J.-M. BONY
N. LERNER

Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur. I

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 22, nº 3 (1989), p. 377-433
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1989_4_22_3_377_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 22, 1989, p. 377 à 433.

QUANTIFICATION ASYMPTOTIQUE ET MICROLOCALISATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR I

PAR J.-M. BONY ET N. LERNER (*)

Le but de cet article est d'associer à des classes de symboles sur (des ouverts de) $\mathbb{R}^{2n}$, des opérateurs agissant dans $\mathbb{R}^n$, de manière à pouvoir utiliser un calcul symbolique asymptotique. Nos classes de symboles seront définies comme dans [6], chap. 18, à l'aide de métriques sur l'espace des phases. La différence essentielle avec le calcul de Weyl de Hörmander est que celui-ci nécessite une hypothèse de tempérance sur la métrique, hypothèse que nous ne ferons pas, et qui nous interdit d'utiliser telle quelle la règle de quantification de Weyl.

Pour les applications que nous avons en vue, la propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, on est amené à souhaiter l'existence d'opérateurs dont le symbole ait un comportement singulier au voisinage du conormal d'une hypersurface S, plus ou moins singulière, de $\mathbb{R}^n$. Il se trouve que la condition de tempérance n'est jamais satisfaite pour ces types de symboles, même dans le cas de la seconde microlocalisation qui a permis (*voir* [1], [2]) l'étude de la propagation des singularités dans des cas relativement simples. Par contre, ces classes de symboles, et d'autres associées à des hypersurfaces S nettement plus singulières (*voir* le § 9) vérifieront les conditions de notre calcul.

Bien que le lecteur puisse trouver cet article un peu technique, nous voudrions le convaincre du fait que l'utilisation du calcul k-microdifférentiel est aussi facile que celle du calcul pseudo-différentiel usuel. On doit introduire une famille de métriques dans l'espace des phases

$$g_1 \leqq g_2 \leqq \dots \leqq g_k$$

et vérifier les conditions 5.1.1 à 5.1.3 (tempérance symétrique relative, comparabilité, lenteur et principe d'incertitude), vérifications qui dans la pratique (*voir* § 9) ne sont pas très difficiles.

Cela fait, le calcul s'utilise exactement comme le calcul symbolique (asymptotique) d'opérateurs pseudo-différentiels associé à une seule métrique g_k, et permet de définir des

(*) Travail réalisé en partie avec le soutien du NSF-Grant DMS 860 1755.

régularités k-microlocales dans des « espaces de Sobolev » associés. La seule différence est la nécessité de quantifier un symbole non par un seul opérateur, mais par une famille d'opérateurs A_δ dépendant d'un paramètre, ce qui n'est pas plus contraignant (et en fait de même nature) que l'obligation de choisir un opérateur proprement supporté lorsque l'on veut travailler localement dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Enfin, les résultats du paragraphe 8 sur les rapports entre $(k-1)^e$ et k^e-microlocalisation assurent de la possibilité de passer à une microlocalisation supérieure, lorsqu'il est nécessaire de faire une analyse plus fine dans l'espace des phases, puis de revenir aux régularités microlocales usuelles.

L'organisation de l'article est la suivante. Après quelques rappels sur le calcul de Weyl au paragraphe 1, on introduit au paragraphe 2 le concept essentiel de symbole confiné dans une boule de l'espace des phases, concept plus général, mais plus stable, que le concept de symbole supporté dans une boule. Les estimations du composé de deux symboles confinés dans deux boules différentes joueront un rôle crucial dans la suite.

Les paragraphes 3 et 4 sont consacrés à la première microlocalisation et à la quantification de Weyl usuelle, lorsque la métrique g n'est définie que dans un ouvert Ω de l'espace des phases. On introduit au paragraphe 3 la condition de température symétrique, qui doit remplacer dans ce cas la condition de tempérance de Hörmander. Elle garantit que le composé de deux symboles confinés dans des g-boules est encore confiné dans celles-ci, avec des semi-normes qui décroissent de manière contrôlée lorsque les boules s'éloignent.

Le paragraphe 4 décrit alors le calcul symbolique associé à cette première microlocalisation, calcul très voisin de celui développé par Hörmander dans $\mathbb{R}^{2n}$. Il y a lieu toutefois de distinguer entre opérateurs internes, associés à des symboles à support fortement inclus dans Ω, et les opérateurs externes (essentiellement ceux qui opèrent sur les précédents par composition), dont les symboles peuvent croître à la frontière de Ω.

Le paragraphe 5 décrit les conditions sous lesquelles une suite de k-métriques $g_1 \leqq \ldots \leqq g_k$ pourra donner lieu à un calcul k-microlocal. L'hypothèse essentielle (hypothèse 5.1.1) est une condition de tempérance relative, exprimant que chaque métrique est symétriquement tempérée dans les boules de la métrique précédente. Le point crucial est alors l'introduction au paragraphe 6 des symboles k-confinés. Ceux-ci, construits comme des « sandwiches » de symboles confinés pour les métriques $g_1, \ldots, g_k$, et qui cumuleront les propriétés de presque orthogonalité dues aux diverses tempérances relatives, auront un composé suffisamment petit lorsqu'ils sont confinés dans des boules éloignées (théorème 6.6.6).

Il devient alors facile de définir les opérateurs k-microdifférentiels comme des intégrales sur l'espace des phases d'opérateurs associés à des symboles k-confinés et de prouver, par exemple, des résultats de continuité sur L^2 à l'aide du lemme de Cotlar. Ces opérateurs constituent une algèbre, et le calcul symbolique asymptotique est valide.

Au paragraphe 9, nous donnons un certain nombre d'exemples de microlocalisations d'ordre supérieur associées à des données géométriques simples : une sous-variété isotrope, deux sous-variétés lagrangiennes se coupant franchement, plusieurs branches des courbes dans le plan ayant un contact d'ordre p (non nécessairement entier) avec l'axe des x. Nous en déduisons, dans ce dernier cas, la bonne définition des distributions conormales.

Des articles ultérieurs seront — nous l'espérons — consacrés à l'action des transformations canoniques, aux propriétés multiplicatives, et aux applications à la propagation des singularités non linéaires.

Une partie de ce travail a été réalisée au cours de deux séjours de l'un des auteurs (J.-M. B.) d'une part à l'Institut Mittag-Leffler, d'autre part à l'Université Purdue. Il tient à remercier chaleureusement ces deux institutions ainsi que L. Hörmander et M.S. Baouendi.

TABLE DES MATIÈRES

1. Notations et rappels

1.1. QUANTIFICATION DE WEYL. — La quantification de Weyl associe à une distribution $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}_X^{2n})$, avec $\mathbb{R}_X^{2n} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$, un opérateur a^w de $\mathscr{S}(\mathbb{R}_x^n)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}_x^n)$ défini par (*voir* [13])

$$a^w = \int a(X)\, \Sigma_X 2^n\, dX, \tag{1.1.1}$$

où $(\Sigma_{x,\,\xi} u)(y) = u(2x-y)\, e^{2i\langle y-x,\, \xi\rangle}$, avec $i = 2\pi\sqrt{-1}$ (1).
L'opérateur Σ_X est unitaire et autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $F_{u,\,v}(X) = (\Sigma_X u, v)$ est une fonction de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ si u et v sont dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, ce qui donne un sens à (1.1.1).

La formule (1.1.1) fournit également

$$(a^w u)(x) = \iint e^{i\langle x-y,\, \xi\rangle}\, a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy\, d\xi, \tag{1.1.2}$$

(1) $i = 2\pi\sqrt{-1}$. On s'est efforcé de ne jamais s'écarter de la terminologie reçue sans de très sérieuses raisons.

ainsi que la formule originale de Weyl [15]

$$a^w = \int \hat{a}(\theta)\, e^{i\theta \cdot M}\, d\theta, \qquad \theta = (\hat{x}, \hat{\xi}) \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{1.1.3}$$

où $\theta . M$ est l'opérateur autoadjoint $\hat{x} . x + \hat{\xi} . D_x$.

Pour de bonnes fonctions [dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ par exemple], on définit la loi de composition $\#$ par

$$(a \# b)^w = a^w \circ b^w, \tag{1.1.4}$$

et l'on a

$$(a \# b)(X) = 2^{2n} \iint e^{-2i[Y-X,\, Z-X]}\, a(Y)\, b(Z)\, dY\, dZ, \tag{1.1.5}$$

où $[.\,,\,.]$ est la forme symplectique définie par

$$[(x, \xi), (y, \eta)] = \langle \xi, y \rangle - \langle \eta, x \rangle. \tag{1.1.5'}$$

On a également

$$(a \# b)(X) = \exp \left\{ \frac{i}{2} [D_{X_1}, D_{X_2}] \right\} a(X_1)\, b(X_2)_{|\, X_1 = X = X_2} \tag{1.1.6}$$

où $\exp i/2\, [D_{X_1}, D_{X_2}]$ est l'opérateur de convolution dans $\mathbb{R}^{4n}$ correspondant à la multiplication par $\exp i/2\, [\Xi_1, \Xi_2]$ en transformée de Fourier.

La loi $\#$ n'est pas locale, et, pour de bonnes classes de symboles, on pourra donner un sens asymptotique à la loi $\tilde{\#}$, locale mais pour le moment purement formelle, obtenue en remplaçant l'exponentielle de (1.1.6) par son développement en série. On obtient

$$(a \tilde{\#} b)(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i [D_X, D_Y]}{2} \right)^k a(X)\, b(Y)_{|\, Y = X}, \tag{1.1.7}$$

c'est-à-dire $a \tilde{\#} b = ab + (1/2i)\, \{a, b\} + \ldots$, en notant $\{.\,,\,.\}$ le crochet de Poisson. On notera

$$\omega_\nu(a, b)(X) = \sum_{0 \leq j < \nu} \frac{1}{j!} \left(\frac{i [D_X, D_Y]}{2} \right)^j a(X)\, b(Y)_{|\, Y = X}. \tag{1.1.8}$$

1.2. Classes de symboles définies par des métriques

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ muni d'une métrique g (*i. e.* à tout point X de Ω on associe mesurablement une forme quadratique définitive positive g_X sur $\mathbb{R}^{2n}$).

On supposera que celle-ci est *lentement variable*, *i. e.* il existe $C_0 > 0$ tel que pour tous les X, Y dans Ω, pour tout T dans $\mathbb{R}^{2n}$,

$$g_X(X - Y) \leq C_0^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_0^{-1} g_Y(T) \leq g_X(T) \leq C_0\, g_Y(T). \tag{1.2.1}$$

On réservera le nom de *poids* à des fonctions $m:\Omega\to]0, +\infty[$ telles que l'on ait, pour une constante $C>0$,

$$g_X(X-Y)\leqq C_0^{-1} \quad\Rightarrow\quad C^{-1}\leqq m(X)/m(Y)\leqq C. \tag{1.2.2}$$

DÉFINITION 1.2.1. — *Pour Ω, g, m comme ci-dessus, on notera $S(m, g, \Omega)$ l'espace des $a\in C^\infty(\Omega)$ tels que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe une constante C_k telle que l'on ait, quels que soient X dans Ω et $T_1, \ldots, T_k$ dans $\mathbb{R}^n$,*

$$|\langle a^{(k)}(X), T_1\otimes\ldots\otimes T_k\rangle|\leqq C_k m(X)\prod_{j=1}^{k} g_X(T_j)^{1/2}, \tag{1.2.3}$$

où $a^{(k)}(X)$ est le tenseur k-dérivé de a au point X pour la structure affine de $\mathbb{R}^{2n}$.

Rappelons en outre que la métrique duale de g_X s'identifie via l'isomorphisme symplectique à la métrique g_X^σ sur l'espace des phases,

$$g_X^\sigma(T)=\sup_{W\neq 0}\frac{[T, W]^2}{g_X(W)}. \tag{1.2.4}$$

On notera également λ_g (ou λ) la fonction définie par

$$\lambda_g(X)=\inf_{T\neq 0}\left(\frac{g_X^\sigma(T)}{g_X(T)}\right)^{1/2}. \tag{1.2.5}$$

1.3. PRINCIPE D'INCERTITUDE ET CALCUL ASYMPTOTIQUE. — Nous supposerons toujours, dans la suite, que pour tout X de Ω

$$g_X\leqq g_X^\sigma, \tag{1.3.1}$$

cette condition affirmant que la localisation dans la boule $\{X'\,|\,g_X(X'-X)\leqq r^2\}$ n'est pas « interdite » par le principe d'incertitude. On a alors le résultat suivant, qui n'a d'intérêt que si la fonction λ ci-dessus n'est pas bornée supérieurement.

THÉORÈME 1.3.1. — *Sous les hypothèses précédentes, pour tout couple de poids m_1, m_2 (1.2.2), la série formelle (1.1.7) définit une application bilinéaire $\tilde{\#}$ de $S(m_1, g)/S(m_1\lambda^{-\infty}, g)\times(S(m_2, g)/S(m_2\lambda^{-\infty}, g)$ dans $S(m_1 m_2, g)/S(m_1 m_2\lambda^{-\infty}, g)$, où $S(m\lambda^{-\infty}, g)=\bigcap_N S(m\lambda^{-N}, g)$.*

On a noté ici $S(m, g)$ l'espace $S(m, g, \Omega)$ de la définition 1.2.1. En fait, dans la série (1.1.7), les termes successifs sont dans $S(m, g)$, $S(m\lambda^{-1}, g)$, ... et un argument « à la Borel » assure qu'il existe un élément de $S(m, g)$, uniquement défini modulo $S(m\lambda^{-\infty}, g)$, tel que ses différences avec les sommes partielles d'ordre N de (1.1.7) appartiennent à $S(m\lambda^{-N}, g)$.

Remarque 1.3.2. — Les classes de symboles introduits par l'un des auteurs [1] pour la seconde microlocalisation le long d'une variété lagrangienne Λ rentrent dans ce cadre lorsque Λ est le conormal d'une sous-variété linéaire de $\mathbb{R}^n$. Si celle-ci a pour équation

$x''=0$ (dans $\mathbb{R}^n_x=\mathbb{R}^p_{x'}\times\mathbb{R}^{n-p}_{x''}$), on définit la métrique g par

$$g_X=dx'^2+\frac{\langle\xi\rangle^2}{\lambda^2}dx''^2+\frac{1}{\lambda^2}d\xi'^2+\frac{1}{\langle\xi\rangle^2}d\xi''^2; \tag{1.3.2}$$

avec $\langle\xi\rangle^2=1+|\xi|^2$, $\lambda^2=1+|\xi'|^2+|x''|^2|\xi|^2$.

La fonction λ est alors précisément celle définie en (1.2.5). Les classes de symboles $\Sigma^{m,\,m'}$ de [1] sont exactement les classes $S(\langle\xi\rangle^m\lambda^{m'}, g)$. Par contre, si Λ est une sous-variété lagrangienne quelconque, ou même le conormal d'une sous-variété courbée, les classes de symboles $\Sigma^{m,\,m'}$ ne se laissent plus décrire à l'aide d'une métrique comme au paragraphe 1.2. Dans une publication ultérieure, l'étude de l'invariance par transformation canonique nous permettra notamment de quantifier de tels symboles.

1.4. Position du problème

Lorsque $\Omega=\mathbb{R}^{2n}$, et lorsque g vérifie en outre la propriété (*tempérance*) suivante :

$$g_Y\leqq C\,g_X(1+g^\sigma_Y(X-Y))^N, \tag{1.4.1}$$

pour C et N fixés, si le poids m vérifie une condition analogue, la théorie de Hörmander [6] permet d'associer [e.g. par la formule (1.1.2)] à tout élément a de $S(m, g)$ un opérateur a^w continu de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même et, lorsque $m=1$, de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même. Les formules (1.1.4) (1.1.5) (1.1.6) restent valables, l'opération $\#$ appliquant $S(m_1, g)\times S(m_2, g)$ dans $S(m_1 m_2, g)$. On peut vérifier facilement que les métriques (1.3.2), même pour $p=0$ (seconde microlocalisation par rapport à l'origine), ne satisfont pas à (1.4.1), et que les formules (équivalentes) (1.1.1) (1.1.2) (1.1.3) ne permettent pas de quantifier des symboles de $S(m, g)$ en opérateurs définis sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Notre objectif est de définir, sous des hypothèses plus faibles que la tempérance (1.4.1) — et vérifiées dans les applications que nous avons en vue — un calcul symbolique compatible avec la loi $\tilde{\#}$. Nous introduirons des classes d'opérateurs $O(m, g)$ et une application symbole σ de $O(m, g)/O(m\lambda^{-\infty}, g)$ dans $S(m, g)/S(m\lambda^{-\infty}, g)$ telles que

(*a*) $\sigma(A\circ B)=\sigma(A)\,\tilde{\#}\,\sigma(B)$,

(*b*) le symbole d'un bon opérateur (différentiel, pseudo-différentiel classique, ...) est (la classe de) son symbole usuel.

(*c*) σ est bijectif (à quelques restrictions de support près lorsque $\Omega\neq\mathbb{R}^{2n}$).

2. Estimations de confinement

Le but de ce paragraphe est d'obtenir des estimations pour le composé $a\#b$ défini par (1.1.5) de deux éléments de $\mathscr{S}$.

2.1. Confinement.

Définition 2.1.1. — *Soit g une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $g\leqq g^\sigma$ soient $a\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et $U\subset\mathbb{R}^{2n}$. On dit que a est g-confiné dans U si, pour tout entier* *k et pour tout* N, *il existe* $C_{k,\,N}$ *tel que, quels que soient* X, $T_1, \ldots, T_k$, *on ait*

$$(2.1.1)\qquad |\langle a^{(k)}(X), T_1\otimes\ldots\otimes T_k\rangle|\leqq C_{k,\,N}\prod_{j=1}^{k} g(T_j)^{1/2}(1+g^\sigma(X-U))^{-N/2},$$

avec $g^\sigma(X-U)=\inf\limits_{Y\in U} g^\sigma(X-Y)$ (g^σ défini en 1.2.4).

Notons que, ici comme dans tout le paragraphe 2, la métrique g est constante. L'espace des symboles g-confinés coïncide avec $\mathscr{S}$, mais il sera muni des semi-normes suivantes

$$(2.1.2)\qquad \|a\|_{k,\,N}^{g,\,U}=\sup_{\substack{X,\,T_1,\,\ldots,\,T_{k'}\\ k'\leqq k\\ g(T_1),\,\ldots,\,g(T_{k'})\leqq 1}} |\langle a^{(k')}(X), T_1\otimes\ldots\otimes T_{k'}\rangle|(1+g^\sigma(X-U))^{N/2},$$

et

$$(2.1.3)\qquad \|a\|_p^{g,\,U}=\max_{\substack{k\leqq p\\ N\leqq p}}\|a\|_{k,\,N}^{g,\,U}.$$

Pour les applications ultérieures au cas de métriques variables, il sera important d'obtenir des estimations avec des constantes indépendantes de g.

Lorsque g_1 et g_2 sont deux formes quadratiques définies positives sur $V=\mathbb{R}^{2n}$, on définit $g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma$ (moyenne harmonique), forme quadratique définie positive sur V, par la formule

$$(2.1.4)\qquad g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma=\left(\frac{g_1+g_2}{2}\right)^\sigma.$$

On vérifie facilement que l'on a

$$(2.1.5)\qquad (g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma)(T)=2\inf_{T_1+T_2=T}(g_1^\sigma(T_1)+g_2^\sigma(T_2)).$$

On a en outre les propriétés élémentaires suivantes :

$$(2.1.6)\qquad \begin{cases} g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma\leqq 2g_j^\sigma, & j=1,\,2\\ g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma\geqq g_1^\sigma & \text{si}\quad g_1^\sigma\leqq g_2^\sigma,\end{cases}$$

ainsi que la « formule de la médiane »

$$(2.1.7)\qquad 2g_1^\sigma(X-X_1)+2g_2^\sigma(X-X_2)=(g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma)(X_1-X_2)+2(g_1^\sigma+g_2^\sigma)(X-X_{12}),$$

où le point X_{12} ne dépend pas de X. C'est en fait le point où la fonction quadratique figurant au membre de gauche atteint son minimum.

LEMME 2.1.2. — *Soit a un symbole g-confiné dans la g-boule* $U_{0,\,1}$ *de centre* 0 *et de rayon* 1. *Alors, pour tout* $\varepsilon\in]0,\,1[$, *on a*

$$(2.1.8)\qquad a=\int_{U_{0,\,1+\varepsilon}} a_Z|g|^{1/2}\,dZ,$$

où a_Z est g-confiné dans la g-boule $U_{Z,\,\varepsilon}$ de centre Z et de rayon ε et vérifie les estimations suivantes [*en utilisant la notation* (2.1.3)]

$$(2.1.9)\qquad \| a_Z \|_p^{g,\,U_{Z,\varepsilon}} \leqq C(p, n, \varepsilon) \| a \|_p^{g,\,U_{0,1}}.$$

On a noté $|g|$ le déterminant de g. Il est important de noter son invariance par les transformations symplectiques de $\mathbb{R}^{2n}$.

Preuve. — Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, à support dans l'intervalle $[-1, 1]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(|Z|^2)\, dZ = 1$. On peut alors écrire

$$(2.1.10)\qquad a(X) = \int \tilde{a}_Y(X)\, |g|^{1/2}\, dY,$$

où on a posé

$$\tilde{a}_Y(X) = \varepsilon^{-2n} \chi(\varepsilon^{-2} g(X-Y))\, a(X).$$

La fonction $\tilde{a}$ a son support dans $U_{Y,\,\varepsilon}$ et on obtient aisément, quels que soient k, N, N′, les estimations

$$(2.1.11)\qquad \| a_Y \|_{k,\,N}^{g,\,U_{0,1}} \leqq C(k, n, \varepsilon) \| a \|_{k,\,N+N'}^{g,\,U_{0,1}} (1 + \min_{S \in U_{0,1},\, T \in U_{Y,\varepsilon}} g^\sigma(S-T))^{-N'}$$

Introduisons maintenant, pour tout point $Y \in \mathbb{R}^n$ le point $\pi_\varepsilon(Y) \in U_{0,\,1+\varepsilon}$ qui réalise le minimum de la g^σ-distance de Y à $U_{0,\,1+\varepsilon}$. On voit d'abord que le minimum figurant dans la relation ci-dessus est égal à $g^\sigma(Y - \pi_\varepsilon(Y))$.

D'autre part, pour tout point X du support de a_Y, qui appartient donc à $U_{Y,\,\varepsilon}$, on a $g^\sigma(X - U_{\pi_\varepsilon(Y),\,\varepsilon}) \leqq g^\sigma(X - U_{0,\,1})$. On peut donc majorer les semi-normes de confinement de a_Y dans $U_{\pi_\varepsilon(Y),\,\varepsilon}$ par les semi-normes correspondantes relatives à $U_{0,\,1}$. On déduit donc de (2.1.11) l'estimation

$$(2.1.12)\qquad \| a_Y \|_{k,\,N}^{g,\,U_{\pi_\varepsilon(Y),\varepsilon}} \leqq C(k, n, \varepsilon) \| a \|_{k,\,N+N'}^{g,\,U_{0,1}} (1 + g^\sigma(Y - U_{0,\,1+\varepsilon}))^{-N'}.$$

Nous pouvons maintenant obtenir la décomposition (2.1.8), où ε sera remplacé par 2 ε. Posons

$$(2.1.23)\qquad a_Z(X) = \int a_Y(X)\, \varepsilon^{-2n} \chi(\varepsilon^{-2} g(Z - \pi_\varepsilon(Y)))\, |g|^{1/2}\, dY.$$

On a bien $a = \int a_Z |g|^{1/2}\, dZ$ et il est clair que a_Z est identiquement nulle si Z n'appartient pas à $U_{0,\,1+2\varepsilon}$. D'autre part, pour $g(Z - \pi_\varepsilon(Y)) \leqq \varepsilon$ les semi-normes de confinement dans $U_{Z,\,2\varepsilon}$ sont majorées par les semi-normes correspondantes dans la boule $U_{\pi_\varepsilon(Y),\,\varepsilon}$ qui est incluse dans la précédente. On déduit donc de (2.1.12) et de (2.1.13), en minorant g^σ par g,

$$\| a_Z \|_{k,\,N}^{g,\,U_{Z,2\varepsilon}} \leqq C(n, k, \varepsilon) \| a \|_{k,\,N+N'}^{g,\,U_{0,1}} \int (1 + g(Y - U_{0,\,1+2\varepsilon}))^{-N'} |g|^{1/2}\, dY.$$

En choisissant N′ supérieur à $2n$, l'intégrale précédente est finie et indépendante de g. On a donc obtenu l'estimation (2.1.9), ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 2.1.3. — *Soit a un symbole g-confiné dans une g-boule* U *et soit* G *une forme quadratique définie positive telle que* $G \leqq g$. *Posons* $\rho = \max_{T} (g(T)/G(T))^{1/2}$. *Alors a est* G*-confiné dans la* G*-boule* V *de même centre et de même rayon, et on a*

$$\| a \|_{k, N}^{G, V} \leqq \rho^{k+N} \| a \|_{k, H}^{g, U}. \tag{2.1.14}$$

Il suffit en effet de remarquer que $g \leqq \rho^2 G$, $g^\sigma \geqq \rho^{-2} G^\sigma$ et que l'on a $U \subset V$.

2.2. ESTIMATIONS DE BICONFINEMENT. — Le théorème suivant constitue le résultat principal du paragraphe 2 et signifie essentiellement que $a_1 \# a_2$ jouit simultanément des propriétés de confinement de a_1 et de a_2.

