ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes, et des systèmes orthogonaux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 7 (1878), p. 101-150

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1878_2_7__101_0>

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DES COORDONNÉES CURVILIGNES

ET

DES SYSTÈMES ORTHOGONAUX,

PAR M. G. DARBOUX,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

PREMIÈRE PARTIE.

La théorie des surfaces orthogonales et des coordonnées curvilignes a pris rang dans la Science par les beaux travaux de Lamé. Les *Leçons sur les coordonnées curvilignes* contiennent une théorie complète des systèmes orthogonaux, l'étude de leurs propriétés géométriques et de leurs applications en Physique mathématique. Toutefois, si les recherches de Lamé ont mis en évidence un grand nombre de propriétés des surfaces orthogonales, il faut reconnaître que, jusqu'à ces derniers temps, le nombre des systèmes orthogonaux connus était assez limité. Dans un Mémoire inséré au tome LIV des *Comptes rendus*, M. O. Bonnet a proposé une nouvelle méthode de recherche différente de celle de Lamé, et reposant sur des équations beaucoup plus simples. Décomposant le problème en deux, M. Bonnet cherche d'abord les directions des normales aux surfaces faisant partie d'un système triple orthogonal. A cet effet, il exprime les neuf cosinus déterminant les directions des normales aux trois surfaces qui se coupent en un point au moyen des trois angles d'Euler, θ, φ, ψ, et il trouve que ces angles satisfont aux trois équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sin\psi\sin\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\cos\psi\,\frac{\partial\theta}{\partial\rho}=0,\\ &\cos\psi\sin\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}-\sin\psi\,\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}=0,\\ &\cos\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}+\frac{\partial\psi}{\partial\rho_2}=0,\end{aligned}\right.$$

où ρ, ρ_1, ρ_2 désignent les paramètres des trois familles de surfaces du système orthogonal.

Le système d'équations précédent est assurément très-simple. L'auteur prouve que, en considérant ψ comme une fonction de φ, ρ, ρ_1, cette fonction ψ satisfera à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre dont l'intégration entraînerait celle du système (1). Il ne restera plus alors qu'à chercher les quantités désignées par Lamé sous le nom de H, H_1, H_2. Chacune d'elles satisfait à trois équations aux dérivées partielles du second ordre dont l'intégration amènera trois fonctions arbitraires d'une variable, et sera par conséquent incomparablement plus facile que celle du système (1), qui doit introduire trois fonctions arbitraires de deux variables indépendantes.

Les recherches de M. Bonnet ont eu, comme on le voit, pour résultat de donner des notions précises sur l'ordre de difficulté de la détermination des systèmes orthogonaux. Ce problème, exigeant l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre à trois variables indépendantes, apparaissait comme étant beaucoup plus difficile que la plupart des autres questions de la Géométrie infinitésimale, la recherche des surfaces applicables, des surfaces minima, etc.

Dans un travail inséré au tome III de ce Recueil (1re série), j'ai obtenu une réduction nouvelle du problème à l'intégration d'une certaine équation aux dérivées partielles du troisième ordre. J'ai d'abord complété un peu le théorème de Dupin en montrant que, si deux familles de surfaces orthogonales se coupent suivant leurs lignes de courbure, il existe nécessairement une autre famille de surfaces les coupant à angle droit, et j'ai ensuite établi que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de surfaces, représentée par l'équation

$$\rho=\varphi(x,y,z),$$

appartienne à un système orthogonal, est que ρ satisfasse à une certaine équation aux dérivées partielles du troisième ordre, dont j'ai indiqué le mode de formation, mais sans développer les calculs.

La proposition que j'ai ainsi établie a souvent été confondue avec celle que l'on doit à M. Bonnet. Il est vrai que, comme celle de cet éminent géomètre, elle constitue une réduction du problème à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre; mais il est très-facile de reconnaître, et il est intéressant, au point de vue de la théorie des équations aux dérivées partielles, de remarquer qu'elle n'en était nullement un corollaire. Un système d'équations aux dérivées partielles, servant à déterminer plusieurs fonctions, ne conduit pas nécessairement, par l'élimination de toutes les fonctions moins une, à une seule équation. Il aurait pu se faire que le paramètre ρ dût satisfaire à un certain nombre d'équations aux dérivées partielles du quatrième ordre ou des ordres supérieurs. La seule conclusion qu'il y avait à tirer du résultat de M. Bonnet, c'est que l'intégration ne devait pas amener plus de trois fonctions arbitraires de deux variables.

Pour rendre encore plus sensible, par un exemple emprunté à cette théorie, la remarque précédente, supposons que, considérant x, y, z comme des fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2, on se propose de déterminer l'une des inconnues x. C'est un problème que personne, je crois, ne s'est encore proposé; mais, précisément parce qu'il n'a pas été traité, on ne peut affirmer *a priori* que x, considérée comme fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, devra satisfaire à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

L'équation du troisième ordre, dont j'avais démontré l'existence et indiqué le mode de formation, a d'abord été calculée par M. Cayley dans le tome LXXV des *Comptes rendus*. A cette occasion j'ai fait connaître une méthode pour obtenir cette équation, que je vais d'abord développer ici, en présentant plusieurs remarques nouvelles et démontrant plusieurs résultats que je n'ai fait qu'énoncer dans les *Comptes rendus*, t. LXXVI, LXXXIII et LXXXIV. Ce sera l'objet de la première Partie de ce travail.

§ I. — *Définition d'une opération différentielle et formules qui s'y rapportent.*

Considérons des fonctions u, v, w, α de n variables indépendantes x_1, x_2, ..., x_n. Je désignerai par le symbole δ_u l'opération suivante :

$$\delta_u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{1}$$

que l'on peut écrire sous la forme plus simple

$$\delta_u = u_1\frac{\partial}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + u_n\frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{2}$$

en convenant d'adopter les notations suivantes, qui seront employées dans la suite,

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}, \quad u_{ikl} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial x_l}, \quad \ldots \tag{3}$$

Il résulte immédiatement, de la définition de u, que l'on a

$$\delta_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{4}$$

$$\delta_u v = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = \delta_v u, \tag{5}$$

$$\delta_u(\alpha\beta) = \alpha\delta_u + \beta\delta_u\alpha, \tag{6}$$

et, plus généralement,

$$\delta_u\pi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \pi'_\alpha\delta_u\alpha + \pi'_\beta\delta_u\beta + \pi'_\gamma\delta_u\gamma + \ldots, \tag{7}$$

π'_α, π'_β, ... désignant les dérivées de u par rapport à α, β, ...

Remarquons encore l'identité suivante, fort simple, et qui nous sera très-utile :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta_u v) = \delta_u v_i + \delta_v u_i. \tag{8}$$

Cette formule contient des dérivées secondes. En voici une plus générale du même genre.

Posons

$$\binom{v\,w}{u} = \binom{w\,v}{u} = \Sigma_i\Sigma_k v_i w_k u_{ik}, \tag{9}$$

on trouvera, par un calcul facile,

$$\delta_v \delta_w u = \delta_v \delta_u w = \binom{v\,w}{u} + \binom{v\,u}{w}, \tag{10}$$

et de même

$$\delta_w \delta_u v = \binom{w\,u}{v} + \binom{v\,w}{u},$$

$$\delta_u \delta_v w = \binom{u\,v}{w} + \binom{u\,w}{v},$$

ce qui donne

$$\delta_v \delta_w u + \delta_w \delta_v u - \delta_u \delta_v w = 2\binom{v\,w}{u} = 2\,\Sigma_i \Sigma_k\, v_i w_k u_{ik}. \tag{11}$$

J'applique maintenant ces formules, tout à fait générales, à des hypothèses particulières.

Supposons que les fonctions v, w satisfassent aux équations

$$\delta_u v = 0, \quad \delta_u w = 0, \tag{12}$$

alors je vais établir que, si l'on a une relation quelconque entre les dérivées du premier ordre v, w et d'autres fonctions quelconques, on pourra toujours, pour la différentiation, en déduire une relation du même genre, c'est-à-dire ne contenant que les dérivées premières de v, w. Soit

$$\pi(v_i, \ldots, w_k, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0,$$

on aura, en appliquant la formule (7),

$$0 = \delta_u \pi = \sum \frac{\partial \pi}{\partial v_i}\delta_u v_i + \sum \frac{\partial \pi}{\partial w_k}\delta_u w_k + \sum \frac{\partial \pi}{\partial \alpha}\delta_u \alpha. \tag{13}$$

Les deux premiers termes du second membre contiennent seuls des dérivées du second ordre de w; mais, en appliquant la formule (8) et tenant compte des conditions (12), on a

$$\delta_u v_i = -\delta_v u_i, \quad \delta_u w_k = -\delta_w u_k.$$

La formule (13) devient donc

$$0 = -\sum \frac{\partial \pi}{\partial v_i}\delta_v u_i - \sum \frac{\partial \pi}{\partial w_k}\delta_w u_k + \sum \frac{\partial \pi}{\partial \alpha}\delta_u \alpha, \tag{14}$$

et, sous cette forme, toutes les dérivées secondes de v, w sont éliminées. C'est ce qu'il fallait établir.

En appliquant le même procédé à la nouvelle équation, on voit que, par des différentiations successives, on pourra obtenir autant d'équations qu'on le voudra, contenant seulement les dérivées premières de v, w, et, par suite, éliminer complétement ces dérivées par la combinaison des équations obtenues.

Examinons en particulier le cas où il existe entre v, w une relation de la forme

$$\Sigma_i \Sigma_k A^{ik} v_i w_k = 0, \tag{15}$$

où les coefficients A^{ik} sont des fonctions quelconques ne contenant pas v, w; nous obtiendrons, en appliquant la formule (14), la nouvelle relation

$$\Sigma\Sigma\, v_i w_k (\partial_u A^{ik} - \Sigma_h A^{ih} u_{kh} - \Sigma_h A^{hk} u_{ih}) = 0, \tag{16}$$

de forme semblable à celle d'où on l'a déduite.

§ II. — *Application à la formation de l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait le paramètre d'une famille de surfaces faisant partie d'un système orthogonal.*

Considérons trois familles de surfaces, et désignons par u, v, w les paramètres de chaque famille. Pour que le système formé par ces trois familles soit orthogonal, il faudra que l'on ait

$$\partial_v w = 0, \quad \partial_v u = 0, \quad \partial_w u = 0. \tag{17}$$

Nous supposons les axes rectangulaires, et nous mettons x, y, z à la place de x_1, x_2, x_3.

Les fonctions v, w satisfont aux deux équations

$$\partial_u v = 0, \quad \partial_u w = 0,$$

et il y a, entre leurs dérivées, la relation

$$\partial_v w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0.$$

En appliquant à cette relation le procédé indiqué dans l'article précédent, et qui, de l'équation (15), nous a permis de déduire la formule (16), nous obtenons la nouvelle relation

$$(18)\qquad \binom{v\, w}{u} = \Sigma\Sigma v_i w_k u_{ik} = 0.$$

Cette formule résulterait aussi de l'identité (11), où le premier membre devient nul, en vertu des relations d'orthogonalité.

Les équations (17), (18) suffisent à déterminer les rapports des dérivées de v, w, et elles expriment, comme on sait, que les surfaces v, w coupent les surfaces u suivant les lignes de courbure de ces dernières.

De l'équation (18) déduisons encore une nouvelle équation ne contenant que les dérivées premières de v, w. L'équation (18) devient identique à l'équation (15) si l'on pose

$$A^{ik} = u_{ik}.$$

L'application de la formule (16) nous donnera donc la nouvelle équation

$$(19)\qquad \Sigma_i \Sigma_k v_i w_k (\delta_u u_{ik} - 2\Sigma_h u_{ih} u_{kh}) = 0.$$

Les équations (17), (18), (19) suffisent maintenant à l'élimination des dérivées premières de v, w. Elles vont ainsi nous conduire à une équation du troisième ordre à laquelle devra satisfaire le paramètre u, considéré comme fonction de x, y, z ; mais, auparavant, je vais démontrer que cette équation, qui est évidemment nécessaire, est aussi suffisante, et, pour cela, je substituerai, au raisonnement donné dans mon premier Mémoire, le suivant, qui est moins élémentaire, mais qui nous servira pour le cas de n variables, traité dans la deuxième Partie.

