ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. LEMONNIER

Mémoire sur l'élimination

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 7 (1878), p. 77-100
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1878_2_7__77_0>

MÉMOIRE

SUR L'ÉLIMINATION,

PAR M. H. LEMONNIER,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE HENRI IV.

Dans les séances du 11 et du 25 janvier 1875, M. Bertrand a bien voulu communiquer à l'Académie les principaux résultats d'un travail que j'ai l'honneur de soumettre aujourd'hui (26 juillet, même année) à son appréciation.

Ce Mémoire, annoncé par M. le Secrétaire perpétuel, dans la séance du 25 janvier, est divisé en trois Parties.

La première a pour objet de mettre en évidence l'intime liaison qui unit, au point de vue analytique, les méthodes d'élimination connues sous les noms d'Euler, de Sylvester, de Cayley, de Bezout, de Cauchy. J'en ai déduit l'expression et la formation, par des déterminants, des conditions suffisantes et requises pour que deux équations entières en x,

$$F(x) = Ax^m + \ldots + A_m, \quad f(x) = ax^n + \ldots + a_n,$$

aient p racines communes, ainsi que de l'équation propre à donner ces racines, ou du plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $f(x)$.

La deuxième Partie consiste dans l'étude des polynômes qu'il convient de former de proche en proche pour obtenir ces conditions et l'équation aux racines communes. L'application en est immédiate au théorème de Sturm. Les polynômes qui proviennent d'une fonction entière et de sa dérivée sont des fonctions équivalentes aux fonctions de Sturm proprement dites. Les premiers termes, les derniers, tels termes qu'on veut, peuvent se calculer à part. Le procédé de calcul nous paraît d'une grande sûreté et d'une simplicité qui pourra contribuer à donner un intérêt pratique au théorème de l'illustre Genevois.

Dans la troisième Partie, les mêmes considérations sont appliquées à la résolution de deux équations entières en x et y,

$$\Phi(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Les solutions du système s'obtiennent sans omission et directement, sans calculs qui portent à faux, avec l'avantage, si les deux polynômes ont un plus grand commun diviseur dépendant de x et de y, de le faire trouver en même temps que l'équation finale due à sa suppression.

Ajoutons que les systèmes particuliers auxquels conduit la méthode de M. Labatie s'obtiennent également par l'application de notre procédé, de sorte que l'équation finale peut être débarrassée des racines qui y figurent. Mais la méthode de M. Labatie, par la succession même des divisions, donne lieu à une complication qui ressort des liaisons qui unissent nos polynômes, comme du rapprochement que nous faisons entre les deux procédés.

Il n'est question, du reste, dans ce travail, que de racines communes ayant des modules finis, et de solutions communes pour lesquelles les inconnues ont des valeurs finies, déterminées.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

1. Soient

$$F(x) = Ax^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$
$$f(x) = ax^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

$(m \geqq n)$, deux équations entières en x.

Si aucune racine ne leur est commune, la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ ne peut être simplifiée.

Si elles ont une racine commune r, les deux termes étant divisibles par $x - r$, la fraction peut se réduire à

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)},$$

$F_1(x)$ désignant un polynôme du degré $m - 1$,

$$\alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \ldots + \alpha_{m-1},$$

et $f_1(x)$ un polynôme du degré $n - 1$,

$$\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \ldots + \beta_{u-1}.$$

Quand il n'y a qu'une racine commune, la simplification ne peut se pousser plus loin.

Lorsqu'il y a p racines communes, sans qu'il y en ait davantage, $(p \leqq n)$, la fraction peut se réduire à

$$\frac{F_p(x)}{f_p(x)} = \frac{\alpha_{p-1} x^{m-p} + \ldots + \alpha_{m-1}}{\beta_{p-1} x^{n-p} + \ldots + \beta_{n-1}},$$

et ne comporte pas une plus grande réduction.

Au cas d'une racine commune, les rapports entre les coefficients de $F_1(x), f_1(x)$ ont des valeurs déterminées; il en est de même au cas de p racines communes, pour les rapports entre les coefficients de $F_p(x)$, $f_p(x)$.

2. D'après cela, on peut se proposer de trouver des valeurs de α_i, β_j, telles qu'on ait identiquement dans un cas

$$f(x)(\alpha_0 x^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1}) - F(x)(\beta_0 x^{n-1} + \ldots + \beta_{u-1}) = 0,$$

et dans l'autre

$$f(x)(\alpha_{p-1} x^{m-p} + \ldots + \alpha_{m-1}) - F(x)\,\beta_{p-1} x^{n-p} + \ldots + \beta_{u-1}) = 0.$$

Dans le premier cas, si l'on égale à zéro les coefficients des différentes puissances de x, on a, pour déterminer les α_i, β_j, ou plutôt leurs rapports, un système de $m + n$ équations du premier degré, homogènes. Ce système sera satisfait autrement que par $\alpha_i = 0$, $\beta_j = 0$;

mais il ne présentera qu'une seule solution pour les rapports entre ces inconnues.

En conséquence, le déterminant des coefficients des α_i et β_j sera nul, et les déterminants mineurs d'ordre $m+n-1$ ne seront pas tous nuls. Par la suppression de l'une des équations du système, alors que le déterminant général est nul, on a donc un système de $m+n-1$ équations propres à déterminer, par exemple, les rapports de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ à α_0. Pour obtenir la racine commune, il y aura d'ailleurs à diviser $F(x)$ par $F_1(x)$, ce qui n'exigera que d'avoir évalué $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$.

