leqq a\rho \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{B}(z_n, a_\rho) \subset \mathrm{B}_n \quad \textit{et} \quad |\partial_x^\alpha \mathrm{B}(x)| \leqq \frac{\mathrm{C}}{\rho^{|\alpha|}} |\mathrm{B}(x)|$$

Si B'_k est la boule de centre $z_{n_0}(k)$ (pour $\rho=k$) et de rayon a k, on voit que l'hypothèse (H'_1) est vérifiée dans la suite des boules B'_k. La proposition 2.3 est donc une conséquence du lemme.

Preuve du lemme. — Posons :

$$\mathrm{M}(x, \rho) = 1 + \sum_{|\alpha|<r} |\partial_x^\alpha \mathrm{B}(x)| \rho^{|\alpha|}$$

Une telle fonction apparaît dans un contexte différent dans [HE-NO] (§ 3, chap. IX).

D'après la définition (1.7), on a :

$$\sum_{|\alpha|=r} |\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{B}(x)| \leqq \varepsilon_r(x) \mathrm{M}(x, \rho), \qquad \forall \rho \geqq 1.$$

La formule de Taylor nous montre que, si $|x-y_n| \leqq 2\rho$, on a

$$\mathrm{M}(x, \rho) \leqq \mathrm{C}_1 \mathrm{M}(y_n, \rho) + \mathrm{C}_1 \rho^r \sup_{|y-y_n| \leqq 2\rho} \varepsilon_r(y) \mathrm{M}(y, \rho)$$

où C_1 est indépendant de ρ. D'après l'hypothèse (H'_r), il existe un entier $n_1(\rho)$ tel que :

$$n \geqq n_1(\rho) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B}(y_n, 2\rho) \subset \mathrm{B}_n \qquad \text{et} \qquad \sup_{|y-y_n| \leqq 2\rho} \mathrm{C}_1 \rho^r \varepsilon_r(y) \leqq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, si $n \geqq n_1(\rho)$, on a l'implication :

(2.6) $$|y-y_n| \leqq 2\rho \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M}(y, \rho) \leqq 2\mathrm{C}_1 \mathrm{M}(y_n, \rho).$$

Posons maintenant :

$$\mathrm{T}_n(x) = \sum_{|\alpha|<r} \partial_x^\alpha \mathrm{B}(y_n) \frac{(x-y_n)^\alpha}{\alpha!}.$$

D'après les équivalences de normes sur l'espace des polynômes de degré $\leqq r$, il existe $\mathrm{C}_2>0$ et $\mathrm{C}_3>0$ tels que :

$$\sup_{|x-y_n| \leqq \rho} |\mathrm{T}_n(x)| \geqq \frac{1}{\mathrm{C}_2} \sum_{|\alpha|<r} |\partial_x^\alpha \mathrm{B}(y_n)| \rho^{|\alpha|} \geqq \frac{1}{\mathrm{C}_3} \mathrm{M}(y_n, \rho).$$

On a utilisé (2.4). La formule de Taylor nous montre que:

$$|x-y_n|\leqq\rho \quad\Rightarrow\quad |B(x)-T_n(x)|\leqq C_4\rho^r \sup_{|y-y_n|\leqq\rho} \varepsilon_r(y)M(y,\rho).$$

Par conséquent, d'après (2.6):

$$\sup_{|x-y_n|\leqq\rho} |B(x)|\geqq \sup_{|x-y_n|\leqq\rho} |T_n(x)| - \sup_{|x-y_n|\leqq\rho} |B(x)-T_n(x)|$$

$$\geqq\frac{1}{C_3}M(y_n,\rho)-C_4\rho^r\big(\sup_{|y-y_n|\leqq\rho}\varepsilon_r(y)\big)\times 2C_1 M(y_n,\rho).$$

Il existe un entier $n_0(\rho)\geqq n_1(\rho)$ tel que:

$$n\geqq n_0(\rho) \quad\Rightarrow\quad 2C_4C_1\rho^r \sup_{|y-y_n|\leqq\rho}\varepsilon_r(y)\leqq\frac{1}{2C_3}.$$

Si $n\geqq n_0(\rho)$, et si z_n est un point vérifiant (2.5), on a donc:

$$|B(z_n)|=\sup_{|x-y_n|\leqq\rho}|B(x)|\geqq\frac{1}{2C_3}M(y_n,\rho).$$

En utilisant (2.6), on en déduit que:

$$|x-z_n|\leqq\rho \quad \text{et} \quad |\alpha|<r \quad\Rightarrow\quad \rho^{|\alpha|}|\partial_x^\alpha B(x)|\leqq M(x,\rho)\leqq 4C_1C_3|B(z_n)|.$$

Si $a=\inf(1, 1/8\,C_1C_3)$, on obtient:

$$|x-z_n|\leqq a\rho \quad\Rightarrow\quad |\partial_x B(x)|\leqq\frac{8C_1C_3}{\rho}|B(x)|$$

La proposition 2.3 est donc démontrée.

3. — Étude en dimension 3

Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème 1.4 lorsque $r=1$.