THÉORÈME 2.2.1. — *Soient g_1 et g_2 deux formes quadratiques définies positives sur* $\mathbb{R}^{2n}$ *vérifiant* $g_j \leqq g_j^\sigma$ *et soient a_1 et a_2 respectivement confinés dans des g_j-boules* U_j *de rayon* $\leqq 1$. *On a alors, quels que soient k et l*

$$| (a_1 \# a_2)^{(l)} (X) T^l | \leqq A_{k, l} (g_1 + g_2)(T)^{l/2} \\ \times (1 + (g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma)(X - U_1) + (g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma)(X - U_2))^{-k/2}, \tag{2.2.1}$$

avec

$$A_{k, l} = C(n, k, l) \| a_1 \|_{2n+1+k+l} \| a_2 \|_{2n+1+k+l}.$$

On a noté ici $\| a_j \|_p = \| a_j \|_p^{g_j, U_j}$ [*cf.* (2.1.3)].

Nous utiliserons fréquemment le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.2.2. — *Pour tout* (p, N), *il existe* $q = q(p, N)$, $C = C(p, N)$ *tels que pour* a_1, a_2 *vérifiant les hypothèses du théorème* 2.2.1, *on ait*

$$\| a_1 \# a_2 \|_p^{g_1+g_2, U_1} + \| a_1 \# a_2 \|_p^{g_1+g_2, U_2} \\ \leqq C \| a_1 \|_q^{g_1, U_1} \| a_2 \|_q^{g_2, U_2} (1 + (g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma)(U_1 - U_2))^{-N}. \tag{2.2.2}$$

C'est une conséquence immédiate du théorème, il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire $\gamma (U_1 - U_2)^{1/2} \leqq \gamma (U_1 - X)^{1/2} + \gamma (U_2 - X)^{1/2}$ pour $\gamma = g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma$.

COROLLAIRE 2.2.3. — *Soient* g_1, g_2, U_1, U_2 *comme dans le théorème* 2.2.1 *avec* U_1, U_2 *de même centre et* $g_1 \leqq g_2$. *Alors pour tout p il existe* C, *q tels que pour* a_1, a_2 *vérifiant les hypothèses du théorème* 2.2.1 *on ait*

$$\| a_1 \# a_2 \|_p^{g_2, U_2} + \| a_2 \# a_1 \|_p^{g_2, U_2} \leqq C \| a_1 \|_q^{g_1, U_1} \| a_1 \|_q^{g_2, U_2}.$$

On a $g_1 \leqq g_2$ et donc $g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma \geqq g_2^\sigma$ [*cf.* (2.1.6)]. L'estimation (2.2.1) fournit alors le résultat.

Preuve du Théorème 2.2.1. — Considérons $\theta=\theta_{Y_1, X}$ de sorte que $g_2(\theta)=1$ et $[\theta, Y_1-X]=g_2^\sigma(Y_1-X)^{1/2}$. On a alors, pour k entier,

$$\left(\frac{1}{2}<\theta, D_{Y_2}>+1\right)^k e^{-2i[Y_1-X, Y_2-X]}=e^{-2i[Y_1-X, Y_2-X]}(1+g_2^\sigma(Y_1-X)^{1/2})^k.$$

Par suite

$$(a_1 \# a_2)(X)=\iint a_1(Y_1)\sum_{0\leqq l\leqq k} a_2^{[l]}(Y_2)(1+g_2^\sigma(Y_1-X)^{1/2})^{-k} \times e^{-2i[Y_1-X, Y_2-X]}2^{2n}\,dY_1\,dY_2$$

avec $a_2^{[l]}=\binom{k}{l}a_2^{(l)}\theta^l$, en notant θ^l la l-ième puissance tensorielle symétrique de θ. On obtient, quels que soient k, k_1 et N,

$$|(a_1\# a_2)(X)|\leqq\iint\|a_1\|_{0, k_1}(1+g_1^\sigma(X-U_1))^{-k_1/2}(1+g_2^\sigma(Y_1-X))^{-k/2} \times\|a_2\|_{k, N}(1+g_2^\sigma(Y_2-U_2))^{-N/2}\,2^{2n+k}\,dY_1\,dY_2.$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}(1+g_1^\sigma(Y_1-U_1))^{k_1/2}(1+g_2^\sigma(Y_1-X))^{k_1/2}&\geqq(1+g_1^\sigma(Y_1-U_1)+g_2^\sigma(Y_1-X))^{k_1/2}\\&\geqq 2^{-k_1/2}(1+g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma)(X-U_1))^{k_1/2},\end{aligned}$$

et il en résulte que l'on a, pour $k=k_1+k_2$,

$$\begin{aligned}(2.2.4)\quad |(a_1\# a_2)(X)|\leqq\|a_1\|_{0, k_1}\|a_2\|_{k, N}\,2^{2n+k+(k_1/2)}(1+(g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma)(X-U_1))^{-k_1/2}\\ \iint(1+g_2^\sigma(Y_1-X))^{-k_2/2}(1+g_2^\sigma(Y_2-U_2))^{-N/2}\,dY_1\,dY_2.\end{aligned}$$

D'autre part, si X_2 est le centre de la g_2-boule U_2, on a, pour tout $Y_2'\in U_2$,

$$1+g_2(Y_2-X_2)\leqq 1+2g_2(Y_2-Y_2')+2g_2^\sigma(Y_2'-X_2)\leqq 3+2g_2^\sigma(Y_2-Y_2'),$$

car $g_2\leqq g_2^\sigma$ et le g_2-rayon de U_2 est inférieur à 1. On obtient donc $1+g_2(Y_2-X_2)\leqq 3(1+g_2^\sigma(Y_2-U_2))$ et (2.2.4) nous fournit l'estimation

$$\begin{aligned}|(a_1\# a_2)(X)|\leqq C(n, N, k, k_1)\|a_1\|_{0, k_1}\|a_2\|_{k, N}(1+(g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma)\,(X-U_1))^{-k_1/2}\\ \times\iint(1+g_2^\sigma(Y_1-X))^{-k_2/2}(1+g_2(Y_2-X_2))^{-N/2}\,dY_1\,dY_2.\end{aligned}$$

Choisissons maintenant k_2 et N égaux à $2n+1$. En utilisant le fait que le produit des déterminants de g_2 et de g_2^σ est égal à 1, on obtient pour tout entier k_1

$$(2.2.5)\quad |(a_1\# a_2)(X)|\leqq C(k_1, n)\|a_1\|_{0, k_1}\|a_2\|_{2n+1+k_1, 2n+1}(1+(g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma)(X-U_1))^{-k_1/2}$$

On obtient de manière analogue

$$(2.2.6)\qquad |(a_1 \# a_2)(X)| \leqq C(k_1, n)\| a_2 \|_{0, k_1} \| a_1 \|_{2n+1+k_1, 2n+1} (1+(g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma)(X-U_2))^{-k_1/2}$$

En prenant le minimum des membres de droite dans (2.2.5) et (2.2.6), et en remplaçant k_1 par k, on obtient

$$|(a_1 \# a_2)(X)| \leqq C(k, n)\| a_1 \|_{2n+1+k} \| a_2 \|_{2n+1+k} \times (1+(g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma)(X-U_1)+(g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma)(X-U_2))^{-k/2}$$

Ceci donne le résultat (2.2.1) pour $l=0$. Pour $l \geqq 1$, il suffit de remarquer que pour toute dérivation D, on a $D(a \# b) = Da \# b + a \# Db$. La preuve du théorème 2.2.1 est complète.

PROPOSITION 2.2.4. — *Soient a_1, a_2 satisfaisant les hypothèses du théorème* 2.2.1. *On pose*

$$(2.2.7)\qquad R_\nu(a_1, a_2) = a_1 \# a_2 - \sum_{j<\nu} \frac{1}{j!}\left(\frac{i}{2}[D_{X_1}, D_{X_2}]\right)^j (a_1 \otimes a_2)|_{\text{Diagonale}}.$$

Alors $R_\nu(a_1, a_2)$ vérifie les estimations suivantes quels que soient k et l

$$(2.2.8)\qquad |R_\nu(a_1, a_2)^{(l)}(X)\, T^l| \leqq A_{k, l, \nu} \Lambda_{12}^{-\nu} ((g_1+g_2)(T))^{l/2} \times (1+(g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma)(X-U_1)+(g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma)(X-U_2))^{-k/2},$$

où l'on a posé

$$(2.2.9)\qquad \Lambda_{12} = \inf_T \left(\frac{g_1^\sigma(T)}{g_2(T)}\right)^{1/2} = \inf_T \left(\frac{g_2^\sigma(T)}{g_1(T)}\right)^{1/2},$$

et

$$(2.2.10)\qquad A_{k, 1, \nu} = C(k, n, l, \nu)\| a_1 \|_{2n+1+k+l+\nu}^{g_1, U_1} \| a_2 \|_{2n+1+k+l+\nu}^{g_2, U_2}$$

Preuve. — Notons tout d'abord que la proposition 2.2.4 fournit l'analogue suivant du Corollaire 2.2.2. Quels que soient p, ν et N, on a une estimation

$$(2.2.11)\qquad \| R_\nu(a_1, a_2)\|_p^{g_1+g_2, U_1} + \| R_\nu(a_1, a_2)\|_p^{g_1+g_2, U_2} \leqq \| a_1 \|_{q(p, \nu, N)}^{g_1, U_1} \| a_2 \|_{q(p, \nu, N)}^{g_2, U_2} \Lambda_{12}^{-\nu} C(p, \nu, N)(1+(g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma)(U_1-U_2))^{-N}.$$

Désignons par σ l'isomorphisme symplectique de $\mathbb{R}^{2n}$ sur son dual défini par $[Y, Z] = \langle Z, \sigma Y \rangle$. Pour a_1 et a_2 dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$, la formule suivante résulte de (1.1.5)

$$(2.2.12)\qquad (a_1 \# a_2)(X) = \int a_1\left(X + \frac{1}{2}\sigma^{-1}\Xi\right) e^{i\langle X, \Xi\rangle} a_2(\Xi)\, d\Xi$$

Par suite, on a

$$(a_1 \# a_2)(\mathrm{X}) = \sum_{0 \leqq j < \nu} a_1^{(j)}(\mathrm{X}) \int \left(\frac{1}{2}\sigma^{-1}\Xi\right)^j \frac{1}{j!} e^{i\langle \mathrm{X},\, \Xi\rangle} \hat{a}_2(\Xi)\, d\Xi$$
$$+ \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \int a_1^{(\nu)}\left(\mathrm{X} + \frac{\theta\sigma^{-1}\Xi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sigma^{-1}\Xi\right)^{\nu} e^{i\langle \mathrm{X},\, \Xi\rangle} \hat{a}_2(\Xi)\, d\Xi\, d\theta,$$

et donc

$$\mathrm{R}_\nu(a_1, a_2)(\mathrm{X}) = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \iint a_1^{(\nu)}(\mathrm{X} + \theta(\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X}))(\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X})^{\nu}$$
$$e^{-2i[\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X},\, \mathrm{Y}_2 - \mathrm{X}]} a_2(\mathrm{Y}_2)\, 2^{2n}\, d\mathrm{Y}_1\, d\mathrm{Y}_2\, d\theta.$$

Considérons $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{\mathrm{Y}_1,\, \mathrm{X}}$ tel que $g_2(\mathrm{T}) = 1$ et $[\mathrm{T}, \mathrm{Y}_1 - \mathrm{X}] = g_2^\sigma(\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X})^{1/2}$.

On a alors, pour k entier

$$\left(\frac{1}{2}\langle \mathrm{T}, \mathrm{D}_{\mathrm{Y}_2}\rangle + 1\right)^k e^{-2i[\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X},\, \mathrm{Y}_2 - \mathrm{X}]} = e^{-2i[\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X},\, \mathrm{Y}_2 - \mathrm{X}]}(1 + g_2^\sigma(\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X})^{1/2})^k.$$

Il vient donc, en réutilisant la notation (2.1.2), les métriques et les boules étant sous-entendues

$$|\mathrm{R}_\nu(a_1, a_2)(\mathrm{X})|$$
$$\leqq \iint \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} 2^{2n+k} \|a_1\|_{\nu,\, k} (1 + g_1^\sigma(\mathrm{X} + \theta(\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X}) - \mathrm{U}_1))^{-k_1/2}$$
$$g_1(\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X})^{\nu/2} \|a_2\|_{k,\, \mathrm{N}} (1 + g_2^\sigma(\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X}))^{-k/2} (1 + g_2^\sigma(\mathrm{Y}_2 - \mathrm{U}_2))^{-\mathrm{N}/2}\, d\mathrm{Y}_1\, d\mathrm{Y}_2\, d\theta.$$

Comme $\theta \in [0, 1]$, on a $g_2^\sigma(\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X}) \geqq g_2^\sigma(\theta(\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X}))$, et on a, pour $k = k_1 + k_2 + \nu$ et $\mathrm{N} = 2n + 1 = k_2$,

$$|\mathrm{R}_\nu(a_1, a_2)(\mathrm{X})| \leqq \iint \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} 2^{2n + k_2 + \nu + 3k_1/2} \|a_1\|_{\nu,\, k_1}$$
$$\times (1 + (g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma)(\mathrm{X} - \mathrm{U}_1))^{-k_1/2} \Lambda_{12}^{-\nu} \|a_2\|_{k_1 + k_2 + \nu,\, 2n+1}$$
$$\times (1 + g_2^\sigma(\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X}))^{-k_2/2} (1 + g_2^\sigma(Y_2 - \mathrm{U}_2))^{-(2n+1)/2}\, d\mathrm{Y}_1\, d\mathrm{Y}_2\, d\theta.$$

Comme dans la preuve du théorème 2.2.1, on obtient le résultat (2.2.8) pour $l = 0$ qui se généralise facilement au cas $l \geqq 1$.

2.3. Calcul de Weyl et calcul standard. — Nous allons étudier le groupe d'opérateurs J^t, défini (par exemple) sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ par

$$\mathrm{J}^t a(x, \xi) = e^{it\langle \mathrm{D}_x,\, \mathrm{D}_\xi\rangle} a(x, \xi).$$

Ces opérateurs jouent un rôle important pour le passage du calcul de Weyl au calcul symbolique classique. On a en effet (*voir* [6], [14])

$$a^w = (J^{1/2} a)(x, D), \qquad a(x, D) = (J^{-1/2} a)^w,$$

ainsi que la formule pour l'adjoint

$$(a(x, D))^* = (J^1 \bar{a})(x, D).$$

PROPOSITION 2.3.1. — *Soit g une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$ telle que $g \leqq g^\sigma$ et $g(x, \xi) = g(x, -\xi)$. Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ g-confinée dans une g-boule* U *de rayon $r \leqq 1$* (définition 2.1.1). *Quels que soient les entiers p et ν, il existe $C(p, \nu)$, $q(p, \nu)$ et $\mu(p, \nu)$ tels que l'on ait*

$$(2.3.1) \qquad \left\| J^t a - \sum_{0 \leqq j < \nu} (it D_x . D_\xi)^j \frac{a}{j!} \right\|_p^{g, U} \leqq \| a \|_{q(p, \nu)}^{g, U} \lambda^{-\nu} (1 + |t|)^{\mu(p, \nu)} C(p, \nu)$$

où

$$\lambda = \inf_T \left(\frac{g^\sigma(T)}{g(T)} \right)^{1/2}.$$

Nous nous bornerons à donner la démonstration (beaucoup moins technique) d'un résultat un peu plus faible, qui est par ailleurs celui que nous utiliserons : le théorème est valable en remplaçant, dans le membre de gauche de (2.3.1), la boule U par toute boule U′ de même centre (qu'on prendra égal à l'origine), et de rayon $r' > r$. Compte tenu du lemme de découpage 2.1.2, il suffit de le prouver avec $r' = r\sqrt{2}$.

Comme $g(x, \xi) = g(x, -\xi)$, on peut se ramener, par une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$, au cas où

$$g = \sum h_j (dx_j^2 + d\xi_j^2), \qquad 0 < h_j \leqq 1.$$

On notera γ la forme quadratique $\sum h_j dx_j^2$ dans $\mathbb{R}^n$, et, très abusivement, γ^σ la forme quadratique $\sum h_j^{-1} dx_j^2$. On a

$$J^t a(x, \xi) = \iint e^{-it^{-1} \langle y - x, \eta - \xi \rangle} a(y, \eta) \, dy \, d\eta \, |t|^{-n}.$$

Des intégrations par parties en η, fondées sur l'identité suivante

$$\left\{ 1 + \sum_{j=1}^n t^{-1} h_j^{-1} (x_j - y_j) D_{\eta_j} \right\}^k (e^{-it^{-1} \langle y - x, \eta - \xi \rangle})$$
$$= e^{-it^{-1} \langle y - x, \eta - \xi \rangle} (1 + t^{-2} \sum_j h_j^{-1} (y_j - x_j)^2)^k,$$

donnent immédiatement

$$|J^t a(x, \xi)| \leqq C \iint (1+t^{-2}\gamma^\sigma(x-y))^{-k/2} \|a\|_{k,N} (1+g^\sigma((y, \eta)-U))^{-N/2}\, dy\, d\eta.$$

En introduisant les γ-boules V et W, de rayon r, dans $\mathbb{R}^n_x$ et $\mathbb{R}^n_\xi$ respectivement, pour $k=N=l+n+1$, on obtient

$$\begin{aligned}|J^t a(x, \xi)| \leqq C \|a\|_{k,N} \int \{ (1+t^{-2}\gamma^\sigma(x-y))^{-l/2} (1+\gamma^\sigma(y-V))^{-l/2} \} \\ \times \{ (1+t^{-2}\gamma^\sigma(x-y))^{-(n+1)/2} (1+\gamma^\sigma(\eta-W))^{-(n+1)/2} \}\, dy\, d\eta.\end{aligned}$$

En reprenant les arguments précédant et suivant (2.2.4), on obtient respectivement le fait que la première accolade est majorée par $[1+\gamma^\sigma(x-V)]^{-l/2}$ et le fait que l'intégrale de la seconde accolade est finie car on peut estimer $[1+\gamma^\sigma(\eta-W)]^{-(n+1)/2}$ par $[1+\gamma(\eta)]^{-(n+1)/2}$.

On obtient donc, pour tout l,

$$|J^t a(x, \xi)| \leqq C_l \|a\|_{l+n+1} (1+\gamma^\sigma(x-V))^{-l/2}.$$

En échangeant les rôles de x et de ξ, on obtient une estimation analogue en $[1+\gamma^\sigma(\xi-W]^{-l/2}$, et donc, pour $\nu=0$, l'estimation voulue de confinement dans la g-boule de rayon $r\sqrt{2}$ (le calcul est identique pour les dérivées, J^t commutant avec les opérateurs de dérivation).

L'estimation pour $\nu \geqq 1$ s'obtient en utilisant la formule de Taylor pour J^t et le confinement déjà obtenu ($\nu=0$) de $J^{\theta t} a$.

2.4. Estimation de la norme $\mathscr{L}(L^2)$

Proposition 2.4.1. — *Soit a un symbole g-confiné dans une g-boule* U *de rayon* $\leqq 1$ (*on suppose toujours* $g \leqq g^\sigma$). *Il existe alors des constantes* c_n *et* d_n *ne dépendant que de la dimension telles que*

(2.4.1) (*a*) $$\|a^w\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leqq c_n \|a\|^{g, U}_{2n+1}$$

(2.4.2) (*b*) $$\|a\|_{0,0} = \|a\|_{L^\infty} \leqq \|a^w\|_{\mathscr{L}(L^2)} + d_n \lambda^{-1} \|a\|^{g, U}_{2, 0},$$

$\|a\|_p$ *et* $\|a\|_{k, l}$ *étant les semi-normes définies par* (2.1.3) *et* (2.1.2)

Preuve. — La formule de Segal ([11], th. 18.5.9 dans [6]) assure que, si χ est une transformation symplectique de $\mathbb{R}^{2n}$, on a $(a \circ \chi)^w = U^* a^w U$, où U est un opérateur unitaire sur L^2. Il suffit donc de démontrer le résultat lorsque $g \leqq \lambda^{-1}\Gamma_0$, en notant Γ_0 la métrique canonique de $\mathbb{R}^{2n}$. On sait en effet que l'on peut se ramener à ce cas par une transformation symplectique linéaire (*voir* [6] lemme 18.6.4).

L'opérateur unitaire correspondant à la translation de vecteur $Z=(z, \zeta)$ est l'opérateur τ_Z défini par $\tau_Z u(x) = u(x-z) e^{i(x-z/2, \zeta)}$. On a donc

$$(a^w \tau_Z u, \tau_z u) = (\tau_Z^* a^w \tau_Z u, u) = ((a(.-Z))^w u, u).$$

Appliquons ceci à la fonction $u_0(x)=2^{n/4}e^{-\pi|x|^2}$. Il est facile de calculer le troisième membre de la relation ci-dessus à l'aide de la formule (1.1.1), un calcul élémentaire montrant que $(\Sigma_Y u_0, u_0)=e^{-2\pi|Y|^2}$. On obtient

$$(a^w \tau_Z u_0, \tau_Z u_0)=2^n\int a(X-Z)\,e^{-2\pi|X|^2}\,dX=(a*\psi)(Z),$$

en posant $\psi(Y)=2^n e^{-2\pi|Y|^2}$.

Il suffit maintenant d'écrire la relation

$$(a*\psi)(Z)=a(Z)+2^n\iint_0^1(1-\theta)\,a''(Z+\theta Y)\,Y^2 e^{-2\pi|Y|^2}\,dY\,d\theta,$$

et on obtient

$$\|a\|_{L^\infty}\leqq\|a*\psi\|_{L^\infty}+d_n\sup_{|Y|=1}g(Y)\,\|a\|_{2,0}.$$

Par suite, si $g(Y)\leqq\lambda^{-1}|Y|^2$, on obtient le résultat (*b*) de la proposition 2.4.1. Quant à la première estimation, elle découle immédiatement de la relation $\|a^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}\leqq\|\hat{a}\|_{L^1}$, qui résulte elle-même de (1.1.3).

3. Tempérance symétrique et confinement

3.1. Préliminaires. — On se donne, pour les paragraphes 3 et 4, une métrique g, dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{2n}$, satisfaisant à (1.2.1) (lenteur) et (1.3.1) (principe d'incertitude). On notera $U_{X,r}$ la boule

(3.1.1) $$U_{X,r}=\{Y,\ g_X(Y-X)<r^2\}.$$

On dira qu'un ouvert est *g-conique* s'il est réunion de boules de rayon r pour un $r>0$ fixé(2). Pour V et V′ ouverts contenus dans Ω, on notera

(3.1.2) $$V_r=\{X\in V,\ U_{X,r}\subset V\},$$

(3.1.3) $$V'\subset\subset V\ \Leftrightarrow\ \exists r>0,\quad V'\subset V_r.$$

(2) Les exemples-types de tels ouverts sont, pour la microlocalisation classique associée à $g=dx^2+d\xi^2/|\xi|^2$, les ouverts de la forme $\omega\times\Gamma$, où ω et Γ sont respectivement un ouvert et un cône ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont les frontières sont lisses.

DÉFINITION 3.1.1 (*Tempérance symétrique*). — *Nous supposerons que g vérifie la condition suivante, pour* C_1 *et* N_0 *fixés :*

$$g_Y(\,.\,)/g_X(\,.\,) \leqq C_1 (1 + g^\sigma_{XY}(X-Y))^{N_0} \tag{3.1.4}$$

où

$$g^\sigma_{XY} = g^\sigma_X \wedge g^\sigma_Y = \left(\frac{g_X + g_Y}{2}\right)^\sigma.$$

Remarque 3.1.2. — Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^{2n}$, cette condition est équivalente à la condition de tempérance (1.4.1) de Hörmander. Pour $\Omega \neq \mathbb{R}^{2n}$, la tempérance symétrique est plus forte que (1.4.1) sur Ω, mais n'est requise que sur Ω. Dans le cas $\Omega = (\text{ouvert de } \mathbb{R}^n_x) \times \mathbb{R}^n_\xi$ on pourra consulter Dencker [5].

THÉORÈME 3.1.3 (*Partitions de l'unité*). — *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^{2n}$ *et, pour* $0 < r < r'$, *soient* Ω_r *et* $\Omega_{r'}$ *les ouverts définis par* (3.1.2). *Il existe alors une famille de fonctions* $(\varphi_Y)_{Y \in \Omega_r}$, *à support dans les boules* $U_{Y,r}$, *uniformément bornées dans* $S(1, g)$ (voir *définition* 1.2.3), *c'est-à-dire vérifiant pour tout k*

$$\sup_{X, Y, T_1, \ldots, T_k} |\langle \varphi^{(k)}_Y(X), T_1 \otimes \ldots \otimes T_k \rangle| / \prod_{j=1}^k g_X(T_j)^{1/2} < \infty,$$

et telle que l'on ait

$$\int_{\Omega_r} \varphi_Y |g_Y|^{1/2} \, dY = 1 \quad \text{sur } \Omega_r. \tag{3.1.5}$$

Preuve. — Soit $s \to \chi_0(s)$ une fonction réelle décroissante, de classe C^∞ égale à 1 pour $s \leqq 1/2$ et à 0 pour $s \geqq 1$. En désignant toujours par C_0 la constante de lenteur de (1.2.1), posons

$$\Gamma(X, \delta) = \int_\Omega \chi_0(\delta^{-1} g_Y(X-Y)) \, |g_Y|^{1/2} \, dY$$

pour $\delta \leqq C_0^{-1}$.