Les équations (17) et (18) déterminent complétement les rapports des dérivées v, w. Si on les supposait résolues, elles nous donneraient, par exemple pour v, un système de la forme

$$(20)\qquad \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{L} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial y}}{M} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial z}}{N},$$

L, M, N étant des fonctions de x, y, z connues lorsque u est donné. On peut dire qu'il faut, et il suffit, pour que le système précédent ne soit pas impossible, que les relations qu'on obtient en le différentiant, par rapport à x, y, z, et en éliminant les dérivées secondes de v, soient des conséquences du système précédent; mais, à cette remarque évidente, on peut ajouter la suivante : les relations qu'on obtient en différentiant le système ne suffisent pas à déterminer les dérivées secondes de v en fonction des dérivées premières. En éliminant ces dérivées, on trouvera la condition d'intégrabilité

$$\mathrm{L}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}\right) + \mathrm{M}\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y}\right) + \mathrm{N}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}\right) = 0,$$

et il restera cinq équations distinctes entre les dérivées secondes de v qui les feront toutes connaître si l'on donne arbitrairement l'une d'elles. Il était clair, d'ailleurs, *a priori*, que l'on ne pouvait déterminer ces dérivées secondes, puisque le système (20) ne change pas si l'on y remplace v par $\varphi(v)$, ce qui permet de donner une valeur arbitraire à l'une des dérivées secondes.

Ce point étant admis, il est inutile, pour trouver les conditions d'intégrabilité des équations qui déterminent les rapports des dérivées de v, ϖ, de résoudre les équations (17), (18). Il suffira de différentier successivement, par rapport à x, y, z, ces quatre équations, et d'éliminer les dérivées secondes de v, ϖ. Il devra y avoir dix équations distinctes contenant ces dérivées secondes; les autres, d'où l'on aura chassé les dérivées secondes, devront être toutes satisfaites en vertu des équations (17), (18). Or, en différentiant ces quatre équations, on obtient douze équations dont la combinaison nous a déjà donné les formules (18), (19). Les dix équations restantes seront celles d'où l'on ne peut plus faire disparaître les dérivées secondes, d'après la remarque précédente. Ainsi les conditions d'intégrabilité sont données par les deux équations (18), (19). L'une d'elles (18), faisant partie du système proposé, sera toujours satisfaite, et il suffira que l'équation (19) soit vérifiée par les valeurs des dérivées déduites du système (17), (18).

Cette méthode montre bien pourquoi les deux conditions d'intégrabilité pour les fonctions v, ϖ se réduisent à une seule. L'une d'elles fait partie du système qui sert à la définition des fonctions v, ϖ.

L'élimination des dérivées de v, ϖ peut se faire de la manière suivante. Posons, pour abréger,

$$(21)\quad A_{ik} = \delta_u u_{ik} - 2\delta_{ui} u_k = u_1 u_{ik1} + u_2 u_{ik2} + u_3 u_{ik3} - 2(u_{i1} u_{k1} + u_{i2} u_{k2} + u_{i3} u_{k3});$$

nous aurons d'abord les trois équations

$$(22)\quad \begin{cases} v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0, \\ v_1 w_1 u_{11} + \ldots + (v_1 w_2 + v_1 w_2) u_{12} + \ldots = 0, \\ v_1 w_1 A_{11} + \ldots + (v_1 w_2 + v_2 w_1) A_{12} + \ldots = 0. \end{cases}$$

Ces équations ne contenant que les combinaisons $v_i w_i$, $v_i w_k + v_k w_i$ symétriques par rapport à v, w, formons-en trois autres semblables. Pour cela, nous emploierons les équations

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0,$$
$$u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0,$$

et nous les ajouterons, après les avoir multipliées respectivement par w_i, v_i, i recevant les valeurs 1, 2, 3. Nous obtenons ainsi

$$(22\ bis)\quad \begin{cases} 2v_1 w_1 u_1 + (v_1 w_2 + w_1 v_2) u_2 + (v_1 w_3 + w_1 v_3) u_3 = 0, \\ (v_1 w_2 + v_2 w_1) u_1 + 2 v_2 w_2 u_2 + (v_2 w_3 + v_3 w_2) u_3 = 0, \\ (v_1 w_3 + v_3 w_1) u_1 + (v_2 w_3 + v_3 w_2) u_2 + 2 v_3 w_3 u_3 = 0. \end{cases}$$

Éliminons maintenant les combinaisons $v_i w_i$, $v_i w_k + v_k w_i$ entre ces trois équations et les équations (22), nous aurons l'équation finale

$$(23)\quad S = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{23} & A_{31} & A_{12} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{23} & u_{31} & u_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & 2u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 2u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est, comme on le voit, linéaire par rapport aux dérivées du troisième ordre, du troisième degré par rapport à celles du second, du quatrième par rapport à celles du premier. Elle ne contient ni la fonction, ni les variables indépendantes. Si l'on écrit à part et que l'on désigne par K les termes qui contiennent les dérivées du troisième ordre, elle est de la forme

$$(24)\quad S = K - \Omega = 0,$$

où K n'est plus que du premier degré par rapport aux dérivées du second ordre, et Ω du troisième degré par rapport à celles du premier ordre.

Comme vérification, retrouvons d'abord l'équation donnée pour la première fois par M. Bouquet. Supposons que l'on cherche les solutions de la forme

$$u = X + Y + Z,$$

où X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z respectivement. A_{ik}, u_{ik} seront nuls toutes les fois que i sera différent de k. On aura

$$A_{11} = X'X''' - 2X''^2, \quad u_{11} = X'', \quad \ldots,$$

et l'équation se réduira à la suivante :

$$S = 2X'Y'Z' \begin{vmatrix} X'X''' - 2X''^2 & Y'Y''' - 2Y''^2 & Z'Z''' - 2Z''^2 \\ X'' & Y'' & Z'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

ce qui est conforme au résultat de M. Bouquet.

Comme nouvelle vérification, supposons que l'on choisisse un système d'axes pour lequel on ait

$$u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad u_{23} = 0,$$

c'est-à-dire pour lequel les axes des y et des z sont les tangentes aux lignes de courbure de la surface u en un point. Il restera

(25) $$S = u_1^3 (u_{22} - u_{33})(u_1 u_{123} - 2u_{12}u_{13}),$$

ce qui est conforme à un résultat obtenu par M. Puiseux dans son *Mémoire sur les surfaces orthogonales* (*Journal de Liouville*, t. VIII, p. 335, 2^e série).

L'équation précédente donne la forme la plus simple à laquelle on puisse, par un choix convenable des axes, réduire l'équation proposée. Les deux fonctions que nous avons appelées K et Ω prennent alors les expressions

(26) $$\begin{cases} K = u_1^4 (u_{22} - u_{33}) u_{123}, \\ \Omega = 2u_1^3 (u_{22} - u_{33}) u_{12} u_{13}. \end{cases}$$

Sous cette forme réduite, on voit qu'elles ont une existence indépendante et que, si l'on remplace u par $\varphi(u)$, elles se reproduisent séparément multipliées par $\varphi'^6(u)$. Elles sont nulles toutes les deux si la famille des surfaces u se compose soit de sphères ou de plans, soit de surfaces parallèles. Il serait facile d'établir la réciproque; mais je négligerai l'examen de cette question pour m'attacher à une conséquence plus importante qui résulte de cette forme réduite.

Posons

$$\frac{1}{H} = V = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \tag{27}$$

L'expression

$$\sum v_i w_k \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} = \begin{pmatrix} vw \\ H \end{pmatrix} \tag{28}$$

se reproduit évidemment quand on change les axes. Cela résulte de l'expression (11) du symbole $\begin{pmatrix} vw \\ u \end{pmatrix}$ au moyen des δ. Remplaçons $v_i w_i$, $v_i w_k + v_k w_i$ par leurs expressions déduites des formules (22 *bis*) et des deux dernières (22), et nous obtiendrons un déterminant

$$T = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{22} & H_{33} & H_{23} & H_{13} & H_{12} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{23} & u_{13} & u_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & 2u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 2u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix}, \tag{29}$$

où les symboles H_{ik} désignent les dérivées secondes de H, qui se reproduira quand on changera les axes.

Voyons ce qu'il devient lorsqu'on choisit le système d'axes déjà indiqué, pour lequel on a

$$u_2 = u_3 = u_{23} = 0.$$

On trouve alors

$$T = u_1^3 (u_{22} - u_{33}) H_{23} = \frac{H^3}{2} u_1^3 (u_{22} - u_{33}) (2 u_{12} u_{13} - u_1 u_{123}).$$

On a donc l'identité

$$T = -\tfrac{1}{2} S H^3, \tag{30}$$

et l'on voit que l'équation aux dérivées partielles du problème peut aussi s'écrire

$$(31) \qquad T = 0.$$

Nous démontrerons ce résultat par une autre méthode, ne reposant pas sur un choix particulier des axes, dans le cas des systèmes orthogonaux à n variables. Il est donc inutile de donner ici une autre démonstration.

Dans la nouvelle forme irrationnelle, le déterminant T a ses trois premières lignes composées avec les dérivées des trois fonctions

$$H, \quad u, \quad \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

Il n'est pas difficile de voir que l'on pourrait de même remplacer les trois dernières lignes par celles qui seraient formées avec les dérivées des trois fonctions

$$ux, \quad uy, \quad uz.$$

Plus généralement, si $v_1, v_2, \ldots, v_6$ désignent six fonctions distinctes comprises dans le type suivant :

$$(32) \quad v_i = \varphi_i(u)\mathrm{H} + \alpha_i(u)(x^2+y^2+z^2) + \beta_i(u)x + \gamma_i(u)y + \delta_i(u)z + \zeta_i(u),$$

l'équation pourra s'écrire, en égalant à zéro le déterminant formé avec les dérivées secondes,

$$(33) \qquad \sum \pm \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2}\frac{\partial^2 v_4}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial^2 v_5}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial^2 v_6}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Ce résultat se démontre aisément au moyen de combinaisons de lignes horizontales du déterminant T. On en déduit une première conséquence, c'est que l'équation sera vérifiée si l'on annule une des fonctions v_i, c'est-à-dire si l'on pose

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{H} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}} \\ &= a(x^2+y^2+z^2) - 2bx - 2cy - 2hz + a_1, \end{aligned} \right.$$

a, b, c, h, a_1 étant des fonctions quelconques de u. Toutes les fonctions qui satisferont à cette équation du premier ordre donneront des familles de surfaces faisant partie d'un système triple orthogonal. Nous allons indiquer d'abord comment on intègre l'équation aux dérivées partielles (34), et comment on en déduit des systèmes orthogonaux contenant quatre fonctions arbitraires d'une seule variable, et dont peut faire partie une surface quelconque.

§ III. — *Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont toutes les solutions donnent une famille de surfaces faisant partie d'un système orthogonal.*

La présence des fonctions arbitraires a, b, c, h, a_1 de u dans l'équation (34) semble devoir empêcher l'intégration; cependant nous allons voir qu'on peut trouver une intégrale complète de cette équation.