3.1. Situation locale. — On considère un potentiel $A_\rho=(A_{1,\rho}, A_{2,\rho}, A_{3,\rho})$, dépendant d'un paramètre $\rho\geqq 1$. On note $B_\rho=(B_{1,\rho}, B_{2,\rho}, B_{3,\rho})$ le champ magnétique associé, défini comme en (1.6). On suppose que B_ρ est aussi de classe C^1, et que:

(H_1) On a $|B_\rho(0)|\geqq 1$!

(H_2) On a, si $|x|\leqq\rho$, l'inégalité $|\partial_x B(x)|\leqq(1/\rho)|B_\rho(0)|$

On pose alors:

$$P_\rho=\sum_{j=1}\sigma_j(D_{x_j}-A_{j,\rho}). \tag{3.1}$$

Lorsque $r=1$, le théorème 1.4 sera une conséquence de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1. — *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *ci-dessus. Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $\rho \geqq 1$, *il existe une fonction* $\Psi_\rho \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ *telle que :*

$$\|\Psi_\rho\| = 1, \qquad \operatorname{supp} \Psi_\rho \subset B(0, \rho) \tag{3.2}$$

$$\|(P_\rho - \lambda)\Psi_\rho\| \leqq \frac{C}{\rho} \tag{3.3}$$

où $C>0$ *est indépendant de* ρ.

La preuve de cette proposition montrera que, si B_ρ est de classe C^∞, Ψ_ρ l'est aussi. Le théorème 1.4 (pour $r=1$) sera déduit de cette proposition dans la section 3.4. Pour prouver la proposition, nous allons effectuer un difféomorphisme pour nous ramener au cas où le potentiel A_ρ vérifie une hypothèse supplémentaire, (3.6).

3.2. UN DIFFÉOMORPHISME

PROPOSITION 3.2. — *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *de la proposition* 3.1, *pour tout* $\rho \geqq 1$, *il existe un difféomorphisme local de classe* C^2, *noté* $y \to x(y)$, *défini pour* $|y| \leqq a\rho$, (*où* $a>0$ *est indépendent de* ρ), *tel que :*

(1) *On a* $x(0)=0$, *et la différentielle à l'origine de* $y \to x(y)$ *est orthogonale.*

(2) *Il existe* $C>0$, *indépendant de* ρ, *tel que :*

$$|\partial_y^\alpha x_j(y)| \leqq C\rho^{1-|\alpha|} \qquad si \quad |\alpha| \leqq 2 \quad et \quad |y| \leqq a\rho \tag{3.4}$$

(3) *Si on pose :*

$$\tilde{A}_{j,\rho}(y) = \sum_{k=1}^{3} A_{k,\rho}(x(y)) \frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y) \tag{3.5}$$

et si $\tilde{B}_\rho$ *est le champ associé comme en* (1.6), *on a :*

$$\tilde{B}_{1,\rho}(0,0,y_3) = \tilde{B}_{2,\rho}(0,0,y_3) = 0 \qquad si \quad |y_3| \leqq a\rho \quad et \quad |\tilde{B}_{3,\rho}(0)| = |B(0)| \geqq 1. \tag{3.6}$$

Démonstration. — Soit $U(x) = B_\rho(x)/|B_\rho(x)|$. Il existe une application $t \to \varphi(t)$ de classe C^2, définie dans un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[-a\rho, +a\rho]$ (où $a>0$ est indépendant de ρ), à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, telle que :

$$\frac{d\varphi_j(t)}{dt} = U_j(\varphi(t)), \qquad j=1, 2, 3 \quad \text{et} \quad \varphi(0)=0.$$

Il existe $C>0$, indépendant de ρ, tel que :

$$|\partial_t^\alpha \varphi(t)| \leqq C\rho^{1-|\alpha|} \qquad \text{si} \quad |t| \leqq a\rho \quad \text{et} \quad |\alpha| \leqq 2.$$

On peut trouver des vecteurs $n_1(t)$ et $n_2(t)$ tels que le trièdre $(n_1(t), n_2(t), \varphi'(t))$ soit orthonormé direct. De plus, il existe $C>0$ tel que :

$$|\partial_t^\alpha n_j(t)| \leqq C\rho^{-|\alpha|} \qquad \text{si} \quad |t| \leqq a\rho \quad \text{et} \quad |\alpha| \leqq 1.$$

Il existe une application $y \to x(y)$ définie pour $|y| \leqq a\rho$, de classe C^2, telle que:

(1) On a: $x(0, 0, y_3) = \varphi(y_3)$ si $|y_3| \leqq a\rho$.

(2) On a: $(\partial x/\partial y_j)(0, 0, y_3) = n_j(y_3)$ si $|y_3| \leqq a\rho$ et $j = 1,2$.

(3) Il existe $C > 0$, indépendant de ρ, tel que: (3.4) soit vérifié.