Il est facile de vérifier qu'il existe des constantes $L_0 > 0$ et K_k, ne dépendant que de C_0, r, r', δ, telles que l'on ait

$$\forall X \in \Omega_r, \quad \Gamma(X, \delta) \geqq L_0, \tag{3.1.6}$$

et

$$\forall X \in \Omega, \quad |\langle \Gamma^{(k)}(X, \delta), T_1 \otimes \ldots \otimes T_k \rangle| \leqq K_k \prod_{j=1}^k g_X(T_j)^{1/2}. \tag{3.1.7}$$

D'autre part, il résulte immédiatement de la condition de lenteur que, pour δ suffisamment petit (en fonction de C_0, r, r'), on a les relations

$$U_{Y,\delta} \cap \Omega_{r'} \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad Y \in \Omega_r, \tag{3.1.8}$$

$$Y \in \Omega_{r'} \quad \Rightarrow \quad U_{Y,\delta} \subset \Omega_r. \tag{3.1.9}$$

Le résultat découle aisément de (3.1.6)-(3.1.9) en posant

$$\varphi_Y(X) = \Gamma(X, \delta)^{-1} \chi_0(\delta^{-1} g_Y(X-Y)).$$

Notons que le théorème (3.1.3) n'utilise que la lenteur (1.2.1) de g. Ces partitions continues joueront le même rôle que les partitions discrètes de [6]. Si $a \in S(1, g, \Omega)$ (1.2.3) est à support dans $\Omega_{r'}$ ($r'>0$) on peut poser $a_Y = a\,\varphi_Y$ et on a

$$a = \int a_Y |g_Y|^{1/2} dY, \tag{3.1.10}$$

les a_Y étant uniformément bornées dans $S(1, g, \Omega)$ et à support dans $U_{Y,r}$.
Toutefois le support de $a_Y \# a_Y$ (1.1.5) contiendra en général des points extérieurs à Ω, où l'on ne dispose pas de métrique pour l'évaluer. C'est la raison de l'introduction du concept de confinement (2.1.1) moins restrictif que la condition de support.

Nous aurons à utiliser le lemme suivant, dont la démonstration est analogue.

LEMME 3.1.4. — *Soient* $0<r<r'$. *On peut trouver* $\delta>0$ *tel que, pour toute famille* $(a_Y)_{Y\in\Omega}$ *uniformément bornée d'éléments de* $S(1, g_Y)$, *avec* $\operatorname{Supp}(a_Y) \subset U_{Y,\delta}$, *la fonction a définie par*

$$a(X) = \int_{\Omega_{r'}} a_Y |g_Y|^{1/2} dY$$

appartienne à $S(1, g, \Omega)$ *et soit à support dans* Ω_r.

DÉFINITION 3.1.5. — On notera, pour X, Y *dans* Ω_r,

$$\delta_r(X, Y) = 1 + \inf\{ g^\sigma_{XY}(X'-Y'),\ X' \in U_{X,r},\ Y' \in U_{Y,r}\}. \tag{3.1.11}$$

Pour $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ on utilisera la notation suivante pour les semi-normes de confinement définies en (2.1.3):

$$\|a\|_{p,Y,r} = \|a\|_p^{g_Y, U_{Y,r}} \tag{3.1.12}$$

3.2. CONFINEMENT. — Les théorèmes qui vont suivre constituent le point essentiel de la construction d'un calcul de Weyl dans un ouvert Ω. Le théorème suivant assure que le composé de deux symboles confinés en Y et Z est confiné en ces deux points, les semi-normes de confinement décroissant comme toute puissance de la «distance» $\delta_r(Y, Z)$ définie ci-dessus. Le théorème 3.2.2 assure une croissance suffisante de δ_r pour Y loin de Z.

THÉORÈME 3.2.1 (Biconfinement). — *Soit g une métrique sur Ω vérifiant les conditions* (1.2.1) (*lenteur*), (1.3.1) (*principe d'incertitude*) *et* (3.1.4) (*tempérance symétrique*). *Quels que soient p, N, ν, il existe un entier q et une constante* C, *ne dépendant que des constantes de lenteur* (C_0) *et de tempérance* (C_1, N_0) *et de p, N, ν, tels que l'on ait l'estimation suivante, pour a, $b \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, pour $r \leqq C_0^{-1/2}$, et pour Y, $Z \in \Omega_r$,*

$$(3.2.1) \quad \left\| a \# b - \sum_{0 \leqq k < \nu} \frac{1}{k!} \left(\frac{i [D_{X_1}, D_{X_2}]}{2} \right)^k (a \otimes b)\big|_{\text{Diagonale}} \right\|_{p,\, Y,\, r} \leqq C \| a \|_{q,\, Y,\, r} \| b \|_{q,\, Z,\, r} \lambda_g(Y)^{-\nu} \delta_r(Y, Z)^{-N}$$

[λ_g *est défini en* (1.2.5) *et* Ω_r *en* (3.1.2)].

Preuve. — C'est une conséquence du théorème (2.2.1), de la proposition (2.2.4) et de la tempérance symétrique. Remarquons d'abord que pour $r^2 \leqq C_0^{-1}$ et Y, Z dans Ω_r, on a

$$(3.2.2) \quad \sup_t \frac{g_Y(t)}{g_Z(t)} \leqq \delta_r(Y, Z)^{N_0} C_0^{N_0+2} C_1.$$

On a en effet $\delta_r(Y, Z) = (1 + \inf g_{YZ}^\sigma(Y' - Z'))$ et en supposant $r^2 \leqq C_0^{-1}$, il vient [pour le N_0 et le C_1 de (3.1.4)]

$$\delta_r(Y, Z)^{N_0} \geqq (1 + \inf g_{Y', Z'}^\sigma(Y' - Z'))^{N_0} C_0^{-N_0} \geqq C_1^{-1} C_0^{-N_0} \inf \frac{g_{Y'}(t)}{g_{Z'}(t)} \geqq C_1^{-1} C_0^{-N_0-2} \frac{g_Y(t)}{g_Z(t)},$$

la première et la dernière inégalité étant des conséquences de la lenteur de g, la deuxième découlant de (3.1.4).

L'estimation (2.2.11) donne, pour tout entier N',

$$\| R_\nu(a, b) \|_p^{g_Y + g_Z,\, U_{Y, r}} \leqq \| a \|_{q\,(p,\, \nu,\, N')}^{g_Y,\, U_{Y, r}} \| b \|_{q\,(p,\, \nu,\, N')}^{g_Z,\, U_{Z, r}} \delta_r(Y, Z)^{-N'} \sup_t \left(\frac{g_Y(t)}{g_Z^\sigma(t)} \right)^{\nu/2} C(p, \nu, N').$$

En vertu de (3.2.2), on peut remplacer $g_Y + g_Z$ par g_Y dans le membre de gauche, et g_Z^σ par g_Y^σ dans le membre de droite, en perdant des puissances contrôlées de δ_r. Il vient, avec $C_3 = C_1 C_0^{N_0+2}$,

$$\| R_\nu(a, b) \|_{p,\, Y,\, r} \leqq \| a \|_{q,\, Y,\, r} \| b \|_{q,\, Z,\, r} \lambda_g(Y)^{-\nu} \delta_r(Y, Z)^{-N' + (N_0\, p/2) + (N_0\, \nu/2)} C_2^{(p/2) + (\nu/2)}.$$

Il suffit alors de choisir $N' = N + N_0 (p + \nu)/2$ pour conclure.

THÉORÈME 3.2.2. — *Il existe des constantes* N_1, N_2, C_2, C_3, C_4, r_0 *ne dépendant que des constantes de lenteur* [C_0 *en* (1.2.1)] *et de tempérance* [C_1, N_0 *en* (3.1.4)] *telles que l'on ait*

$$(3.2.3) \quad \sup_{\substack{X \in \Omega_r \\ r^2 \leqq C_0^{-1}}} \int_{\Omega_r} \delta_r(X, Y)^{-N_1} |g_Y|^{1/2} dY \leqq C_2,$$

et

(3.2.4) $(r \leqq r_0 \text{ et } g_X(Y-X) \geqq C_3 r^2) \Rightarrow (\lambda_g(X)+\lambda_g(Y) \leqq C_4 r^{-2} \delta_r(X, Y)^{N_2})$.

Preuve. — Soient X et Y appartenant à Ω_r. Il résulte immédiatement de l'inégalité triangulaire et de (3.2.2) que l'on a, quels que soient X′, Y′ et T,

$$1+g_X(Y-X) \leqq C_0^{N_0+2} C_1 \delta_r(X, Y)^{N_0} \\ 4(1+g_X(X-X')+g_X(X'-T)+g_Y(T-Y')+g_Y(Y'-Y)).$$

En majorant g par g^σ, puis en prenant l'infimum de la parenthèse pour $X' \in U_{X,r}$, $Y' \in U_{Y,r}$, $T \in \mathbb{R}^{2n}$, on obtient

$$(1+g_X(Y-X)) \leqq \delta_r(X, Y)^{N_0} \{8r^2+2\delta_r(X, Y)\} C_0^{N_0+2} C_1. \tag{3.2.5}$$

D'autre part, l'inégalité (3.2.2) entraîne la relation suivante sur les déterminants

$$|g_Y|^{1/2} \leqq |g_X|^{1/2} \delta_r(X, Y)^{N_0 n} (C_0^{N_0+2} C_1)^n. \tag{3.2.6}$$

Les inégalités (3.2.5) et (3.2.6) prouvent que l'intégrale dans (3.2.3) peut être estimée, pour N_1 assez grand, par celle de $(1+g_X(Y-X))^{-2n-1} |g_X|^{1/2}$ qui est fixe.

Démontrons (3.2.4). On peut trouver des points X′, Y′, Z tels que

$$\delta_r(X, Y) = 1+2g_X^\sigma(X'-Z)+2g_Y^\sigma(Z-Y').$$

L'estimation (3.2.2), et la définition (1.2.5) de λ_g donnent alors

$$\lambda_g(X)^2 g_X(X'-Y') \leqq g_X^\sigma(X'-Y') \leqq \delta_r(X, Y)^{N_0+1} C_0^{N_0+2} C_1.$$

En choisissant C_3 assez grand devant la constante de lenteur C_0, il résulte de l'hypothèse $g_X(Y-X) \geqq C_3 r^2$ que l'on a

$$g_X(X'-Y') \geqq r^2. \tag{3.2.7}$$

L'estimation (3.2.4) pour $\lambda(X)$ résulte alors de (3.2.7) et celle pour $\lambda(Y)$ de la conséquence suivante de (3.2.2) :

$$\frac{\lambda(Y)}{\lambda(X)} \leqq C\,\delta_r(X, Y)^{N_0}. \tag{3.2.8}$$

4. Calcul symbolique

Dans ce paragraphe, comme au paragraphe 3, g est une métrique sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{2n}$ satisfaisant à (1.2.1), (1.3.1) et (3.1.4).

4.1. Poids admissibles.

Définition 4.1.1. — *On appellera poids admissible, un poids m vérifiant* (1.2.2) *tel qu'il existe* C *et* N *avec*

$$\frac{m(\mathrm{Y})}{m(\mathrm{X})} \leqq \mathrm{C}(1+g^\sigma_{\mathrm{XY}}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}))^{\mathrm{N}}, \tag{4.1.1}$$

pour tous les X, Y *dans* Ω.

Exemples 4.1.2

Les fonctions $\mathrm{X} \mapsto g_{\mathrm{X}}(\mathrm{T}_0)$ et $\lambda_g(\mathrm{X})^s$ sont des poids admissibles [conséquence de (3.2.2) et (1.2.1)].

Pour tout T_0 le poids $\mu(\mathrm{X}) = |[\mathrm{X}, \mathrm{T}_0]| + g^\sigma_{\mathrm{X}}(\mathrm{T}_0)^{1/2}$ est un poids admissible. En effet, on a

$$\begin{aligned} |[\mathrm{X}, \mathrm{T}_0]| &\leqq |[\mathrm{Y}, \mathrm{T}_0]| + g_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})^{1/2} g^\sigma_{\mathrm{Y}}(\mathrm{T}_0)^{1/2} \\ &\leqq |[\mathrm{Y}, \mathrm{T}_0]| + \mathrm{C}'(g_{\mathrm{X}} \wedge g_{\mathrm{Y}})(\mathrm{X}-\mathrm{Y})^{1/2} g^\sigma_{\mathrm{Y}}(\mathrm{T}_0)^{1/2}(1+g^\sigma_{\mathrm{XY}}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}))^{\mathrm{N}_0}. \end{aligned}$$

On a donc l'estimation

$$\mu(\mathrm{X}) \leqq \mathrm{C}'' \mu(\mathrm{Y})(1+g^\sigma_{\mathrm{XY}}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}))^{\mathrm{N}_0+1}.$$

On vérifie facilement que la fonction $\mathrm{L}(\mathrm{X}) = [\mathrm{X}, \mathrm{T}_0]$ appartient à $\mathrm{S}(\mu, g, \Omega)$ (déf. 1.2.1).

Remarque 4.1.3. – Il résulte de (4.1.1) et de (1.2.1) qu'il existe C et N tels que l'on ait, quels que soient X et Y dans Ω_r, avec $r^2 \leqq \mathrm{C}_0^{-1}$,

$$m(\mathrm{X})\, m(\mathrm{Y})^{-1} \leqq \mathrm{C}\, \delta_r(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^{\mathrm{N}}. \tag{4.1.2}$$

4.2. Opérateurs internes.

Définition 4.2.1. — *Soit m un poids admissible, et* V *un ouvert de* Ω. *Nous dirons que l'opérateur* A *appartient à* $\mathrm{O}(m, g, \mathrm{V})$ *s'il existe* $r \leqq \mathrm{C}_0^{-1/2}$, $r' > r$ *et une famille* (a_{Y}) *mesurable, uniformément bornée de symboles confinés dans* $\mathrm{U}_{\mathrm{Y}, r}$ (*i. e.* $\sup\limits_{\mathrm{Y}} \| a_{\mathrm{Y}} \|_{p, \mathrm{Y}, r} < \infty$ *pour tout p*) *tels que*

$$\mathrm{A} = \int_{\mathrm{V}_{r'}} m(\mathrm{Y})\, a^w_{\mathrm{Y}} |g_{\mathrm{Y}}|^{1/2}\, d\mathrm{Y}. \tag{4.2.1}$$

Remarque (4.2.1)'. – La décomposition (4.2.1) n'est bien entendu pas unique. En utilisant le lemme (2.1.2) et (1.2.1), on peut supposer r aussi petit que l'on veut. L'intégrale (4.2.1) a un sens pour la convergence forte, comme l'assure le théorème suivant.

Théorème 4.2.2 (continuité). — (*a*) *Les opérateurs internes sont continus de* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *et de* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, *l'intégrale* (4.2.1) *convergeant fortement.*

(*b*) *Si* $m \equiv 1$, *ils sont continus de* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, *l'intégrale* (4.2.1) *convergeant fortement.*

(*c*) *Les opérateurs internes forment, pour la composition, une algèbre graduée par le groupe multiplicatif des poids admissibles, stable par adjonction. Plus précisément, si* $A \in O(m_1, g, V)$, $B \in O(m_2, g, \Omega)$ *alors* AB *et* $BA \in O(m_1 m_2, g, V)$.

Remarque. — Dans le cas $g \equiv g^\sigma$, le résultat (*b*) a été obtenu par Unterberger [14]. Ce dernier, en utilisant les oscillateurs harmoniques associés aux formes quadratiques g_Y, démontre la continuité L^2 des opérateurs de poids $m \equiv 1$ lorsque $k(Y, Z) = (1 + (g_Y \wedge g_Z)(Y - Z))^{-N}$ est le noyau d'un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^{2n})$.

Nous donnons ici une version précisée du lemme de Cotlar ([4] [7] [3], lemme 18.6.5 dans [6]). Le point nouveau est l'estimation (4.2.3) qui constitue l'expression optimale de la presque orthogonalité des A_j.

LEMME 4.2.3. — *Soient* H *un espace de Hilbert,* $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *une suite d'opérateurs bornés sur* H, *tels que*

$$\sup_j \sum_k \| A_j^* A_k \|^{1/2} \leqq M; \ \sup_j \sum_k \| A_j A_k^* \|^{1/2} \leqq M. \tag{4.2.2}$$

Alors, pour tout $u \in H$, *on a*

$$\sum_j \sum_k |(A_j u, A_k u)_H| \leqq M^2 \| u \|_H^2, \tag{4.2.3}$$

ce qui implique la convergence forte de $A = \sum A_j$ *et* $\| A \| \leqq M$.

Nous utiliserons et prouverons en fait la version plus générale suivante.

LEMME 4.2.3′. — *Soient* H *un espace de Hilbert,* $(\Omega, d\nu)$ *un espace mesuré avec* $d\nu$ *positive et* σ*-finie,* $(A_y)_{y \in \Omega}$ *une famille mesurable d'opérateurs bornés sur* H, *tels que*

$$\sup_{y \in \Omega} \int_\Omega \| A_y^* A_z \|^{1/2} d\nu(z) \leqq M; \ \sup_{y \in \Omega} \int_\Omega \| A_y A_z^* \|^{1/2} d\nu(z) \leqq M. \tag{4.2.2′}$$

Alors, pour tout $u \in H$, *on a*

$$\iint_{\Omega \times \Omega} |(A_y u, A_z u)_H| \, d\nu(y) \, d\nu(z) \leqq M^2 \| u \|^2, \tag{4.2.3′}$$

ce qui implique la convergence forte de

$$A = \int_\Omega A_y \, d\nu(y) \qquad et \qquad \| A \| \leqq M.$$

En pratique, nous utiliserons ce lemme avec $d\nu(Z) = |g_Z|^{1/2} dZ$ dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{2n}$.

Preuve. — La mesure $d\nu$ étant σ-finie, et l'application $y \mapsto \| A_y \|$ étant partout finie, l'espace Ω est réunion dénombrable d'ensembles mesurables K vérifiant $\nu(K) < \infty$ et

$\sup_{K} \| A_y \| < \infty$. Pour un tel K, posons

$$T_{K, \theta} = \int_{K \times K} A_y^* A_z \theta(y, z) \, d\nu(y) \, d\nu(z),$$

θ étant une fonction mesurable, vérifiant $|\theta| \leqq 1$.

On a $\| T_{K, \theta} \|^{2m} = \| (T_{K, \theta}^* T_{K, \theta})^m \|$, et par suite

$$\| T_{K, \theta} \|^{2m} = \left\| \int_{K^{4m}} A_{z_1}^* A_{y_1} A_{y_1'}^* A_{z_1'} \dots A_{z_m}^* A_{y_m} A_{y_m'}^* A_{z_m'} \right.$$
$$\left. \bar{\theta}(y_1, z_1) \dots \theta(y_m', z_m') \, d\nu(z_1) \dots d\nu(z_m') \right\|.$$

On utilise maintenant l'argument classique de Cotlar. Dans le produit d'opérateurs ci-dessus, on regroupe les termes deux par deux (en commençant par le premier ou par le second) et on majore la norme du produit de deux opérateurs consécutifs. Cela fournit deux estimations dont on prend la moyenne géométrique. On obtient alors, en utilisant (4.2.2)′,

$$\| T_{K, \theta} \|^{2m} \leqq M^{4m-1} \nu(K) \, (\sup_{K} \| A_y \|).$$

En prenant la puissance $(1/2\, m)$ de chaque membre et en faisant tendre m vers l'infini, on obtient $\| T_{K, \theta} \| \leqq M^2$.

Soit alors $u_0 \in H$ et soit $\theta(y, z)$ de module 1 tel que

$$(A_z u_0, A_y u_0)_H \, \theta(y, z) = |(A_y u_0, A_z u_0)_H|.$$

On a donc

$$(T_{K, \theta} u_0, u_0)_H = \int_{K \times K} (A_y^* A_z u_0, u_0) \, \theta(y, z) \, d\nu(y) \, d\nu(z),$$

et par suite

$$\int_{K \times K} |(A_y u_0, A_z u_0)_H| \, d\nu(y) \, d\nu(z) \leqq M^2 \| u_0 \|_H^2,$$

ceci donnant le résultat (4.2.3)′.

Démonstration du théorème 4.2.2 (*b*). — Le théorème (3.2.1), pour $\nu = 0$, donne

(4.2.4) $\quad \| \bar{a}_Y \# a_Z \|_{p, Y, r} + \| a_Y \# \bar{a}_Z \|_{p, Y, r} \leqq C(p, N) \, \| a_Y \|_{q, Y, r} \, \| a_Z \|_{q, Z, r} \, \delta_r(Y, Z)^{-N},$

où $q=q(p, \mathrm{N})$. Il résulte alors de (2.4.1), (4.2.4) et de l'uniformité dans la définition 4.2.1 que l'on a

$$\begin{aligned}\|(a_{\mathrm{Y}}^w)^* a_{\mathrm{Z}}^w\|_{\mathscr{L}(\mathrm{L}^2)}^{1/2}+\|a_{\mathrm{Y}}^w (a_{\mathrm{Z}}^w)^*\|_{\mathscr{L}(\mathrm{L}^2)}^{1/2} \\ \leqq |\mathrm{S}^{2n-1}|\, 2^{3n}(\|\bar{a}_{\mathrm{Y}}^w \# a_{\mathrm{Z}}^w\|_{2n+1,\,\mathrm{Y},\,r}^{1/2}+\|a_{\mathrm{Y}} \# \bar{a}_{\mathrm{Z}}\|_{2n+1,\,\mathrm{Y},\,r}^{1/2}) \\ \leqq \mathrm{C}'(\sup_{\mathrm{Y}} \|a_{\mathrm{Y}}\|_{q,\,\mathrm{Y},\,r})\, \delta_r(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})^{-\mathrm{N}/2} \leqq \mathrm{C}''\, \delta_r(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})^{-\mathrm{N}/2}.\end{aligned}$$

Le Théorème 3.2.2 (1) assure alors que la condition (4.2.2)′ est vérifiée. On peut donc conclure en utilisant le lemme (4.2.3)′.

LEMME 4.2.4. — *Pour tout $r'>0$, et pour tout r suffisamment petit devant r', si (a_{Y}) est une famille uniformément bornée de symboles confinés dans $\mathrm{U}_{\mathrm{Y},\,r}$, et si m est un poids admissible, l'application*

$$u \mapsto \int_{\mathrm{V}_{r'}} m(\mathrm{Y})\, \|a_{\mathrm{Y}}^w u\|_{\mathrm{L}^2}\, |g_{\mathrm{Y}}|^{1/2}\, d\mathrm{Y}$$

est une semi-norme sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. En particulier, l'opérateur A *défini par* (4.2.1) *applique continûment $\mathscr{S}$ dans L^2.*

Soit Y_0 un point de $\mathrm{V}_{r'}$. Le calcul symbolique (usuel!) pour la métrique fixe g_{Y_0} permet d'écrire, pour chaque ν :

$$1=\beta_\nu \# \gamma_\nu + r_\nu$$

où

$$\begin{gathered}\gamma_\nu(\mathrm{X})=[1+g_{\mathrm{Y}_0}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}_0)]^\nu \\ \beta_\nu \in \mathrm{S}(\gamma_\nu^{-1}, g_{\mathrm{Y}_0}, \mathbb{R}^{2n}) \\ r_\nu \in \mathrm{S}(\gamma_\nu^{-\infty}, g_{\mathrm{Y}_0}, \mathbb{R}^{2n}).\end{gathered}$$

Pour chaque semi-norme de confinement dans $\mathrm{U}_{\mathrm{Y}_0,\,r}$, on a $\|r_\nu\|_{p,\,\mathrm{Y}_0,\,r}<\infty$, et on a également $\|\beta_\nu\|_{p,\,\mathrm{Y}_0,\,r}<\infty$ pourvu que ν soit supérieur à un certain $\nu(p)$ [comparer les définitions 1.2.1 et (3.1.12)].

Pour chaque entier N, il résulte du théorème 3.2.1 et de la Proposition 2.4.1 que l'on a

$$\|a_{\mathrm{Y}}^w \circ \beta_\nu^w\|_{\mathscr{L}(\mathrm{L}^2)} \leqq \mathrm{C}'\, \delta_r(\mathrm{Y}_0, \mathrm{Y})^{-\mathrm{N}}\, \|a_{\mathrm{Y}}\|_{p,\,\mathrm{Y},\,r}\, \|\beta_\nu\|_{p,\,\mathrm{Y}_0,\,r}$$

où p ne dépend que de N.

On a donc, pour ν choisi assez grand devant N, et C″ indépendante de Y (mais pas de Y_0!) :

$$\begin{gathered}a_{\mathrm{Y}}^w u=(a_{\mathrm{Y}}^w \circ \beta_\nu^w) \circ \gamma_\nu^w u + a_{\mathrm{Y}}^w \circ r_\nu^w u \\ \|a_{\mathrm{Y}}^w u\|_{\mathrm{L}^2} \leqq \mathrm{C}''\, \delta_r(\mathrm{Y}_0-\mathrm{Y})^{-\mathrm{N}}(\|\gamma_\nu^w u\|_{\mathrm{L}^2}+\|u\|_{\mathrm{L}^2}).\end{gathered}$$

Il suffit maintenant de choisir N (puis ν) assez grand pour compenser le rapport $M(Y)/M(Y_0)$ [*voir* (4.1.2)] et rendre sommable l'intégrale [*voir* (3.2.3)]. On obtient

$$\int_{V_{r'}} m(Y) \| a_Y^w u \|_{L^2} |g_Y|^{1/2} dY \leqq C''' M(Y_0) (\| \gamma_\nu^w u \|_{L^2} + \| u \|_{L^2}).$$

Le membre de droite est bien une semi-norme sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

LEMME 4.2.5. — *Pour toute forme linéaire* L *sur* $\mathbb{R}^{2n}$, *il existe un poids admissible* m *tel que les applications*

$$a \mapsto m(Y)^{-1} L \# a$$

$$a \mapsto m(Y)^{-1} a \# L$$

appliquent continûment, uniformément en Y, *l'espace des symboles confinés dans* $U_{Y,r}$ *dans lui-même.*

On a $a \# L = a.L + (1/2i) \{a, L\}$. Si $L(X) = [X, T_0]$, nous avons vu (exemple 4.1.2) que $L \in S(\mu, g, \Omega)$ où $\mu = |L(X)| + g_X^\sigma(T_0)^{1/2}$ est un poids admissible. Il suffit de choisir $m = \mu$ et le résultat découle de la formule de Leibniz.