A cet effet, nous allons rechercher si elle peut être satisfaite en prenant pour u le paramètre d'une famille de sphères représentées par l'équation

$$(34\ bis)\qquad \alpha(x^2+y^2+z^2)-2\beta x-2\gamma y-2\delta z+\alpha_1=0,$$

où α, β, γ, δ, α_1 sont des fonctions de u. Si de cette équation on déduit les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, on trouvera

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\frac{4(\alpha x-\beta)^2+4(\alpha y-\gamma)^2+4(\alpha z-\delta)^2}{[\alpha'(x^2+y^2+z^2)-2\beta' x-2\gamma' y-2\delta' z+\alpha'_1]^2},$$

α', β', ... désignant les dérivées par rapport à u de α, β, ... Si l'on tient compte de l'équation (34 *bis*) pour simplifier le numérateur du second membre, on trouvera

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}=\frac{\frac{\alpha'}{2}(x^2+y^2+z^2)-\beta' x-\gamma' y-\delta' z+\frac{\alpha'_1}{2}}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2-\alpha\alpha_1}},$$

équation qui est de la forme même de l'équation à intégrer (34). En écrivant que les coefficients sont égaux dans les équations, nous aurons

$$(35)\qquad \alpha'=\frac{d\alpha}{du}=2\lambda a,\quad \frac{d\beta}{du}=2\lambda b,\quad \frac{d\gamma}{du}=2\lambda c,\quad \frac{d\delta}{du}=2\lambda h,\quad \frac{d\alpha_1}{du}=2\lambda a_1,$$

en posant, pour abréger,

$$\lambda = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \alpha\alpha_1}. \tag{36}$$

On voit, dès à présent, que les équations (35), (36) détermineront α, β, γ avec assez de constantes arbitraires pour que l'on soit assuré d'avoir une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles proposée (34).

L'intégration de ces équations aux dérivées ordinaires (35) amènera cinq constantes arbitraires qui se réduiront à quatre distinctes en vertu de l'homogénéité de ces équations. On aura donc une intégrale complète à quatre constantes, ce qui est plus que suffisant pour l'intégration générale de l'équation aux dérivées partielles proposée.

Je ferai d'abord une remarque sur le système des équations différentielles ordinaires (35), (36), qui, au premier abord, paraît si compliqué. En différentiant l'équation (36), on trouve

$$\frac{d\lambda}{du} = b\beta + c\gamma + d\delta - \frac{\alpha a_1}{2} - \frac{a\alpha_1}{2}, \tag{37}$$

et, cette équation étant substituée à la formule (36), il reste un système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{du} = 2\lambda a, \quad \frac{d\beta}{du} = 2\lambda b, \quad \frac{d\gamma}{du} = 2\lambda c, \quad \frac{d\delta}{du} = 2\lambda h, \\ &\frac{d\alpha_1}{du} = 2\lambda a_1, \quad \frac{d\lambda}{du} = b\beta + c\gamma + d\delta - \frac{a_1}{2}\alpha - \frac{a}{2}\alpha_1 \end{aligned}\right. \tag{38}$$

entièrement composé d'équations linéaires, et l'on sait combien cette propriété facilite l'intégration. A la vérité, ce système est un peu plus général que le proposé. Une de ses intégrales est

$$\lambda^2 - \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 + \alpha\alpha_1 = C;$$

il faudra poser $C = 0$ pour obtenir l'équation (36).

Supposons que l'on ait intégré complétement le système (38), on obtiendra, en substituant les valeurs de α, β, ... dans l'équation (35), une famille de sphères dont l'équation sera de la forme

$$C_1 S_1 + C_2 S_2 + \ldots + C_6 S_6 = 0, \tag{39}$$

$C_1, \ldots, C_6$ désignant les constantes arbitraires. En exprimant que l'équation (36) est satisfaite, on trouvera entre $C_1, \ldots, C_6$ une relation homogène du second degré

$$\varphi(C_1, C_2, \ldots, C_6) = 0,$$

ce qui réduira, en tenant compte de l'homogénéité, à quatre le nombre de celles qui figurent dans l'équation (39).

Si les fonctions a, b, c, h, a_1 sont données à l'avance, il est impossible d'intégrer d'avance le système (38); mais je vais montrer que, conformément à ce qui arrive dans des cas analogues, on peut mettre les fonctions arbitraires *sous une forme telle, que l'intégration puisse se faire complètement.*

A cet effet, nous allons d'abord leur donner une forme plus symétrique. Posons

$$\alpha = \varepsilon + i\varphi, \quad a = \frac{e + if}{2},$$

$$\alpha_1 = -\varepsilon + i\varphi, \quad a_1 = \frac{-e + if}{2};$$

i désignant le symbole $\sqrt{-1}$, elles deviennent

$$\frac{d\varepsilon}{du} = \lambda e, \quad \frac{d\varphi}{du} = \lambda f, \quad \frac{d\beta}{du} = \lambda b, \quad \frac{d\gamma}{du} = \lambda c, \quad \frac{d\delta}{du} = \lambda h,$$

$$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \varepsilon^2 + \varphi^2,$$

et elles rentrent dans le système général suivant :

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{du} = \lambda a_1, \quad \dfrac{dx_2}{du} = \lambda a_2, \quad \ldots, \quad \dfrac{dx_n}{du} = \lambda a_n, \\ \lambda^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n, \end{array} \right.$$

où l'on aura à supposer $n = 5$.

Étudions ce système plus général et prouvons que l'on peut assigner aux fonctions $a_1, \ldots, a_n$ de u des formes telles, que les intégrales puissent être trouvées.

Posons

$$b_1 = \int a_1 du, \quad \ldots, \quad b_n = \int a_n du,$$

et choisissons, à la place des inconnues x_i, les inconnues y_i liées aux précédentes par les relations

$$x_1 = \lambda(b_1 - y_1), \quad x_2 = \lambda(b_2 - y_2), \quad \ldots, \quad x_n = \lambda(b_n - y_n).$$

En différentiant, nous trouverons le système

$$\frac{dy_1}{y_1 - b_1} = \frac{dy_2}{y_2 - b_2} = \ldots = \frac{dy_n}{y_n - b_n}, \tag{41}$$

qui, joint à l'équation

$$(y_1 - b_1)^2 + \ldots + (y_n - b_n)^2 = 1, \tag{41 bis}$$

déduite de la dernière des équations (40), suffit à faire connaître les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Or ce système (41) est identique à celui qui a été considéré par M. Bonnet (*Comptes rendus*, t. LIII, p. 971), et l'on sait, par conséquent, que l'on pourra donner aux fonctions b_i une forme telle que l'intégration soit possible. Nous allons donner une démonstration nouvelle de cet important résultat, qui débute comme celle de M. Bonnet, mais qui en diffère à partir de la seconde transformation. A la place de l'unité nous mettrons même une fonction r^2 dans le second membre de l'équation (41), qui deviendra

$$(y_1 - b_1)^2 + \ldots + (y_n - b_n)^2 = r^2. \tag{41 ter}$$

Posons

$$db_1 = h\,d(kc_1), \quad db_2 = h\,d(kc_2), \quad \ldots, \quad db_n = h\,d(kc_n). \tag{42}$$

On substituera ainsi aux fonctions b_i $n+2$ fonctions c_i, h, k; on pourra donc prendre h et k arbitrairement.

Substituons aux inconnues y les inconnues z, définies par les équations

$$y_i - b_i = h(z_i - kc_1), \tag{43}$$

on trouvera, pour les variables z, le système d'équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dz_1}{z_1 - kc_1} = \frac{dz_2}{z_2 - kc_2} = \ldots = \frac{dz_n}{z_n - kc_n}, \\ &(z_1 - kc_1)^2 + \ldots + (z_n - kc_n)^2 = \frac{r^2}{h^2}. \end{aligned}\right. \tag{44}$$

Supposons qu'on ait choisi h par la relation

$$\frac{r^2}{h^2} = k^2(c_1^2 + \ldots + c_n^2), \tag{45}$$

et k par la condition

$$c_n = 1, \tag{46}$$

les formules (42) prendront la forme

$$\left\{\begin{aligned} db_1 &= \frac{r}{k\sqrt{1+c_1^2+\ldots+c_{n-1}^2}}\,d(kc_1), \quad \ldots, \\ db_{n-1} &= \frac{r}{k\sqrt{1+c_1^2+\ldots+c_{n-1}^2}}\,d(kc_{n-1}), \\ db_n &= \frac{r}{k\sqrt{1+c_1^2+\ldots+c_{n-1}^2}}\,dk, \end{aligned}\right. \tag{47}$$

et la dernière équation (44) deviendra

$$z_1^2+\ldots+z_n^2 - 2k(c_1 z_1+\ldots+c_{n-1}z_{n-1}+z_n) = 0.$$

Prenons comme nouvelles fonctions

$$t_1 = \frac{2z_1}{z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2}, \quad \ldots, \quad t_n = \frac{2z_n}{z_1^2+\ldots+z_n^2}, \tag{48}$$

le système (44) se changera dans le suivant :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dt_1}{c_1} = \frac{dt_2}{c_2} = \ldots = \frac{dt_{n-1}}{c_{n-1}} = dt_n, \\ &c_1 t_1+\ldots+c_{n-1}t_{n-1}+t_n = \frac{1}{k}. \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Ces nouvelles équations sont linéaires. On saura donc les intégrer complétement si l'on sait intégrer le système obtenu en supprimant le second membre $\frac{1}{k}$.

Il nous restera donc à traiter le système

$$\frac{dt_1}{c_1} = \frac{dt_2}{c_2} = \ldots = \frac{dt_{n-1}}{c_{n-1}} = dt_n \tag{50}$$

avec la condition

$$c_1 t_1+\ldots+c_{n-1}t_{n-1}+t_n = 0. \tag{51}$$

Ce système admet une intégrale évidente

$$t_1^2+t_2^2+\ldots+t_n^2 = \text{const.}$$

Il importe peu que nous mettions l'unité ou une constante quelconque dans le second membre à cause de l'homogénéité. Nous écrirons donc

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 = 1.$$

Jusqu'ici notre méthode est la même que celle de M. Bonnet; mais, au lieu de continuer de la même manière, nous effectuerons la nouvelle et dernière substitution de variables

$$(52)\quad t_n - 1 = \frac{-2v_n}{v_1^2 + \ldots + v_n^2}, \qquad t_{n-1} = \frac{-2v_{n-1}}{v_1^2 + \ldots + v_n^2}, \qquad t_1 = \frac{-2v_1}{v_1^2 + \ldots + v_n^2}.$$

On obtient alors, à la place du système (50), le suivant :

$$(53)\quad \begin{cases} v_n = 1, \\ \dfrac{dv_1}{v_1 - c_1} = \dfrac{dv_2}{v_2 - c_2} = \ldots = \dfrac{dv_{n-1}}{v_{n-1} - c_{n-1}}, \\ (v_1 - c_1)^2 + \ldots + (v_{n-1} - c_{n-1})^2 = 1 + c_1^2 + \ldots + c_{n-1}^2, \end{cases}$$

qui est tout pareil à celui qui nous a servi de point de départ, mais qui contient une variable de moins, en laissant de côté l'équation $v_n = 1$. En recommençant indéfiniment les mêmes opérations, on aura la solution complète du système proposé.

Il est donc établi qu'étant donnée l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}} = a(x^2 + y^2 + z^2) - 2bx - 2cy - 2hz + a_1,$$

où a, b, ... sont des fonctions arbitraires de u, on peut, en donnant à ces fonctions une forme convenablement choisie, obtenir une intégrale complète de cette équation, qui sera de la forme

$$(54)\quad C_1 S_1 + \ldots + C_6 S_6 = 0,$$

où les constantes seront liées par une équation du second degré

$$\varphi(C_1, \ldots, C_6) = 0.$$

En donnant à C_6, C_5 deux valeurs numériques arbitraires, il restera encore trois constantes indépendantes C_1, C_2, C_3; C_4 sera déterminé par l'équation précédente.