Si $\tilde{B}_\rho$ est le champ magnétique associé au potentiel défini en (3.5), et si (j, k, l) forme une permutation circulaire de (1, 2, 3), on a:

$$(3.7) \quad \tilde{B}_j = B_1\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_k}\frac{\partial x_3}{\partial y_l} - \frac{\partial x_3}{\partial y_k}\frac{\partial x_2}{\partial y_l}\right) + B_2\left(\frac{\partial x_3}{\partial y_k}\frac{\partial x_1}{\partial y_l} - \frac{\partial x_1}{\partial y_k}\frac{\partial x_3}{\partial y_l}\right) + B_3\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_k}\frac{\partial x_2}{\partial y_l} - \frac{\partial x_2}{\partial y_k}\frac{\partial x_1}{\partial y_l}\right).$$

En tout point $(0, 0, y_3)$, la matrice $(\partial x_j/\partial y_k)$ est une matrice de rotation, d'après ce qui précède. Par conséquent:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_j(0, 0, y_3) &= \sum_{k=1}^{3} B_k(\varphi(y_3))\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(0, 0, y_3)\\ &= |B(\varphi(y_3))| \sum_{k=1}^{3} U_k(\varphi(y_3))\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(0, 0, y_3)\\ &= |B(\varphi(y_3))| \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial y_3}(0, 0, y_3)\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(0, 0, y_3).\end{aligned}$$

Les égalités (3.6) s'en déduisent aussitôt. La proposition est démontrée.

On voit que le difféomorphisme inverse, que l'on notera $x \to \theta_\rho(x)$, est défini pour $|x| \leqq b\rho$, où $b \in]0, 1[$ est indépendant de ρ. Posons

$$(3.8) \qquad \tilde{\sigma}_j(y) = \sum_{k=1}^{3} \sigma_k \frac{\partial y_j}{\partial x_k}(x(y))$$

et

$$(3.9) \qquad Q_\rho = \sum_{j=1}^{3} \tilde{\sigma}_j(y)[D_{y_j} - \tilde{A}_{j,\rho}(y)].$$

On voit que, pour tout $\Psi \in C^1(\mathbb{R}^3)$

$$(3.10) \qquad (P_\rho - \lambda)(\Psi \circ \theta_\rho) = ((Q_\rho - \lambda)\Psi) \circ \theta_\rho.$$

La proposition 3.1 résultera donc de son anologue pour le potentiel $\tilde{A}_\rho$, mais le difféomorphisme ci-dessus remplace aussi les matrices σ_j par les $\tilde{\sigma}_j(y)$ définies en (3.8). Notons les propriétés de ces dernières, qui seront les hypothèses de la proposition suivante:

(H_3) Il existe $C>0$ tel qu'on ait:

$$|\partial_y^\alpha \tilde{\sigma}_j(y)| \leqq C\rho^{-|\alpha|} \quad \text{si} \quad |y| \leqq a\rho \quad \text{et} \quad |\alpha| \leqq 1$$

(H_4) Si $y_1 = y_2 = 0$ et $|y_3| \leqq a\rho$, on a:

$$\tilde{\sigma}_j(y)\tilde{\sigma}_k(y) + \tilde{\sigma}_k(y)\tilde{\sigma}_j(y) = 2\delta_{jk} \qquad (1 \leqq j,\ k \leqq 3)$$
$$\tilde{\sigma}_1(y)\tilde{\sigma}_2(y) = i\tilde{\sigma}_3(y), \qquad \ldots$$

On a utilisé le fait qu'en ces points, la matrice $(\partial y_j/\partial x_k)(x(y))$ est une matrice de rotation. On démontrera au paragraphe 3.3 la proposition ci-dessous, (où l'on omet les signes $\sim$).

PROPOSITION 3.3. — *Soit* A_ρ *un potentiel dépendant d'un paramètre* $\rho \geqq 1$, *dont le rotationnel* B_ρ *vérifie les hypothèses* (H_1) *et* (H_2), *ainsi que* (3.6). *Soient* $\sigma_j(x)$ $(1 \leqq j \leqq 3)$ *des matrices hermitiennes de type* (2.2), *définies pour* $|x| \leqq a\rho$ (*où* $a>0$ *est indépendant de* ρ), *et vérifiant les hypothèses* (H_3) *et* (H_4). *Soit* Q_ρ *l'opérateur défini en* (3.9). *Alors, pour tous* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ *et* $\rho \geqq 1$, *il existe une fonction* $\varphi_\rho \in C_0^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ *telle que*

$$\|\varphi_\rho\| = 1 \quad \textit{et} \quad \operatorname{supp}\varphi_\rho \subset B(0, \gamma_\rho) \tag{3.11}$$

$$\|(Q_\rho - \lambda)\varphi_\rho\| \leqq \frac{C}{\rho} \tag{3.12}$$

où $C>0$ *dépend de* λ *et de* γ, *mais non de* ρ.

Fin de la preuve de la proposition 3.1. — D'après les majorations (3.4), il existe $\gamma > 0$ et $C_1 > 1$, indépendants de ρ, tels qu'on ait:

$$|y| \leqq \gamma\rho \;\Rightarrow\; |x(y)| \leqq \frac{b}{2}\rho \quad \text{et} \quad \frac{1}{C_1} \leqq |\det x'(y)| \leqq C_1. \tag{3.13}$$

Soit $\varphi_\rho(\rho \geqq 1)$ une fonction vérifiant (3.11) et (3.12). Le support de la fonction $\Psi_\rho = \varphi_\rho \circ \theta_\rho$ est bien contenu dans $B(0, \rho)$, et, d'après (3.13), on a

$$\frac{1}{C_1} \leqq \|\Psi_\rho\|^2 \leqq C_1.$$

On déduit de (3.10), (3.12) et (3.13) que

$$\|(P_\rho - \lambda)\Psi_\rho\| \leqq \frac{C\,C_1^{1/2}}{\rho}.$$

La proposition 3.1 est donc démontrée.