Démonstration du théorème 4.2.2 (*a*). — Soit donc

$$A = \int m(Y) a_Y^w |g_Y|^{1/2} dY.$$

Il suffit de démontrer que A applique $\mathscr{S}$ dans L^2. En effet, en utilisant ceci pour les opérateurs $(L_1 \# \ldots \# L_k \# a)^w$ qui sont du même type d'après le lemme 4.2.5, on obtient la continuité sur $\mathscr{S}$.

D'après le lemme 4.2.4, on a

$$\| A u \|_{L^2} \leqq \int m(Y) \| a_Y^w u \|_{L^2} |g_Y|^{1/2} dY < \infty$$

dès que $u \in \mathscr{S}$, et donc le résultat.

Démonstration du théorème 4.2.2 (*c*). — La stabilité par adjonction est triviale, les symboles confinés étant (uniformément) stables par conjugaison complexe. Soient maintenant $A = \int_{V_{r'}} m_1(Y) a_Y^w |g_Y|^{1/2} dY$ et $B = \int_{\Omega_{r'}} m_2(Z) b_Z^w |g_Z|^{1/2} dZ$ deux opérateurs internes du type 4.2.1. En utilisant la remarque (4.2.1)′ on peut supposer que les rayons de confinement des a_Y et b_Z sont les mêmes.

Grâce au théorème 3.2.1 pour $\nu = 0$, le symbole $a_Y \# b_Z$ est biconfiné de même rayon avec un « gain » de $\delta_r(Y, Z)^{-N}$ avec N aussi grand que l'on veut, ce qui permet, en particulier, « d'absorber » le rapport $m_2(Z)/m_2(Y)$ grâce à (4.1.2). Le résultat (3.2.3) prouve alors que les symboles

$$c_{\mathrm{Y}}=\int \frac{m_2(\mathrm{Z})}{m_2(\mathrm{Y})}\, a_{\mathrm{Y}} \# b_{\mathrm{Z}} \,|g_{\mathrm{Z}}|^{1/2}\, d\mathrm{Z}$$

sont uniformément confinés en Y et on a

$$\mathrm{AB}=\int m_1(\mathrm{Y})\, m_2(\mathrm{Y})\, c_{\mathrm{Y}}^{w} \,|g_{\mathrm{Y}}|^{1/2}\, d\mathrm{Y}.$$

Remarque 4.2.6. — La démonstration précédente montre que, pour $\mathrm{A}\in \mathrm{O}(m, g, \mathrm{V})$, les applications $a \mapsto b$ définies par $b^w = m(\mathrm{Y})^{-1} a^w \mathrm{A}$ [ou $b^w = m(\mathrm{Y})^{-1} \mathrm{A}\, a^w$] sont uniformément continues de l'espace des symboles g_{Y}-confinés dans $\mathrm{U}_{\mathrm{Y},\, r}$ dans lui-même.

4.3. Quantification exacte. — On peut définir l'espace des « symboles internes » de poids m comme l'espace des a de la forme

$$a(\mathrm{X})=\int_{\mathrm{V}_{r'}} m(\mathrm{Y})\, a_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}) \,|g_{\mathrm{Y}}|^{1/2}\, d\mathrm{Y}, \tag{4.3.1}$$

sous les conditions du paragraphe 4.2. On peut démontrer que ce sont des fonctions C^∞ dans $\mathbb{R}^{2n}$, à croissance lente, ainsi que chacune de leurs dérivées. L'opération $\#$ s'étend à ces espaces, qui forment une algèbre graduée, isomorphe (par $a \mapsto a^w$) à celle des opérateurs internes. Les caractérisations que l'on peut donner de ces espaces ne sont toutefois guère plus explicites que (4.3.1). Par contre, modulo des symboles négligeables, ils coïncident avec les espaces de symboles à support dans V, ce qui rend le calcul asymptotique beaucoup plus maniable.

4.4. Quantification asymptotique

Définition 4.4.1. — (*a*) *On note* $\mathrm{S}_0(m, g, \mathrm{V})$ *l'espace des* $a\in \mathrm{S}(m, g, \mathrm{V})$ *qui vérifient* Supp $a \subset\subset \mathrm{V}$ [voir (3.1.3)].

(*b*) *On note* $\mathrm{S}_{\mathrm{loc}}(m, g, \mathrm{V})$ *l'espace des* $a\in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{V})$ *tel que, pour tout* $\mathrm{V}' \subset\subset \mathrm{V}$, *il existe* $b\in \mathrm{S}(m, g, \mathrm{V})$ *tel que* $a\equiv b$ *dans* V'.

Si $a\in \mathrm{S}_0(m, g, \mathrm{V})$, l'opérateur a^w est *a priori* défini de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}'$. On peut le mettre sous la forme

$$a^w=\int m(\mathrm{Y})\, [m(\mathrm{Y})^{-1} \varphi_{\mathrm{Y}}\, a]^w \,|g_{\mathrm{Y}}|^{1/2}\, d\mathrm{Y}$$

où φ_{Y} est une g-partition de l'unité (théorème 3.1.3), ce qui assure que $a^w \in \mathrm{O}(m, g, \mathrm{V})$.

Réciproquement, si $\mathrm{A}\in \mathrm{O}(m, g, \mathrm{V})$ est mis sous la forme (4.2.1), on peut lui associer un élément $\sigma_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ de $\mathrm{S}_0(m, g, \mathrm{V})$, dépendant en fait de l'écriture (4.2.1), par

$$\sigma_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})=\int_{\mathrm{V}_{r'}} m(\mathrm{Y})\, a_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X})\, \chi_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}) \,|g_{\mathrm{Y}}|^{1/2}\, d\mathrm{Y}, \tag{4.4.1}$$

où les χ_Y forment une famille uniformément bornée d'éléments de $S(1, g, V)$, à support dans $U_{Y, r'}$ et égaux à 1 dans $U_{Y, r''}$, avec $r<r''<r'$.

THÉORÈME 4.4.2. — *Soient* $a_j \in S_0(m_j, g, V)$, $j=1, 2$, *alors*

$$R = a_1^w \circ a_2^w - [\omega_\nu(a_1, a_2)]^w \in O(m_1 m_2 \lambda^{-\nu}, g, V).$$

Rappelons (1.1.8), que $\omega_\nu(\ ,\ )$ désigne la somme des ν premiers termes de la série définissant $a_1 \tilde{\#} a_2$. En posant $a_{jY} = a_j \varphi_Y$, où φ_Y est une partition de l'unité, on a

$$R = \iint m_1(Y) m_2(Z) [a_{1Y} \# a_{2Z} - \omega_\nu(a_{1Y}, a_{2Z})]^w |g_Y|^{1/2} |g_Z|^{1/2} dY\, dZ.$$

En reprenant mot pour mot la démonstration du théorème 4.2.2 (*c*), et en utilisant l'estimation (3.2.1), on obtient

$$R = \int m_1(Y) m_2(Y)\, \lambda(Y)^{-\nu} c_Y^w |g_Y|^{1/2} dY$$

avec les c_Y uniformément confinés, et donc le résultat

Remarque 4.4.3. — Comme dans la remarque 4.2.6, on obtient également le résultat suivant. Si $a \in S_0(m, g, V)$, l'application

$$b \mapsto m(Y)^{-1} \lambda(Y)^\nu [a \# b - \omega_\nu(a, b)]$$

est continue, uniformément en Y, de l'espace des symboles confinés dans $U_{Y, r}$ dans lui-même.

THÉORÈME 4.4.4. — *Si* A *appartient à* $O(m, g, V)$, *la classe de* σ_A *dans* $S_0(m, g, V)/S_0(m\lambda^{-\infty}, g, V)$ *ne dépend que de* A, *et non de l'écriture* (4.2.1) *ou du choix des* χ_Y.

La quantification de Weyl et l'application $A \mapsto \sigma_A$ *induisent des isomorphismes, inverses l'un de l'autre, entre les algèbres graduées* $S_0(m, g, V)/S_0(m\lambda^{-\infty}, g, V)$ *muni de la loi* # [voir (1.1.7)] *et* $O(m, g, V)/O(m\lambda^{-\infty}, g, V)$ *muni de la composition.*

Montrons d'abord que, si $A \in O(m, g, V)$, on a $A - \sigma_A^w \in O(m\lambda^{-\infty}, g, V)$. Cela résulte du fait que, avec les notations précédentes, $\lambda(Y)^N (a_Y - \chi_Y a_Y)$ est une famille uniformément bornée de symboles confinés pour tout N. En effet, l'estimation de confinement (2.1.1) dans $U_{Y, r}$, et l'inégalité $g_Y^\sigma \geqq \lambda(Y)^2 g_Y$, permettent de gagner une puissance arbitraire de $\lambda(Y)$ hors de $U_{Y, r''}$.

Il reste à prouver que, si $a \in S_0(m, g, V)$ et si $a^w \in O(m\lambda^{-\infty}, g, V)$, on a $a \in S_0(m\lambda^{-\infty}, g, V)$. Pour chaque N, il résulte de la remarque 4.2.6 que les symboles $\lambda(Z)^N m(Z)^{-1} (a \# \chi_Z)$ constituent une famille uniformément bornée de symboles confinés dans $U_{Z, r''}$. D'autre part, en remarquant que $\omega_\nu(a, \chi_Z) = a$ dans $U_{Z, r}$ il résulte de la remarque 4.4.3 que les symboles $\lambda(Z)^N m(Z)^{-1} (a \# \chi_Z - a)$ restreints à $U_{Z, r}$ sont uniformément bornés dans $S(1, g_Z, U_{Z, r})$. Les semi-normes de a dans $S(m\lambda^{-N}, g, V)$ sont donc finies, ce qui achève la démonstration du théorème.

4.5. RÉGULARITÉ MICROLOCALE.

DÉFINITION 4.5.1. — *Soient* $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, *m un poids admissible, et* V *un ouvert g-conique contenu dans* Ω. *On dit que* $u \in \mathrm{H}(m, g, \mathrm{V})$ [*ou est dans* $\mathrm{H}(m)$ *microlocalement dans* V] *si, pour tout* $\mathrm{A} \in O(m, g, \mathrm{V})$, *on a* $\mathrm{A}\, u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

THÉORÈME 4.5.2. — (*a*) *Si* B *appartient à* $O(m, g, \Omega)$, *alors pour tout* $\mathrm{V} \subset \Omega$, B *applique* $\mathrm{H}(m', g, \mathrm{V})$ *dans* $\mathrm{H}(m' m^{-1}, g, \mathrm{V})$.

(*b*) *Si* B *appartient à* $O(m, g, \mathrm{V})$ *et s'il applique* $\mathrm{H}(m', g, \mathrm{V})$ *dans* $\mathrm{H}(m' m^{-1} \lambda^{-\infty}, g, \mathrm{V})$ *pour un poids admissible* m', *alors* $\mathrm{B} \in O(m \lambda^{-\infty}, g, \mathrm{V})$.

Le point (*a*) résulte immédiatement du fait que, pour $\mathrm{A} \in O(m' m^{-1}, g, \mathrm{V})$, on a $\mathrm{AB} \in O(m', g, \mathrm{V})$.

Nous nous bornons ici à décrire brièvement la preuve de la partie (*b*). En effet, cette démonstration sera faite dans un cadre plus général au lemme 7.4.4.

On se ramène par calcul symbolique au cas où $m' \equiv 1$ [on a alors $\mathrm{L}^2 \subset \mathrm{H}(m, g, \mathrm{V})$] Grâce à une récurrence et à un argument d'interpolation classique, on peut se borner à prouver que $\lambda(\mathrm{Z})\, m(\mathrm{Z})^{-1}\, b(\mathrm{Z})$ est borné. Une application du théorème du graphe fermé permet de montrer que les $\lambda(\mathrm{Z})\, m(\mathrm{Z})^{-1}(\chi_{\mathrm{Z}} \# b)^w$ constituent une famille uniformément bornée dans $\mathscr{L}(\mathrm{L}^2)$. D'autre part, les $m(\mathrm{Z})^{-1}(\chi_{\mathrm{Z}} \# b)$ constituent une famille bornée de symboles confinés dans $\mathrm{U}_{\mathrm{Z},\, r''}$, d'après la remarque 4.2.6. La proposition 2.4.1 (*b*) montre alors que les $\lambda(\mathrm{Z})\, m(\mathrm{Z})^{-1}(\chi_{\mathrm{Z}} \# b)$ sont uniformément bornés dans L^∞, et donc le résultat.

4.6. OPÉRATEURS EXTERNES. — Les opérateurs différentiels à coefficients constants ou modérés, et notamment l'identité, ne sont pas en général des opérateurs internes, mais ils opèrent sur ces derniers par composition. Ils appartiennent aux classes suivantes qui jouissent encore d'un calcul symbolique, associé aux espaces $\mathrm{S}_{\mathrm{loc}}(m, g, \mathrm{V})$ [*cf.* Déf. 4.4.1 (*b*)].

DÉFINITION 4.6.1. — *On note* $\mathrm{O\,ext}(m, g, \mathrm{V})$ *l'espace des opérateurs* A *continus de* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *dans lui-même, de* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *dans lui-même, et tel que, pour tout* $b \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ *il existe* b_1 *et* b_2 *dans* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$, *avec*

$$\mathrm{A} \circ b^w = b_1^w, \qquad b^w \circ \mathrm{A} = b_2^w,$$

$$\| b_j \|_{p,\, \mathrm{Y},\, r} \leqq \mathrm{K}\, m(\mathrm{Y})\, \| b \|_{q,\, \mathrm{Y},\, r},$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$ avec $q = q(p)$ *et où* $\mathrm{K} = \mathrm{K}(p, r, \mathrm{V}')$ *est indépendant de* Y *lorsque* Y *parcourt un ouvert* $\mathrm{V}' \subset \mathrm{V}_{r'}$, $r' > r$.

Les opérateurs externes forment une algèbre graduée pour la composition (conséquence immédiate de la définition), et les opérateurs internes en constituent un idéal gradué (idem). Les O ext croissent quand V décroît.

THÉORÈME 4.6.2 (*a*). — *Il existe un et un seul homomorphisme d'algèbre injectif* $\sigma : \mathrm{O\,ext}(m, g, \mathrm{V}) / \mathrm{O\,ext}(m \lambda^{-\infty}, g, \mathrm{V}) \to \mathrm{S}_{\mathrm{loc}}(m, g, \mathrm{V}) / \mathrm{S}_{\mathrm{loc}}(m \lambda^{-\infty}, g, \mathrm{V})$ *qui prolonge l'isomorphisme du théorème* 4.4.4.

(*b*) *Les éléments de* $\mathrm{O\,ext}(m, g, \mathrm{V})$ *appliquent* $\mathrm{H}(m', g, \mathrm{V})$ *dans* $\mathrm{H}(m' m^{-1}, g, \mathrm{V})$.

La partie (*b*) est une conséquence immédiate des définitions, et du fait que le composé d'un opérateur externe avec un interne est un opérateur interne.

Pour construire le symbole d'un élément B de O ext (m, g, V), on considère, pour tout $V' \subset\subset V$, des éléments $\chi_{V'}$, appartenant à $S_0(m, g, V)$ et valant 1 sur V'. Les symboles (fournis par le théorème 4.4.4) des opérateurs internes $B \circ \chi^w_{V'}$ restreints à V' constituent une famille filtrante qui définit un élément unique de $S_{loc}(m, g, V)/S_{loc}(m\lambda^{-\infty}, g, V)$.

5. — Données géométriques

5.1. HYPOTHÈSES. — Dans tout ce qui suit, on se donne une suite décroissante $\Omega^{(1)} \supset \Omega^{(2)} \supset \ldots \supset \Omega^{(k)} = \Omega$ d'ouverts de $\mathbb{R}^{2n}$, et une suite croissante de métriques $g_1 \leqq g_2 \leqq \ldots \leqq g_k$, définies respectivement dans les $\Omega^{(l)}$. On a donc, pour $Y \in \Omega^{(l)}$

$$g_{l,\,Y} \leqq g_{l+1,\,Y} \leqq g^\sigma_{l+1,\,Y} \leqq g^\sigma_{l,\,Y}.$$

On utilisera les notations géométriques du paragraphe 3, avec un indice l ($U_{l,\,Y,\,r}$; $\delta_{l,\,r}$; λ_l pour λ_{g_l}; $g^\sigma_{l,\,XY} \ldots$) pour les notions relatives à $(\Omega^{(l)}, g_l)$ et éventuellement sans indice $(\Omega_r, V' \subset\subset V, \ldots)$ pour $(\Omega^{(k)}, g_k)$. On supposera également $\Omega^{(l+1)} \subset\subset \Omega^{(l)}$ (au sens de g_l bien entendu). Lorsque l croît, le calcul symbolique est de plus en plus fin, mais le « gain » de ce calcul, donné par λ_l, décroît. Pour quantifier le calcul asymptotique, nous n'aurons besoin que des trois hypothèses suivantes.

HYPOTHÈSE 5.1.1. — *Tempérance symétrique relative.*

Dans chaque g_l-boule de rayon assez petit, la métrique g_{l+1} est symétriquement tempérée, avec des constantes uniformes. Plus précisément, g_1 vérifie (3.1.4) dans $\Omega^{(1)}$ et il existe C, N avec

$$(5.1.1) \qquad g_{l,\,X}(X-Y) \leqq C^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{g_{l+1,\,Y}}{g_{l+1,\,X}} \leqq C(1+g^\sigma_{l+1,\,XY}(X-Y))^N$$

pour $l=1, \ldots, k-1$, et $X, Y \in \Omega^{(l+1)}$.

HYPOTHÈSE 5.1.2. — *Comparabilité.*

Il existe C et N tels que

$$(5.1.2) \qquad g_{l+1,\,X} \leqq C\lambda_l(X)^N g_{l,\,X},$$

pour $l=1, \ldots, k-1$, $X \in \Omega^{(l+1)}$.

HYPOTHÈSE 5.1.3. — *Lenteur et principe d'incertitude.*

On suppose que chacune des métriques g_l vérifie les propriétés (1.2.1) et (1.3.1).

Remarque 5.1.4. — Les hypothèses 5.1.1 et 5.1.3 joueront évidemment un rôle crucial. L'hypothèse 5.1.2 qui peut sembler moins naturelle est heureusement presque toujours réalisée dans la pratique. En effet, dans les applications d'origine géométrique, on a fréquemment $g^\sigma_{l,\,X} = \lambda^2_l(X)\, g_{l,\,X}$. C'est notamment le cas pour tous les exemples donnés au paragraphe 9. Dans ces conditions, l'hypothèse $g_l \leqq g_{l+1}$ implique

$$g_l \leqq g_{l+1} \leqq g^\sigma_{l+1} \leqq g^\sigma_l = \lambda_l^2 g_l,$$

et donc (5.1.2) est automatiquement vérifiée.

Une partie de la théorie reste valable sans l'hypothèse 5.1.2, notamment l'existence d'une quantification globale associant aux éléments de $S_0(1, g_k, \Omega^{(k)})$ des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Par contre, cette hypothèse de comparabilité semble indispensable pour avoir une bonne théorie des régularités k-microlocales.

5.2. FONCTION D'ORTHOGONALITÉ. — Cette fonction, qui servira à contrôler la presque orthogonalité est définie par récurrence de la façon suivante, avec K fixé assez grand et $r<r_0$ assez petit. On pose

$$(5.2.1) \qquad \Delta_{1,r}(Y, Z)=\delta_{1,r}(Y, Z) \qquad (\textit{voir } 3.1.11),$$

$$(5.2.2) \quad \Delta_{l+1,r}(Y, Z)=\begin{cases} \lambda_l(Y)\lambda_l(Z)\Delta_{l,r}(Y, Z) \\ \qquad \text{si} \quad g_{l,Y}(Y-Z)>K r^2 \quad \text{ou} \quad g_{l,Z}(Y-Z)>K r^2 \\ \operatorname{Min}\{\lambda_l(Y)\lambda_l(Z)\Delta_{l,r}(Y, Z);\ \delta_{l+1,r}(Y, Z)\} \quad \text{sinon.}\end{cases}$$

La constante K est supposée assez grande pour que (*cf.* 3.2.4)

$$(5.2.3) \quad \operatorname{Max}\{g_{l,Y}(Y-Z), g_{l,Z}(Y-Z)\} \geqq K r^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_l(Y) \leqq C_r \delta_{l,r}(Y, Z)^N.$$

On choisit enfin r_0 tel que $K r_0$ soit inférieur à la constante C^{-1} de (5.1.1) et que $\Omega^{(l+1)} \subset \Omega^{(l)}_{r_0}$. Quels que soient l, Y, Z, l'une au moins des implications (5.1.1) ou (5.2.3) est utilisable.

On prouve par récurrence le théorème suivant.

THÉORÈME 5.2.1. — (*a*) *La fonction* $\Delta_{k,r}$ *est décroissante en* r, *et il existe* N *tel que, pour* $0<r<r_0$,

$$\sup_{Y\in\Omega_r}\int_{\Omega_r}\Delta_{k,r}(Y, Z)^{-N}|g_{k,Z}|^{1/2}\,dZ<\infty.$$

(*b*) *Il existe* C, N *tels que* $g_{k,Y}(Y-Z) \geqq C r^2$ *implique* $\lambda_k(Y) \leqq \Delta_{k,r}(Y, Z)^N$.

Preuve. — Le théorème 5.2.1 (*a*) est vérifié par $\delta_{1,r}$ d'après le théorème 3.2.2, la définition 3.1.11 impliquant directement la décroissance en r. Celle-ci est alors clairement vérifiée pour $\Delta_{k,r}$.

Considérons alors

$$I_r(Y, Z)=\Delta_{l+1,r}(Y, Z)^{-N}|g_{l+1,Z}|^{1/2},$$

et posons

$$E_1=\{Z;\ Z\in\Omega_r^{(l+1)},\ \max(g_{l,Y}(Y-Z), g_{l,Z}(Y-Z))>K r^2\},$$
$$E_2=\{Z;\ Z\in\Omega_r^{(l+1)},\ \max(g_{l,Y}(Y-Z), g_{l,Z}(Y-Z)) \leqq K r^2,$$

$$\lambda_l(Y)\,\lambda_l(Z)\,\Delta_{l,\,r}(Y,\,Z) \leqq \delta_{l+1,\,r}(Y,\,Z)\,\},$$

$$E_3 = \{\,Z;\ Z \in \Omega_r^{(l+1)},\ \max(g_{l,\,Y}(Y-Z),\ g_{l,\,Z}(Y-Z)) \leqq K\,r^2,$$

$$\lambda_l(Y)\,\lambda_l(Z)\,\Delta_{l,\,r}(Y,\,Z) > \delta_{l+1,\,r}(Y,\,Z)\,\}.$$

Comme (5.1.2) implique

$$|g_{l+1,\,Z}|^{1/2} \leqq C_0\,\lambda_l(Z)^{N_0}\,|g_{l,\,Z}|^{1/2}, \tag{5.2.4}$$

l'intégrale

$$\int_{E_1 \cup E_2} I_r(Y,\,Z)\,dZ \leqq 2 \int_{\Omega_{r_0}^{(l)}} C_0\,\lambda_l(Z)^{-N+N_0}\,\Delta_{l,\,r}(Y,\,Z)^{-N}\,|g_{l,\,Z}|^{1/2}\,dZ$$

est bornée par hypothèse de récurrence pour N assez grand. En outre, l'intégrale

$$\int_{E_3} I_r(Y,\,Z)\,dZ = \int_{E_3} \delta_{l+1,\,r}(Y,\,Z)^{-N}\,|g_{l+1,\,Z}|^{1/2}\,dZ,$$

est bornée d'après (5.1.1) et le théorème (3.2.2) (1), ce qui achève la preuve de la partie (*a*).

Prouvons (*b*). Comme $\lambda_k \leqq \lambda_{k-1}$, le seul cas à envisager est le cas où $g_{kY}(Y-Z) \leqq K\,r^2$ et où le minimum dans (5.2.2) est atteint par $\delta_{k,\,r}(Y,\,Z)$. C'est alors une conséquence immédiate de (5.2.3).