Soit

$$\varpi(x, y, z; C_1, C_2, C_3; u) = 0$$

l'équation du système de sphères ainsi obtenu. L'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles proposée s'obtiendra en posant

$$C_3 = f(C_1, C_2),$$

f étant une fonction arbitraire et éliminant C_1, C_2, C_3 entre les équations

$$(55) \qquad \begin{cases} C_3 = f(C_1, C_2), \\ \varphi(x, y, z; C_1, C_2, C_3; u) = 1, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_1} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_3}\dfrac{\partial f}{\partial C_1} = 0, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_2} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_3}\dfrac{\partial f}{\partial C_2} = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire en cherchant pour chaque valeur de u l'enveloppe des sphères pour lesquelles les trois constantes sont liées par la relation

$$C_3 = f(C_1, C_2).$$

Or cette relation peut toujours s'obtenir en exprimant que les sphères correspondant à une valeur u_0 de u sont tangentes à une surface fixe (Σ). Cette surface fera donc partie de la famille ainsi obtenue, et il est ainsi démontré que l'on peut obtenir avec quatre fonctions arbitraires du paramètre u un système orthogonal comprenant une surface quelconque.

Le résultat actuel comprend celui que l'on connaît relativement aux systèmes composés de surfaces parallèles et à leurs transformées par rayons vecteurs réciproques. Comme application, j'indiquerai le cas où l'équation qu'il s'agit d'intégrer est

$$H = a(x^2 + y^2 + z^2) - 2bx - 2cy - 2hz + a_1,$$

a, b, c, h, a_1 étant des constantes.

Les équations (35) et (36) s'intègrent alors sans difficulté, et une discussion très-simple conduit au résultat suivant, que l'on vérifiera sans peine et que j'ai déjà donné dans les *Comptes rendus*.

On obtient une famille de surfaces (Σ) faisant partie d'un système triple et admettant pour trajectoires orthogonales des cercles coupant à angle droit une sphère fixe (S). Si cette sphère (S) grandit indéfiniment, les trajectoires orthogonales deviennent des droites, et l'on a une famille de surfaces parallèles. Si elle se réduit à un point, on a une famille, transformée par rayons vecteurs réciproques d'une famille de surfaces parallèles.

En dehors de ces deux cas exceptionnels, voici comment on peut engendrer les surfaces qui, associées à une surface donnée à l'avance (Σ'), constituent la famille cherchée. On mènera des sphères (S') tangentes à (Σ'), et coupant la sphère fixe (S) sous un angle constant α, d'ailleurs quelconque; puis, par l'intersection de ces sphères (S') et de (S), on mènera des sphères (S'') coupant (S) sous un angle constant quelconque β. L'enveloppe des sphères (S'') donnera l'une quelconque des surfaces que l'on doit associer à (Σ') pour former une famille du système orthogonal.

L'existence de ce système particulier avait déjà été reconnue par M. Ribaucour, mais la construction précédente est entièrement nouvelle.

On pourrait, au reste, traiter encore cette question en remarquant que l'équation à intégrer peut toujours, au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques ou *inversion*, se ramener à la forme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{z^2},$$

dont on aperçoit immédiatement une intégrale complète

$$u=\alpha x+\beta y+\int\sqrt{\frac{1}{z^2}-\alpha^2-\beta^2}\,dz+\gamma,$$

α, β, γ étant trois constantes arbitraires.

§ IV. — *Remarques nouvelles sur l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre.*

Nous avons vu que l'équation à laquelle satisfait le paramètre u peut se mettre sous la forme

$$v_1 w_1 \mathrm{H}_{11}+(v_1 w_2+v_2 w_1)\mathrm{H}_{12}+\ldots=0,$$

où H désigne la fonction

$$\mathrm{H}=\frac{1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}.$$

Si donc nous nous rappelons la signification de $v_1, \ldots, w_1, \ldots$, et qu'au lieu de ces dérivées nous introduisions des différentielles, dx, dy, dz désignant les différentielles relatives au déplacement suivant une ligne de courbure de la surface u, et $\delta x, \delta y, \delta z$ les différentielles se rapportant à l'autre ligne de courbure, l'équation du problème peut s'écrire

$$\mathrm{H}_{11}\, dx\,\delta x + \ldots + \mathrm{H}_{12}(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + \ldots = 0,$$

ce qui équivaut, comme on sait, à l'équation

$$(56) \qquad d\,\delta\mathrm{H} - \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}\,d\,\delta x - \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y}\,d\,\delta y - \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial z}\,d\,\delta z = 0,$$

où d'ailleurs les variables indépendantes sont absolument quelconques.

Si l'on suppose que l'on ait pris pour axes des x et des y les tangentes aux lignes de courbure en un point, on retrouve l'équation

$$(57) \qquad \frac{\partial^2\mathrm{H}}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

donnée par M. Maurice Levy; mais cet habile géomètre l'a démontrée directement sans donner la formule (56), écrite dans un système de variables quelconques.

Nous allons faire des applications de cette équation générale et retrouver d'abord l'équation remarquable que M. Levy a donnée au tome LXXVII des *Comptes rendus*.

Supposons que, prenant x, y, u comme variables indépendantes, on veuille trouver l'équation à laquelle satisfait z considérée comme fonction de ces variables. On aura d'abord

$$(58) \qquad \mathrm{H} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

p et q désignant, suivant l'usage, les dérivées de z, $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

D'ailleurs, x, y étant indépendantes, on peut poser

$$d\,\delta x = 0, \qquad d\,\delta y = 0,$$

et $d\,\delta z$ sera donné par l'équation

$$d\,\delta z = dp\,\delta x + dq\,\delta y = r\,dx\,\delta x + s(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + t\,dy\,\delta y,$$

qui montre que $d\,\delta z$ sera aussi nul, puisque les directions des lignes de courbure sont conjuguées. L'équation (56) deviendra donc

$$d\,\delta \mathrm{H} = \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x^2}\,dx\,\delta x + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x\,\partial y}(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial y^2}\,dy\,\delta y = 0.$$

C'est l'équation de M. Levy. Il suffit d'y remplacer dx, δx, ... par les quantités qui leur sont proportionnelles. L'équation des lignes de courbure étant

$$dx^2[(1+p^2)s - pqr] + dx\,dy[(1+p^2)t - (1+q^2)r] + dy^2[pqt - (1+q^2)s] = 0,$$

on aura

$$\frac{dy\,\delta y}{(1+p^2)s - pqr} = \frac{dx\,\delta y + dy\,\delta x}{(1+q^2)r - (1+p^2)t} = \frac{dx\,\delta x}{pqt - (1+q^2)s}$$

en vertu des relations entre les coefficients et les racines d'une équation. On aura donc pour l'équation cherchée

$$(59)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x^2}[(1+q^2)s - pqt] + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x\,\partial y}[(1+p^2)t - (1+q^2)r] \\ &\qquad + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial y^2}[pqr - (1+p^2)s] = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui est le résultat de M. Maurice Levy.

Pour abréger, nous désignerons le premier membre de l'équation précédente sous la forme

$$(60)\qquad \mathrm{A}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x^2} + \mathrm{B}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial y^2} = 0.$$

Proposons-nous, comme nouvelle application, de chercher la surface la plus générale qui, en se déplaçant sans changer de forme, engendre une famille de surfaces faisant partie d'un système triple orthogonal. Nous prendrons des axes mobiles invariablement liés à cette surface, et par rapport auxquels elle aura toujours la même équation, et nous choisirons comme variables indépendantes u et les coordonnées relatives x, y. Les différentielles d, δ se rapportant au cas où u est constant, il importe peu que les axes soient mobiles quand u varie; l'équation du problème sera encore l'équation (60). L'expression seule de H changera, et nous allons la calculer avec les nouvelles variables.

Nous aurons souvent à faire le calcul de H avec des variables quelconques. Ce calcul est beaucoup simplifié par la remarque suivante : Supposons d'abord que l'on ait rapporté les points à des axes toujours fixes, et que l'on considère u comme fonction de x, y, z; on aura

$$\frac{1}{H} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

On déduit de là que H est la valeur minimum de $\frac{ds}{du}$, ds désignant la différentielle de l'arc quand, partant d'un point M, on se déplace dans toutes les directions. Cette propriété de H va nous permettre de l'écrire dans toutes les hypothèses.

Dans le cas actuel, la surface est invariable de forme, et les axes se déplacent avec elle et changent avec u. En vertu des théorèmes sur le mouvement relatif, le déplacement absolu résulte de la composition du déplacement relatif du point et de celui qu'il aurait s'il était invariablement lié aux axes mobiles. Si donc $d'x$, $d'y$, $d'z$ désignent les variations des coordonnées relatives, si dx, dy, dz désignent les projections sur les axes du déplacement absolu, on aura des formules de la forme

$$\begin{aligned} dx &= d'x + (a + \beta z - \gamma y)\,du, \\ dy &= d'y + (b + \gamma x - \alpha z)\,du, \\ dz &= d'z + (c + \alpha y - \beta x)\,du, \end{aligned}$$

a, b, c, α, β, γ désignant les composantes des trois translations et des trois rotations par lesquelles on passe du système d'axes mobiles au système infiniment voisin. D'ailleurs, la surface u ne variant pas de forme, on a

$$d'z = p\,d'x + q\,d'y,$$

et, par suite,

$$dz - p\,dx - q\,dy = du[c - ap - bq + \alpha(y + qz) - \beta(x + pz) + \gamma(qx - py)].$$

On déduit de là la valeur minimum de $\frac{ds}{du}$, c'est-à-dire de H,

$$\text{(62)} \qquad H = \frac{c - ap - bq + \alpha(y + qz) - \beta(x + pz) + \gamma(qx - py)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

si donc on convient de poser, pour abréger,

$$\text{(63)} \quad \Delta(\mu) = A\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\mu}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + B\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{\mu}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\mu}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

l'expression $\Delta\mu$ indiquant une opération à effectuer sur μ, l'équation aux dérivées partielles deviendra

$$(64)\quad c\,\Delta(1) - a\,\Delta(p) - b\,\Delta(q) + \alpha\,\Delta(y+qz) + \beta\,\Delta(x+pz) + \gamma\,\Delta(qx-py) = 0.$$

L'équation précédente doit être satisfaite, quel que soit u, et elle se décomposera généralement en plusieurs autres. Par exemple, si l'on veut une surface qui, dans un déplacement quelconque, engendre une famille faisant partie d'un système triple, il faudra que les six équations que l'on obtient en égalant à zéro les coefficients de a, b, c, α, β, γ soient satisfaites. C'est ce qui a lieu pour les sphères et les plans. Si l'on ne veut considérer que des translations quelconques, il suffira que l'on ait

$$\Delta(1) = 0, \quad \Delta(p) = 0, \quad \Delta(q) = 0.$$

Dans tous les cas on voit que, si l'équation est satisfaite pour deux déplacements, elle le sera pour tous ceux qui résultent de leur composition. Cela résulte de sa forme, linéaire par rapport aux rotations et aux translations.

La surface contenant le plus d'arbitraires sera évidemment celle qui n'engendre que par un seul mouvement une famille de surfaces faisant partie d'un système triple. Pour une telle surface, les rapports de a, b, c, α, β, γ sont des constantes. Le mouvement de la surface est donc un mouvement hélicoïdal. Supposons que l'axe de ce mouvement ait été pris pour axe des z; on aura

$$a = b = \alpha = \beta = 0, \quad c = k\gamma,$$

k désignant une constante, et l'équation aux dérivées partielles de la surface deviendra

$$(65)\qquad \Delta(qx - py + k) = 0.$$

D'ailleurs, l'équation

$$\Delta\mu = 0$$

admettant toujours l'intégrale

$$\frac{\mu}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = a(x^2+y^2+z^2) + bx + cy + hz + a_1,$$

comme il est facile de le vérifier, on voit qu'on aura des solutions particulières de l'équation (65) en posant

$$\frac{qx - py + k}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = a. \tag{66}$$

Il est facile d'intégrer cette équation.