3.3. PREUVE DE LA PROPOSITION 3.3. — Dans ce paragraphe, la constante $a>0$ pourra changer d'une inégalité à l'autre, mais sera toujours indépendante de ρ.

LEMME 3.4. — *Sous les hypothèses de la proposition* 3.3, *pour tout* x *tel que* $|x| \leqq a\rho$ *et pour tout* $\rho \geqq 1$, *il existe un vecteur* $q(x)$ *dans* $\mathbb{C}^2$ *tel que:*

(1) *On a* $|q(x)| = 1$ *et*

$$[\sigma_1(0, 0, x_3) + i\sigma_2(0, 0, x_3)]\, q(x) = [\sigma_3(0, 0, x_3) - \mathrm{I}]\, q(x) = 0. \tag{3.14}$$

(2) *Il existe* $\mathrm{C} > 0$, *indépendant de* ρ, *tel que:*

$$|\partial_x^\alpha q(x)| \leqq \mathrm{C}\rho^{-|\alpha|} \quad si \quad |x| \leqq a\rho \quad et \quad |\alpha| \leqq 1. \tag{3.15}$$

Preuve du lemme. — Les égalités (H_4) entraînent que, si $|x_3| \leqq a\rho$, on a:

$$[\sigma_1(0, 0, x_3) + i\sigma_2(0, 0, x_3)]^2 = 0 \tag{3.16}$$

$$[\sigma_1(0, 0, x_3) - i\sigma_2(0, 0, x_3)][\sigma_1(0, 0, x_3) + i\sigma_2(0, 0, x_3)] = 2(\mathrm{I} - \sigma_3(0, 0, x_3)) \tag{3.17}$$

et que les valeurs propres de $\sigma_3(0, 0, x_3)$ sont 1 et -1. Par conséquent la norme de la matrice $(\sigma_1 + i\sigma_2)(0, 0, x_3)$ est égale à 2 et son déterminant est nul. Il existe donc un vecteur $q(x)$, de norme 1, qui vérifie les majorations (3.15) et l'égalité $(\sigma_1 + i\sigma_2)(x)\, q(x) = 0$ lorsque $x_1 = x_2 = 0$. La seconde égalité dans (3.14) résulte de (3.17).

Fin de la preuve de la proposition 3.3. — Soit $\tilde{\mathrm{A}}_\rho$ le potentiel vecteur défini par:

$$\tilde{\mathrm{A}}_{1,\rho}(x) = -x_2 \int_0^1 t\,\mathrm{B}_{3,\rho}(tx_1, tx_2, x_3)\, dt$$

$$\tilde{\mathrm{A}}_{2,\rho}(x) = +x_1 \int_0^1 t\,\mathrm{B}_{3,\rho}(tx_1, tx_2, x_3)\, dt$$

$$\tilde{\mathrm{A}}_{3,\rho}(x) = x_2 \int_0^1 \mathrm{B}_{1,\rho}(tx_1, tx_2, x_3)\, dt - x_1 \int_0^1 \mathrm{B}_{2,\rho}(tx_1, tx_2, x_3)\, dt.$$

Le rationnel de $\tilde{\mathrm{A}}_\rho$ est égal à B_ρ. Il existe donc une fonction réelle $\Phi_0(x)$ telle que:

$$\operatorname{grad} \Phi_0(x) = \mathrm{A}_\rho(x) - \tilde{\mathrm{A}}_\rho(x) \qquad \text{si} \quad |x| \leqq a\rho.$$

On pose:

$$\Phi_1(x) = -\frac{1}{4} \mathrm{B}_{3,\rho}(0, 0, x_3)(x_1^2 + x_2^2)$$

Quitte à restreindre a, on peut supposer que:

$$\frac{1}{2}|\mathrm{B}_\rho(0)| \leqq \mathrm{B}_{3,\rho}(0, 0, x_3) \leqq 2|\mathrm{B}_\rho(0)| \qquad \text{si} \quad |x_3| \leqq a\rho$$

Soit χ une fonction dans $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $0 \leqq \chi(x) \leqq 1$ et

$$\chi(x) = 1 \quad \text{si} \quad |x| \leqq \frac{a}{2} \qquad \text{et} \qquad \chi(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \geqq a$$

On pose :

$$\varphi_\rho(x)=\left[\frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\right]^{1/2}\chi\left(\frac{x}{\rho}\right)e^{i\Phi_0(x)+\Phi_1(x)+i\lambda x_3}\,q(x).$$

Il existe des constantes C_1 et C_2, indépendantes de ρ, telles que :

$$\text{(3.18)}\quad \begin{aligned}\|\varphi_\rho\|^2 &\leqq \frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\int_{|x|\leqq a\rho} e^{2\Phi_1(x)}\,dx \leqq \frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\int_{|x|\leqq a\rho} e^{-(1/4)|B_\rho(0)|(x_1^2+x_2^2)}\,dx\leqq C_1\\ \|\varphi_\rho\|^2 &\geqq \frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\int_{|x|\leqq(a/2)\rho} e^{2\Phi_1(x)}\,dx \geqq \frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\int_{|x|\leqq(a/2)\rho} e^{-|B_\rho(0)|(x_1^2+x_2^2)}\,dx\geqq C_2\end{aligned}$$