5.3. Poids admissibles

Ils sont définis par récurrence sur k de la façon suivante. Pour $k=1$, ce sont les poids admissibles pour g au sens du n° 4.1. Les poids admissibles d'ordre k sont les fonctions de la forme $M(Y)\,m(Y)$, où M est admissible d'ordre $k-1$, où m vérifie (1.2.2) pour g_k, et où l'on a, pour X, Y dans $\Omega^{(k)}$, les relations suivantes

$$\left\{\begin{array}{c} C^{-1}\,\lambda_{k-1}(Y)^{-N} \leqq m(Y) \leqq C\,\lambda_{k-1}(Y)^N, \\ g_{k-1,\,X}(X-Y) \leqq C^{-1} \quad \Rightarrow \quad m(Y)\,m(X)^{-1} \leqq C(1+g^\sigma_{kXY}(X-Y))^N \end{array}\right. \tag{5.3.1}$$

On obtient alors facilement, par récurrence, la propriété suivante

$$m(Y)\,m(X)^{-1} \leqq C\,\Delta_{r,\,k}(X,\,Y)^N, \tag{5.3.2}$$

où la constante est uniforme pour X, $Y \in \Omega_r^{(k)}$. Les poids admissibles les plus importants sont les fonctions

$$\mu(Y) = \lambda_1(Y)^{s_1} \ldots \lambda_k(Y)^{s_k}. \tag{5.3.3}$$

6. Confinement d'ordre supérieur

6.1. ESPACES $E \hat{\#} F$

Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux sous-espaces de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$, dont chacun est muni d'une suite (indexée par $\mathbb{N}$) de semi-normes qui en fait un espace de Fréchet. On suppose que l'application $\#$ (1.1.5) envoie continûment $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$. Le produit tensoriel projectif complété $\mathscr{E} \hat{\otimes} \mathscr{F}$ est alors muni canoniquement d'une suite de semi-normes, et il existe une unique application linéaire rendant commutatif le diagramme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \times \mathscr{F} \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\#"'] & \mathscr{E} \hat{\otimes} \mathscr{F} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n}) \end{tikzcd}$$

Nous noterons $\mathscr{E} \hat{\#} \mathscr{F}$ l'image de π, muni de la suite canonique de semi-normes de $\mathscr{E} \hat{\otimes} \mathscr{F}/\operatorname{Ker} \pi$. C'est un espace de Fréchet. En fait, tous les espaces de symboles confinés que nous considérerons seront égaux à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ en vertu de la proposition suivante, mais ce qui nous importe ici n'est pas seulement la structure de Fréchet, c'est la suite indexée des semi-normes.

PROPOSITION 6.1.1. — *Avec les notations précédentes,*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}) \hat{\#} \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Preuve. — On a $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}) \hat{\otimes} \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$ et l'application π ci-dessous est définie par

$$(\pi\alpha)(X) = \exp\left(\frac{i}{2}[D_{X_1}, D_{X_2}]\right) \alpha_{|X_1 = X = X_2}.$$

Soit maintenant $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$, $\varphi(0) = 1$, et β définie par $\beta(X_1, X_2) = a((X_1 + X_2)/2)\,\varphi(X_1 - X_2)$, on a, en utilisant la notation (1.1.6),

$$\beta = \exp\left(\frac{i}{2}[D_{X_1}, D_{X_2}]\right) \exp\left(-\frac{i}{2}[D_{X_1}, D_{X_2}]\right) \beta.$$

On a donc

$$a = \pi(e^{-(i/2)[D_{X_1}, D_{X_2}]}\beta),$$

ce qui donne le résultat de la proposition.

Nous utiliserons systématiquement (pour des applications multilinéaires) la conséquence suivante des propriétés universelle du produit tensoriel et du quotient, que nous n'énonçons ici que pour des applications bilinéaires.

THÉORÈME 6.1.2. — *Soient $\mathscr{E}_Y$, $\mathscr{F}_Y$, $\mathscr{G}_Y$, trois familles dépendant de* Y *d'espaces de Fréchet munis de suites de semi-normes* (*indexées par $p \in \mathbb{N}$ et par* Y). *Pour que les* *applications linéaires* T_Y *de* $E_Y \hat{\#} \mathscr{F}_Y$ *dans* $\mathscr{G}_Y$ *soient continues uniformément en* Y, *il faut et il suffit que les applications bilinéaires* $(e, f) \mapsto T_Y(e \# f)$ *soient continues uniformément,* i. e.

$$\forall p, \exists q, \exists C, \forall Y, \forall e, \forall f, \quad \| T_Y(e \# f) \|_{p,\,Y} \leqq C \| e \|_{q,\,Y} \| f \|_{q,\,Y},$$

où $\| . \|_{p,\,Y}$ *est la p-ième semi-norme dans l'espace adequat.*

6.2. DÉFINITION RÉCURRENTE DES SYMBOLES k-CONFINÉS.

DÉFINITION 6.2.1. — *On notera* W-Conf (g_l, Y, r) *l'espace* [*muni de sa suite de semi-normes* (2.1.3)] *défini en* (2.1.1) *des symboles confinés dans la boule* $U_{l,\,Y,\,r}$ *pour la métrique* g_{lY}.

DÉFINITION 6.2.2 [*Symboles k-confinés (au sens strict)*]. — *Les espaces* Conf(l, Y, r) *sont définis par récurrence comme suit :*

$$\mathrm{Conf}(1, Y, r) = W - \mathrm{Conf}(g_1, Y, r),$$
$$\mathrm{Conf}(l, Y, r) = \mathrm{Conf}(l-1, Y, r) \hat{\#} W - \mathrm{Conf}(g_l, Y, r) \hat{\#} \mathrm{Conf}(l-1, Y, r).$$

Notons que ces espaces sont stables par conjugaison complexe. Les symboles k-confinés peuvent donc s'écrire (avec des semi-normes contrôlées) comme des (séries de) « sandwiches » de symboles W-confinés pour les diverses métriques g_l. L'idée essentielle est que l'on pourra cumuler, pour le composé de deux tels symboles, les propriétés de presque orthogonalité (type théorème 3.2.1) dues aux propriétés de tempérance de toutes les g_l. Ce cumul sera précisément exprimé par la fonction $\Delta_{k,\,r}$ introduite au paragraphe 5.2.

6.3. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES SYMBOLES k-CONFINÉS. — Les trois propriétés suivantes expriment (avec uniformité) que

(*a*) les symboles k-confinés sont confinés pour le g_k-calcul de Weyl,

(*b*) un symbole k-confiné dans une boule centrée en Y est k-confiné dans des boules (de rayon un peu plus grand) centrées aux points voisins,

(*c*) si on place un symbole borné entre deux sandwiches, et si on remplace les termes du milieu par leur composé, on obtient encore un sandwich.

PROPOSITION 6.3.1. — (*a*) *L'application identique est continue, uniformément en* Y, *de* Conf (k, Y, r) *dans* W $-$ Conf(g_k, Y, r).

(*b*) *Pour tout* K, *il existe* K′ *tel que, si r est assez petit devant* K^{-1}, *l'application identique est continue* (*uniformément en* Y *et en* Z) *de* Conf(k, Y, r) *dans* Conf$(k, Z, K' r)$ *dès que* $g_{kY}(Y-Z) \leqq K^2 r^2$.

(*c*) L′ *application* $(a, b, c) \mapsto a \# b \# c$ *est continue uniformément en* Y, *de* Conf $(k, Y, r) \times S(1, g_{kY}) \times \mathrm{Conf}(k, Y, r)$ *dans* Conf(k, Y, r).

Preuve. — La partie (*a*) est triviale pour $k=1$. Supposons la propriété vérifiée pour $k-1 \geqq 1$ et examinons $A_Y \# b_Y \# C_Y$ avec A_Y, $C_Y \in \mathrm{Conf}(k-1, Y, r)$ et $b_Y \in$ W-Conf(g_k, Y, r). Par hypothèse de récurrence les symboles A_Y et C_Y appartiennent à W-Conf$(g_{k-1},$

Y, r) (avec contrôle des semi-normes). Le Corollaire 2.2.3 appliqué d'abord au couple (A_Y, b_Y) puis à $(A_Y \# b_Y, C_Y)$ donne le résultat (avec contrôle des semi-normes).

Montrons (*b*). Soit (g_Y) une métrique lente sur un ouvert Ω et soit $U_{Y, r}$ la g-boule de rayon r centrée en Y. On obtient facilement, pour $g_Y(Z-Y) \leqq K^2 r^2 \leqq C_0^{-1}$, l'inégalité $g_Y^\sigma(X-U_{Y, r}) \geqq C_0^{-1} g_Z^\sigma(X-U_{Z, K'r})$ avec $K'=C_0^{1/2}+K$. Ceci prouve l'assertion (*b*) pour les symboles W-confinés, au vu de la définition 2.1.1 et en particulier pour $k=1$. Une récurrence permet de conclure.

Pour prouver la partie (*c*), remarquons d'abord que les applications a, $b \mapsto a \# b$ ou $b \# a$ sont continues, uniformément en Y, de $\text{W-Conf}(g_l, Y, r) \times S(1, g_{lY}, \mathbb{R}^{2n})$ dans W-Conf (g_l, Y, r) (*voir* la remarque 4.2.6 pour les métriques constantes g_{lY}). Cela prouve le résultat pour $k=1$. Pour $k>1$, il suffit (theorème 6.1.2) de prouver que les applications multilinéaires

$$A_Y, b_Y, C_Y, S_Y, D_Y, e_Y, F_Y \mapsto A_Y \# b_Y \# C_Y \# S_Y \# D_Y \# e_Y \# F_Y$$

sont continues, uniformément en Y, à valeurs dans $\text{Conf}(k, Y, r)$, pour A_Y, C_Y, D_Y, $F_Y \in \text{Conf}(k-1, Y, r)$; b_Y, $e_Y \in \text{W-Conf}(g_k, Y, r)$ et $S_Y \in S(1, g_{kY})$.

D'après la partie (*a*), Conf $(k-1, Y, r)$ s'injecte dans $\text{W-Conf}(g_{k-1}, Y, r)$, donc dans $S(1, g_{k-1, Y}, \mathbb{R}^{2n})$ et donc dans $S(1, g_{kY}, \mathbb{R}^{2n})$. Le composé des 5 termes du milieu appartient ainsi (avec uniformité en Y) à W-Conf (g_k, Y, r), d'où le résultat.

LEMME 6.3.2. — *Pour tout entier p, il existe* $C(p)$, $N(p)$ *tels que pour* $a \in S$ *on ait la relation suivante entre les semi-normes de a dans* $\text{Conf}(k, Y, r)$ *et* $\text{Conf}(k-1, Y, r)$

$$\|a\|_{k-1, p, Y, r} \leqq C(p)(\lambda_{k-1}(Y))^{N(p)} \|a\|_{k, p, Y, r}.$$

Preuve. — Notons tout d'abord que le même résultat est vrai pour les espaces W-Conf (g_k, Y, r) et $\text{W-Conf}(g_{k-1}, Y, r)$, comme conséquence directe du lemme 2.1.3 et de l'hypothèse de comparabilité 5.1.2.

Pour k quelconque, il suffit d'estimer les semi-normes dans Conf $(k-1, Y, r)$ de $A_Y b_Y C_Y$. Grâce à l'hypothèse 5.1.2, on peut considérer $b_Y \in \text{W-Conf}(g_k, Y, r)$ comme un élément de $S(1, g_{k-1, Y}, \mathbb{R}^{2n})$ dont les semi-normes sont à croissance lente en $\lambda_{k-1}(Y)$. Le résultat découle alors de la proposition 6.3.1 (*c*).

6.4. EXISTENCE DE PROJECTEURS

THÉORÈME 6.4.1 (*projecteurs de type r, r'*). — *Soient* $0<r<r'$. *Il existe alors une famille* $\Pi_Y \in \text{Conf}(k, Y, r')$ *pour* $Y \in \Omega_{r'}$, *uniformément bornée en* Y *telle que*

(*a*) *Pour tout* N, *les applications* $a \to \lambda_k(Y)^N(a-\Pi_Y \# a)$ *et* $a \mapsto \lambda_k(Y)^N(a-a \# \Pi_Y)$ *sont continues, uniformément en* Y, *de* $\text{Conf}(k, Y, r)$ *dans* $\text{Conf}(k, Y, r')$.

(*b*) *On a* $\Pi_Y=\chi_Y+\varphi_Y$, *où* χ_Y *appartient uniformément à* $S(1, g_k)$, *vaut* 1 *dans* $U_{k, Y, r}$ *et* 0 *hors de* $U_{k, Y, r'}$, *et où, pour tout* N, $\lambda_k(Y)^N \varphi_Y$ *appartient uniformément à* W-Conf(g_k, Y, r').

Preuve. — Prouvons (*a*) : Pour $k=1$, il suffit de prendre les Π_Y égaux aux fonctions χ_Y décrites ci-dessus. Sinon, on prend $\Pi_Y^{(k)}=\Pi_Y^{(k-1)} \# \chi_Y \# \Pi_Y^{(k-1)}$, où les $\Pi_Y^{(k-1)}$ sont des projecteurs relatifs à $(k-1)$.

Il suffit d'étudier la différence

$$D=\Pi_Y^{(k-1)}\#\chi_Y\#\Pi_Y^{(k-1)}\#A_Y\#b_Y\#C_Y-A_Y\#b_Y\#C_Y.$$

On a

$$D=(\Pi_Y^{(k-1)}\#A_Y)\#(b_Y\#\chi_Y)\#(\Pi_Y^{(k-1)}\#C_Y)-A_Y\#b_Y\#C_Y+\Pi_Y^{(k-1)}\#e_Y\#C_Y,$$

avec $e_Y=\chi_Y\#\Pi_Y^{(k-1)}\#A_Y\#b_Y-A_Y\#b_Y\#\chi_Y\#\Pi_Y^{(k-1)}$.

Le calcul de Weyl assure que $\lambda_k(Y)^N e_Y$ est uniformément borné dans W-Conf(g_k, Y, r') et le dernier terme de D est donc du type voulu. Il en est de même de la différence des deux premiers termes, $\Pi_Y^{(k-1)}\#A_Y-A_Y$, $b_Y\#\chi_Y-b_Y$, $\Pi_Y^{(k-1)}\#C_Y-C_Y$ restant bornés aprés multiplication par $\lambda_k(Y)^N$ dans leurs espaces respectifs. La preuve de (*a*) est complète, et celle de (*b*) est immédiate.

6.5. Biconfinement.

Théorème 6.5.1. — *Il existe* $C>1$ *et* $r_0>0$ *tels que pour* $r<r_0$, *pour* $Y, Z\in\Omega_{Cr}$, *et pour tout* N, *l'application*

$$(a, b)\mapsto\Delta_{k, Cr}(Y, Z)^N a\#b,$$

de Conf$(k, Y, r)\times$Conf(k, Z, r) *dans* Conf$(k, Y, Cr)\cap$Conf(k, Z, Cr), *est continue, uniformément en* Y *et en* Z.

En vertu du théorème 6.1.2, il suffit de prouver la continuité, uniforme en Y et en Z, du produit par $\Delta_{k, Cr}(Y, Z)^N$ de l'application multilinéaire

$$(A_Y, b_Y, C_Y, A_Z, b_Z, C_Z)\to T=A_Y\#b_Y\#C_Y\#A_Z\#b_Z\#C_Z$$

de Conf$(k-1, Y, r)\times$W-Conf$(g_k, Y, r)\times$Conf$(k-1, Y, r)\times$Conf$(k-1, Z, r)\times$W-Conf$(g_k Z, r)\times$Conf$(k-1, Z, r)$ dans Conf(k, Y, Cr). On procède par récurrence, en notant γ la constante C relative au théorème supposé établi au rang $(k-1)$. On distinguera deux cas.

1^er^ *Cas* :

$$\max\{g_{k-1, Y}(Y-Z), g_{k-1, Z}(Y-Z)\}<Kr^2,$$

où K est la constante de (5.2.2). On a dans ce cas

$$\Delta_{k, Cr}(Y, Z)\leqq\Delta_{k, r}(Y, Z)\leqq\delta_{k, r}(Y, Z).$$

On peut écrire $T=A_Y\#\beta\#C_Z$ et on a $C_Z\in$Conf$(k-1, Y, K'r)$ avec des semi-normes contrôlées, en vertu de la proposition 6.3.1 (*b*). Quant aux semi-normes de $\beta=(b_Y\#C_Y)\#(A_Z\#b_Z)$, le théorème 3.2.1 permet de les estimer uniformément, en « gagnant » des puissances arbitraires de $\delta_{k, r}(Y, Z)$ et donc de $\Delta_{k, Cr}(Y, Z)$.

2^e^ *cas :*

$$\max\{g_{k-1, Y}(Y-Z), g_{k-1, Z}(Y-Z)\}\geqq Kr^2.$$

On a dans ce cas $\Delta_{k,\,r}(Y, Z)=\lambda_{k-1}(Y)\,\lambda_{k-1}(Z)\,\Delta_{k-1}(Y, Z)$, et donc, d'après le théorème 5.2.1 (*b*),

$$\Delta_{k,\,r}(Y, Z)\leqq C\,\Delta_{k-1,\,r}(Y, Z)^{N_0}.$$

On introduit une famille de projecteurs Π_Y du $(k-1)$ calcul (*cf.* § 6.4) relatifs aux rayons r et $2r$ par exemple, et on décompose $T=T_1+T_2$ comme suit.

(*a*) $$T_1=A_Y\# b_Y\#\{(C_Y\#\Pi_Z)\#(A_Z\# b_Z\# C_Z)\}.$$

La seconde parenthèse peut être considérée comme un élément de $\mathrm{Conf}((k-1), Z, r)$ d'après la proposition 6.3.1 (*c*) et le lemme 6.3.2, avec des semi-normes croissant comme des puissances de $\lambda_{k-1}(Z)$. Par contre, la première parenthèse est, d'après l'hypothèse de récurrence, un élément de $\mathrm{Conf}(k-1, Y, 2\gamma r)$ dont les semi-normes décroissent comme toute puissance de $\Delta_{k-1,\,\gamma r}(Y, Z)$ et donc [d'après le théorème (5.2.1) (*b*)] comme toute puissance de $\lambda_{k-1}(Z)$. Une nouvelle application de l'hypothèse de récurrence montre que l'accolade appartient à $\mathrm{Conf}(k-1, Y, 2\gamma^2 r)$, avec gain d'une puissance arbitraire de $\Delta_{k-1,\,2\gamma^2 r}(Y, Z)$ et donc de $\Delta_{k,\,Cr}(Y, Z)$ pourvu que $C>2\gamma^2$.

(*b*) $$T_2=A_Y\# b_Y\#\{C_Y\#([A_Z-\Pi_Z A_Z]\# b_Z\# C_Z)\}.$$

Les semi-normes de la parenthèse dans $\mathrm{Conf}(k-1, Z, 2r)$ s'estiment à l'aide de la proposition 6.3.1 (*c*), les pertes à croissance lente en $\lambda_{k-1}(Z)$ sur b_Z étant compensées par le gain à décroissance rapide sur $(A_Z-\Pi_Z A_Z)$ [théorème 6.4.1 (*a*)]. L'hypothèse de récurrence montre que les semi-normes de l'accolade dans $\mathrm{Conf}(k-1, Y, 2\gamma r)$ décroissent comme toute puissance de $\Delta_{k-1,\,2\gamma r}(Y, Z)$ et donc de $\Delta_{k,\,Cr}(Y, Z)$ si $C>2\gamma$. La preuve est complète.

6.6. Confinement large. — Il sera commode d'adjoindre aux symboles k-confinés (stricts) les symboles confinés « négligeables » des calculs précédents.

Définition 6.6.1. — *On appellera* $\mathrm{Neg}(l, Y, r)$ [*resp.* $\text{W-Neg}(g_l, Y, r)$] *l'espace* $\mathrm{Conf}(l, Y, r)$ [*resp.* $\text{W-Conf}(g_l, Y, r)$] *muni de la famille de semi-normes*

$\|a\|_{p,\,q}=\lambda_l(Y)^p\|a\|_q$, *où* $\|a\|_q$ *est la q-ième semi-norme de* $\mathrm{Conf}(l, Y, r)$ [resp. $\text{W-Neg}(g_l, Y, r)$].

Notons qu'une famille uniformément bornée (a_Y) dans $\mathrm{Neg}(l, Y, r)$ est une famille telle que pour tout N, $(\lambda_l(Y)^N a_Y)$ soit une famille uniformément bornée de symboles confinés.

Définition 6.6.2. — *On appellera* $\overline{\mathrm{Conf}}\,(k, Y, r)$ *l'espace somme*

$$\mathrm{Conf}(k, Y, r)+\sum_{1}^{k-1}\mathrm{Neg}(l, Y, r)$$

avec les semi-normes canoniques (*réindexées par* N) *de l'espace somme.*

LEMME 6.6.3. — *Il existe* $C>0$ *tel que pour* $Cr<r_0$, *l'application* $(a, b)\mapsto \Delta_{k-1, Cr}(Y, Z)^N(a\# b)$, *de* $\mathrm{Conf}(k, Y, r)\times \mathrm{Neg}[k-1, Z, r]$ *dans* $\mathrm{Neg}(k-1, Z, Cr)\cap \mathrm{Neg}(k-1, Y, Cr)$ *est continue uniformément en* (Y, Z).

Preuve. — Considérons $A_Y\# b_Y\# C_Y\# D_Z$ avec A_Y, $C_Y\in \mathrm{Conf}(k-1, Y, r)$, $D_Z\in \mathrm{Neg}(k-1, Z, r)$ et $b_Y\in W-\mathrm{Conf}(k, Y, r)$. Chaque semi-norme de b dans $\mathrm{Conf}(k-1, Y, r)$ est majorée par une semi-norme de b dans $\mathrm{Conf}(k, Y, r)$ multipliée par une puissance fixe de $\lambda_{k-1}(Y)$ (*cf.* Lemma 6.3.2). Le théorème de biconfinement 6.5.1 montre que $C_Y\# D_Z\Delta_{k-1, Cr}(Y, Z)^N$ est biconfiné (au sens $k-1$). Comme $D_Z\in \mathrm{Neg}(k-1, Z, r)$ les semi-normes de $C_Y\# D_Z\Delta_{k-1, Cr}(Y, Z)^N$ sont à décroissance rapide en $\lambda_{k-1}(Z)$ et donc d'après (5.3.2) en $\lambda_{k-1}(Y)$. Comme les semi-normes de $A_Y\# b_Y$ dans $\mathrm{Conf}(k-1, Y, r)$ sont à croissance lente en $\lambda_{k-1}(Y)$, on obtient le résultat par une nouvelle application du théorème 6.5.1 (avec $N=0$ cette fois-ci).

PROPOSITION 6.6.4. — (*a*) *L'application identique et la conjugaison complexe sont continues, uniformément en* Y *de* $\overline{\mathrm{Conf}}(k, Y, r)$ *dans*

$$\text{W-Conf}(g_k, Y, r)+\sum_{1\leqq l\leqq k-1} \text{W-Neg}(g_l, Y, r).$$

(*b*) *Pour tout* K, *il existe* K' *tel que si* r^2K *est assez petit, l'application identique est continue de* $\overline{\mathrm{Conf}}(k, Y, r)$ *dans* $\overline{\mathrm{Conf}}(k, Z, K'r)$ dès que $g_{kY}(Y-Z)\leqq K r^2$.

(*c*) *L'application* $(a, b, c)\to a\# b\# c$ *est continue, uniformément en* Y, *de* $\overline{\mathrm{Conf}}(k, Y, r)\times S(1, g_{kY})\times \overline{\mathrm{Conf}}(k, Y, r)$ *dans* $\overline{\mathrm{Conf}}(k, Y, r)$.

Preuve. — Le point (*a*) [resp. (*b*)] découle immédiatement de la définition 6.6.2 et de la propriété (*a*) [resp. (*b*)] dans la proposition 6.3.1.

Démontrons (*c*). Compte tenu de la proposition 6.3.1 (*c*) il suffit d'examiner les termes du type

$$\nu\#\beta\# C \tag{6.6.1}$$

avec $\nu\in \mathrm{Neg}.(l, Y, r)$, $\beta\in S(1, g_{kY})$, $C\in \mathrm{Conf}(k, Y, r)$, et les termes

$$\nu_1\#\beta\#\nu_2$$

avec $\nu_1\in \mathrm{Neg}(l_1, Y, r)$, $\beta\in S(1, g_{kY})$ et $\nu_2\in \mathrm{Neg}(l_2, Y, r)$.

Pour ce dernier terme, on peut remarquer que l'on a $\beta\in S(1, g_{l_2 Y})$ avec des semi-normes à croissance lente en $\lambda_{l_2}(Y)$, d'après l'hypothèse 5.1.2. En supposant $l_2\leqq l_1$, on peut, en utilisant le lemme 6.3.2 considérer ν_1, comme un élément de $\mathrm{Conf}(l_2, Y, r)$ dont les semi-normes sont à croissance lente en $\lambda_{l_2}(Y)$. En appliquant la proposition 6.3.1 (*c*), il vient $\nu_1\#\beta\#\nu_2\in \mathrm{Conf}(l_2, Y, r)$ avec des semi-normes à décroissance rapide en $\lambda_{l_2}(Y)$, ce qui donne le résultat.

Pour le terme (6.6.1), le Lemme 6.3.2 implique que $C\in \mathrm{Conf}(l, Y, r)$ avec des semi-normes à croissance lente en $\lambda_l(Y)$ et la propriété (5.1.2) montre que $\beta\in S(1, g_l)$ avec des semi-normes à croissance lente en $\lambda_l(Y)$. Il suffit d'appliquer la propriété (*c*) de la proposition 6.3.1 (avec $k=l$), pour obtenir le résultat.

PROPOSITION 6.6.5. — *Soit* Π_Y *des k-projecteurs de type* (r, r') (cf. *Th.* 6.4.1). *Pour tout* N, *les applications* $a \mapsto \lambda_k(Y)^N (a - \Pi_Y \# a)$ *et* $a \mapsto \lambda_k(Y)^N (a - a \# \Pi_Y)$ *sont continues uniformément en* Y, *de* $\overline{\text{Conf}}\,(k, Y, r)$ *des* $\overline{\text{Conf}}\,(k, Y, r')$.