Dans le second cas, en égalant à zéro les coefficients de

$$f(x)(\alpha_{p-1}x^{m-p}+\ldots+\alpha_{m-1}) - F(x)(\beta_{p-1}x^{n-1}+\ldots+\beta_{n-1}),$$

on aura en α_i, β_j des équations homogènes du premier degré dont le nombre sera $m+n-p+1$. Les indéterminées y seront en nombre égal à $(n-p+1)+(m-p+1)=m+n-2p+2$. Les rapports à en déduire sont ainsi en nombre égal à $m+n-2p+1$. Il y a donc p équations de trop.

Les valeurs de ces rapports, tirées de $m+n-2p+1$ équations, devront satisfaire aux p autres : de là p équations de condition. On les obtiendra en égalant à zéro les déterminants formés des coefficients dans $m+n-2p+1$ équations et y joignant tour à tour les coefficients de chacune des p autres équations.

D'ailleurs l'équation propre à donner les p racines communes s'obtiendra en égalant à zéro le quotient de $F(x)$ par

$$\alpha_{p-1}x^{m-p}+\ldots+\alpha_{m-1}.$$

Ajoutons que la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ pourra se changer d'une infinité de manières en fractions dont les termes soient de degrés supérieurs à $m-p$ et $n-p$, de sorte qu'on pourra avoir identiquement

$$f(x)(\alpha_{q-1}x^{m-q}+\ldots+\alpha_{m-1}) - F(x)(\beta_{q-1}x^{n-q}+\ldots+\beta_{n-1}) = 0,$$

q étant $>p$, sans que les rapports entre les α_i et β_j soient là déterminés.

Tel est, en substance, le procédé d'Euler.

II.

Procédé de M. Sylvester.

3. Considérons le cas où les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ ont ou doivent avoir une seule racine commune.

Nous venons de voir que si les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ ont une racine commune, et une seule, on peut avoir identiquement

$$(I) \qquad f(x)(\alpha_0 x^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1}) - F(x)(\beta_0 x^{n-1} + \ldots + \beta_{n-1}) = 0,$$

et cela d'une seule façon; que, réciproquement, les deux équations ont une racine commune, et une seule, quand l'identité est possible d'une seule manière.

Or, si l'on considère le système

$$(II) \qquad \left\{\begin{array}{ll} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ x f(x) = 0, & x F(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^{m-1} f(x) = 0, & x^{n-1} F(x) = 0, \end{array}\right.$$

il est à remarquer qu'avoir l'identité (I), c'est avoir nulle identiquement une combinaison linéaire de ces équations (II).

Faisons passer les exposants en indices dans ce système II; il se changera en un système (II)' de $m + n$ équations du premier degré, contenant $m + n - 1$ inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}$. Par là l'identité se rapporte à une combinaison linéaire de ces équations, dont le nombre surpasse d'une unité celui des inconnues.

Du moment que les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ ont une racine commune, cette racine satisfait à toutes les équations du système (II). Ses puissances successives $x, x^2, \ldots, x^{m+n-1}$ constituent, en se prenant respectivement pour valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}$, une solution du système (II)'. Dès lors le déterminant D des coefficients des inconnues et des termes indépendants des inconnues, termes en x_0, se trouve nul.

4. Soit $D = 0$. Soit en même temps différent de zéro le déterminant des coefficients des inconnues dans $m + n - 1$ équations du sys-

tème (II)'. Les valeurs des inconnues pourront se tirer de ces $m+n-1$ équations, et, substituées dans la $(m+n)^{\text{ième}}$, elles y satisferont.

Cette dernière équation est alors une combinaison linéaire des autres. Il y a une combinaison linéaire des $m+n$ équations qui est nulle identiquement; mais, de plus, il n'y en a qu'une. L'identité d'Euler est possible, et d'une seule façon; donc alors les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ ont une racine commune, et une seule. Comme les puissances successives de cette racine satisfont aux équations (II)', en se prenant pour valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}$, elles en constituent l'unique solution. Le calcul de x_1 donnera donc la racine commune.

Ainsi les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ ont une racine commune, et une seule, lorsque le déterminant D est nul, et que le déterminant des inconnues dans $m+n-1$ des équations (II)' n'est pas nul.

5. Réciproquement, telles sont les circonstances qui ont lieu quand les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ ont une racine commune, et une seule.

Observons d'abord qu'il est déjà établi qu'on a $D=0$, s'il y a une racine commune.

D'autre part, les déterminants mineurs dérivant de D et de tous ordres ne peuvent être nuls à la fois. Soit $m+n-k$ un ordre pour lequel les déterminants mineurs ne sont pas tous nuls, ceux de tout ordre supérieur l'étant.

Dans cet ordre, il y aura au moins un déterminant formé des coefficients des inconnues qui ne sera pas nul; car, si, dans un système de $m+n-k$ équations, les déterminants de l'ordre $m+n-k$ relatifs aux coefficients des inconnues sont tous nuls, tandis que l'un de ceux où figurent les termes indépendants des inconnues ne l'est pas, ce système ne comporte aucune solution.

Dans l'hypothèse faite que $F(x)$ et $f(x)$ ont une racine commune, les équations (II)' ayant au moins une solution, cela n'arrivera pas; donc, si les déterminants mineurs sont tous nuls jusqu'à ceux de l'ordre $m+n-k$ exclusivement, il se trouve un déterminant de cet ordre, formé des coefficients des inconnues, qui est différent de zéro. On pourra déduire du système correspondant d'équations $m+n-k$

inconnues en fonction des autres, et leurs valeurs substituées dans les équations restantes y satisferont; mais alors, si k est >1, ce n'est plus une seule combinaison des équations (II)′ qui est identique, il y en a une infinité. Les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ auraient plus d'une racine commune.