Vérifions maintenant l'inégalité (3.12). On a :

$$\begin{aligned}(Q_\rho-\lambda)\,\varphi_\rho(x)=&\left[\frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\right]^{1/2} e^{i\Phi_0(x)+\Phi_1(x)+i\lambda x_3}\\ &+\left\{\lambda\chi\left(\frac{x}{\rho}\right)(\sigma_3(x)-I)\,q(x)+\sum_{j=1}^{3}\sigma_j(x)\left[D_{x_j}\left(\chi\left(\frac{x}{\rho}\right)q(x)\right)\right.\right.\\ &\left.\left.+\chi\left(\frac{x}{\rho}\right)q(x)\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_j}+\frac{1}{i}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_j}-A_j(x)\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

D'après (3.15), on a, dans le support de φ_ρ :

$$\left|D_{x_j}\left(\chi\left(\frac{x}{\rho}\right)q(x)\right)\right|\leqq\frac{C}{\rho}$$

et aussi, d'après les hypothèses (H_3 et (H_4) et les égalités (3.14)

$$|(\sigma_1(x)+i\sigma_2(x))\,q(x)|+|(\sigma_3(x)-I)\,q(x)|\leqq\frac{C}{\rho}(|x_1|+|x_2|).$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_1}+\frac{1}{i}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}-A_1=\frac{i}{2}(x_1-ix_2)\,B_3(0,\,0,\,x_3)+R_1(x)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_2}+\frac{1}{i}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2}-A_2=-\frac{1}{2}(x_1-ix_2)\,B_3(0,\,0,\,x_3)+R_2(x)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_3}+\frac{1}{i}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}-A_3=R_3(x)$$

où

$$|R_j(x)|\leqq\frac{C}{\rho}|B_\rho(0)|(x_1^2+x_2^2)\qquad(j=1,\,2,\,3,\,|x|\leqq a\,\rho)$$

Par conséquent, dans le support de φ_ρ, on a :

$$\left|\sum_{j=1}^{3} \sigma_j(x)\, q(x)\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_j}+\frac{1}{i}\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}-\mathrm{A}_j(x)\right)\right| \leqq \frac{\mathrm{C}}{\rho}\,|\mathrm{B}_\rho(0)|\,(x_1^2+x_2^2)$$

On en déduit que :

$$|(\mathrm{Q}_\rho-\lambda)\,\varphi_\rho(x)| \leqq \mathrm{C}\left[\frac{|\mathrm{B}_\rho(0)|}{\rho}\right]^{1/2}\frac{e^{\varphi_1(x)}}{\rho}[1+|x_1|+|x_2|+|\mathrm{B}_\rho(0)|\,(x_1^2+x_2^2)]$$

$$\leqq \mathrm{C}'\left[\frac{|\mathrm{B}_\rho(0)|}{\rho}\right]^{1/2} e^{-1/2-(1/8)\,|\mathrm{B}_\rho(0)|\,(x_1^2+x_2^2)}[1+|\mathrm{B}_\rho(0)|\,(x_1^2+x_2^2)]$$

$$\leqq \frac{\mathrm{C}''}{\rho}\left[\frac{|\mathrm{B}_\rho(0)|}{\rho}\right]^{1/2} e^{-(1/16)\,|\mathrm{B}_\rho(0)|\,(x_1^2+x_2^2)}$$

et on conclut comme en (3.18) que la norme L^2 de cette fonction est majorée par C'''/ρ, où C''' est indépendant de ρ.

3.4. *Preuve du théorème* 1.4, *lorsque* $r=1$. — Soient (B_n) la suite des boules de l'hypothèse (H'_1), x_n leurs centres, et R_n leurs rayons. On peut supposer que l'hypothèse (H'_0) n'est pas satisfaite, sinon le théorème est déjà démontré. Il existe donc y_n tel que $|y_n-x_n| \leqq \mathrm{R}_n/2$, et tel que la suite $|\mathrm{B}(y_n)|$ ne tende pas vers 0. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $\mathrm{C}>0$ tel que :

$$|\mathrm{B}(y_n)| \geqq \mathrm{C}$$

Pour tout $\rho \geqq 1$, il existe un entier $n_0(\rho)$ tel que $\mathrm{B}(y_n, \rho)$ soit contenu dans B_n lorsque $n \geqq n_0(\rho)$, et tel que :

$$n \geqq n_0(\rho) \quad \text{et} \quad |x-y_n| \leqq a\rho \;\Rightarrow\; |\partial_x \mathrm{B}(x)| \leqq \frac{1}{\rho}|\mathrm{B}(y_n)|$$

Le potentiel $\mathrm{A}_{n,\,\rho}(x)=\mathrm{A}(x+y_n)$, dépendant des paramètres n et ρ, vérifie les hypothèses de la proposition 3.1. Soit λ un réel tel que $|\lambda| \geqq 1$. D'après la proposition 3.1, il existe des fonctions $\varphi_{n,\,\rho}$ dans $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ telles que

$$\|\varphi_{n,\,\rho}\|=1, \qquad \operatorname{supp}\varphi_{n,\,\rho} \subset \mathrm{B}(0,\,\rho)$$

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{3}\sigma_j(\mathrm{D}_{x_j}-\mathrm{A}_{j,\,n,\,\rho})-\sqrt{\lambda^2-1}\right)\varphi_{n,\,\rho}\right\| \leqq \frac{\mathrm{C}}{\rho}$$

où $\mathrm{C}>0$ est indépendant de ρ. Par conséquent, la fonction $\Psi_{n,\rho}(x)=\varphi_{n,\rho}(x-y_n)$ vérifie

$$\|(\mathrm{D}_\mathrm{A}^{\mathrm{red}}-\sqrt{\lambda^2-1})\,\Psi_{n,\,\rho}\| \leqq \frac{\mathrm{C}}{\rho}$$

D'après les remarques 2.1 et 2.2, on en déduit que λ est dans le spectre essentiel de D_A.