Preuve. — Il suffit d'examiner $\lambda_k(Y)^N (a - a \# \Pi_Y)$ pour $a \in \text{Neg}(l, Y, r)$, $1 \leqq l < k$. On a $\lambda_k(Y) \leqq \lambda_l(Y)$ et donc $\lambda_k(Y)^N a \in \text{Neg}(l, Y, r)$. D'autre part, on a $\Pi_Y \in \text{Conf}(k, Y, r')$ et il résulte du lemme 6.3.2 que Π_Y appartient à $\text{Conf}(l, Y, r')$ avec des semi-normes à croissance lente en $\lambda_l(Y)$. Par suite, $a \# \Pi_Y \in \text{Neg}(l, Y, r')$ ce qui donne le résultat.

THÉORÈME 6.6.6. — *Il existe* $K > 1$ *et* $r_0 > 0$ *tels que pour* $r < r_0$, *pour* $Y, Z \in \Omega_{K r}$ *et pour tout* N, *l'application*

$$(a, b) \mapsto \Delta_{k, K r}(Y, Z)^N a \# b$$

de $\overline{\text{Conf}}\,(k, Y, r) \times \overline{\text{Conf}}\,(k, Z, r)$ *dans* $\overline{\text{Conf}}\,(k, Y, K r) \cap \overline{\text{Conf}}\,(k, Z, K r)$, *est continue uniformément en* Y *et en* Z.

On obtient le résultat en utilisant le théorème 6.5.1, et le lemme 6.6.3 pour $k, k-1, \ldots, l$.

6.7. CONTINUITÉ.

THÉORÈME 6.7.1. — (*a*) *L'application* $a \mapsto a^w$ *est continue, uniformément en* Y, *de* $\overline{\text{Conf}}\,(k, Y, r)$ *dans* $\mathscr{L}(L^2)$.

(*b*) *Si* $M(Y)$ *est un poids admissible et si* (a_Y) *est uniformément bornée dans* $\overline{\text{Conf}}\,(k, Y, r)$ (*et mesurable en* Y), *l'application*

$$u \mapsto \int_{\Omega_r} M(Y) \, \| a_Y^w u \|_{L^2} \, | g_Y |^{1/2} \, dY$$

est une semi-norme sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

(*c*) *Pour toute forme linéaire* L *sur* $\mathbb{R}^{2n}$, *il existe un poids admissible* M *tel que les applications* $a \mapsto M(Y)^{-1} L \# a$, $M(Y)^{-1} a \# L$ *soient continues, uniformément en Y, de* $\overline{\text{Conf}}\,(k, Y, r)$ *dans lui-même.*

Preuve. — Soit $a \in \overline{\text{Conf}}\,(k, Y, r)$. Il résulte de la proposition 6.6.4 (*a*) que l'on a $a \in W - \text{Conf}(g_k, Y, r) + \sum_{1 \leqq l < k} W - \text{Neg}(g_l, Y, r)$ (avec contrôle uniforme des semi-normes). L'estimation (2.4.1) fournit alors le résultat (*a*).

Prouvons (*b*). La propriété est vérifiée pour $k=1$ (lemme 4.2.4). Pour $k \geqq 1$, il suffit d'examiner, pour $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int M(Y) \, \| A_Y^w b_Y^w C_Y^w u \|_{L^2} \, | g_{k\,Y} |^{1/2} \, dY \tag{6.7.1}$$

et

$$\int M(Y) \, \| D_Y^w u \|_{L^2} \, | g_{k\,Y} |^{1/2} \, dY, \tag{6.7.2}$$

avec A_Y, C_Y uniformément bornés dans $\mathrm{Conf}(k-1, Y, r)$, D_Y dans $\mathrm{Neg}(l, Y, r)$ $(l \leqq k-1)$ et b_Y dans $W-\mathrm{Conf}(g_k, Y, r)$. Les opérateurs A_Y^w, b_Y^w étant uniformément bornés sur L^2 [proposition 6.3.1(*a*)], on peut estimer (6.7.1) par

$$\int M(Y)\,\lambda_{k-1}^{N_1}\,\|C_Y^w u\|_{L^2}\,|g_{k-1,Y}|^{1/2}\,dY$$

ce qui donne le résultat par récurrence car il résulte de (5.3.1) que $M(Y)\,\lambda_{k-1}^{N_1}(Y)$ est majoré par un poids $(k-1)$-admissible. On estime de même (6.7.2) en remarquant que $M(Y)\,\lambda_l(Y)^N$ est majoré par un poids l-admissible. Ceci achève la preuve de (*b*).

La partie (*c*) est vraie pour $k=1$ (lemme 4.2.5) avec un poids 1-admissible M ne dépendant que de L. On obtient le résultat pour $k \geqq 1$ par une récurrence évidente avec le même poids M. La preuve du théorème 6.7.1 est complète.

7. Calcul symbolique k-microlocal

7.1 Opérateurs k-microdifférentiels.

Définition 7.1.1. — *Soient* M *un poids admissible,* V *un ouvert de* $\Omega^{(k)}$ *et* r *inférieur au* r_0 *du théorème* 6.6.6. *On dit que* A *est un opérateur k-microdifférentiel de poids* M, *interne à* V, *de rayon de confinement r, ce qu'on notera* $A \in O_r(M, k, V)$ si on a

$$A = \int_{V_{r'}} M(Y)\,a_Y^w\,|g_{k\,Y}|^{1/2}\,dY \tag{7.1.1}$$

où a_Y *est une famille mesurable uniformément bornée d'éléments de* $\overline{\mathrm{Conf}}\,(k, Y, r)$, *avec* $r' > r$.

Contrairement à ce qui se passe en première microlocalisation, il n'est pas possible en général d'avoir des décompositions (7.1.1) d'un même opérateur A avec des rayons de confinement arbitrairement petits. Les inconvénients qui en résultent, notamment pour la composition, seront levés par l'introduction des opérateurs à paramètre (§ 7.3).

Lorsque $\Omega^{(k)} \neq \mathbb{R}^{2n}$, ni les opérateurs différentiels, ni même l'identité n'appartiennent aux $O_r(M, k, \Omega^{(k)})$. Nous introduirons au (§ 7.5) des opérateurs dits externes pour combler cette lacune.

Théorème 7.1.2. — (*a*) *Les éléments de* $O_r(M, k, V)$ *sont continus sur* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

(*b*) *Les éléments de* $O_r(1, k, V)$ sont continus sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Pour démontrer (*b*), d'après le théorème de Cotlar (lemme 4.2.3′), il suffit de démontrer (à des conjugaisons complexes près)

$$\sup_Y \int \|(a_Y \# a_Z)^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}^{1/2}\,|g_{k\,Z}|^{1/2}\,dZ < \infty. \tag{7.1.2}$$

D'après le théorème 6.7.1, cette norme s'estime par une semi-norme de $a_Y \# a_Z$ dans $\overline{\mathrm{Conf}}(k, Z, C r)$ et (7.1.2) résulte du théorème 5.2.1 et du théorème 6.6.6.

Soit maintenant $u \in \mathscr{S}$. Pour démontrer que l'intégrale définissant A u converge dans $\mathscr{S}$, il suffit de montrer que

$$\int_{V_{r'}} M(Y) \left\| \prod_1^p L_j^w \circ a_Y^w u \right\|_{L^2} |g_{kY}|^{1/2} dY < \infty \tag{7.1.3}$$

pour $L_1, \ldots, L_p$ formes linéaires sur $\mathbb{R}^{2n}$. D'après le théorème 6.7.1 (c), le membre de gauche de 7.1.3 peut se réécrire

$$\int_{V_{r'}} M'(Y) \| b_Y^w u \|_{L^2} |g_{kY}|^{1/2} dY$$

où M′ est un poids admissible, et b_Y une famille bornée dans Conf (k, Y, r). Le théorème 6.7.1 (b) entraîne immédiatement (7.1.3).

THÉORÈME 7.1.3. — *Soit* $r < r_0/K$ (*constantes du Théorème* 6.6.6), *et soient* $A_i \in O_r(M_i, k, V)$; $i = 1, 2$, *avec* $r' > K r$ *dans* (7.1.1). *On a alors*

$$A_1 \circ A_2 \in O_{Kr}(M_1 M_2, k, V),$$
$$A_1^* \in O_r(M_1, k, V).$$

On a, avec des notations évidentes,

$$A_1 \circ A_2 = \int M_1(Y) M_2(Y) |g_{kY}|^{1/2} \int \frac{M_2(Z)}{M_2(Y)} (a_{1Y} \# a_{2Z})^w |g_{kZ}|^{1/2} dZ.$$

D'après le théorème 6.6.6, $a_{1Y} \# a_{2Z}$ appartient à $\overline{\mathrm{Conf}}(Y, k, K r)$ avec des semi-normes décroissant comme $\Delta_{k, Kr}(Y, Z)^N$ pour tout N. L'intégrale de droite définit donc une famille uniformément bornée d'éléments de $\overline{\mathrm{Conf}}(Y, k, K r)$: il suffit de choisir N assez grand pour, d'une part absorber le rapport $M_2(Z)/M_2(Y)$ d'après (5.3.2) et, d'autre part, rendre l'intégrale convergente d'après le théorème 5.2.1.

La seconde propriété résulte immédiatement de la stabilité de $\overline{\mathrm{Conf}}$ (k, Y, r) par conjugaison complexe.

Remarque 7.1.4. — La même démonstration assure que, pour $A \in O_r(M, k, V)$, l'application $b_Y \mapsto C_Y$ avec

$$C_Y^w = M(Y)^{-1} A \circ b_Y^w$$

est continue, uniformément en Y, de $\overline{\mathrm{Conf}}$ (k, Y, r) dans $\overline{\mathrm{Conf}}(k, Y, K r)$.

7.2. QUANTIFICATION. — C'est dans la définition suivante qu'apparaît l'idée essentielle des microlocalisations d'ordre supérieur. Un symbole a étant écrit comme somme de morceaux $a(.) \varphi_Y(.)$, chacun de ceux-ci sera quantifié, non par la formule de Weyl brute, mais à l'aide d'un « sandwich » entre deux projecteurs, pour accroître l'orthogonalité.

Le contrôle des rayons de confinement peut paraître un peu pénible, mais disparaîtra heureusement en paragraphe 7.3. Pour rendre plus parlants les énoncés, nous utiliserons systématiquement les deux conventions suivantes.

Une propriété (P) dépendant de α sera dite vérifiée « pour α assez petit » s'il existe une constante δ ne dépendant que des constantes de lenteur, tempérance et comparabilité du n° 5.1. (via notamment les constantes K et r_0 du théorème 6.6.6) et éventuellement des constantes du n° 5.3 relatives aux poids considérés, telle que la propriété (P) soit vérifiée pour $\alpha \leqq \delta$.

Nous dirons qu'une famille (b_Y) est uniformément négligeable dans une famille d'espaces $(\mathscr{E}_Y)$, munis de suites de semi-normes, si pour tout N, la famille $((\lambda_k(Y))^N b_Y)$ est uniformément bornée dans $(\mathscr{E}_Y)$.

Par exemple, nous utiliserons fréquemment la conséquence suivante du théorème 6.6.6 et de (5.2.2) : si (a_Y) et (b_Y) sont uniformément bornés dans $\mathrm{Conf}(k, Y, r_1)$, alors, pour $Y, Z \in \Omega_{r_2}$, les $(a_Y \# b_Z)$ sont uniformément négligeables dans $\mathrm{Conf}(k, Y, r)$ pourvu que r, r_1/r, r_1/r_2 et $r_1/g_{k,Y}(Y-Z)$ soient assez petits.

DÉFINITION 7.2.1. — *Soient* $0<\varepsilon<r<r'\leqq r_0$. *Soit* Π_Y *une famille de projecteurs, de type* $(r-2\varepsilon, r-\varepsilon)$, *du k-calcul, et soit* (φ_Y) *une* g_k *partition de l'unité, avec* φ_Y *à support dans* $U_{Y,\varepsilon}$ (voir *théorème* 3.1.3). *Si* ε/r *et* r/r' *sont assez petits, on associe à toutes ces données une application* Q (*quantification*) *de* $S_0(M, g_k, V_{r'})$ *dans* $O_r(M, k, V)$ *par*

$$a^Q = \int_{V_r} \Pi_Y^w \circ (\varphi_Y a)^w \circ \Pi_Y^w \, d\mu(Y), \tag{7.2.1}$$

avec $d\mu(Y) = |g_{kY}|^{1/2} dY$.

Il est en effet clair que $M(Y)^{-1} \Pi_Y \# (\varphi_Y a) \# \Pi_Y$ est une famille uniformément bornée d'éléments de $\mathrm{Conf}(k, Y, r-\varepsilon)$.

DÉFINITION (provisoire) 7.2.2. — *Soient* $0<r<r_1<r'<r_0$, *et* $A \in O_r(M, k, V)$. *On dit que* $a \in S_0(M, k, V)$ *est un symbole de* A *s'il existe une écriture* (7.1.1) *de* A, *et une famille* (φ_Y) *uniformément bornée dans* $S(1, g_{kY})$, *à support dans* $U_{Y,r'}$, *valant* 1 *dans* U_{Y,r_1}, telles que

$$a(X) = \int_{V_{r'}} M(Y)\, a_Y(X)\, \Phi_Y(X)\, d\mu(Y). \tag{7.2.2}$$

L'appartenance de a à $S_0(M, g_k, V)$ résulte du lemme 3.1.4. Le calcul de a dépend non seulement du choix des Φ_Y, mais encore de l'écriture (7.1.1) de A.

LEMME 7.2.3. — *Soit* $A \in O_r(M, k, V_{r'})$ *et soit* a *un symbole de* A. *Si* r', ρ, r/r', r/ρ *sont assez petits, on a*

$$A - a^Q \in O_\rho(M \lambda_k^{-\infty}, k, V).$$

En supposant, pour simplifier, $M=1$, on a avec les notations des définitions précédentes

$$A=\int a_Z^w \, d\mu(Z), \tag{7.2.3}$$

$$a^Q=\iint \Pi_Y^w \circ [\varphi_Y a_Z \Phi_Z]^w \circ \Pi_Y^w \, d\mu(Y) \, d\mu(Z). \tag{7.2.4}$$

Dans (7.2.3), modulo des éléments de $O_r(\lambda_k^{-\infty}, k, V)$, on peut remplacer a_Z^w par $\Pi_Z^w \circ a_Z^w \circ \Pi_Z^w$ en vertu du théorème 6.4.1 (*a*), puis par $\Pi_Z^w \circ (\Phi_Z a_Z)^w \circ \Pi_Z^w$ en vertu de la proposition 2.2.4. On a donc

$$A \equiv \iint \Pi_Z^w \circ [\Phi_Z a_Z \varphi_Y]^w \circ \Pi_Z^w \, d\mu(Y) \, d\mu(Z). \tag{7.2.5}$$

Dès que r/ρ_1 est assez petit, l'intégration est limitée à $\{(Y,Z) \,|\, g_Y(Y-Z)^{1/2} \leqq \rho_1\}$, le produit $\Phi_Z \varphi_Y$ étant nul sinon. Soit maintenant $\tilde{\Pi}_Y$ une famille de projecteurs de type $(\rho-\varepsilon, \rho-2\varepsilon)$, de telle sorte que $\lambda_k(Y)^N(\tilde{\Pi}_Y \Pi_Y - \tilde{\Pi}_Y)$ et $\lambda_k(Y)^N(\tilde{\Pi}_Y \Pi_Z - \tilde{\Pi}_Y)$ soient uniformément bornés dans $\mathrm{Conf}(k, Y, \rho)$ sur le domaine d'intégration. Cela est réalisable pourvu que ρ_1/ρ soit assez petit. On a donc, modulo $O_\rho(\lambda_k^{-\infty}, k, V)$,

$$A \equiv \iint \tilde{\Pi}_Y^w \circ b_{YZ}^w \circ \tilde{\Pi}_Y^w \, d\mu(Y) \, d\mu(Z)$$

où $b_{YZ}=\Pi_Z \# [\Phi_Z a_Z \varphi_Y] \# \Pi_Z$ diffère de $\Phi_Z a_Z \varphi_Y$ par une famille uniformément négligeable d'éléments de $W-\mathrm{Conf}(g_k, Y, r)$.

Le même argument s'appliquant à l'expression (7.2.4) de a^Q, on obtient

$$A \equiv \iint \tilde{\Pi}_Y^w \circ [\Phi_Z a_Z \varphi_Y]^w \circ \tilde{\Pi} \equiv a^Q$$

modulo $O_\rho(\lambda_k^{-\infty}, k, V)$.

LEMME 7.2.4. — *Avec les notations de la définition* 7.2.1, *soit* $a \in S_0(M, g_k, V_{r'})$ *tel que* $a^Q \in O_r(M\lambda_k^{-\infty}, k, V)$. *Alors* $a \in S_0(M\lambda_k^{-\infty}, g_k, V)$.

Nous supposerons encore $M=1$. On a d'après la remarque 7.1.4.

$$\Pi_Z^w \circ a^Q \circ \Pi_Z^w = b_Z^w,$$

avec b_Z uniformément négligeable dans $\overline{\mathrm{Conf}}(k, Z, K^2 r)$, et

$$b_Z=\int \Pi_Z \# \Pi_Y \# (\varphi_Y a) \# \Pi_Y \# \Pi_Z \, d\mu(Y).$$

Si on n'intègre que sur $U_{Z,\rho}$, l'erreur commise est uniformément négligeable pourvu que r/ρ soit assez petit. D'autre part,

$$\Pi_Y \# (\varphi_Y a) \# \Pi_Y - \varphi_Y a$$

est uniformément négligeable dans $W-\mathrm{Conf}(g_k, Y, r)$ d'après le théorème 6.4.1 (b). Il en résulte que, en posant

$$C_Z = \Pi_Z \# \left[a \int_{U_{Z,\rho}} \varphi_Y \, d\mu(Y) \right] \# \Pi_Z,$$

la famille C_Z est uniformément négligeable dans $\overline{\mathrm{Conf}}(k, Z, \rho)$. Le fait que $\int_{U_{Z,\rho}} \varphi_Y \, d\mu(Y) = 1$ dans $U_{Z,r}$, joint au théorème 6.4.1 (b) assure que C_Z coïncide avec a dans $U_{Z,r}$, modulo une erreur uniformément négligeable dans $S(1, g_k, U_{Z,r})$, et donc le résultat.

Remarque 7.2.5. — Si a_1 et a_2 sont deux symboles d'un même opérateur A de poids M, l'opérateur $(a_1-a_2)^Q$ est de poids $M\lambda_k^{-\infty}$ (Lemme 7.2.3), et donc $a_1-a_2 \in S(M\lambda_k^{-\infty}, g_k, V)$ (lemme 7.2.4).

Si b est un symbole de a^Q, on a $(b-a)^Q$ de poids $M\lambda_k^{-\infty}$ (lemme 7.2.3) et donc $b-a \in S(M\lambda_k^{-\infty}, g_k, V)$.

Si Q′ est une autre quantification du type de la définition 7.2.1, le Lemme 7.2.3 (pour Q′) s'applique à l'opérateur a^Q. On obtient $a^Q - b^{Q'} \in O_r(M\lambda_k^{-\infty}, k, V)$, et donc $a^Q - a^{Q'} \in O_r(M\lambda_k^{-\infty}, k, V)$.

Remarque 7.2.6. — Soit $A \in O_r(M\lambda_k^{-\infty}, k, V)$. Par définition, pour chaque ν, l'opérateur A possède une écriture (7.1.1) dépendant de ν, avec $\lambda(Y)^\nu a_{\nu, Y}$ uniformément borné dans $\overline{\mathrm{Conf}}\,(k, Y, r)$. En fait, A possède aussi une écriture (7.1.1) fixe, avec pour chaque ν, $\lambda(Y)^\nu a_Y \in \overline{\mathrm{Conf}}(k, Y, \rho)$. En effet, si a est un symbole de A, l'opérateur a^Q est de ce type, et les termes d'erreur apparaissant dans le lemme 7.2.3 sont également de ce type.

THÉORÈME 7.2.7. — *Soient* $a_i \in S_0(M_i, g_k, V_r)$, $i=1,2$. *Avec les notations des définitions* 7.2.1 *et* 7.2.2, *soit* b *un symbole de* $a_1^Q \circ a_2^Q$. *On a alors pour tout* ν :

$$(7.2.6) \qquad b - \sum_{0}^{\nu-1} \frac{1}{j!} \left[\frac{i}{2} [D_X, D_Y] \right]^j a_1(X) \, a_2(Y)_{\,|\,Y=X} \in S(M_1 M_2 \lambda_k^{-\nu}, g_k, V).$$

On prendra encore $M_1 = M_2 = 1$ pour simplifier, et on notera $\omega_\nu(a_1, a_2)$ la somme figurant dans (7.2.6). Le lecteur pourra vérifier que les constantes ρ, ρ', ρ'', δ peuvent être choisies proportionnelles au r de la définition 7.2.1, avec des facteurs ne dépendant que des données du n° 5.1, pourvu que r et r/r' soient assez petits.

En choisissant ρ assez grand devant r, en vertu du théorème 6.6.6 et de (5.2.2), on a modulo un élément de $O(\lambda_k^{-\infty}, k, V)$

$$a_1^Q \circ a_2^Q \equiv \iint_{Y_2 \in U_{Y_1,\rho}} \Pi_{Y_1}^w \circ (\varphi_{Y_1} a_1)^w \circ \Pi_{Y_1}^w \circ \Pi_{Y_2} \circ (\varphi_{Y_2} a_2)^w \circ \Pi_{Y_2} \, d\mu(Y_1) \, d\mu(Y_2),$$

et, d'après le théorème 6.4.1 (b)

$$a_1^Q \circ a_2^Q \equiv B = \iint_{Y_2 \in U_{Y_1,\rho}} \Pi_{Y_1}^w \circ (\varphi_{Y_1} a)^w \circ (\varphi_{Y_2} a)^w \circ \Pi_{Y_2}^w \, d\mu(Y_1) \, d\mu(Y_2).$$

En choisissant des Φ_Y valant 1 dans $U_{Y,\rho'}$, avec ρ' assez grand devant ρ, comme dans la Définition 7.2.2, on obtient un symbole b de B par

$$b=\iint_{Y_2\in U_{Y_1,\rho}} \Phi_{Y_1}.\,[\Pi_{Y_1}\#(\varphi_{Y_1}a_1)\#(\varphi_{Y_2}a_2)\#\Pi_{Y_2}]\,d\mu(Y_1)\,d\mu(Y_2).$$

Choisissons maintenant δ assez petit devant r. Pour $X\in U_{Z,\delta}$, l'intégration ci-dessus est limitée à une boule de rayon ρ'' centrée en Z, où on peut supposer que g_k est symétriquement tempérée. On peut alors appliquer le calcul de Weyl relatif à g_k, et modulo un terme uniformément négligeable dans $S(1, g_{kZ}, U_{Z,\delta})$, on a $b\equiv\alpha_1\#\alpha_2$ dans $U_{Z,\delta}$ avec

$$\alpha_i=a_i\int_{U(Z,\rho)}\varphi_Y\,d\mu(Y).$$

La fonction α_i coïncidant avec a_i dans $U_{Z,\delta}$, on a $\omega_v(a_1, a_2)=\omega_v(\alpha_1, \alpha_2)$ dans cette boule, et le résultat est une conséquence immédiate de la proposition 2.2.5.

7.3. Opérateurs k-microdifférentiels avec paramètre. — Dans la quantification définie en 7.2.1, on doit faire le choix, par ailleurs arbitraire, d'un rayon de confinement. La composition des opérateurs accroît ces rayons de confinement qui doivent néanmoins rester inférieurs à la constante r_0. Cette difficulté, et le moyen de la résoudre, apparaîtront peut-être plus clairement sur un exemple simple.

Exemple 7.3.1. — On prend pour métrique g_1 la métrique usuelle $dx^2+d\xi^2/\langle\xi\rangle^2$, et pour g_2 la métrique $dx^2+d\xi^2/(1+\xi_1^2)$. Le symbole ξ_1^{-1}, tronqué près de $\xi_1=0$, définit un élément de $S(\lambda_2^{-1}, g_2, \mathbb{R}^{2n})$, que l'on peut quantifier par

$$A\,u(x)=\sum\Phi_i(x)\int_{-\infty}^{x_1}\varphi_i(s, x')\,u(s, x')\,ds$$

où les φ_i sont une partition de l'unité de $\mathbb{R}^n$, et les Φ_i valent 1 près du support de φ_i.

Cet opérateur ne préserve ni le front d'onde (usuel), ni même le support singulier. Cela dit, il les augmente d'autant moins que les supports des Φ_i sont petits. Si les Φ_i, φ_i, A dépendent d'un paramètre δ, et si le diamètre du support des Φ_i tend vers 0 avec δ, on aura la propriété suivante : si $u\in C^\infty$ près de x_0, alors $A_\delta u\in C^\infty$ près de x_0 pour δ petit.

Dans le cas général, nous associerons à un symbole toute une famille A_δ d'opérateurs dont les rayons de confinement tendent vers 0 avec δ. On disposera d'un calcul symbolique asymptotique jouissant des mêmes propriétés que les calculs usuels, pourvu que le nombre d'opérations sur les opérateurs reste fini.

Définition 7.3.2. — *On notera* $\mathcal{O}(M, k, V)$ *l'espace des (germes de) familles* $\mathcal{A}=(A_\delta)$, $\delta\in]0, \delta_0[$ *telles que*

(*a*) *chaque* A_δ *appartient à* $O_{r(\delta)}(M, k, V)$, *avec* $r(\delta)\to 0$ *pour* $\delta\to 0$.