Prenons comme variables indépendantes les coordonnées polaires

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \omega = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

elle deviendra

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \omega} + k\right)^2 = a^2 + a^2\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{a^2}{\rho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2,$$

et sous cette forme on aperçoit immédiatement qu'il y a une solution complète, somme d'une fonction de ρ et d'une fonction de ω. On trouve ainsi

$$z = h\omega + \frac{1}{a}\int\sqrt{(h+k)^2 - a^2 - \frac{a^2h^2}{\rho^2}}\,d\rho + \mathrm{C},$$

h et C étant deux constantes, et de cette solution complète, qui représente un hélicoïde réglé, on déduira l'intégrale générale.

§ V. — *Formation de l'équation aux dérivées partielles quand u est une fonction implicite de x, y, z.*

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que l'équation de la famille de surfaces était résolue par rapport à l'une des variables u ou z. Nous considérerons maintenant le cas, très-important pour les applications, où cette équation est de la forme

$$\varphi(x, y, z, u) = 0. \tag{68}$$

La quantité que nous avons désignée par H aura ici pour valeur

$$\mathrm{H} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}},$$

ou, en posant

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \varphi', \tag{69}$$

et adoptant les notations précédentes,

$$\mathrm{H} = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}}. \tag{70}$$

Toutes les équations qui nous ont servi de point de départ,

$$\delta_v u = 0, \quad \delta_w u = 0, \quad \begin{pmatrix} v\,w \\ u \end{pmatrix} = 0,$$

subsistent sans modifications quand on y remplace u par φ et que, dans les dérivées, on traite u comme une constante. Ainsi l'on a

$$\delta_\varphi v = 0, \quad \delta_\varphi w = 0,$$
$$v_1 w_1 \varphi_{11} + (v_1 w_2 + v_2 w_1)\varphi_{12} + \ldots = 0,$$

En effet, comme ces équations sont celles qui déterminent les directions des lignes de courbure et comme u est constant pour chaque surface, il importe peu que l'équation soit résolue ou non par rapport à u; elle est toujours implicite par rapport aux variables x, y, z.

Quant à l'équation du troisième ordre, elle est toujours la même

$$v_1 w_1 \mathrm{H}_{11} + (v_1 w_2 + w_1 v_2)\mathrm{H}_{12} + \ldots = 0;$$

mais ici, en prenant les dérivées secondes, on devrait considérer u comme fonction de x, y, z, et tenir compte des termes qui proviennent de ces dérivées. Or on verra très-facilement que ces termes donnent une somme nulle, en sorte que dans l'équation précédente on pourra supposer que les dérivées de H soient prises en laissant u constant. En éliminant v_i, w_k, on trouvera comme précédemment

$$\mathrm{S}' = \begin{vmatrix} \mathrm{H}_{11} & \mathrm{H}_{22} & \mathrm{H}_{33} & \mathrm{H}_{32} & \mathrm{H}_{13} & \mathrm{H}_{12} \\ \varphi_{11} & \varphi_{22} & \varphi_{33} & \varphi_{32} & \varphi_{13} & \varphi_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3 & \varphi_2 \\ 0 & 2\varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ 0 & 0 & 2\varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{71}$$

où toutes les dérivées doivent être prises, en laissant u constant. On voit qu'en définitive l'équation exprime une relation entre les dérivées partielles par rapport à x, y, z de deux fonctions φ et $\varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial u}$. Cette relation n'est pas d'ailleurs nécessairement identique, et il suffit qu'elle soit vérifiée en tenant compte de la relation qui lie u à x, y, z.

L'équation précédente, étant mise sous forme irrationnelle, devient à peu près inutile pour les calculs. Aussi vais-je calculer la même équation mise sous forme rationnelle. A cet effet, reprenons l'équation

$$\Sigma v_i w_k \varphi_{ik} = 0,$$

et appliquons-lui la méthode que nous avons suivie. Prenons le ∂_u du premier membre. En tenant compte de l'identité

$$\partial_v \varphi_i + \partial_\varphi v_i + (\partial_v \varphi') u_i = 0,$$

et en remplaçant u_i par $-\frac{\varphi_i}{\varphi'}$, on chassera toutes les dérivées secondes de v, w, et, en supprimant quelques termes de somme nulle, on trouvera

(72)
$$\Sigma\Sigma B_{ik} v_i w_k = 0,$$

où l'on a

$$B_{ik} = \varphi' \Sigma_h \varphi_h \varphi_{ikh} - \varphi'_{ik} \Sigma \varphi_h^2 - 2\varphi' \Sigma \varphi_{ih}\varphi_{kh} + \varphi'_k \Sigma \varphi_h \varphi_{ih} + \varphi'_i \Sigma \varphi_h \varphi_{kh}.$$

On obtiendra ainsi l'équation finale

(72)
$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{22} & B_{33} & B_{23} & B_{13} & B_{12} \\ \varphi_{11} & \varphi_{22} & \varphi_{33} & \varphi_{23} & \varphi_{13} & \varphi_{13} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3 & \varphi_2 \\ 0 & 2\varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ 0 & 0 & 2\varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui n'est pas beaucoup plus compliquée que l'équation résolue par rapport à u. Ce résultat paraîtra intéressant si l'on songe au nombre de termes qu'aurait pu introduire le calcul des dérivées secondes et troisièmes de u défini comme fonction implicite.

En développant le déterminant, on trouvera

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1^3\left[B_{23}(\varphi_{22}-\varphi_{33})+\varphi_{23}(B_{33}-B_{22})\right]+\ldots\\
&\quad+\varphi_1^2\varphi_2\left[2B_{12}\varphi_{23}-2B_{23}\varphi_{21}+B_{22}\varphi_{13}-B_{13}\varphi_{22}+B_{13}\varphi_{33}-B_{33}\varphi_{13}\right]+\ldots\\
&\quad-\varphi_1^2\varphi_3\left[2B_{13}\varphi_{23}-2B_{23}\varphi_{13}+B_{33}\varphi_{12}-B_{12}\varphi_{33}+B_{12}\varphi_{22}-B_{22}\varphi_{12}\right]+\ldots\\
&\quad+\varphi_1\varphi_2\varphi_3\left[B_{11}(\varphi_{22}-\varphi_{33})+B_{22}(\varphi_{33}-\varphi_{11})+B_{33}(\varphi_{11}-\varphi_{22})\right]=0.
\end{aligned}
$$

Les termes non écrits se déduisent des trois premiers par des permutations circulaires.

Faisons une application de l'équation précédente, et cherchons tous les systèmes orthogonaux comprenant une famille de surfaces à centre du second degré, ayant les mêmes plans principaux. Soit

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=0 \tag{73}$$

l'équation des surfaces où A, B, C sont des fonctions inconnues du paramètre u. En exprimant que l'équation précédente est satisfaite, on trouve

$$xyz\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}\right)\left[(B-C)A\,dA+(C-A)B\,dB+(A-B)C\,dC\right]=0. \tag{74}$$

On devra donc avoir, entre les trois fonctions A, B, C, la relation différentielle

$$(B-C)A\,dA+(C-A)B\,dB+(A-B)C\,dC=0. \tag{75}$$

C'est l'équation obtenue par M. Maurice Levy dans un important Mémoire inséré au XLIIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. La méthode par laquelle nous l'obtenons sert de vérification à nos calculs.

L'équation différentielle précédente établissant une seule relation entre trois fonctions arbitraires d'une seule variable, on pourra y satisfaire en prenant pour B une fonction quelconque de A, et l'on aura ensuite à intégrer cette équation, qui deviendra une relation différentielle ordinaire entre A et B. Il y a donc un très-grand nombre de systèmes orthogonaux dont l'une des familles est composée de surfaces du second degré. M. Levy, dans le travail déjà cité, en a fait connaître un certain nombre; mais je vais montrer qu'on peut les trouver tous et intégrer complétement l'équation différentielle à trois variables que nous venons d'obtenir.

On peut, en effet, l'écrire sous la forme

$$\text{(76)} \qquad B(C-A)\,d(B-A)+C(A-B)\,d(C-A)=0.$$

Supposons que C — A soit le paramètre u. Posons

$$C-A=u,$$

et prenons arbitrairement

$$\text{(77)} \qquad B-A=\varphi(u),$$

φ étant une fonction quelconque de u. L'équation différentielle (76) se réduira à l'équation finie

$$\text{(78)} \qquad B(C-A)\,\varphi'(u)=C\varphi(u),$$

et les formules précédentes donneront

$$\text{(79)} \qquad A=\frac{u\,\varphi(1-\varphi')}{u\varphi'-\varphi},\quad B=\frac{\varphi(u-\varphi)}{u\varphi'-\varphi},\quad C=\frac{u\varphi'(u-\varphi)}{u\varphi'-\varphi},$$

φ' désignant la dérivée de φ, ce qui constitue la solution générale de l'équation proposée.

Appliquons, par exemple, ces formules à la recherche de tous les systèmes pour lesquels il y a entre les carrés des trois axes A, B, C une relation linéaire et homogène

$$mA+nB+pC=0.$$

En substituant à la place de A, B, C leurs valeurs, nous aurons, pour déterminer φ, l'équation

$$m\,\frac{1-\varphi'}{u-\varphi}+\frac{n}{u}+\frac{p\varphi'}{\varphi}=0,$$

dont l'intégrale s'aperçoit immédiatement. Elle est

$$(u-\varphi)^m u^n \varphi^p=\text{const.}$$

On peut encore, au lieu de suivre la marche précédente, remarquer que l'équation (76) peut être remplacée par le système suivant :

$$(80)\qquad \left\{\begin{aligned} A\,dA &= (mA + n)\,du,\\ B\,dB &= (mB + n)\,du,\\ C\,dC &= (mC + n)\,du,\end{aligned}\right.$$

où m, n sont, soit des constantes, soit des fonctions de u. Supposons, par exemple, que l'on ait $n = \frac{1}{2}$, $m = 0$, on trouvera, en intégrant,

$$A^2 = u^2 + \alpha, \quad B^2 = u^2 + \beta, \quad C^2 = u^2 + \gamma.$$

C'est un système dans lequel ce ne sont plus les différences des carrés des axes, mais celles de leurs quatrièmes puissances, qui sont constantes.

Quand on adopte ce dernier mode de solution, on trouve facilement que les deux autres familles complétant le système sont données par l'élimination de u entre les deux équations

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{A - t} + \frac{y^2}{B - t} + \frac{z^2}{C - t} - 1 = 0,$$

où t est la solution la plus générale de l'équation

$$t\,dt = (mt + n)\,du,$$

la constante arbitraire introduite par l'intégration étant considérée comme le paramètre de la famille correspondante.

Dans le Mémoire que nous avons déjà cité, M. Maurice Levy a démontré cet important théorème que, si une famille de surfaces du second degré fait partie d'un système orthogonal, les plans principaux de ces surfaces sont les mêmes; par conséquent, les systèmes précédents, en y comprenant ceux qui sont formés avec des surfaces dépourvues de centre et qui en sont un cas limite, sont les seuls qu'on puisse former avec des surfaces du second degré. Je vais rattacher le théorème de M. Levy à une proposition plus générale et montrer que, si une famille de surfaces faisant partie d'un système triple est composée de surfaces ayant chacune un plan de symétrie, les plans de symétrie de toutes ces surfaces doivent coïncider, excepté dans certains cas qui sont nettement définis par la démonstration elle-même.

Pour établir cette proposition, je ferai usage d'une propriété fondamentale, déjà signalée, de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre que nous avons trouvée. Cette équation peut être considérée comme établissant une relation entre les dérivées partielles de deux fonctions φ et $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ prises par rapport à x, y, z seulement. On pourra donc, dans l'étude du problème, rapporter les surfaces à des axes qui seront variables quand on passera d'une surface à une autre, à la seule condition de calculer exactement $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$.