REMARQUE 3.5. — En dimension 2, les arguments de ce paragraphe prouvent que, si l'hypothèse (H'_1) est vérifiée, alors les points 1 et -1 sont dans le spectre essentiel de D_A.

4. Étude en dimension 2

4.1. PREUVE DE LA PROPOSITION 1.5. — Elle résulte elle-même de la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. — *Si $n=2$, pour tout réel λ tel que $|\lambda|>1$, il existe $C_1(\lambda)>0$ tel qu'on ait :*

$$\|\Psi\| \leqq C_1(\lambda)\,\|(D_A-\lambda)\Psi\| \tag{4.1}$$

pour tout $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$, pourvu que $B(x)$ soit d'un signe constant sur le support de Ψ, et vérifie :

$$|B(x)| \geqq 4(\lambda^2-1), \qquad \forall x \in \operatorname{supp}\Psi \tag{4.2}$$

Démonstration. — Si l'on pose $\Psi=(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)$, on a $(D_A-\lambda)\Psi=(f_1, \ldots, f_4)$, avec :

$$f_1=(D_{x_1}-A_1+iD_{x_2})\Psi_4+(1-\lambda)\Psi_1$$
$$f_2=(D_{x_1}-A_1-iD_{x_2})\Psi_3+(1-\lambda)\Psi_2$$
$$f_3=(D_{x_1}-A_1+iD_{x_2})\Psi_2-(1+\lambda)\Psi_3$$
$$f_4=(D_{x_1}-A_1-iD_{x_2})\Psi_1-(1+\lambda)\Psi_4$$

Des intégrations par parties nous donnent facilement les égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}(1+\lambda)\|\Psi_4\|^2-(\lambda-1)\|\Psi_1\|^2=\operatorname{Re}[(f_1, \Psi_1)-(f_4, \Psi_4)]\\(1+\lambda)\|\Psi_3\|^2-(\lambda-1)\|\Psi_2\|^2=Re[(f_2, \Psi_2)-(f_3, \Psi_3)]\end{array}\right. \tag{4.3}$$

D'autre part, on a :

$$\|(D_{x_1}-A_1-iD_{x_2})\Psi_j\|^2=\|(D_{x_1}-A_1)\Psi_j\|^2+\|D_{x_2}\Psi_j\|^2+(B(x)\Psi_j, \Psi_j) \tag{4.4}$$

Si $B(x)>0$ dans le support de Ψ, on applique (4.4) avec $j=1$, puis $j=3$

$$[\inf_{x\in\operatorname{supp}\Psi} B(x)](\|\Psi_1\|^2+\|\Psi_3\|^2) \leqq \|f_2+(\lambda-1)\Psi_2\|^2+\|f_4+(\lambda+1)\Psi_4\|^2 \tag{4.5}$$

L'inégalité (4.1) se déduit facilement de (4.3) et (4.5) lorsque (4.2) est vérifié. Le raisonnement est analogue lorsque $B(x) \leqq 0$ sur le support de Ψ.

4.2. PREUVE DU THÉORÈME 1.6. — Le cas où $\varepsilon_0(x)$ tend vers 0 à l'infini se traite avec les techniques du paragraphe 2. Examinons le cas où $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 à l'infini. La preuve de l'inclusion de $S_\infty \cup \{-1\} \cup \{1\}$ dans le spectre essentiel de D_A est très proche de celle du résultat analogue de [HE-MO] pour l'opérateur de Schrödinger, et nous ne la détaillerons pas. Nous allons démontrer l'inclusion inverse.

Pour tout $l \in \mathbb{R}$, posons

$$D_l = \alpha_1 (D_{x_1} + l x_2) + \alpha_2 D_{x_2} + \alpha_4$$

C'est l'opérateur de Dirac associé au champ magnétique constant égal à l.

LEMME 4.2. — *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tous* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $l \neq 0$, *et pour tout* $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$, *on ait :*

$$\|\Psi\| \inf_{k \in \mathbb{N}} \left|\lambda \pm \sqrt{1 + 2k|l|}\right| \leqq C \|(D_l - \lambda)\Psi\|$$

Ce lemme est classique. Il suffit de remarquer que, si $l \neq 0$, le spectre de l'opérateur $l\alpha_1 t + \alpha_2 D_t + \alpha_4$ est l'ensemble des $\pm(1 + 2k|l|)^{1/2}$ $(k \in \mathbb{N})$.