Donc, lorsque les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ ont une racine commune, et une seule, le déterminant D est nul, et de plus x_1, x_2, ..., x_{m+n-1} peuvent se déterminer par $m+n-1$ des $m+n$ équations (II)′, en ce que les coefficients des inconnues y forment un déterminant différent de zéro.

Comme conditions suffisantes et nécessaires du fait que les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ aient une racine commune, et une seule, nous avons ainsi la nullité de D, et cette particularité qu'un déterminant formé des coefficients de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}$ dans $m+n-1$ des équations (II)′ ne soit pas nul.

6. Il est à remarquer que, dans le système (II), x^{m+n-1} ne figure que par les équations $x^{m-1}f(x)=0$, $x^{n-1}F(x)=0$, avec les coefficients a et A différents de zéro.

Si une seule de ces équations figure dans le système des $m+n-1$ équations qui donnent par les coefficients des inconnues un déterminant différent de zéro, il en résultera que le déterminant des coefficients de x_1, x_2, x_{m+n-2}, dans les équations

$$\text{(III)}\qquad \left\{\begin{array}{ll} f(x)=0, & F(x)=0,\\ xf(x)=0, & x\,F(x)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x^{m-2}f(x)=0, & x^{n-2}F(x)=0, \end{array}\right.$$

n'est pas nul. Réciproquement, quand ce déterminant est différent de zéro, il en est de même de celui qui concerne l'ensemble de ces équations et de soit $x^{m-1}f(x)=0$, soit $x^{n-1}F(x)=0$.

Or, si l'on considère ces équations (III), on voit qu'elles sont satisfaites par les puissances successives de la racine commune prises pour valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-2}$. C'est leur unique solution; car, s'il en était autrement, une combinaison linéaire de ces équations serait identique, de sorte qu'on aurait identiquement

$$(\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_{m-2} x^{m-2}) f(x) - (\mu_0 + \mu_1 x + \ldots + \mu_{n-2} x^{n-2}) F(x) = 0;$$

d'où il s'ensuivrait pour $F(x)$ et $f(x)$ plus d'une racine commune, contrairement à l'hypothèse.

Donc, lorsque les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont une racine commune, et une seule, le déterminant D est nul, et le déterminant des coefficients des inconnues dans le système (III) ne l'est pas. Réciproquement, quand ces deux conditions sont remplies, les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont une racine commune, et une seule.

III.

7. Considérons le cas où il s'agit d'avoir p racines communes, tout au juste.

La question est d'exprimer avec Euler qu'on a identiquement

$$\text{(I)} \qquad f(x)(\alpha_{p-1} x^{m-p} + \ldots + \alpha_{m-1}) - F(x)(\beta_{p-1} x^{n-p} + \ldots + \beta_{n-1}) = 0;$$

par une seule détermination des rapports entre $\alpha_{p-1} \ldots \alpha_{m-1}$, $\beta_{p-1} \ldots \beta_{n-1}$.

Cela revient à ce qu'une combinaison linéaire, et une seule, des équations

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ x f(x) = 0, & x F(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ x^{m-p} f(x) = 0, & x^{n-p} F(x) = 0, \end{array} \right.$$

soit nulle identiquement.

Si l'on fait passer les exposants en indices, on a là un système (II)' de $m + n - 2p + 2$ équations du premier degré entre x_1, x_2, ..., x_{m+n-p}.

Dans le cas traité plus haut de $p = 1$, le nombre des équations surpasse d'une unité celui des inconnues.

Au cas de $p = 2$, il y a $m + n - 2$ équations et autant d'inconnues.

Au cas de $p > 2$, on a $m + n - 2p + 2 < m + n - p$. Le nombre des inconnues surpasse de $p - 2$ celui des équations.

Toute racine commune aux équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ satisfait aux équations (II). En prenant chacune d'elles et ses puissances successives pour valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-p}$, on a une solution du système (II)'.

Si la relation (I) a lieu identiquement et d'une seule manière, une combinaison linéaire et une seule de ces équations (II)' sera identique.

8. Proposons-nous de reconnaître à quelles conditions cela aura lieu.

Désignons par N le nombre $m + n - 2p + 2$ des équations, et par $m_{i,j}$ le coefficient de rang j dans l'équation de rang i.

Le système des équations devient par là

$$(\mathrm{II})' \qquad \sum_{j=1}^{j=\mathrm{N}+p-1} m_{i,j}\, x_{j-1} = 0,$$

i variant de 1 à N et x_0 étant de valeur égale à 1.

La somme de ces équations multipliées respectivement par des facteurs M_i sera nulle identiquement si l'on a

$$(\mathrm{III}) \qquad \sum_{i=1}^{i=\mathrm{N}} \mathrm{M}_i\, m_{i,j} = 0,$$

j variant de 1 à $\mathrm{N}+p-1$.

Il s'agit ainsi de satisfaire à $\mathrm{N}+p-1$ équations homogènes du premier degré en $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_\mathrm{N}$ par des valeurs de ces indéterminées qui ne soient pas toutes nulles.

Prenons les N dernières équations de ce système (III). Pour qu'elles soient satisfaites, il faudra que le déterminant

$$\mathrm{D}_\mathrm{N} = \begin{vmatrix} m_{1,p} & m_{2,p} & \ldots & m_{\mathrm{N},p} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ m_{1,\mathrm{N}+p-1} & m_{2,\mathrm{N}+p-1} & \ldots & m_{\mathrm{N},\mathrm{N}+p-1} \end{vmatrix}$$

soit égal à zéro.

Ce déterminant est d'ailleurs celui des coefficients de $x^{p-1}, x^p, \ldots, x^{m+n-p}$ dans les équations (II).