Supposons que la surface de paramètre u_0 ait été rapportée à des axes qui changeront lorsqu'on passera de cette surface à la voisine, de paramètre $u_0 + du_0$. Alors les coordonnées d'un point fixe (x, y, z) seront des fonctions de u dont les dérivées seront données par des équations de la forme

$$(81)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = qz - ry + \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = rx - pz + \beta, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = py - qx + \gamma,$$

p, q, r étant les composantes des trois relations, et α, β, γ celles des translations quand on passe du système d'axes choisi au système infiniment voisin correspondant à la surface $u + du$. Soit donc

$$\varphi(x, y, z, u) = 0$$

l'équation de la surface rapportée à des axes mobiles. La dérivée du premier membre par rapport à u sera

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

ou

$$\frac{\partial \varphi}{du} + \varphi_1(qz - ry + \alpha) + \varphi_2(rx - pz + \beta) + \varphi_3(py - qx + \gamma).$$

Telle est l'expression qu'il faudra mettre dans H à la place de φ', ce qui donne

$$(82)\qquad \mathrm{H} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \varphi_1(qz - ry + \alpha) + \varphi_2(rx - pz + \beta) + \varphi_3(py - qx + \gamma)}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}},$$

et, en substituant cette valeur de H dans l'équation (71) ou dans la suivante :

$$d\delta H - H_1 d\delta x - H_2 d\delta y - H_3 d\delta z = 0,$$

on aura l'équation cherchée.

Cela posé, supposons qu'une surface de la famille ait un plan de symétrie qu'elle coupe suivant une courbe (C). En un point de la courbe (C) les directions des lignes de courbure sont : 1° celles de la tangente à la courbe C, définie par dx, dy quelconques, et $dz = 0$; 2° celles de la normale au plan pour laquelle

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0.$$

En substituant ces valeurs des différentielles dans l'équation précédente, on trouve

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \, \partial z} dx + \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} dy = 0.$$

Cette équation exprime évidemment que $\frac{\partial H}{\partial z}$ est constant en tous les points de la courbe (C). On a donc, pour tous les points de cette courbe,

(83) $$\frac{\partial H}{\partial z} = C.$$

Pour calculer $\frac{\partial H}{\partial z}$, nous remarquerons que la surface ayant pour plan de symétrie la courbe (C), son équation ne contient que les puissances paires de z. Toutes les dérivées de φ, prises une fois seulement par rapport à z, seront donc nulles pour tous les points de la courbe (C) et même de son plan. En utilisant cette remarque, on trouve

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{q\varphi_1 - p\varphi_2 + \varphi_{33}(py - qx + \gamma)}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}},$$

et, par conséquent,

(83) $$[q\varphi_1 - p\varphi_2 + \varphi_{33}(py - qx + \gamma)]^2 = C^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2),$$

équation qui devra être vérifiée en tous les points de la courbe (C).

Supposons que la forme des surfaces choisies rende cette équation impossible, il faudra supposer

$$(84) \qquad p = 0, \quad q = 0, \quad \gamma = 0, \quad C = 0;$$

or les trois premières équations expriment que, lorsqu'on passera d'une surface à la surface infiniment voisine, le mouvement du système d'axes choisi sera tel que le plan des xy glisse sur lui-même. Si toutes les surfaces ont un plan de symétrie, et si, en outre, les conditions (84) sont toujours remplies, on voit que tous les plans de symétrie des surfaces d'un même système coïncideront.

Appliquons ces remarques aux surfaces du second degré. La section par le plan principal ayant pour équation

$$\varphi(x, y) = 0,$$

on devra avoir

$$[q\varphi_1 - p\varphi_2 + \varphi_{33}(py - qx + \gamma)]^2 = C^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

en tous les points de cette section, φ_{33} désignant la dérivée seconde, par rapport à z, du premier membre de l'équation de la surface, qui est nécessairement une constante. L'équation précédente exprime que les deux droites représentées par l'équation

$$\varphi_1 \pm \varphi_2\sqrt{-1} = 0$$

sont tangentes à la courbe, ce qui ne peut arriver, on s'en assure aisément, que si la section principale se réduit à un cercle ou à deux droites, c'est-à-dire si la surface est de révolution ou conique. On sait, en effet, que, dans ce cas, des surfaces peuvent faire partie d'un système orthogonal sans que leurs plans de symétrie coïncident. Laissons donc cette hypothèse de côté et faisons $C = 0$.

Supposons, en outre, la section rapportée à son centre et à ses axes, et représentée par l'équation

$$ax^2 + by^2 + 1 = 0,$$

alors, en désignant par 2α la valeur de φ_{33}, l'équation, qui doit être vérifiée, se réduira à

$$qax - pby + \alpha(py - qx + \gamma) = 0,$$

ce qui donne

$$q(a-\alpha)=0, \quad p(b-\alpha)=0, \quad \alpha\gamma=0.$$

Si l'une des trois quantités α, $a-\alpha$, $b-\alpha$ était nulle, la surface serait soit cylindrique, soit de révolution. Écartons ces hypothèses, et nous trouverons

$$p=q=\gamma=0,$$

c'est-à-dire que les équations (84) seront satisfaites. Nous obtenons donc le théorème suivant :

Toutes les fois que des surfaces du second degré qui ne sont ni coniques, ni cylindriques, ni de révolution, forment une famille faisant partie d'un système triple, leurs plans principaux coïncident.

Revenons au cas général. On peut donner une interprétation élégante de l'équation (83).

Considérons la surface représentée par l'équation

$$\varphi(x, y, z, u)=0,$$

ayant pour plan principal le plan des xy, et menons-lui la normale en un point (x, y, z). Elle aura pour équations

$$\frac{X-x}{\varphi_1}=\frac{Y-y}{\varphi_2}=\frac{Z-z}{\varphi_3},$$

X, Y, Z désignant les coordonnées variables, et le point où elle coupera le plan de symétrie sera défini par les formules

$$X=x-\frac{z\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Y=y-\frac{z\varphi_2}{\varphi_3}.$$

Si le pied de la normale se rapproche d'un point M de la courbe (C), section de la surface par son plan de symétrie, z tendra vers zéro, $\frac{\varphi_3}{z}$ aura pour limite φ_{33}, et le point XY, défini par les équations précédentes, deviendra le centre de courbure correspondant à la section normale en M au plan de symétrie.

En appelant x', y' les coordonnées de ce centre, ρ le rayon de courbure, on aura donc

$$x'=x-\frac{\varphi_1}{\varphi_{33}}, \quad y'=y-\frac{\varphi_2}{\varphi_{33}}, \quad \rho=\frac{\sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2}}{\varphi_{33}},$$

et la formule (88) deviendra

$$py' - qx' + \gamma = C\rho, \tag{85}$$

ce qui veut dire que le rayon de courbure doit, ou bien être constant, si p et q sont nuls, ou bien être proportionnel à la distance du centre de courbure à une droite fixe du plan. Cette droite est d'ailleurs la caractéristique du plan, c'est-à-dire l'intersection du plan avec sa position infiniment voisine. On peut encore interpréter la condition précédente en remarquant que la sphère qui a pour centre le centre de courbure et pour rayon le rayon de courbure, c'est-à-dire l'une des deux sphères osculatrices à la surface, coupe, sous un angle constant, tout plan fixe passant par la caractéristique du plan de symétrie. Nous avons donc le théorème suivant :

Pour que des surfaces qui font partie d'un système triple orthogonal et ont un plan de symétrie soient dans une position telle que ces plans ne coïncident pas, il est nécessaire que les sphères osculatrices à ces surfaces en tous les points de la section par le plan de symétrie, suivant la direction normale à ce plan, coupent, sous un angle constant, l'un quelconque des plans qui passent par une droite fixe du plan de symétrie, droite qui est alors l'intersection de ce plan et du plan de symétrie de la surface infiniment voisine.

Appliquons cette proposition à la recherche des systèmes formés avec des surfaces de révolution, et prenons pour axe des x l'axe de la surface; alors y' sera nul, et l'équation (85) deviendra

$$C\rho = \gamma - qx'.$$

En général, il n'y a pas une relation aussi simple entre la normale ρ à la courbe méridienne et l'abscisse du point où elle coupe l'axe. Il faut donc que l'on ait

$$C = \gamma = q = 0.$$

Il n'y a donc pas de composante normale à l'axe de la rotation et de la translation du système, puisque la relation précédente a lieu pour tous les méridiens, c'est-à-dire que l'axe demeure fixe et est le même pour toutes les surfaces.

Mais supposons qu'il existe entre ρ et x' une relation de la forme

$$C\rho = \gamma - qx'.$$

Si $C = 0$, on a une sphère; si $q = 0$, on a soit une sphère, soit un cylindre de révolution; enfin, dans les autres cas, on a un méridien rectiligne, c'est-à-dire un cône de révolution : ces cas d'exception étaient faciles à prévoir. On sait, par exemple, que l'on peut former un système triple avec une famille de cônes de révolution quelconques assujettis seulement à avoir le même sommet. La proposition générale établie plus haut est donc confirmée par cette application.

Une proposition analogue à la précédente peut être démontrée dans le cas où l'on a une famille de surfaces qui sont chacune anallagmatiques par rapport à une sphère particulière. Chaque surface coupe la sphère qui lui correspond à angle droit et suivant une ligne de courbure (C). Les directions des lignes de courbure en un point de cette courbe sont la tangente à la courbe et le rayon de la sphère. Si l'on prend des axes qui changent quand on passe d'une surface à l'autre et soient assujettis à avoir pour origine le centre de la sphère par rapport à laquelle la surface est anallagmatique, l'équation du troisième ordre prendra la forme

$$d\,\delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\, x\,dx + \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}(x\,dy + y\,dx) + \ldots = 0,$$

dx, dy, dz indiquant des déplacements suivant la courbe (C). L'équation peut s'écrire

$$d\left(x\frac{\partial H}{\partial x} + y\frac{\partial H}{\partial y} + z\frac{\partial H}{\partial z} - H\right) = 0,$$

et, par conséquent, pour tous les points de la courbe (C), on aura

$$H - x\frac{\partial H}{\partial x} - y\frac{\partial H}{\partial y} - z\frac{\partial H}{\partial z} = C, \tag{86}$$

C désignant une constante.

Or on verra facilement que, si

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

est l'équation de la sphère par rapport à laquelle la surface est anallagmatique, l'équation de la surface peut s'écrire

$$\varphi(s, x, y, z, u) = 0,$$

s désignant

$$s = x^2 + y^2 + z^2 + R^2,$$

et φ une fonction homogène de x, y, z, s, et l'on trouvera sans peine

$$\begin{aligned}\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial u} &+ \varphi_1(qz - ry + \alpha) + \varphi_2(rx - pz + \beta)\\ &+ \varphi_3(py - qx + \gamma) + 2\frac{\partial \varphi}{\partial s}\left(\alpha x + \beta y + \gamma z + R\frac{\partial R}{\partial u}\right)\end{aligned}$$

$$H = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - 4R^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2}}.$$

Quant à l'équation (86), par suite de l'introduction de la variable s, elle prend la forme

$$H - x\frac{\partial H}{\partial x} - y\frac{\partial H}{\partial y} - z\frac{\partial H}{\partial z} - 2(x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial H}{\partial s} = C;$$

et, comme en tous les points de la courbe (C) on a

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = s,$$

on trouve

$$H - x\frac{\partial H}{\partial x} - y\frac{\partial H}{\partial y} - z\frac{\partial H}{\partial z} - s\frac{\partial H}{\partial s} = C.$$

Or la fonction H est la somme de deux fonctions homogènes de x, y, z, s, l'une de degré 1, qui s'élimine de l'équation précédente en vertu du théorème des fonctions homogènes, et l'autre de degré zéro, et pour laquelle l'opération

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + s\frac{\partial}{\partial s}$$

donne un résultat nul. En tenant compte de cette remarque, on a sans calcul

$$\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3 + 2R\frac{dR}{du}\frac{\partial \varphi}{\partial s} = C\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - 4R^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2} \tag{88}$$

en tous les points de la courbe (C). Or, si la nature de la surface rend cette équation impossible à vérifier, il faudra que l'on ait

$$C = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \frac{dR}{du} = 0.$$

Ces équations expriment que l'origine des coordonnées est fixe et que le rayon de la sphère est invariable, ce qui donne le théorème suivant :

Un système orthogonal étant formé de surfaces anallagmatiques, toutes ces surfaces doivent être anallagmatiques par rapport à la même sphère, à moins que la relation (88) *ne puisse être satisfaite.*

On verra facilement que la relation (88) peut se ramener à la forme suivante. Considérons la sphère osculatrice en un point M de (C) à la surface suivant la direction de la ligne de courbure normale à (C), ligne de courbure dont la tangente est dirigée suivant le rayon. L'équation (88) donne, entre les coordonnées x', y', z' de son centre et son rayon, la relation

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' - R\frac{\partial R}{\partial u} = C\rho, \tag{89}$$

qui exprime que cette sphère doit couper un plan fixe sous un angle constant. Ce plan est l'intersection de la sphère et de la sphère infiniment voisine par rapport à laquelle la surface infiniment voisine est anallagmatique.