(*b*) *Le nombre* r' *intervenant dans* (7.1.1) *est indépendant de* δ.

(*c*) *Pour tout* N, $A_\delta-A_{\delta'}\in O_r(M\lambda_k^{-\infty}, k, V)$ *avec* $r=\operatorname{Max}(r(\delta), r(\delta'))$.

Soient Π_Y^δ, φ_Y^δ vérifiant les conditions de la définition 7.2.1, pour des valeurs $r=r(\delta)$, $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$ tendant vers 0 avec δ. On a, pour chaque δ assez petit, une quantification Q_δ de $S_0(M, g_k, V_{r(\delta)})$ dans $O_{r(\delta)}(M, g_k, V)$, et donc l'application

$$a \mapsto \mathscr{A} = (a^{Q_\delta}). \tag{7.3.1}$$

Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux opérateurs à paramètre, nous noterons $\mathscr{A} \circ \mathscr{B}$ la famille des $(A_\delta \circ B_\delta)$, qui est bien définie (théorème 7.1.3) pour δ assez petit.

THÉORÈME 7.3.3. — (*a*) *L'application de quantification* (7.3.1) *envoie* $S_0(M, g_k, V)$ *dans* $\mathscr{O}(M, k, V)$ *et induit une bijection, indépendante du choix des* Π_Y^δ, φ_Y^δ, *de* $S_0(M, g_k, V)/S_0(M\lambda_k^{-\infty}, g_k, V)$ *sur* $\mathscr{O}(M, k, V)/\mathscr{O}(M\lambda_k^{-\infty}, k, V)$. *On notera* $\mathscr{A} \mapsto \sigma(\mathscr{A})$ *l'application* (*symbole*) « *inverse* » :

$$\sigma : \quad \mathscr{O}(M, k, V) \mapsto S_0(M, g_k, V)/S_0(M\lambda_k^{-\infty}, g_k, V).$$

(*b*) *L'ensemble des* $\mathscr{O}(M, k, V)$, *indexé par le groupe des poids admissibles* M, *constitue une algèbre graduée, stable par adjoint.*

(*c*) *On a*

$$\sigma(\mathscr{A} \circ \mathscr{B}) = \sigma(\mathscr{A}) \,\tilde{\#}\, \sigma(\mathscr{B})$$
$$\sigma(\mathscr{A}^*) = \overline{\sigma(\mathscr{A})}.$$

le symbole $\tilde{\#}$ *étant déjà défini au théorème* 1.3.1.

Si $a \in S_0(M, g_k, V)$, on a $a \in S_0(M, g_k, V_\rho)$ pour un $\rho > 0$, et les a^{Q_δ} sont du type (7.1.1) avec $r' = \rho/2$ dès que $r(\delta) \leqq \rho/4C$. Compte tenu de la remarque 7.2.5, on a $\mathscr{A} \in \mathscr{O}(M, k, V)$, et le résultat est indépendant des choix des Π_Y^δ, φ_Y^δ modulo $\mathscr{O}(M\lambda_k^{-\infty}, k, V)$.

Si $\mathscr{A} \in \mathscr{O}(M, k, V)$, il résulte du lemme 7.2.3 qu'il est, modulo $\mathscr{O}(M\lambda_k^{-\infty}, k, V)$, l'image d'un élément a de $S_0(M, k, V)$: il suffit de prendre pour a l'un des symboles de l'un des A_δ. De même, le lemme 7.2.4 garantit l'injectivité, après passage au quotient, de l'application (7.3.1).

Si

$$\mathscr{A}_i \in \mathscr{O}(M_i, k, V), \quad i=1,2,$$

il résulte du théorème 7.1.3 que $\mathscr{A}_1 \circ \mathscr{A}_2 \in \mathscr{O}(M_1 M_2, k, V)$, avec $r' = \mathrm{Min}(r'_1, r'_2)$ et $\delta(r) = K\,\mathrm{Max}(\delta_1(r), \delta_2(r))$. La partie (*c*) du théorème résulte immédiatement du théorème 7.2.7 pour le produit. Pour l'adjoint, elle résulte du fait que l'adjoint de l'opérateur (7.1.1) est

$$A^* = \int M(Y)\, \bar{a}_Y^w \, d\mu(Y)$$

et qu'on peut calculer $\sigma(\mathscr{A}^*)$ par la formule (7.2.2) appliquée à l'un des $\mathscr{A}_\delta^*$.

7.4. RÉGULARITÉ k-MICROLOCALE.

DÉFINITION 7.4.1. — *Soient* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, M *un poids admissible et* V *un ouvert de* $\Omega^{(k)}$. *On dit que u appartient k-microlocalement à* H(M) *dans* V, *ce que l'on notera* $u \in \mathrm{H}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ *si pour tout* $\mathrm{V}' \subset\subset \mathrm{V}$, *il existe* $r(\mathrm{V}')$ *tel que l'on ait* $Au \in \mathrm{L}^2$ *pour tout opérateur*

$$\mathrm{A} = \int_{\mathrm{V}'} \mathrm{M}(\mathrm{Y})\, a_{\mathrm{Y}}^{w}\, d\mu(\mathrm{Y})$$

avec a_{Y} *uniformément borné dans* $\overline{\mathrm{Conf}}(k, \mathrm{Y}, r(\mathrm{V}'))$.

La quantification avec paramètre nous amène à considérer également des germes de familles u_δ de distributions, pour $\delta \to 0$.

DÉFINITION 7.4.2. — *Soit* $\mathcal{U} = (u_\delta)$, $\delta \in]0, \delta_0[$, *une famille d'éléments de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *On dit que* $\mathcal{U} \in \mathcal{H}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ *si pour tout* $\mathrm{V}' \subset\subset \mathrm{V}$, *il existe* $r(\mathrm{V}')$ *et* $\delta(\mathrm{V}')$ *tels que* $\mathrm{A}\, u_\delta \in \mathrm{L}^2$ *pour* A *comme ci-dessus, et* $\delta < \delta(\mathrm{V}')$.

On notera que, en général, aucun des u_δ n'appartient à $\mathrm{H}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$, mais que, pour $\mathrm{V}' \subset\subset \mathrm{V}$, on a $u_\delta \in \mathrm{H}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V}')$ pour $\delta < \delta(\mathrm{V}')$.

On a $\mathcal{U} \in \mathcal{H}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ si et seulement si on a, pour tout $\mathrm{V}' \subset\subset \mathrm{V}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{H}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V}')$. Enfin, une famille constante $u_\delta = u$ appartient à $\mathcal{H}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ si et seulement si $u \in \mathrm{H}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$.

THÉORÈME 7.4.3. — (*a*) *Si* $\mathcal{B} \in \mathcal{O}(\mathrm{M}, k, \Omega)$ *et* $\mathcal{U} \in \mathcal{H}(\mathrm{M}_1, k, \mathrm{V})$, *on a*

$$\mathcal{B}\mathcal{U} \in \mathcal{H}(\mathrm{M}_1/\mathrm{M}, k, \mathrm{V}).$$

(*b*) *Soit* $\mathcal{B} \in \mathcal{O}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ *tel que, pour tout* $\mathcal{U} \in \mathcal{H}(\mathrm{M}_1, k, \mathrm{V})$, *on ait*

$$\mathcal{B}\mathcal{U} \in \mathcal{H}(\mathrm{M}_1 \lambda_k^{-\infty}/\mathrm{M}, k, \mathrm{V}).$$

On a alors $\mathcal{B} \in \mathcal{O}(\mathrm{M}\lambda_k^{-\infty}, k, \mathrm{V})$.

(*a*) Nous noterons $r_1(\mathrm{V}')$, $\delta_1(\mathrm{V}')$ les fonctions de la définition 7.4.2, relative à $\mathcal{U} \in \mathcal{H}(\mathrm{M}_1, k, \mathrm{V})$. Nous noterons $r_2(\delta)$ la fonction de la définition 7.3.2 relative à $\mathcal{B} \in \mathcal{O}(\mathrm{M}, k, \Omega)$.

Soit maintenant

$$\mathrm{A} = \int_{\mathrm{W}'} \mathrm{M}_1(\mathrm{Y})/\mathrm{M}(\mathrm{Y})\, a_{\mathrm{Y}}^{w}\, d\mu(\mathrm{Y})$$

avec a_{Y} uniformément borné dans $\overline{\mathrm{Conf}}(k, \mathrm{Y}, \rho)$. On a

$$\mathrm{AB}_\delta = \int_{\mathrm{W}'} \mathrm{M}_1(\mathrm{Y})\, \mathrm{C}_{\mathrm{Y}\delta}^{w}\, d\mu(\mathrm{Y})$$

d'après le théorème 7.1.3, où les $\mathrm{C}_{\mathrm{Y},\delta}$ sont uniformément bornés dans $\overline{\mathrm{Conf}}(k, \mathrm{Y}, \rho')$, $\rho' = \mathrm{K}(\rho + r_2(\delta))$.

On a donc $\mathrm{AB}_\delta u_\delta \in \mathrm{L}^2$ pourvu que

$$\mathrm{K}(\rho + r_2(\delta)) < r_1(\mathrm{W}') \qquad \text{et} \qquad \delta < \delta(\mathrm{W}').$$

Il suffit donc de prendre $\rho < r_1(W')/2K$, puis δ assez petit pour rendre $r_2(\delta)$ inférieur à $r_1(W')/2K$ pour conclure.

(*b*) Par une récurrence évidente, on se ramène à prouver que, si $\mathscr{B} \in \mathcal{O}(M\lambda_k, k, V)$, et s'il applique $\mathscr{H}(M_1, k, V)$ dans $\mathscr{H}(M_1/M, k, V)$, alors $\mathscr{B} \in \mathcal{O}(M\lambda_k^\varepsilon, k, V)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

En prenant $M = M_1 = 1$ pour simplifier les notations, l'opérateur B_δ appliquant $H(1, k, V)$ dans $H(1, k, V')$ pour $\delta < \delta(V')$, c'est une conséquence immédiate du lemme suivant.

LEMME 7.4.4. — *Soit* $V' \subset\subset V$ *et soit* $B \in O_r(\lambda_k, k, V)$ *tel que, pour tout* $u \in H(1, k, V)$ *on ait* $Bu \in H(1, k, V')$. *Si* b *est un symbole de* B, *on a* $b \in S(\lambda_k^\varepsilon, k, V') \cap L^\infty(V')$ *pour tout* $\varepsilon > 0$.

On a (théorème 7.1.2*b*) $L^2 \subset H(1, k, V)$, et il résulte de l'hypothèse, que pour $V' \subset V$, l'application

$$a \mapsto a^Q \circ B$$

envoie $\{ a \in S(1, g_k, V) \mid \operatorname{Supp} a \subset V' \}$ dans $\mathscr{L}(L^2, L^2)$, et envoie continûment ce même espace dans $\mathscr{L}(L^2, \mathscr{S}')$. En vertu du théorème du graphe fermé, la famille des $\Phi_Y^Q \circ B$, où Φ_Y est uniformément borné dans $S_0(1, g_{kY}, U_{Y,r})$ et vaut 1 sur $U_{Y,r/2}$, est uniformément bornée dans $\mathscr{L}(L^2)$.

Il résulte de la proposition 2.4.1(*b*) que le symbole de Weyl de $\Phi_Y^Q \circ B$, qui coïncide avec b dans $U_{Y,r/2}$ modulo une famille uniformément négligeable dans $S(1, g_k, U_{Y,r/2})$, est uniformément borné dans L^∞. On a donc

$$\sigma(B) \in S_0(\lambda_k, g_k, V') \cap L^\infty \subset S_0(\lambda_k^\varepsilon, g_k, V').$$

7.5. OPÉRATEURS EXTERNES. — Ce concept sera de peu d'intérêt lorsque $\Omega^{(k)} = \mathbb{R}^{2n}$ (on a $\mathbb{R}^{2n} \subset\subset \mathbb{R}^{2n}$ et $S_0(M, g_k, \mathbb{R}^{2n}) = S(M, g_k, \mathbb{R}^{2n})$) auquel cas on peut se limiter à considérer des opérateurs de $\mathcal{O}(M, k, \mathbb{R}^{2n})$. Pour $\Omega_k \neq \mathbb{R}^{2n}$, il est d'ailleurs difficile d'exhiber des opérateurs externes, à l'exception des opérateurs différentiels et des opérateurs qui sont internes dans un ouvert plus grand pour les $g_1, \ldots, g_k$ (*voir* théorème 8.1.3).

DÉFINITION 7.5.1. — *On dit qu'une famille* $\mathscr{B} = (B_\delta)$ *d'opérateurs appliquant* $\mathscr{S}$ *et* $\mathscr{S}'$ *dans eux-mêmes, est un élément de* $\mathcal{O}\operatorname{ext}(M, k, V)$ *s'il existe, pour tout* $V' \subset\subset V$, *des constantes* $\delta(V')$, $r(V')$, *et une fonction* $\rho_{V'}(\delta, r)$ *définie pour* $\delta < \delta(V')$ *et* $r < r(V')$, *tendant vers* 0 *lorsque* δ *et* r *tendent vers* 0, *telles que l'on ait les deux propriétés suivantes, en posant*

$$B_\delta \circ a^w = a_{1\delta}^w; \qquad a^w \circ B_\delta = a_{2\delta}^w.$$

(*a*) Les applications $a \mapsto M(Y)^{-1} a_{i\delta}$ sont continues, uniformément pour $Y \in V'$, de $\overline{\text{Conf}}\,(k, Y, r)$ dans $\overline{\text{Conf}}\,(k, Y, \rho_{V'}(\delta, r))$ lorsque $\delta < \delta(V)$ et $r < r(V)$.

(*b*) Pour $\delta' < \delta < \delta(V')$, $r < r(V)$, $N \in \mathbb{N}$, les applications $a \mapsto M(Y)^{-1} \lambda_k(Y)^N (a_{i\delta} - a_{i\delta'})$ vérifient la même propriété.

THÉORÈME 7.5.2. — (*a*) *Les* $\mathcal{O}\operatorname{ext}(M, k, V)$ *forment une algèbre graduée stable par adjonction, et les* $\mathcal{O}(M, k, V)$ *en constituent un idéal.*

(*b*) *Pour* $V_1 \subset V_2$, *on a* $\mathcal{O}\operatorname{ext}(M, k, V_2) \subset \mathcal{O}\operatorname{ext}(M, k, V_1)$

(*c*) *Pour tout* $\mathscr{B}\in\mathcal{O}\,\mathrm{ext}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$, *et tout* $\mathrm{V}'\subset\subset\mathrm{V}$, *il existe* $\mathscr{A}\in\mathcal{O}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ *tel que*

$$\mathscr{B}-\mathscr{A}\in\mathcal{O}\,\mathrm{ext}(\mathrm{M}\,\lambda_k^{-\infty}, k, \mathrm{V}').$$

Il est évident, au vu de la définition, que le composé de deux opérateurs externes, en est un. Si $\mathscr{A}$ est un opérateur interne, on a, avec des notations évidentes, et en prenant les poids égaux à 1 pour simplifier,

$$\mathrm{B}_\delta\,\mathrm{A}_\delta=\int_{\mathrm{V}'}\mathrm{B}_\delta\circ a^w_{\mathrm{Y},\,\delta}\,d\mu(\mathrm{Y})$$

et les $\mathrm{B}_\delta\circ a^w_{\mathrm{Y}\delta}$ sont confinés, avec un rayon de confinement $\rho_{\mathrm{V}'}(\delta, r(\delta))$ qui tend vers 0 avec δ. En outre, la propriété 7.5.1(*b*) garantit que $\mathrm{B}_\delta\,\mathrm{A}_\delta-\mathrm{B}_{\delta'}\,\mathrm{A}_{\delta'}$ est régularisant. L'inclusion (*b*) étant évidente, il reste à prouver la partie (*c*).

Soit $\mathscr{L}$ un élément de $\mathcal{O}(1, k, \mathrm{V}_2)$, dont le symbole est égal à 1 sur V_1, avec $\mathrm{V}'\subset\subset\mathrm{V}_1\subset\subset\mathrm{V}_2\subset\subset\mathrm{V}$. En posant $\mathscr{A}=\mathscr{B}\mathscr{L}$, on a bien $\mathscr{A}\in\mathcal{O}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$, et il reste à examiner l'action de $\mathscr{A}-\mathscr{B}$ sur un c^w_{Y}, avec $c_{\mathrm{Y}}\in\overline{\mathrm{Conf}}\,(k, \mathrm{Y}, r)$ et $\mathrm{Y}\in\mathrm{V}'$.

Il résulte facilement de la démonstration du théorème 7.2.6 que, en posant pour chaque δ

$$\mathrm{L}_\delta\circ c^w_{\mathrm{Y}}=d^w_{\mathrm{Y}}$$

l'application $c_{\mathrm{Y}}\mapsto\lambda_k(\mathrm{Y})^{\mathrm{N}}(c_{\mathrm{Y}}-d_{\mathrm{Y}})$ est continue, uniformément en Y, de $\overline{\mathrm{Conf}}\,(k, \mathrm{Y}, r)$ dans $\overline{\mathrm{Conf}}(k, \mathrm{Y}, \mathrm{C}(r+r(\delta)))$. On a donc

$$(\mathrm{A}_\delta-\mathrm{B}_\delta)\circ c^w_{\mathrm{Y}}=\mathrm{B}_\delta\circ(d^w_{\mathrm{Y}}-c^w_{\mathrm{Y}})$$

et $(\mathscr{A}-\mathscr{B})$ vérifie les propriétés (*a*) (et donc (*b*)) de la définition 7.5.1 avec le poids $\mathrm{M}\,\lambda_k^{-\mathrm{N}}$ pour tout N.

THÉORÈME 7.5.3. — *Il existe une application* σ *de* $\mathcal{O}\,\mathrm{ext}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ *dans* $\mathrm{S}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{M}, g_k, \mathrm{V})/\mathrm{S}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{M}\,\lambda_k^{-\infty}, g_k, \mathrm{V})$ *qui prolonge l'application symbole définie sur* $\mathcal{O}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ *et qui induit un isomorphisme* (*d'algèbres graduées avec adjoint*)

$$\mathcal{O}\,\mathrm{ext}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})/\mathcal{O}\,\mathrm{ext}(\mathrm{M}\,\lambda_k^{-\infty}, k, \mathrm{V})\xrightarrow{\sim}\mathrm{S}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{M}, g_k, \mathrm{V})/\mathrm{S}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{M}\,\lambda_k^{-\infty}, g_k, \mathrm{V}).$$

A l'exception peut-être de la surjectivité, c'est une conséquence évidente du théorème 7.5.2(*c*) et des propriétés correspondantes des opérateurs internes (théorème 7.3.3). Pour $\mathscr{B}\in\mathcal{O}\,\mathrm{ext}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ et tout $\mathrm{V}'\subset\subset\mathrm{V}$, on écrit $\mathscr{B}=\mathscr{A}+(\mathscr{B}-\mathscr{A})$, avec $\mathscr{A}\in\mathcal{O}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ et $(\mathscr{B}-\mathscr{A})\in\mathcal{O}\,\mathrm{ext}(\mathrm{M}\,\lambda_k^{-\infty}, k, \mathrm{V}')$, et $\sigma(\mathscr{B})$ est défini par

$$\sigma(\mathscr{B})\,|_{\mathrm{V}'}=\sigma(\mathscr{A})\,|_{\mathrm{V}'}.$$

Si maintenant b appartient à $\mathrm{S}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$, on choisit une famille (V_δ) tendant vers V, avec $\mathrm{V}_\delta\subset\subset\mathrm{V}$, on choisit une quantification Q_δ de rayon de confinement tendant vers 0 avec δ, et une famille $\chi_\delta\in\mathrm{S}_0(1, g_k, \mathrm{V})$ valant 1 sur V_δ. En posant $\mathrm{B}_\delta=(\chi_\delta\,b)^{\mathrm{Q}_\delta}$, on a bien $\mathscr{B}\in\mathcal{O}\,\mathrm{ext}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ et $\sigma(\mathscr{B})\equiv b$.

THÉORÈME 7.5.4. — (*a*) *Si* $\mathscr{B} \in \mathcal{O}\,\mathrm{ext}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ *et* $\mathscr{U} \in \mathscr{H}(\mathrm{M}_1, k, \mathrm{V})$, *on a* $\mathscr{B}\mathscr{U} \in \mathscr{H}(\mathrm{M}_1/\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$.

(*b*) *Si* $\mathscr{B} \in \mathcal{O}\,\mathrm{ext}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$, *et si pour tout* $\mathscr{U} \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ *on a*

$$\mathscr{B}\mathscr{U} \in \mathscr{H}(\mathrm{M}_1 \lambda_k^{-\infty}, k, \mathrm{V}),$$

alors $\mathscr{B} \in \mathcal{O}\,\mathrm{ext}(\mathrm{M}\lambda_k^{-\infty}, k, \mathrm{V})$.

Il suffit de montrer que, pour tout $\mathrm{V}' \subset\subset \mathrm{V}$, les conclusions sont vraies en remplaçant V par V′. On se ramène alors immédiatement au cas des opérateurs internes (théorème 7.4.3), à l'aide de la décomposition du théorème 7.5.2*c*).

8. D'une microlocalisation à l'autre

Dans les applications, la métrique g_1 sera le plus souvent la métrique usuelle $dx^2 + d\xi^2/\langle \xi \rangle^2$. Le but essentiel du k^e-calcul étant de prouver la régularité microlocale de solutions d'équations (pseudo)-différentielles usuelles, il est d'une importance capitale que, d'une part, les opérateurs usuels soient des opérateurs k-microdifférentiels et que, d'autre part, on puisse remonter des régularités $\mathscr{H}(\mathrm{M}, k, \mathrm{V})$ aux régularités microlocales usuelles.

On rappelle que $\mathrm{V}' \subset\subset \mathrm{V}$ au sens de g_l signifie que V et V′ sont des ouverts contenus dans Ω_l, et que toute g_l-boule de rayon assez petit, centrée en un point de V′, est contenue dans V.

8.1. TRANSFERT DES OPÉRATEURS.

PROPOSITION 8.1.1. — *Soient* $\mathrm{V}' \subset\subset \mathrm{V}$ *au sens de* g_{k-1}, *et* M *un* $(k-1)$-*poids admissible. Alors il existe* $\mathrm{C} > 0$ *tel que l'on ait*

$$\mathrm{O}_r(\mathrm{M}\lambda_{k-1}^{-\infty}, k-1, \mathrm{V}') \subset \mathrm{O}_r(\mathrm{M}\lambda_{k-1}^{-\infty}, k, \mathrm{V}') \subset \mathrm{O}_{\mathrm{C}r}(\mathrm{M}\lambda_{k-1}^{-\infty}, k-1, \mathrm{V})$$

pour r assez petit.

La première inclusion résulte simplement du fait qu'un élément A de $\mathrm{O}_r(\mathrm{M}\lambda_{k-1}^{-\infty}, k-1, \mathrm{V})$ se met sous la forme (*voir* remarque 7.2.6)

$$\mathrm{A} = \int \mathrm{M}(\mathrm{Y})\, a_{\mathrm{Y}} \,|g_{k-1,\mathrm{Y}}|^{1/2}\, d\mathrm{Y}$$

avec a_{Y} uniformément borné dans $\mathrm{Negl}(k-1, \mathrm{Y}, r)$. Il suffit de remarquer que $\mathrm{Negl}(k-1, \mathrm{Y}, r) \subset \overline{\mathrm{Conf}}\,(k, \mathrm{Y}, r)$, et que $|g_{k-1,\mathrm{Y}}| \leqq |g_{k\mathrm{Y}}|$.

Pour démontrer la seconde inclusion, avec pour simplifier $\mathrm{M} = 1$, remarquons d'abord que si un opérateur A est de la forme

$$\mathrm{A} = \int a_{\mathrm{Y}}^{w} \,|g_{k\mathrm{Y}}|^{1/2}\, d\mathrm{Y} \tag{8.1.1}$$

où pour tout ν, la famille $(\lambda_{k-1}(Y))^{\nu} a_Y$ est bornée dans $\overline{\mathrm{Conf}}\,(k, Y, r)$, il appartient alors à $O_{Cr}(\lambda_{k-1}^{-\infty}, k-1, V)$. En effet, d'une part, chaque semi-norme de a_Y dans $\overline{\mathrm{Conf}}\,(k-1, Y, Cr)$ est majorée par une semi-norme de a_Y dans $\overline{\mathrm{Conf}}\,(k, Y, r)$, multipliée par une puissance fixe de $\lambda_{k-1}(Y)$ (*voir* lemme 6.3.2), d'autre part, on a $|g_{kY}| \leqq (\lambda_{k-1}(Y))^{N_0} |g_{k-1, Y}|$.

Soit $A \in O_r(\lambda_{k-1}^{-\infty}, k, V')$, et soit

$$I = P_\delta + R_\delta$$

avec $\mathscr{P} \in \mathscr{O}(1, k-1, V)$ et $\mathscr{R} \in \mathscr{O}\,\mathrm{ext}(\lambda_{k-1}^{-\infty}, k-1, V')$ la décomposition fournie par le théorème 7.5.2(*c*). En supprimant l'indice δ et en utilisant seulement $A \in O_r(1, k, V')$, on obtient

$$RA = \int R \circ a_Y^w |g_{kY}|^{1/2}\, dY$$

où $R \circ a_Y^w = b_Y^w$, avec $\lambda_{k-1}(Y)^{\nu} b_Y$ uniformément borné dans $\overline{\mathrm{Conf}}\,(k, Y, r)$. L'opérateur RA est donc du type (8.1.1).