Cette condition remplie, si un déterminant mineur d'ordre $\mathrm{N}-1$ relatif au même ensemble d'équations n'est pas nul, $\mathrm{N}-1$ des multiplicateurs M_i pourront se déduire des $\mathrm{N}-1$ équations correspondantes en fonction du $N^{\text{ième}}$. Ces valeurs déterminées, substituées dans la $N^{\text{ième}}$ équation du groupe, y satisferont en raison de ce que $D_N = 0$; puis chacune des autres équations (III) sera également satisfaite moyennant une relation analogue, ce qui fera p équations de condition.

Par exemple, si le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} m_{1,p+1} & m_{2,p+1} & \cdots & m_{N-1,p+1} \\ m_{1,p+2} & m_{2,p+2} & \cdots & m_{N-1,p+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{1,N+p-1} & m_{2,N+p-1} & \cdots & m_{N-1,N+p-1} \end{vmatrix},$$

qui est celui des coefficients de $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{m+n-p}$ dans le système (II)' privé de l'équation $\sum_{j=1}^{j=N+p-1} m_{N,j}\, x_{j-1} = 0$, est différent de zéro, les rapports $\frac{M_1}{M_N}, \frac{M_2}{M_N}, \ldots, \frac{M_{N-1}}{M_N}$ seront déterminés par les $N - 1$ dernières équations (III), et leurs valeurs satisferont aux autres, si le déterminant D_N et ceux qu'on forme en y remplaçant les éléments de la ligne supérieure tour à tour par ceux des lignes précédentes dans le système (III) sont tous nuls.

Il n'y a alors qu'une combinaison linéaire des équations (II) qui soit nulle identiquement.

Il est du reste à observer que, de quelque façon qu'on prenne N équations dans le système (III), le déterminant qui les concerne est nul.

Lorsque, pour ce système (III), il n'y a aucun déterminant mineur d'ordre $N - 1$ qui soit différent de zéro et qu'il s'en trouve un d'ordre $N - 2$ qui ne soit pas nul, on pourra des $N - 2$ équations correspondantes déduire les valeurs d'autant de quantités M_i en fonction des deux autres. Et ces valeurs, sans qu'aucune dépendance s'établisse entre les deux derniers multiplicateurs, satisferont aux différentes autres équations.

Si les déterminants mineurs d'ordre $N - 2$, comme ceux d'ordre $N - 1$, sont tous nuls, et ainsi de suite jusqu'à un déterminant d'ordre $N - k$ qui ne le soit pas, il y aura $N - k$ des quantités M_i qui pourront s'exprimer en fonction des autres, et, sans que ces dernières soient liées entre elles, elles satisferont à toutes les équations (III).

Mais, dans de telles circonstances, il y aura une infinité de combinaisons linéaires des équations (II)' susceptibles d'être identiques.

Par conséquent, pour qu'il n'y en ait qu'une, il faut qu'un déterminant mineur d'ordre $N-1$ ne soit pas nul.

9. Alors que les relations (III) sont satisfaites par des valeurs déterminées de $N-1$ des quantités M_i en fonction de la $N^{\text{ième}}$, les équations (II)' elles-mêmes sont telles que $N-1$ d'entre elles déterminent $N-1$ des inconnues x_{j-1} en fonction des p autres, et que ces valeurs substituées dans la $N^{\text{ième}}$ la vérifient, quelles que soient les valeurs de ces dernières inconnues.

Pour que cela s'applique au système (II), il faut avoir $x_0 = 1$; c'est donc un déterminant d'ordre $N-1$, formé des coefficients de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-p}$ dans $N-1$ de ces équations, qui devra être différent de zéro.

10. En résumé, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une combinaison linéaire des équations (II) soit identique et qu'elle soit unique sont que le déterminant des coefficients de $N-1$ des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-p}$ dans $N-1$ des équations (II)' soit différent de zéro, et que les valeurs de ces inconnues tirées du système correspondant satisfassent à la $N^{\text{ième}}$, quelles que soient les valeurs attribuées aux autres inconnues.

Les relations par lesquelles s'exprime ce fait consistent en ce que les déterminants formés par les coefficients des $N-1$ inconnues dont il s'agit dans les N équations, quand on y joint tour à tour ceux de chacune des $p-1$ autres inconnues, et les termes indépendants des inconconnues sont nuls séparément.

Cela étant, l'identité (I) a lieu, et d'une seule façon. Donc les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont alors p racines communes sans en avoir davantage.

Puis, réciproquement, quand il y a p racines communes et p seulement, il doit en être ainsi.

Les conditions exprimées sont donc celles qui sont nécessaires et suffisantes pour que les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ aient p racines communes et n'en aient pas davantage.

11. Ce n'est pas tout. Il nous reste à voir comment c'est le détermi-

nant d'ordre N — 2 des coefficients de x^p, x^{p+1}, $x^{m+n-p-1}$, dans le système

$$\text{(IV)}\quad \left\{\begin{array}{cc} f(x)=0, & F(x)=0,\\ xf(x)=0, & xf(x)=0,\\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots,\\ x^{m-p-1}f(x)=0, & x^{n-p-1}F(x)=0, \end{array}\right.$$

qui doit être différent de zéro, puis quel heureux parti on peut tirer du système (II) pour obtenir l'équation aux racines communes, et former par là même le plus grand commun diviseur des polynômes $F(x)$, $f(x)$.