Il suit du théorème général précédent que, si l'une des familles d'un système triple est formée de cyclides, ces surfaces doivent être anallagmatiques par rapport aux cinq mêmes sphères, ce qui simplifie beaucoup la recherche de pareils systèmes.

Mais, avant d'entreprendre cette recherche, nous allons donner quelques notions sur un système particulier de coordonnées dont nous aurons à faire usage dans cette recherche et dans celles qui suivront. Ce système a déjà été étudié dans notre ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*. Nous allons en rappeler rapidement la définition et les propriétés.

§ VI. — *Notions sur les coordonnées pentasphériques.*

Considérons une sphère quelconque rapportée à des axes rectangulaires; on peut toujours écrire son équation sous la forme

$$\alpha_1\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{2R} + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 i\,\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{2R} = 0, \tag{90}$$

i désignant $\sqrt{-1}$, et en supposant que l'on ait

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_5^2 = 1. \tag{91}$$

Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées du centre et par ρ le rayon de cette sphère, on trouvera facilement

$$x' = -\frac{\alpha_2 R}{\alpha_1 + i\alpha_5}, \quad y' = -\frac{\alpha_3 R}{\alpha_1 + i\alpha_5}, \quad z' = -\frac{\alpha_4 R}{\alpha_1 + i\alpha_5}, \quad \rho = \frac{R}{\alpha_1 + i\alpha_5}, \tag{92}$$

et par suite, pour un point quelconque de l'espace, le premier membre de l'équation (90) aura pour valeur

$$\alpha_1 \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + i\alpha_5 \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2R} = R\frac{S}{2\rho}, \tag{93}$$

S désignant la puissance de ce point par rapport à la sphère. Remarquons, une fois pour toutes, que si la sphère se réduisait à un plan, si l'on avait $\alpha_1 + i\alpha_5 = 0$, $\frac{S}{\rho}$ devrait être remplacé par la distance au plan.

Supposons que l'on ait deux sphères représentées par les équations

$$\alpha_1 \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} + \alpha_2 x + \ldots = 0,$$

$$\beta_1 \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} + \beta_2 x + \ldots = 0.$$

Les calculs les plus élémentaires donnent la condition pour que les deux sphères se coupent à angle droit. On trouve ainsi

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 + \alpha_5\beta_5 = 0.$$

La forme de cette relation nous conduit à une théorie très-simple du système de cinq sphères orthogonales. Considérons cinq sphères S_1, ..., S_5 de rayons R_1, ..., R_5 et écrivons leurs équations sous la forme

$$\alpha_1^k \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} + \alpha_2^k x + \alpha_3^k y + \alpha_4^k z + i\alpha_5^k \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2R} = \frac{S_k}{2R_k} = 0, \tag{94}$$

qui convient à la sphère S_k, et où l'on devra donner à k les valeurs 1, 2, ..., 5. Nous aurons d'abord, par hypothèse,

$$(\alpha_1^k)^2 + (\alpha_2^k)^2 + \ldots + (\alpha_5^k)^2 = 1, \tag{95}$$

et en second lieu, les sphères étant orthogonales,

$$\alpha_1^k \alpha_1^i + \alpha_2^k \alpha_2^i + \ldots + \alpha_5^k \alpha_5^i = 0. \tag{96}$$

Ces deux groupes de formules rattachent la théorie du système des sphères à celle d'une substitution linéaire orthogonale à cinq variables. On voit, en effet, qu'il y a entre les coefficients α_h^k les relations qui caractérisent ces substitutions.

On déduit de cette remarque une première propriété fondamentale dans cette théorie. En élevant l'équation (94) au carré et faisant la somme des équations ainsi obtenues, on a

$$\sum_1^5 \left(\frac{S_k}{2R_k}\right)^2 = \left(\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{2R}\right)^2 + x^2+y^2+z^2 - \left(\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{2R}\right)^2 = 0.$$

Ainsi, entre les puissances d'un point quelconque par rapport aux cinq sphères, on a la relation identique

$$\sum_1^5 \left(\frac{S_k}{R_k}\right)^2 = 0. \tag{97}$$

Nous pouvons maintenant définir le nouveau système de coordonnées que nous avons proposé. Nous définirons, comme coordonnées pentasphériques d'un point, les cinq quantités x_k proportionnelles à $\frac{S_k}{R_k}$,

$$x_k = \lambda \frac{S_k}{R_k}; \tag{98}$$

et, comme nous n'emploierons que des équations homogènes, le facteur λ n'aura aucune influence sur les résultats. On aura d'ailleurs, en vertu de la formule (97),

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2 = 0; \tag{99}$$

ainsi les cinq coordonnées devront être liées par l'équation précédente.

Examinons d'abord comment on passera de ces coordonnées aux coordonnées ordinaires. La formule (94), en tenant compte de l'équation (98), s'écrit

$$\alpha_1^k \frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{2R} + \alpha_2^k x + \alpha_3^k y + \alpha_4^k z + i\alpha_5^k \frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{2R} = 2\lambda x_k. \tag{100}$$

Si l'on donne à k les cinq valeurs 1, 2, ..., 5 et que l'on résolve ces équations par rapport aux cinq inconnues

$$x, y, z, \quad \frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{2R}, \quad \frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{2R},$$

ce qui se fait de la manière la plus simple, on trouvera

$$(101)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{2R} &= \frac{R}{2\lambda}(\alpha_1^1 x_1+\alpha_1^2 x_2+\ldots+\alpha_1^5 x_5),\\
x &= \frac{R}{2\lambda}(\alpha_2^1 x_1+\alpha_2^2 x_2+\ldots+\alpha_2^5 x_5),\\
y &= \frac{R}{2\lambda}(\alpha_3^1 x_1+\alpha_3^2 x_2+\ldots+\alpha_3^5 x_5),\\
z &= \frac{R}{2\lambda}(\alpha_4^1 x_1+\alpha_4^2 x_2+\ldots+\alpha_4^5 x_5),\\
\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{2R} &= \frac{-i}{2\lambda}(\alpha_5^1 x_1+\alpha_5^2 x_2+\ldots+\alpha_5^5 x_5).
\end{aligned}\right.$$

En retranchant la première et la dernière de ces équations, on trouvera

$$(102)\quad 2R\lambda = -x_1(\alpha_1^1+i\alpha_5^1)-x_2(\alpha_1^2+i\alpha_5^2)-\ldots-x_5(\alpha_1^5+i\alpha_5^5),$$

et λ étant connu, les formules (101) feront connaître x, y, z, $x^2+y^2+z^2$, qui seront des quotients de fonctions linéaires de x_1, x_2, ..., x_5.

Si l'on prend la différentielle de la formule (100) et que l'on effectue la somme des carrés des équations obtenues en donnant à k les valeurs 1, ..., 5, on trouvera

$$dx^2+dy^2+dz^2 = \frac{1}{4}\sum\left[d\left(\frac{x_k}{\lambda}\right)\right]^2,$$

ou, en se rappelant que l'on a

$$\Sigma x_k^2 = 0,$$

et, par conséquent,

$$\Sigma x_k dx_k = 0,$$

$$(103)\quad dx^2+dy^2+dz^2 = \frac{1}{4\lambda^2}(dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_5^2).$$

Proposons-nous maintenant d'établir les relations d'orthogonalité dans ce système de coordonnées.

Nous remarquerons d'abord les relations suivantes, faciles à vérifier, entre les puissances d'un point par rapport aux cinq sphères orthogonales :

$$(104)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial S_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S_k}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S_k}{\partial z}\right)^2=4(S_k+R_k^2),\\ &\frac{\partial S_k}{\partial x}\frac{\partial S_{k'}}{\partial x}+\frac{\partial S_k}{\partial y}\frac{\partial S_{k'}}{\partial y}+\frac{\partial S_k}{\partial z}\frac{\partial S_{k'}}{\partial z}=2(S_k+S_{k'}).\end{aligned}\right.$$

Cela posé, considérons les équations de deux surfaces

$$(105)\qquad \varphi(S_1,\ldots,S_5)=0,\quad \psi(S_1,\ldots,S_5)=0,$$

contenant les cinq quantités S_i, et formons l'expression

$$(106)\qquad (\varphi,\psi)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

on aura évidemment

$$(\varphi,\psi)=\sum_k\sum_{k'}\frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\frac{\partial\psi}{\partial S_{k'}}(S_k,S_{k'}),$$

c'est-à-dire, en tenant compte des formules (104),

$$(\varphi,\psi)=2\left(\sum S_k\frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\right)\sum\frac{\partial\psi}{\partial S_k}+2\left(\sum S_k\frac{\partial\psi}{\partial S_k}\right)\left(\sum\frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\right)+4\sum R_k^2\frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\frac{\partial\psi}{\partial S_k};$$

si donc les fonctions φ, ψ sont homogènes, on aura, en vertu des équations (105),

$$\sum S_k\frac{\partial\varphi}{\partial S_k}=m\varphi=0,\quad \sum S_k\frac{\partial\psi}{\partial S_k}=0,$$

et la condition d'orthogonalité prendra la forme

$$\sum R_k^2\frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\frac{\partial\psi}{\partial S_k}=0,$$

ou, en introduisant les quantités x_k,

$$(107)\qquad \sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}=0,$$

équation qui est de forme toute pareille à la relation ordinaire, mais qui exige que les équations aient été mises sous forme homogène.

Or il est très-facile d'atteindre ce résultat. D'abord, si les expressions φ, ψ ont été exprimées en x, y, z, en substituant pour x, y, z leurs valeurs déduites des formules (101), et qui sont homogènes, on aura des équations homogènes; mais supposons qu'on ait trouvé directement une relation non homogène entre S_1, ..., S_5,

$$\varphi(S_1, \ldots, S_5) = 0;$$

si l'on se reporte à la relation (102), et que l'on remarque que, pour $\lambda = 1$,

$$x_i = \frac{S_i}{R_i},$$

et que l'on a, d'ailleurs, en vertu des formules (92),

$$\alpha_1^k + i\alpha_5^k = \frac{R}{R_k},$$

on voit que cette relation (102) deviendra

$$(108) \qquad 2 = -\frac{S_1}{R_1^2} - \frac{S_2}{R_2^2} - \ldots - \frac{S_5}{R_5^2}.$$

Il y a donc entre les cinq puissances S_k une relation non homogène dont on peut profiter pour rendre homogène toute relation où elles figurent.