Soit λ un réel tel que $|\lambda| > 1$, et qui n'est pas dans S_∞, ce qui entraîne que $0 \notin \mathscr{B}_\infty$. Puisque S_∞ est fermé, il existe $C > 0$ tel que

$$\left|\lambda \pm \sqrt{1 + 2k|l|}\right| \geqq C, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall l \in \mathscr{B}_\infty$$

Par conséquent, il existe $C_2(\lambda) > 0$ tel que

$$\|\Psi\| \leqq C_2(\lambda) \|(D_l - \lambda)\Psi\| \tag{4.6}$$

pour tous $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$ et $l \in \mathscr{B}_\infty$.

Si $C_1(\lambda)$ est la constante de la proposition 4.1, on pose $C_3(\lambda) = \sup(C_1(\lambda), C_2(\lambda))$.

LEMME 4.3. — *Pour tout* $\tau > 0$, *il existe* $R(\tau, \lambda) > 0$ *tel que*

$$\|\Psi\| \leqq 2 C_3(\lambda) \|(D_A - \lambda)\Psi\| \tag{4.7}$$

si $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$ *a son support dans une boule de rayon* τ *et dont le centre* x_0 *vérifie* $|x_0| \geqq R(\tau, \lambda)$.

Preuve du lemme. — Soit (x_n) une suite de points tendant vers l'infini. Il nous suffit de montrer qu'il existe $n_0(\tau, \lambda)$ tel que l'inégalité (4.7) soit vérifiée si le support de Ψ est contenu dans $B(x_n, \tau)$, et si $n \geqq n_0(\tau, \lambda)$. Il suffit même de montrer que la suite x_n contient une sous-suite qui possède cette propriété. Or, après extraction d'une sous-suite, on peut supposer qu'on est dans un des cas suivants :

(1) Ou bien $|B(x_n)| \geqq 8(\lambda^2 - 1)$. Dans ce cas, puisque $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 à l'infini, on aura $|B(x)| \geqq 4(\lambda^2 - 1)$ pour tout x dans la boule $B(x_n, \tau)$ si n est assez grand, et on conclut en appliquant la proposition 4.1.

(2) Ou bien $|B(x_n)| \leqq 8(\lambda^2 - 1)$, et, après une nouvelle extraction de sous-suite, on peut supposer que $B(x_n)$ a une limite $l \neq 0$ (puisque $0 \notin \mathscr{B}_\infty$). Posons :

$$A_n(x) = -\int_{x_{2n}}^{x_2} B(x_1, y_2)\, dy_2 - l x_{2n}$$

On a, si $|x-x_n|\leqq\tau$

$$|A_n(x)+l x_{2n}|\leqq\tau|l-B(x_n)|+\tau^2 \sup_{|y-x_n|\leqq\tau} \varepsilon_1(y)[1+|B(y)|]$$

Par conséquent, il existe $n_0(\tau, \lambda)$ tel que :

$$n\geqq n_0(\tau, \lambda) \qquad \text{et} \qquad |x-x_n|\leqq\tau \;\Rightarrow\; |A_n(x)+l x_{2n}|\leqq\frac{1}{2C_3(\lambda)}$$

L'inégalité (4.6) est vérifiée pour tout $\Psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$. Si le support de Ψ est contenu dans $B(x_n, \tau)$ et si $n\geqq n_0(\tau, \lambda)$, on en conclut que :

$$\|\Psi\|\leqq 2C_3(\lambda)\|(D_{A_n}-\lambda)\Psi\|$$

d'où, après un changement de jauge, l'inégalité (4.7). Le lemme est démontré.

Fin de la preuve du théorème 1.6. — Elle est identique à celle de [HE-MO]. Pour tout $\tau>0$, il existe une suite de fonctions $\chi_n(x)$ telles que :

(1) Le support de χ_n est contenu dans une boule de rayon τ et dont le centre est noté x_n.

(2) On a $\sum_n \chi_n(x)^2=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}^2$,

(3) Il existe $C>0$ tel que :

$$\sum_n |D_x\chi_n(x)|^2\leqq\frac{C}{\tau^2}, \qquad \forall x\in\mathbb{R}^2, \quad \forall\tau\geqq 1$$

Soit $K(\tau)$ la réunion des boules fermées $B(x_n, \tau)$, où $|x_n|\leqq R(\tau, \lambda)$ (la constante du lemme 4.3). Cet ensemble est compact et, pour tout $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2\setminus K(\tau))$, on a :

$$\|f\|^2=\sum_{|x_n|\leqq R(\tau, \lambda)} \|\chi_n f\|^2$$

Si $|x_n|\geqq R(\tau, \lambda)$, on applique le lemme 4.3 à la fonction $\Psi=\chi_n f$. En ajoutant toutes les inégalités obtenues (élevées au carré), on obtient :

$$\|f\|^2\leqq 8C_3(\lambda)^2\|(D_A-\lambda)f\|^2+\frac{C}{\tau^2}\|f\|^2$$

pour tout $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2\setminus K(\tau))$. Si $\tau\geqq(2C)^{1/2}$, on en déduit que :

$$\|f\|^2\leqq 16C_3(\lambda)^2\|(D_A-\lambda)f\|^2, \qquad \forall f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2\setminus K(\tau))$$

ce qui démontre que λ n'est pas dans le spectre essentiel de D_A.