Nous avons déjà fait observer que chacune des p racines communes à $F(x)$ et $f(x)$ satisfait au système (II), de sorte que le système d'équations du premier degré admet au nombre de ses solutions, comme valeurs de x_1, x_2, ..., x_{m+n-p}, chacune des p racines communes et ses puissances successives jusqu'au degré $m+n-p$. Dans ces solutions, x_p, x_{p+1}, ..., x_{m+n-p} sont les mêmes fonctions déterminées de x_1, x_2, ..., x_{p-1}. Les p racines communes sont données, en effet, par une équation de degré p, laquelle détermine x^p en fonction de x, x^2, ..., x^{p-1}, et de laquelle on peut déduire, en fonction des mêmes quantités, les puissances suivantes x^{p+1}, x^{p+2}, ..., x^{m+n-p}. D'après quoi, pour ce qui regarde toute racine commune, les valeurs de x_p, x_{p+1}, ..., x_{m+n-p} sont déterminées dans le système (II) en fonction de x_1, x_2, ..., x_{p-1}. Donc le déterminant de leurs coefficients dans N — 1 des équations doit être différent de zéro.

Ce fait acquis, remarquons que x_{m+n-p} ne figure que par les équations $x^{m-p}f(x)=0$, $x^{n-p}F(x)=0$, avec des coefficients a, A différents de zéro.

Il en résulte que, si une seule des deux entre dans le système des N — 1 équations pour lesquelles les coefficients de x_p, ..., x_{m+n-p} forment un déterminant différent de zéro, les autres donnent à elles seules les valeurs de x_p, ..., $x_{m+n-p-1}$ en fonction de x_1, ..., x_{p-1}, et, par conséquent, elles présentent alors un déterminant différent de zéro, c'est-à-dire qu'alors le déterminant des coefficients de x_p, x_{p+1}, $x_{m+n-p-1}$, dans le système des N — 2 équations (IV), n'est pas nul; puis les conditions établies deviennent que les déterminants formés des coefficients de x_p,

$x_{p+1}, \ldots, x_{m+n-p}$ dans les N équations, en y joignant tour à tour ceux de $x_{p-1}, x_{p-2}, \ldots, x_1, x_0$ soient égaux à zéro.

Pour reconnaître qu'il doit en être ainsi, soit $\theta(x)$ le plus grand commun diviseur de $F(x), f(x)$, et posons

$$f(x) = \theta(x)\varphi(x), \quad F(x) = \theta(x)\Phi(x).$$

Considérons le système (IV), ou plutôt ce qu'il devient, quand on y fait passer les exposants en indices. C'est un système de $m+n-2p$ équations auquel on satisfait par les valeurs de x^p, x^{p+1}, $x^{m+n-p-1}$ déduites de l'équation $\theta(x) = 0$, en les prenant pour x_p, $x_{p+1}, \ldots, x_{m+n-p-1}$.

Si cette solution est unique, en tant que $x_p, \ldots, x_{m+n-p-1}$ soient les inconnues, le déterminant des coefficients de ces inconnues est différent de zéro; mais il en serait autrement si la solution n'était pas unique, et alors une combinaison linéaire des équations serait nulle, de sorte qu'on aurait identiquement

$$(\mu_0 + \mu_1 x + \ldots + \mu_{m-p-1} x^{m-p-1})\varphi(x) - (\lambda_0 + \lambda x + \ldots + \lambda_{n-p-1} x^{n-p-1})\Phi(x) = 0.$$

D'après quoi les polynômes $\varphi(x)$, $\Phi(x)$, étant des degrés $m-p$, $n-p$, auraient au moins une racine commune, tandis qu'ils sont premiers entre eux. Donc, du moment que $F(x)$ et $f(x)$ n'ont que p racines communes, le déterminant dont il s'agit est différent de zéro. D'ailleurs, quand ce déterminant n'est pas nul, celui des coefficients de x^p, $x^{p+1}, \ldots, x^{m+n-p}$ dans l'ensemble des équations (IV) et de l'équation $x^{m-p}f(x) = 0$ ou $x^{n-p}F(x) = 0$ ne l'est pas non plus.

A la place des conditions générales formulées au n° 10, nous pouvons donc poser, comme conditions plus précises, que le déterminant d'ordre $m+n-2p$ des coefficients de x^p, $x^{p+1}, \ldots, x^{m+n-p-1}$, dans les équations (IV), soit différent de zéro, et que les déterminants d'ordre $m+n-2p+2$, formés des coefficients de $x^p, x^{p+1}, \ldots, x^{m+n-p}$, joints tour à tour à ceux de x^{p-1}, $x^{p-2}, \ldots, x, x^0$ dans le système (II), soient nuls.

12. Nous pouvons maintenant nous proposer d'obtenir les p racines communes au moyen des équations (II) elles-mêmes.

Si l'on exclut du système (II)' les deux équations $x^{m-p}f(x) = 0$,

$x^{n-p}F(x) = 0$, les autres, comme on vient de le reconnaître, déterminent x_p, ..., $x_{m+n-p-1}$ en fonction de x_1, x_2, ..., x_{p-1}, de sorte qu'on peut poser

$$\begin{aligned} x_p &= h + h_1 x_1 + \ldots + h_{p-1} x_{p-1}, \\ x_{p+1} &= k + k_1 x_1 + \ldots + k_{p-1} x_{p-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mais si l'on exclut du système des N équations les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$, les autres, quand on les divise par x, reproduisent le système précédent, sauf à y voir pour inconnues, à la place de x_p, x_{p+1}, ..., les rapports $\frac{x_{p+1}}{x_1}$, ..., $\frac{x_{m+n-p}}{x_1}$ et $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_1}$, ..., $\frac{x_p}{x_1}$ à la place de x_1, x_2, ..., x_{p-1}. On aura en conséquence