L'équation (107) nous conduit immédiatement au système orthogonal formé de trois familles de cyclides; considérons, en effet, les surfaces représentées par l'équation

$$(109) \qquad \frac{x_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{x_2^2}{\lambda - a_2} + \frac{x_3^2}{\lambda - a_3} + \frac{x_4^2}{\lambda - a_4} + \frac{x_5^2}{\lambda - a_5} = 0,$$

toute pareille à celle des surfaces du second degré. Il passe trois de ces surfaces par un point quelconque de l'espace. Deux quelconques d'entre elles se coupent à angle droit. Je ne reviendrai point sur tous ces points, pour lesquels je renverrai à mes Mémoires antérieurs et à mon Ouvrage déjà cité, et je me contenterai de rappeler que, pour le système précédent, on trouve

$$(110)\quad \begin{cases} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ \quad = \dfrac{1}{M^2}\left[\dfrac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\,d\rho^2}{f(\rho)} + \dfrac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)\,d\rho_1^2}{f(\rho_1)} + \dfrac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)\,d\rho_2^2}{f(\rho_2)}\right], \end{cases}$$

où l'on a posé

$$f(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2), \ldots, (\lambda - a_5).$$

§ VII. — *Des systèmes orthogonaux formés d'une famille de cyclides.*

Bien que nous ayons déjà indiqué un théorème général qui conduit à admettre que les cyclides faisant partie d'une même famille doivent être anallagmatiques par rapport aux cinq mêmes sphères, nous allons donner une autre démonstration qui s'applique aussi aux surfaces du second degré.

L'équation d'une famille de cyclides peut toujours être écrite

$$(111)\qquad \sum \frac{x_i^2}{a_i} = 0,$$

pourvu que l'on regarde dans cette équation les quantités a_i comme des fonctions du paramètre u et les quantités x_i comme des quantités variables, fonctions linéaires de x, y, z, $x^2+y^2+z^2$, dont les coefficients dépendront de u. Les équations

$$x_i = 0$$

représentent les cinq sphères par rapport auxquelles la cyclide de paramètre u est anallagmatique. Les quantités x_i dépendant de u et étant d'ailleurs liées par la relation

$$x_1^2 + \ldots + x_5^2 = 0,$$

on aura pour leurs dérivées des expressions de la forme

$$(112)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial u} = \alpha_{i1} x_1 + \ldots + \alpha_{i5} x_5,$$

où les α_{ik} sont des fonctions de u satisfaisant aux conditions

$$\alpha_{ii} = 0, \quad \alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0.$$

Ces équations sont toutes semblables à celles que l'on rencontre dans la théorie du déplacement d'une figure.

Cela posé, si les cyclides font partie d'un système orthogonal, chaque surface des deux autres familles leur sera orthogonale et les coupera suivant une ligne de courbure.

Si donc on considère la cyclide (C)

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i} = 0$$

faisant partie du système, toute autre surface (Σ) de l'une des deux autres familles pourra être considérée comme l'enveloppe de la cyclide (C′)

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i - t} = 0, \tag{113}$$

qui coupe la première cyclide orthogonalement suivant une ligne de courbure, t étant une fonction convenablement choisie du paramètre u. Pour avoir cette enveloppe, prenons la dérivée par rapport à u de l'équation (113), nous aurons

$$\sum \frac{x_i^2}{(a_i - t)^2} \left(\frac{dt}{du} - \frac{da_i}{du} \right) + \sum \frac{2 x_i \frac{dx_i}{du}}{a_i - t} = 0. \tag{114}$$

L'équation (114), si l'on y remplace les $\frac{dx_i}{du}$ par leurs valeurs déduites des formules (112), devient du second degré et représente une cyclide qui doit couper la cyclide (C′) (113) suivant la ligne de courbure intersection de (C) et de (C′). Or l'équation générale des cyclides passant par l'intersection de (C) et de (C′) s'obtient en combinant linéairement leurs équations. Il faut donc que l'équation (114), après qu'on y aura remplacé $\frac{dx_i}{du}$ par leurs valeurs, ne contienne pas de rectangle, ce qui entraîne les équations

$$\alpha_{ik} \left(\frac{1}{a_i - t} - \frac{1}{a_k - t} \right) = 0 = \alpha_{ik} \frac{a_i - a_k}{(a_i - t)(a_k - t)};$$

donc, tant que les cyclides considérées seront les cyclides générales et que l'on n'aura pas

$$a_i = a_k,$$

il faudra que l'on ait

$$\alpha_{ik} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dx_i}{du} = 0,$$

ce qui exige que les cinq sphères par rapport auxquelles la cyclide est anallagmatique soient fixes. On retrouve ainsi notre première proposition.

En exprimant que l'équation (114) est une combinaison linéaire de (111) et (113), on trouvera des équations qui définiront les fonctions a_i et t de u, et qu'on peut ramener au type suivant :

$$a_i \frac{da_i}{du} = m + 2na_i + pa_i^2, \tag{115}$$

$$t\frac{dt}{du} = m + 2nt + pt^2, \tag{116}$$

où m, n, p sont des fonctions quelconques de u. Une fois qu'on aura déterminé les fonctions a_i par les équations (115), l'intégration de la formule (116) avec une constante arbitraire donnera pour t une fonction de u et de la constante ε; ε sera le paramètre des deux autres familles qui complètent le système. On obtiendra leur équation en éliminant u entre les équations (111) et (113).

Supposons, par exemple, que l'on prenne

$$n = 0, \quad p = 0, \quad m = \tfrac{1}{2},$$

on aura

$$a_i^2 = u + \alpha_i, \quad t^2 = u + \varepsilon.$$

L'équation de la famille des cyclides sera

$$\sum \frac{x_i^2}{\sqrt{u + \alpha_i}} = 0;$$

les deux autres familles du système s'obtiendront en éliminant u entre les équations

$$\sum \frac{x_i^2}{\sqrt{u+\alpha_i}} = 0, \quad \sum \frac{x_i^2}{\sqrt{u+\alpha_i} - \sqrt{u+\varepsilon}} = 0,$$

ε désignant le paramètre de ces familles.

§ VIII. — *Extension de la méthode de formation de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre à l'étude de problèmes différents.*

La méthode que nous avons suivie pour former l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre dont dépend la recherche des systèmes orthogonaux repose sur l'élimination progressive des dérivées d'ordre supérieur de deux fonctions que nous avons appelées v, w. Elle s'étend donc naturellement à l'étude de la question suivante :

Trois fonctions u, v, w satisfaisant aux équations

$$\delta_u v = 0, \quad \delta_u w = 0, \quad \pi = 0,$$

où π ne contient que les fonctions v, w et leurs dérivées premières, chercher l'équation à laquelle satisfait u.

Nous avons vu, en effet (§ I^er^), que l'on peut, en prenant $\delta_u \pi$, éliminer toutes les dérivées secondes de v, w au moyen des deux premières équations et former ainsi une équation nouvelle ne contenant que les dérivées premières de v, w. En opérant de la même manière on en formera une troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait assez d'équations pour éliminer les dérivées de v, w.

Appliquons cette méthode à la solution du problème suivant. On sait qu'il existe une infinité de systèmes doubles orthogonaux définis de la manière suivante : la première famille (Σ) est formée des surfaces lieux des points dont la somme des distances à deux surfaces fixes (A) et (B) est constante ; la deuxième (Σ') est formée des surfaces lieux des points pour lesquels la différence des distances aux mêmes surfaces est constante, on demande si l'on peut compléter le système et adjoindre aux deux familles une troisième, formée de surfaces (S), les coupant à angle droit. Il est clair que cette question est identique à la suivante : *Étant données les surfaces parallèles à deux surfaces fixes* (A) *et* (B), *y a-t-il une troisième famille de surfaces les coupant à angle droit?*

On aura, pour les équations du problème,

$$(117) \qquad v_1^2+v_2^2+v_3^2=1, \quad w_1^2+w_2^2+w_3^2=1, \quad \partial_u v=0, \quad \partial_u w=0,$$

qui rentrent dans le type que nous avons examiné. On en déduira les suivantes :

$$(118) \qquad v_1^2 u_{11}+2v_1v_2u_{12}+\ldots=0,$$

puis

$$(119) \qquad \Sigma_i\Sigma_k v_i v_k(\partial_u u_{ik}-2\partial_{u_i}u_k)=0,$$

et des équations semblables pour w, et ce qui conduira à deux équations du troisième ordre pour la fonction u.

Mais la question se simplifie beaucoup si l'on emploie quelques considérations géométriques. Les surfaces v, w étant parallèles et orthogonales aux surfaces u, leurs normales doivent être en chaque point tangentes aux surfaces u. Il faut donc nécessairement que les surfaces u contiennent ces droites qui sont des trajectoires orthogonales des surfaces v, w. Les surfaces u doivent donc pouvoir être engendrées de deux manières par une droite, ce qui exige qu'elles soient des plans ou des surfaces du second degré.

Le cas où les surfaces sont des plans est facile à traiter. En effet, si, dans un plan, on trace deux familles de courbes parallèles et que l'on fasse rouler ce plan sur une surface développable, les courbes parallèles engendreront des surfaces parallèles répondant à la question proposée.

Le cas véritablement intéressant est celui où l'on suppose que les surfaces (u) sont du second degré. Comme ces surfaces font partie d'un système orthogonal, elles devront avoir les mêmes plans principaux. Commençons par supposer qu'elles ont un centre, et que leur équation soit

$$(119\ bis) \qquad ax^2+by^2+cz^2=1,$$

où a, b, c sont des fonctions de u.

On devra avoir ici

$$(120)\qquad \left\{\begin{array}{ll} v_1^2+v_3^2+v_2^2=1, & w_1^2+w_2^2+w_3^2=1, \\ axv_1+byv_2+czv_3=0, & axw_1+byw_2+czw_3=0, \end{array}\right.$$

et, en appliquant l'équation (118),

$$(121)\qquad \left\{\begin{array}{l} av_1^2+bv_2^2+cv_3^2=0, \\ aw_1^2+bw_2^2+cw_3^2=0. \end{array}\right.$$

Ces équations sont d'ailleurs géométriquement évidentes; elles expriment que les normales aux surfaces v, w sont les génératrices rectilignes de la surface. En écrivant que la deuxième équation (120) et la première (121) sont compatibles, c'est-à-dire que leur crochet est nul, on trouvera, après quelques réductions,

$$(122)\qquad \left\{\begin{array}{l} (a^2b'+b^2a')(xv_2-yv_1)^2+(b^2c'+c^2b')(yv_3-zv_2)^2 \\ \qquad\qquad +(c^2a'+a^2c')(zv_1-xv_3)^2=0, \end{array}\right.$$

et une équation semblable pour w; or, en combinant les équations (120), (121), on obtient facilement

$$(123)\qquad ab(xv_2-yv_1)^2+bc(yv_3-zv_2)^2+ca(zv_1-xv_3)^2=0.$$

Les équations (122), (123) devant être vérifiées aussi quand on y remplace v par w, doivent être identiques, l'une à l'autre, ce qui donne, comme conditions :

$$\frac{a^2b'+b^2a'}{ab}=\frac{b^2c'+c^2b'}{bc}=\frac{c^2a'+a^2c'}{ac};$$

si l'on écrit l'équation (119 *bis*) sous la forme

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1,$$

les équations précédentes deviennent

$$(124)\qquad C(dA+dB)=B(dA+dC)=A(dB+dC),$$

et elles définissent complétement le système cherché. On verra sans peine qu'elles entraînent, comme cela devait être, la relation (75).

Les équations (124) ne paraissent pas intégrables par les procédés connus. Il convient donc de traiter la même question pour les surfaces dépourvues de centre, et l'on sera ainsi conduit, au moins, au système des paraboloïdes que M. Serret a fait connaître le premier.

Un calcul tout semblable au précédent nous a donné comme solution la famille de paraboloïdes représentée par l'équation

$$\frac{y^2}{\alpha+u}+\frac{z^2}{\alpha-u}=2x+\alpha\log u, \tag{125}$$

où α est une constante arbitraire. Pour les cas où elle est nulle, on retrouve le système de M. Serret.

On pourrait trouver des familles de surfaces de révolution satisfaisant aux équations (124); mais je laisserai de côté l'examen de tous ces cas particuliers.