Le théorème 1.6 est donc démontré quand $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 à l'infini. Les autres affirmations du théorème 1.6 résultent des remarques 2.3 (pour $r=0$) et 3.5 (pour $r=1$) et de la proposition 2.4 (pour $r\geqq 2$).

BIBLIOGRAPHIE

[AH-CA] AHARONOV et CASHER, *Ground State of a Spin 1/2 Charged Particle in a Two Dimensional Magnetic Field.* (*Physical review*, A vol. 19, n° 6, June 1979, p. 2461-2462).

[AV-HE-SI] J. AVRON, I. HERBST et B. SIMON, *Schrödinger Operators with Magnetic Fields I General Interactions* (*Duke Math. Journal*, vol. 45, 1978, p. 847-884).

[AV-SE] J. AVRON et R. SEILER, *Paramagnetism for Non-Relativistic Electrons and Euclidean Massless Dirac Particles* (*Phys. Rev. Letters*, vol. 42, n° 15, 9 April 1979).

[BE-GE] A. BERTHIER et V. GEORGESCU, *On the Point Spectrum for Dirac Operators* (*Journal of Functional Analysis*, vol. 71, 1987, p. 309-338).

[C-F-K-S] H. L. CYCON, R. G. FROESE, W. KIRSCH et B. SIMON, *Schrödinger Operators with Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Texts and monographs in Physics, Springer Verlag.

[DUF] A. DUFRESNOY, *Un exemple de champ magnétique dans* $\mathbf{R}^n$ (*Duke Math. Journal*, vol. 53, (3), 1983, p. 729-734).

[FRO-LI-LO] J. FROHLICH, E. LIEB et M. LOSS, *Stability of Coulomb Systems with Magnetic Fields I the One-Electron Atom* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 104, 1986, p. 251-270).

[GA-LA] B. GAVEAU et G. LAVILLE, *Fonctions holomorphes et particule chargée dans un champ magnétique constant* (*Sem. P. Lelong, H. Skoda, Springer Lecture Notes*, 1980-1981).

[HE-MO] B. HELFFER et A. MOHAMED, *Sur le spectre essentiel des opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique* (*Ann. Institut Fourier*, t. 38, 1988, fasc. 2, p. 95-113).

[HE-NO] B. HELFFER et J. NOURRIGAT, *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champ de vecteur* (*Progress in Mathematics*, Birkhauser, vol. 58).

[IWA] IWATSUKA, (1) *The Essential Spectrum of two Dimensional Schrödinger Operators with Perturbed Magnetic Fields* (*J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 23, (3), 1983, p. 475-480). (2) *Magnetic Schrödinger Operators with Compact Resolvent* (*J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 26, (3), 1986, p. 357-374).

[KL] M. KLAUS, *On the Point Spectrum of Dirac Operators* (*Helv. Phys. Acta*, vol. 53, 1980, p. 453-462).

[KUR] S. T. KURODA, *On the Essential Spectrum of Schrödinger Operators with Vector Potentials* (*Sc. Papers Coll. Gen. Ed. University Tokyo*, 23, 1973, p. 87-91).

[LA-LI] LANDAU et LIFSHITZ, *Mécanique quantique, Théorie non-relativiste.*

[LAV] G. LAVILLE, (1) *Spectre d'opérateurs sur certaines variétés de Cauchy-Riemann et champ magnétique* (*Ann. Univ. Ferrara*, Sez VII-Sc. Math., vol. 28, 1982, p. 31-37). (2) *Changement de jauge de deuxième espèce pour l'équation de Landau et équations de Cauchy-Riemann tangentielle* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 291, série A, 1980, p. 435-437).

[LE] H. LEINFELDER, *Gauge Invariance of Schrödinger Operators and Related Spectral Properties* (*J. Op. Theory*, 1983, p. 163-179).

[LI-LO] E. LIEB et M. LOSS, *Stability of Coulomb Systems with Magnetic Fields II the Many-Electron Atom and the One Electron Molecule* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 104, 1986, p. 271-282).

[LO-YA] M. LOSS et H. T. YAU, *Stability of Coulomb Systems with Magnetic Fields III Zero Energy Bound States of the Pauli Operator* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 104, 1986, p. 283-290).

[MO] A. MOHAMED, *Quelques remarques sur le spectre de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique* [*Comm. in P.D.E.*, 1989 (à paraître)].

[RE-SI] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic press.

[RO] D. Robert, *Autour de l'approximation semi-classique. Progress in mathematics*, Birkhauser, 1986.

[WA] X. P. Wang, *Puits multiples pour l'opérateur de Dirac* (*Annales de l'I.H.P. section physique théorique*, vol. 43, n° 3, 1985, p. 269-319).

(Manuscrit reçu le 11 avril 1988,
révisé le 20 janvier 1989).

B. Helffer,
Département de Mathématiques,
U.R.A. C.N.R.S. n° 758,
Université de Nantes,
44072 Nantes Cedex 03;

J. Nourrigat,
Département de Mathématiques,
U.A. C.N.R.S. n° 305,
Université de Rennes,
35042 Rennes Cedex;

X. P. Wang,
Département de Mathématiques,
U.R.A. C.N.R.S. 758,
Université de Nantes,
44072 Nantes Cedex 03
et
Département de Mathématiques,
Université de Pékin,
Pékin, Chine.