$$\begin{aligned} \frac{x_{p+1}}{x_1} &= h + h_1 \frac{x_2}{x_1} + \ldots + h_{p-1} \frac{x_p}{x_1}, \\ \frac{x_{p+2}}{x_1} &= k + k_1 \frac{x_2}{x_1} + \ldots + k_{p-1} \frac{x_p}{x_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on prend pour x_1, x_2, ..., x_p des valeurs qui satisfassent à l'équation

$$x^p = h + h_1 x + \ldots + h_{p-1} x^{p-1},$$

comme puissances successives de x, il s'ensuivra

$$\begin{aligned} \frac{x_{p+1}}{x_1} &= h + h_1 x_1 + h_2 x_2 + \ldots + h_{p-1} x_{p-1} = x_p, \\ \frac{x_{p+2}}{x_1} &= k + k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_{p-1} x_{p-1} = x_{p+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} x_{p+1} &= x_p x_1 = x^p x = x^{p+1}, \\ x_{p+2} &= x_{p+1} x_1 = x^{p+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ seront donc vérifiées par chacune des racines de l'équation

$$x^p = h + h_1 x + \ldots + h_{p-1} x^{p-1}.$$

Ainsi on obtient l'équation dont les racines sont les p racines communes à $F(x) = 0$, $f(x) = 0$, toutes conditions remplies, bien entendu, par l'élimination de x^{p+1}, x^{p+2}, ..., $x^{m+n-p-1}$ dans le système d'équations (IV).

On obtiendra une équation équivalente par toute élimination des mêmes inconnues et de x^{m+n-p} entre les équations (II).

13. Finalement, le théorème suivant est établi :

Étant données deux équations entières en x, $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ de degrés m et n $(m \geqq n)$, soient considérées les $m + n - 2p + 2$ équations

$$\begin{array}{rr}
f(x) = 0, & F(x) = 0, \\
xf(x) = 0, & xF(x) = 0, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\
x^{m-p} f(x) = 0, & x^{n-p} F(x) = 0.
\end{array}$$

Si l'on égale à zéro les déterminants formés des coefficients de x^p, ..., x^{m+n-p} dans ces équations, en y associant tour à tour ceux de x^{p-1}, x^{p-2}, ..., x et x^0, les p relations, posées par là entre les coefficients de $F(x)$ et de $f(x)$, sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations proposées aient p racines communes, finies, déterminées, sans en avoir davantage, pourvu que le déterminant formé des coefficients de x^p, x^{p+1}, ..., $x^{m+n-p-1}$, dans les équations

$$\begin{array}{rr}
f(x) = 0, & F(x) = 0, \\
xf(x) = 0, & xF(x) = 0, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\
x^{m-p-1} f(x) = 0, & x^{n-p-1} F(x) = 0,
\end{array}$$

soit différent de zéro.

De plus, l'équation aux racines communes s'obtiendra par l'élimination de x^{p+1}, x^{p+2}, ..., $x^{m+n-p-1}$ entre ces $m + n - 2p$ dernières équations.

14. Pour faire l'élimination, on pourra prendre le déterminant des coefficients de x^p, x^{p+1}, ..., $x^{m+n-p-1}$ dans les $m + n - 2p$ équations, et le développer par rapport aux coefficients de x^p. Si l'on multiplie

les équations respectivement par les multiplicateurs de ces coefficients et que l'on ajoute les résultats, l'équation qui s'ensuivra sera l'équation aux racines communes. Les coefficients de x^p, x^{p-1}, ..., x, x^0 y seront le déterminant considéré et ceux qui en résultent quand on y remplace tour à tour la colonne des coefficients de x^p par celles des coefficients de x^{p-1}, x^{p-2}, ..., x et x^0.

Il y a là un mode de formation de l'équation aux racines communes, et, par suite, du plus grand commun diviseur en x des polynômes $F(x)$, $f(x)$, qui a une importance considérable, comme la suite de ce Mémoire le fera voir.

Les déterminants qui y figurent sont d'ordre $m+n-2p$, et ceux qui s'égalent à zéro pour constituer les p équations de condition sont d'ordre $m+n-2p+2$; mais nous verrons plus loin que les mêmes relations peuvent s'obtenir, avec plus d'avantage, au moins, s'il s'agit de calculs numériques, sous forme de déterminants d'ordre $m-p+1$ $(m \geqq n)$.

IV.

15. Quand les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ ont une ou plusieurs racines communes, chacune de ces racines satisfait à l'équation

$$\frac{F(x')f(x)-f(x')F(x)}{x'-x}=0,$$

quelque valeur qu'on attribue à x'.

Or on a

$$F(x')=(x'-x)F_1(x')+F(x),$$

$F_1(x')$ étant le quotient de $F(x')$ par $x'-x$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{r|r|l} A x'^{m-1} + Ax & x'^{m-2} + Ax^2 & x'^{m-3} + \dots; \\ + A_1 & + A_1 x & \\ & + A_2 & \end{array}$$

et soit de même $f_1(x')$ égale à

$$\begin{array}{r|r|l} a x'^{n-1} + ax & x'^{n-2} + ax^2 & x'^{n-3} + \dots \\ + a_1 & + a_1 x & \\ & + a_2 & \end{array}$$

Il en résulte, pour toute racine commune, l'identité en x',

$$F_1(x')f(x) - f_1(x')F(x) = 0.$$

Soit considéré d'abord le cas de $m = n$. En égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x', on trouve

$$(\alpha)\quad \begin{cases} Af(x) - aF(x) = 0, \\ (Ax + A_1)f(x) - (ax + a_1)F(x) = 0, \\ (Ax^2 + A_1x + A_2)f(x) - (ax^2 + a_1x + a_2)F(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (Ax^{m-1} + \ldots + A_{m-1})f(x) - (ax^{m-1} + \ldots + a_{m-1})F(x) = 0. \end{cases}$$