On a d'autre part

$$PA = \iint P_Z^w \circ a_{Y,\nu}^w |g_{k-1, Z}|^{1/2} |g_{kY}|^{1/2}\, dZ\, dY$$

pour chaque ν, avec $\lambda_{k-1}(Y)^{\nu} a_{Y,\nu}$ bornés dans $\overline{\mathrm{Conf}}\,(k, Y, r)$. Si on pose

$$Q_Z = \int P_Z \# a_{Y,\nu} |g_{kY}|^{1/2}\, dY,$$

Il résulte du théorème 6.6.6 que le produit de chaque semi-norme de Q_Z dans $\overline{\mathrm{Conf}}\,(k-1, Z, Cr)$ par chaque puissance de $\lambda_{k-1}(Z)$ est uniformément borné, ce qui donne le résultat.

PROPOSITION 8.1.2. — *Soient* V *un ouvert de* $\Omega^{(k)}$, *et* M *un* $(k-1)$-*poids admissible. Il existe* C *tel que, pour* $A \in O_r(M, k-1, V)$, *on a* $A \in O_{Cr}(M, k, V)$. *Si, en outre un symbole de* A *appartient à* $S_0(M \lambda_{k-1}^{-p} \lambda_k^q, g_k, V)$, *avec* $p, q \in \mathbb{R}$, *alors* A *appartient à* $O_{Cr}(M \lambda_{k-1}^{-p} \lambda_k^q, k, V)$.

Si a est un symbole de A, on peut écrire, modulo un opérateur de $O_{Cr}(M\lambda_{k-1}^{-\infty}, k-1, V) \subset O_{Cr}(M\lambda_{k-1}^{-\infty}, k, V)$,

$$A \equiv \int \Pi_Y^w \circ (\varphi_Y a)^w \circ \Pi_Y^w |g_{k-1, Y}|^{1/2}\, dY,$$

où les Π_Y sont des $(k-1)$-projecteurs, et φ_Y une g_{k-1}-partition de l'unité. Soit ψ_Z une g_k-partition de l'unité. On a

$$A \equiv \iint \Pi_Y^w \circ (\varphi_Y \,.\, \psi_Z a)^w \circ \Pi_Y^w |g_{k-1, Y}|^{1/2} |g_{kZ}|^{1/2}\, dY\, dZ.$$

Les intégrales en Y (qui sont limités aux boules $g_{k-1, Z}(Y-Z)^{1/2} \leqq \text{Cte}\, r$) fournissent des éléments de $\overline{\text{Conf}}(k, Z, r)$ qui, multipliés par $M(Y)^{-1} \lambda_{k-1}(Y)^p \lambda_k(Y)^{-q}$ constituent une famille bornée, ce qui entraîne le résultat.

THÉORÈME 8.1.3. — *Soit* $V \subset \Omega^{(k)}$ *et soit* M *un* g_{k-1}*-poids admissible.*

(*a*) *Si* $\mathscr{A} \in \mathscr{O}(M, k-1, V)$ *on a* $\mathscr{A} \in \mathscr{O}(M, k, V)$. *Si de plus* $\sigma(\mathscr{A}) \in S_0(M \lambda_{k-1}^{-p} \lambda_k^q, g_k, V)$ (*modulo* $S_0(M \lambda_{k-1}^{-\infty}, g_{k-1}, V)$), *on a* $\mathscr{A} \in \mathscr{O}(M \lambda_{k-1}^{-p} \lambda_k^q, k, V)$.

(*b*) *Si* $V' \subset\subset V$ *pour* g_{k-1} *et si* $\mathscr{B} \in \mathscr{O}\,\text{ext}(M, k-1, V)$, *on a* $\mathscr{B} \in \mathscr{O}\,\text{ext}(M, k, V')$ *avec la même amélioration lorsque* $\sigma(\mathscr{B}) \in S_{\text{loc}}(M \lambda_{k-1}^{-p} \lambda_k^q, g_k, V)$.

La partie (*a*) résulte immédiatement de la proposition 8.1.2 appliquée à chacun des A_δ constituant $\mathscr{A}$.

Soit maintenant $\mathscr{B} \in \mathscr{O}\,\text{ext}(M, k-1, V)$. On peut alors écrire (théorème 7.5.2(*c*)).

$$\mathscr{B} = \mathscr{A} + \mathscr{R}$$

avec $\mathscr{A} \in \mathscr{O}(M, k-1, V)$ et $\mathscr{R} \in \mathscr{O}\,\text{ext}(M \lambda_{k-1}^{-\infty}, k-1, V')$. En outre, $\sigma(\mathscr{A})$ [qui vaut $\sigma(\mathscr{B}) \,\tilde{\#}\, \sigma(\mathscr{L})$ dans la preuve du théorème 7.5.2(*c*)] appartient à $S_0(M \lambda_{k-1}^{-p} \lambda_k^q, g_k, V)$ sous la seconde hypothèse, et l'opérateur A appartient donc à $\mathscr{O}(M \lambda_{k-1}^{-p} \lambda_k^q, g_k, V)$ d'après la partie (*a*) du théorème.

Il est d'autre part clair que $\mathscr{R} \in \mathscr{O}\,\text{ext}(M_{k-1}^{-\infty}, k, V')$.
En effet, les applications $a_Y \mapsto b_{Y, \delta}$ définies par

$$R_\delta \circ a_Y^w = b_Y^w$$

sont uniformément bornées de $\overline{\text{Conf}}\,(k, Y, r)$ dans $\text{Neg}(k-1, Y, Cr)$ pour $Y \in V'$. La preuve est complète.

8.2. TRANSFERT DES RÉGULARITÉS MICROLOCALES.

THÉORÈME 8.2.1. — *Soient* $V' \subset\subset V$ *pour* g_{k-1}, *et* M *un* $(k-1)$*-poids admissible. On a*

(*a*) $H(M, k-1, V) \subset H(M, k, V') \subset H(M, k-1, V')$

(*b*) $\mathscr{H}(M, k-1, V) \subset \mathscr{H}(M, k, V') \subset \mathscr{H}(M, k-1, V')$.

Les inclusions de droite sont évidentes, compte tenu du fait que $O_r(M, k-1, V') \subset O_{Cr}(M, k, V')$ (proposition 8.1.2).

Pour prouver les inclusions de gauche, soient $p \in S_0(M^{-1}, g_{k-1}, V)$, $q \in S_0(M, g_{k-1}, V)$ avec $pq=1$ sur V_1 ($V' \subset\subset V_1 \subset\subset V$). En quantifiant p et q, on obtient

$$I = P_\delta \circ Q_\delta + R_\delta$$

avec $\mathscr{P} \in \mathscr{O}(M^{-1}, k-1, V)$, $\mathscr{Q} \in \mathscr{O}(M, k-1, V)$, $\mathscr{R} \in \mathscr{O}\,\text{ext}(\lambda_{k-1}^{-\infty}, k-1, V')$.

Soit maintenant $\mathscr{U} \in \mathscr{H}(M, k-1, V)$. On veut prouver que, pour $A \in O_r(M, k, V')$, avec r assez petit dépendant de V' mais pas de δ, on a

$$A\, u_\delta = (A P_\delta)\, Q_\delta\, u_\delta + (A R_\delta)\, u_\delta \in L^2.$$

L'opérateur AP_δ appartient à $O_{r'}(1, k, V)$, avec r' tendant vers 0 avec r et δ, et est borné sur L^2. Les $Q_\delta u_\delta$ appartenant à L^2 par hypothèse, il reste à prouver que $(AR_\delta) u_\delta$ appartient à L^2.

On a

$$AR_\delta \in O_{r'}(M \lambda_{k-1}^{-\infty}, k, V') \subset O_{C r}(M \lambda_{k-1}^{-\infty}, k-1, V_1)$$

d'après la proposition 8.1.1, avec r' tendant vers 0 avec r et δ.

En choisissant $r(V')$ et $\delta(V')$ assez petits, l'hypothèse $\mathscr{U} \in \mathscr{H}(M, k-1, V)$ entraîne que $(AR_\delta) u_\delta \in L^2$ pour $r < r(V')$ et $\delta < \delta(V')$. Cela termine la démonstration de la partie (*b*) du théorème, celle de la partie (*a*) étant analogue (et plus simple).

8.3. Notations simplifiées. — Lorsque le poids M est de la forme $\lambda_1^{s_1}, \ldots \lambda_k^{s_k}$, on parlera d'opérateurs de (multi)-ordre $(s_1, \ldots, s_k)$ au lieu d'opérateurs de poids M. De même, on notera $H^{s_1, \ldots, s_k}(V)$ l'espace $H(M, k, V)$.

Quitte éventuellement à réduire V, le théorème 8.1.1 assure qu'un opérateur d'ordre $(m_1, \ldots, m_{k-1})$ est aussi un opérateur d'ordre $(m_1, \ldots, m_{k-1}, 0)$. Il peut éventuellement être d'un ordre meilleur, par exemple $(m_1, \ldots, m_{k-1}-1, 1)$, et cela se lit sur le symbole.

Le théorème 8.2.1 assure que l'appartenance à $H^{s_1, \ldots, s_{k-1}}$ est (presque) équivalente à l'appartenance à $H^{s_1, \ldots, s_{k-1}, 0}$.

La restriction éventuelle sur V est inévitable. Les définitions font appel, soit à l'ensemble filtrant croissant des $V' \subset\subset V$ pour g_{k-1} soit à l'ensemble (strictement plus fin) des $V' \subset\subset V$ pour g_k.

8.4. Quantification de Weyl et quantification standard

Sous l'hypothèse

$$g_{kY}(t, \tau) = g_{kY}(t, -\tau), \tag{8.4.1}$$

on peut définir l'opérateur formel $\tilde{J}^{1/2} = \exp((i/2) D_x . D_\xi)$ comme un opérateur bijectif de $S_{loc}(M, g_k, \Omega^{(k)})/S_{loc}(M \lambda_k^{-\infty}, g_k, \Omega^{(k)})$ dans lui-même, et on a la propriété analogue en remplaçant S_{loc} par S_0. On vérifie en effet facilement que le p^e terme de la série, $(1/p!)((i/2) D_x . D_\xi)^p$ applique $S_{loc}(M, g_k)$ dans $S_{loc}(M \lambda_k^{-p}, g_k)$.

L'isomorphisme $\tilde{J}^{1/2}$ transforme la loi $\tilde{\#}$ en la loi de composition asymptotique « classique » ou « standard », correspondant à la règle de quantification mettant les multiplications « à gauche des dérivations ». Tout ceci n'utilise que la lenteur, le principe d'incertitude et (8.4.1), et serait valable sans aucune hypothèse de tempérance sur g_k.

Il en résulte que, en adjoignant (8.4.1) aux hypothèses du n° 5.1, on dispose d'un calcul symbolique asymptotique standard pour les mêmes classes d'opérateurs, en associant à tout opérateur $\mathscr{B}$ le symbole $\tilde{J}^{1/2} \sigma(\mathscr{B})$.

Si on suppose maintenant que toutes les métriques g_l vérifient $g_{lY}(t, \tau) = g_{lY}(t, -\tau)$, il résulte de la proposition 2.3.1 que les $\overline{\text{Conf}}(k, Y, r)$ sont invariants par les (vrais) opérateurs $J^{\pm 1/2}$ définis au n° 2.3. On peut donc, à tous les stades du calcul, utiliser la quantification standard

$$a(x, \mathrm{D})\, u(x) = \int e^{i\langle x, \xi\rangle} a(x, \xi)\, \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

des symboles confinés, et la loi de composition classique de ces symboles.

9. Exemples

Dans tous les exemples qui vont suivre, nous partirons d'une donnée géométrique qui sera plus précisément un sous-module $\mathscr{M}$ [sur $\mathrm{S}(1, g_{k-1})$] de fonctions sur $\mathbb{R}^{2n}$. Ce module, dont les éléments auront vocation à être des symboles d'ordre λ_k pour une métrique g_k à construire, sera involutif (stable par le crochet de Poisson) et de type fini, engendré par une famille (m_j).

Le lecteur vérifiera dans chaque cas que la métrique que nous exhiberons est bien l'unique métrique (à équivalence près), pour laquelle on ait $\lambda_k = (1 + \sum m_j^2)^{1/2}$; $g_k^\sigma = \lambda_k^2 g$; les m_j sont des symboles d'ordre λ_k; g_k est supérieure à la métrique g_{k-1} imposée. Toutes ces métriques vérifient les hypothèses (5.1.1), (5.1.2) et (5.1.3), si bien que l'on peut quantifier les symboles associés, et notamment les fonctions homogènes de l'ensemble des $m_j(\mathrm{X})$.

Faute d'avoir développé l'invariance par transformations canoniques (voir remarque 1.3.2), nous choisirons des coordonnées dans lesquelle la géométrie conduisant à $\mathscr{M}$ est « plate ». Enfin, la première métrique sera toujours la métrique usuelle :

$$g_1 = dx^2 + \frac{d\xi^2}{\langle \xi \rangle^2}; \qquad \lambda_1 = \langle \xi \rangle .$$

9.1. Seconde microlocalisation le long d'une variété lagrangienne Λ. — Si la variété Λ a pour équation $x'' = \xi' = 0$ dans $\mathbb{R}^p_{x'} \times \mathbb{R}^q_{x''}$, le module $\mathscr{M}$ est formé des symboles d'ordre 1 qui, modulo ceux d'ordre 0, s'annulent sur Λ. Il est engendré par les ξ'_j et les $x''_i \lambda_1$. On obtient la métrique (1.3.2) où la fonction λ_2 est donnée en (1.2.5).

Il n'est pas trop difficile de démontrer que la quantification décrite ici coïncide avec celle décrite dans [1], [2] (au problème de la quantification avec paramètre près, *voir* [2] remarque 1.7). Le rôle des sandwiches $[\Pi_\mathrm{Y} \# a_\mathrm{Y} \# \Pi_\mathrm{Y}]^w$ de (7.2.1) était tenu par des expressions $\varphi(2^{-p}\mathrm{D})\, a_{pq}(x, \mathrm{D})\, \varphi(2^{-p}\mathrm{D})$ en théorie de Littlewood-Paley.

Par contre, il est moins évident d'établir des liens précis entre notre théorie et les secondes microlocalisations analytiques développées par Kashiwara et Laurent (par voie cohomologique, *voir* [8]) et par Sjöstrand (par transformation de FBI, *voir* [12]). Le problème est le même pour la seconde microlocalisation de Lebeau [9] et les microlocalisations itérées de Sjöstrand [12] que nous définissons en 9.2 et 9.4. Nous disons qu'il s'agit de la même microlocalisation parce que les ouverts dans lesquels on peut parler de régularité microlocale (analytique pour ces auteurs, Sobolev pour nous) sont les mêmes, mais il serait intéressant d'avoir des liens plus étroits entre ces théories.

9.2. SECONDE MICROLOCALISATION DE LEBEAU. — Celle-ci est associée à une variété isotrope Σ, et plus précisément au module des fonctions s'annulant à l'ordre 1 sur l'orthogonal (symplectique) de $T_X \Sigma$ en chaque point X de Σ. Si $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p_x \times \mathbb{R}^q_y$, et si Σ a pour équation $y = x = \xi = 0$, le module $\mathscr{M}$ est engendré par $\lambda_1 y_i$, $\lambda_1 x_i x_j$, $x_i \xi_j$, $\xi_i \xi_j/\lambda_1$. La métrique est donnée par

$$\lambda_2 = [1 + \lambda_1^2 (y^2 + x^4 + \xi^4/\lambda_1^4)]^{1/2}$$

$$g_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} dx^2 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} dy^2 + \frac{d\xi^2}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{d\eta^2}{\lambda_1^2}.$$

9.3. TROISIÈME MICROLOCALISATION ASSOCIÉE À DEUX VARIÉTÉS LAGRANGIENNES SE COUPANT FRANCHEMENT (*Cleanly*). — Une tranformation canonique permet de mettre ces deux variétés Λ et Λ' sous la forme suivante (et même sous une forme plus simple mais moins symétrique, *voir* [6] théorème 21.2.10): $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^\alpha_x \times \mathbb{R}^\beta_y \times \mathbb{R}^\gamma_z \times \mathbb{R}^\delta_t$, Λ est définie par $x = y = \zeta = \tau = 0$, et Λ' par $x = t = \eta = \zeta = 0$. La seconde microlocalisation utilisée sera celle relative à Λ. On a donc $\lambda_2 \simeq |\zeta| + |\tau| + \lambda_1 (|x| + |y|)$ et

$$g_2 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} (dx^2 + dy^2) + dz^2 + dt^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} (d\xi^2 + d\eta^2) + \frac{1}{\lambda_2^2} (d\zeta^2 + d\tau^2)$$

La troisième microlocalisation sera associée au module des symboles [d'ordre (0,1)] s'annulant sur $\Lambda \cup \Lambda'$. Il est engendré par les ζ, $x\xi$, $y\eta$, $t\tau$, $yt\xi$, $\eta\tau/\lambda_1$. On définit λ_3 comme la racine carrée de la somme des carrés de ces fonctions augmentée de 1, et la métrique g_3 est donnée par

$$g_3 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_3^2} dx^2 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} dy^2 + dz^2 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3^2} dt^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} d\xi^2 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_3^2} d\eta^2 + \frac{1}{\lambda_3^2} d\zeta^2 + \frac{1}{\lambda_2^2} d\tau^2. \tag{9.3.1}$$

On remarquera la dissymétrie des rôles joués par Λ et Λ' dans la métrique, bien qu'elles jouent des rôles symétriques dans la définition de $\mathscr{M}$.

9.4. MICROLOCALISATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR DE SJÖSTRAND. — Nous ne décrirons ici que la troisième. La situation géométrique étant exactement celle du n° 9.3, on prend comme module $\mathscr{M}$ l'espace des symboles s'annulant sur Λ, et s'annulant à l'ordre 1 sur Λ' le long de $\Lambda \cap \Lambda'$. Ce module ne dépend bien sûr que de l'image de $T\Lambda'$, restreint à $\Lambda \cap \Lambda'$, dans le fibré normal $T_\Lambda \mathbb{R}^{2n}$, image qui s'identifie à une sous-variété lagrangienne de $T^* \Lambda$ par l'isomorphisme symplectique. On retrouve les données géométriques introduites par Sjöstrand ([12], n° 16).

Le module $\mathscr{M}$ est engendré par ζ, $x\lambda_1$, $(y)^2 \lambda_1$, $y\tau$, $(\tau)^2/\lambda_1$, $y\eta$, $ty\lambda_1$, $\eta\tau/\lambda_1$, $t\tau$. Si on définit λ_3 comme la racine carrée de la somme de ces fonctions augmentée de 1, la métrique g_3 est exactement donnée par l'expression (9.3.1).

9.5. TROISIÈME MICROLOCALISATION ASSOCIÉE À UN ÉLÉMENT DE CONTACT D'ORDRE $p-1$. — On se place pour simplifier dans $\mathbb{R}^2$, avec la seconde microlocalisation relative au conormal de l'origine: $\lambda_2 = \lambda_1 (x^2 + y^2)^{1/2}$ et

$$g_2 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2} (dx^2 + dy^2) + \frac{1}{\lambda_1^2} (d\xi^2 + d\eta^2)$$

Le module $\mathcal{M}$ sera constitué des symboles d'ordre (0,1) dont la restriction au conormal de l'axe des x s'annule d'ordre p à l'origine, où $p>1$ est un nombre réel donné. Il est engendré par $x\xi$, $y\xi$, $y\eta$, $x^p\eta$. On a

$$\lambda_3=(1+x^2\xi^2+y^2\xi^2+y^2\eta^2+x^{2p}\eta^2)^{1/2}$$

$$g_3=\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}dx^2+\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3^2}dy^2+\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2\lambda_3^2}d\xi^2+\frac{1}{\lambda_1^2}d\eta^2.$$

En fait, lorsque $\lambda_3\geqq c>1$, les métriques g_2 et g_3 sont équivalentes en dehors d'une zone $|y|<|x|$ et $|\xi|<|\eta|$, et on a dans cette zone

$$g_3\simeq\frac{dx^2}{x^2}+\frac{dy^2}{s^2x^2}+\frac{d\xi^2}{s^2\eta^2}+\frac{d\eta^2}{\eta^2}$$

avec $s=|x|^{p-1}+|y|/|x|+|\xi|/|\eta|$; $\lambda_3\cong s|x||\eta|$.

9.6. Distributions conormales associées à la réunion de plusieurs courbes ayant un contact d'ordre $(p-1)$. — Soit C la réunion d'un nombre fini de (demi)-courbes $C_1, \ldots, C_N$, d'équations $y=f_j(x)$ (pour $x>0$ ou $x<0$). On suppose $f_j(x)=\alpha_j x^p+O(x^p)$ et $(d/dx)^l f_j(x)=O(x^{p-l})$. On suppose en outre que les α_j relatifs à $x>0$ (resp. $x<0$) sont distincts et, pour simplifier, que si $\alpha_j=0$, alors C_j est l'axe des x.

On définit les espaces $H^{s_1, s_2, s_3}(C, k)$ par la propriété:

$$Z_1\circ Z_2\ldots\circ Z_l u\in H^{s_1, s_2, s_3};\qquad l=0, \ldots, k \tag{9.6.2}$$

où les Z_i parcourent l'espace des opérateurs 3-microdifférentiels de poids λ_3 [*i. e.* de tri-ordre (0,0,1)] dont le symbole s'annule sur le conormal des C_j. Les exemples typiques de tels opérateurs sont ceux de symbole $x\xi+xf'_j(x)/f_j(x)y\eta$ ou $[y-f_j(x)]\eta$, tronqués hors d'un petit voisinage g_3-conique du conormal de C_j.

Dans le cas particulier où C est la cubique d'équation $y^2-x^3=0$, $(p=3/2)$, on peut définir cet espace par la condition (9.6.2) où les Z_i sont l'un des deux opérateurs de symbole $(2x\xi+3y\eta)$ et (λ_2/λ_3) $(2y\xi+3x^2\eta)$. C'est ce facteur (λ_2/λ_3) qui fait que la définition ci-dessus est strictement plus forte qu'une définition fondée sur une formule (9.6.2) pour les Z_i champs de vecteurs C^∞ tangents à C (ou, ce qui est équivalent, pour les Z_i pseudo-différentiels d'ordre 1, dont le symbole principal s'annule sur les conormaux de C et de 0). Le champ de vecteurs $2y D_x+3x^2 D_y$, est « trop plat » à l'origine, et ce n'est qu'en 3ᵉ microlocalisation que l'on peut le remplacer par un opérateur de symbole moins plat.

La situation est analogue dans le cas particulier où C est constitué de plusieurs courbes lisses simplement tangentes $(p=2)$. Pour $s_1=s_2=s_3=0$, la définition 9.6.2 redonne les espaces introduits par Melrose et Ritter [10] et pour lesquels ils démontrent un théorème de propagation non linéaire.

Plus généralement, lorsque des courbes C_j sont tangentes à l'axe des x à des ordres pouvant être différents: $p_1<\ldots<p_k$, on définit les espaces de distributions conormales

par le même procédé, en utilisant la $(k+2)^e$ microlocalisation associée à $g_1 \leqq g_2 \leqq g_{3,1} \leqq \ldots \leqq g_{3,k}$ où $g_{3,i}$ est la métrique notée g_3 ci-dessus, pour $p=p_i$.

Index des notations

Dans l'ordre du papier :

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-M. BONY, Second Microlocalization and Propagation of Singularities for Semi-linear Hyperbolic Equations, *Hyperbolic Equations and Related Topics*, Mizohata éd., Kinokunya, 1986, p. 11-49.

[2] J.-M. BONY, Singularités des solutions de problèmes de Cauchy hyperboliques non linéaires, *Advances in Microlocal Analysis*, M. G. Garnir éd., 15-39, 1986 by D. Reidel P. Company.

[3] A. P. CALDERON et R. VAILLANCOURT, A class of bounded pseudo-differential operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 69, 1972, p. 1185-1187.

[4] M. COTLAR, A combinatorical inequality and its application to L^2 spaces, *Rev. Math. Cuyana*, 1, 1955, p. 41-55.

[5] N. DENCKER, The Weyl calculus with locally temperate metrics and weights, *Arkiv for Mat.*, 24, 1986, n° 1, p. 59-79.

[6] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer-Verlag, 1985.

[7] A.-W. KNAPP et E. M. STEIN, Singular integrals and principal series, *Proc. Nat. Acad. U.S.A.*, 63, 1969, p. 281-284.

[8] Y. LAURENT, Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe, *Progress in Math.*, vol. 53, Birkhaüser, 1985.

[9] G. LEBEAU, Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 35, 2, 1985, p. 145-216.

[10] R. MELROSE et N. RITTER, *Interaction of progressing waves for semi-linear wave equation II* (à paraître).

[11] I. SEGAL, Transforms for operators and asymptotic automorphisms over a locally compact abelian group, *Math. Scand.*, 13, 1963, p. 31-43.

[12] J. SJÖSTRAND, Singularités analytiques microlocales, *Astérisque*, 95, S.M.F., 1982.

[13] A. UNTERBERGER, Quantification de certains espaces hermitiens symétriques, *Séminaire Goulaouic-Schwartz*, n° 16, 1979-1980.

[14] A. UNTERBERGER, Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 29, 3, 1979, p. 201-221.

[15] H. WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1928.

(Manuscrit reçu le 5 janvier 1988,
révisé le 18 novembre 1988).

J.-M. BONY,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique, 91128 Palaiseau, Cedex
N. LERNER,
Department of Mathematics,
Purdue University, West Lafayette,
Indiana 47907 (U.S.A.).