Ces équations se réduisent à

$$(\alpha')\quad \begin{cases} A(a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m) - a(A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m) = 0, \\ Ax + A_1)(a_2x^{m-2} + \ldots + a_m) - (ax + a_1)(A_2x^{m-2} + \ldots + A_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (Ax^{m-1} + \ldots + A_{m-1})a_m - (ax^{m-1} + \ldots + a_{m-1})A_m = 0. \end{cases}$$

qui sont, sous une autre forme,

$$(\alpha'')\quad \begin{cases} \dfrac{A}{a} = \dfrac{A_1x^{m-1} + \ldots + A_m}{a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}, \\ \dfrac{Ax + A_1}{ax + a_1} = \dfrac{A_2x^{m-2} + \ldots + A_m}{a_2x^{m-2} + \ldots + a_m}, \\ \dfrac{Ax^2 + A_1x + A_2}{ax^2 + a_1x + a^2} = \dfrac{A_3x^{m-3} + \ldots + A_m}{a_3x^{m-3} + \ldots + a_m}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{Ax^{m-1} + \ldots + A_{m-1}}{ax^{m-1} + \ldots + a^{m-1}} = \dfrac{A_m}{a_m}. \end{cases}$$

On a ainsi, d'une part, les équations dites de *Bezout*, de l'autre celles de *Cauchy*, et l'on voit comment l'identité $\dfrac{F(x')f(x) - f(x')F(x)}{x' - x}$, indiquée par M. Cayley, peut y conduire.

16. Elles se rattachent, du reste, immédiatement aux équations de M. Sylvester, car elles n'en sont que des combinaisons linéaires.

Considérons, en effet, le système

$$(\beta)\quad \left\{\begin{array}{rr} f(x)=0, & F(x)=0,\\ xf(x)=0, & xF(x)=0,\\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots,\\ x^{m-1}f(x)=0, & x^{m-1}F(x)=0,\end{array}\right.$$

et, en même temps, les équations précédentes sous leur première forme.

La première de celles-ci est une combinaison linéaire des deux qui sont là sur la première ligne; la seconde en est une des deux qui sont sur la seconde ligne et des deux précédentes, et ainsi de suite.

17. Au cas de $m>n$, l'identité

$$F_1(x')f(x)-f_1(x')F(x)=0$$

se résout en

$$(\alpha_1)\quad \left\{\begin{array}{l} Af(x)=0,\\ (Ax+A_1)f(x)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ (Ax^{m-n-1}+A_1x^{m-n-2}+\dots+A_{m-n-1})f(x)=0,\\ (Ax^{m-n}+\dots+A_{m-n})f(x)-aF(x)=0,\\ (Ax^{m-n+1}+\dots+A_{m-n+1})f(x)-(ax+a_1)F(x)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ (Ax^{m-1}+\dots+A_{m-1})f(x)-(ax^{n-1}+\dots+a_{n-1})F_1(x)=0,\end{array}\right.$$

équations qui peuvent également se regarder comme combinaisons linéaires des équations

$$(\beta_1)\quad \left\{\begin{array}{rr} f(x)=0, & \\ xf(x)=0, & \\ \dots\dots\dots, & \\ x^{m-n-1}f(x)=0, & \\ x^{m-n}f(x)=0, & F(x)=0,\\ x^{m-n+1}f(x)=0, & xF(x)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots,\\ x^{m-1}f(x)=0, & x^{n-1}F(x)=0.\end{array}\right.$$

D'ailleurs, les $m-n$ premières peuvent se remplacer par les équations

$$f(x)=0,\quad xf(x)=0,\ \ldots,\quad x^{m-n-1}f(x)=0,$$

et les suivantes se poser sous la forme

$$(\alpha'_1)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{Ax^{m-n}+A_1x^{m-n-1}+\ldots+A_{m-n}}{a}=\dfrac{A_{m-n+1}x^{n-1}+\ldots+A_m}{a_1x^{n-1}+\ldots+a_n},\\ \dfrac{Ax^{m-n+1}+A_1x^{m-n}+\ldots+A_{m-n+1}}{ax+a_1}=\dfrac{A_{m-n+2}x^{n-2}+\ldots+A_m}{a_2x^{n-2}+\ldots+a_n},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \dfrac{Ax^{m-1}+\ldots+A_{m-1}}{ax^{n-1}+\ldots+a_{n-1}}=\dfrac{A_m}{a_n}. \end{array}\right.$$

18. Reprenons, au moyen de ces équations où ne figurent que x, x^2, ..., x^{m-1}, le problème d'avoir pour $F(x)=0$, $f(x)=0$ une racine commune, une seule, et celui d'avoir p racines communes, p seulement.

Pour le premier problème, les équations (α') et (α_1) peuvent remplacer respectivement les équations (β) et (β_1). Elles sont au nombre de m, elles dépendent de x, x^2, ..., x^{m-1}, à les considérer comme équations du premier degré par rapport à ces quantités.

Pour que $F(x)$ et $f(x)$ aient une racine commune et une seule, il faut et il suffit que le déterminant des coefficients de x, x^2, ..., x^{m-1} et des termes indépendants de x dans les m équations soit nul, et que celui des coefficients de x, x^2, ..., x^{m-1} dans les $m-1$ premières ne le soit pas; de sorte que la racine commune peut se déduire de celles-ci par l'élimination de x^2, ..., x^{m-1}.

Considérons, en effet, au cas de $n=m$, simultanément les équations (α) et les équations (β), après y avoir fait passer les exposants en indices, comme systèmes du premier degré.

Les deux premières équations $f(x)=0$, $F(x)=0$ du système (β) peuvent se remplacer par l'une d'elles et la première du système (α). Comme la seconde du système α provient des quatre premières du système β, celles-ci équivalent ensuite aux deux premières du système (α), et, par exemple, aux deux équations $f(x)=0$, $xf(x)=0$. De même, les six premières équations du système (β) peuvent être remplacées par les trois premières du système (α) et par $f(x)=0$, $xf(x)=0$,

$x^2 f(x) = 0$. En continuant ainsi, on obtient, à la place du système (β), comme système équivalent, celui des équations (α) avec les m équations $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, ..., $x^{m-1}f(x) = 0$. Or il se trouve là que les équations (α) ne contiennent pas x^m, x^{m+1}, ..., x^{2m-1}, ou plutôt x_m, x_{m+1}, ..., x_{2m-1}, et que ces dernières inconnues, quand les équations (α) sont possibles, sont respectivement déterminées par $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, ..., $x^{m-1}f(x) = 0$, de proche en proche.

Donc il faut et il suffit, pour que les équations (β) aient une solution et une seule, qu'il en soit de même des équations (α); donc x, x^2, ..., x^{m-1} doivent pouvoir se déterminer par $m-1$ de ces équations (α), et leur substitution dans la $m^{\text{ième}}$ donner une identité.

Comme, pour les équations (β), x_1, x_2. ..., x_{2m-2} doivent s'obtenir par les $2m-2$ premières équations, et que ces $2m-2$ équations sont susceptibles d'être remplacées par un système où ne figure pas la dernière des équations (α), on voit encore que les $m-1$ premières équations du système (α) doivent déterminer x_1, x_2, ..., x_{m-1}, tandis que l'équation de condition répond à ce que les valeurs de ces inconnues, ainsi déterminées, satisfont à la $m^{\text{ième}}$. Le déterminant des coefficients de x_1, x_2, ..., x_{m-1} doit donc être différent de zéro pour les $m-1$ premières équations (α).

Au cas de $m > n$, les mêmes considérations s'appliquent aux équations (β_1) et aux équations (α_1), puis (α'_1). Les conclusions y sont les mêmes.

19. Pour le problème d'avoir p racines communes et p seulement, le système qui nous a occupé est, au cas de $m = n$,

$$(\beta_2) \qquad \left\{ \begin{array}{rr} f(x) = 0, & \mathrm{F}(x) = 0, \\ xf(x) = 0, & x\mathrm{F}(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ x^{m-p}f(x) = 0, & x^{m-p}\mathrm{F}(x) = 0. \end{array} \right.$$

Considérons maintenant le système

$$(\alpha_2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A}f(x) - a\mathrm{F}(x) = 0, \\ (\mathrm{A}x + \mathrm{A}_1)f(x) - (ax + a_1)\mathrm{F}(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathrm{A}x^{m-p} + \dots + \mathrm{A}_{m-p})f(x) - (ax^{m-p} + \dots + a_{m-p})\mathrm{F}(x) = 0, \end{array} \right.$$

qui est, sous une autre forme,

$$\frac{A}{a} = \frac{A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m}{a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m},$$

$$\frac{Ax + A_1}{ax + a_1} = \frac{A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m}{a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{A x^{m-p} + \ldots + A_{m-p}}{a x^{m-p} + \ldots + a_{m-p}} = \frac{A_{m-p+1} x^{p-1} + \ldots + A_m}{a_{m-p+1} x^{p-1} + \ldots + a_m}.$$

Supposons les exposants passés en indices de part et d'autre; nous aurons deux systèmes d'équations du premier degré, le premier de $m+n-2p+2$ équations en $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-p}$, le second de $m-p+1$ équations en $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$.

A la place des deux premières équations du système (β_2), on pourra prendre $f(x)=0$ et la première équation du système (α_2); à la place des quatre premières du système (β_2) les équations $f(x)=0$, $xf(x)=0$, et les deux premières du système (α_2), et ainsi de suite. De là, au lieu des $2m-2p$ premières équations du système (β_2), les équations $f(x)=0$, $xf(x)=0$, ..., $x^{m-2}f(x)=0$, et les $m-p$ premières du système (α_2). Au lieu du système (β_2), on peut prendre les équations $f(x)=0$, $xf(x)=0$, ..., $x^{m-p}f(x)=0$, avec le système (α_2).

Mais comme, dans les équations (α_2), il ne se trouve pour inconnues que $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, et que $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2m-p}$ se produisent de proche en proche dans les équations $f(x)=0$, $xf(x)=0$, ..., $x^{m-p}f(x)=0$, les expressions de $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{m-1}$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, qui doivent pouvoir se déduire des $2m-2p$ premières équations du système (β), seront données par les $m-p$ premières du système (α), puis leurs valeurs devront satisfaire à la dernière équation de ce système, quelles que soient les valeurs attribuées à $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$. Ensuite c'est par les équations $f(x)=0$, $xf(x)=0$, ..., $x^{m-p}f(x)=0$ que seront successivement déterminées les valeurs de $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m-p}$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$.

Au cas de $m > n$, le système des $m - p + 1$ équations

$$(\alpha')\quad \left\{\begin{array}{l} f(x) = 0, \quad x f(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{m-n-1} f(x) = 0, \\ (A x^{m-n} + \ldots + A_{m-n}) f(x) - a F(x) = 0, \\ (A x^{m-n+1} + \ldots + A_{m-n+1}) f(x) - (a x + a_1) F(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (A x^{m-p} + \ldots + A_{m-p}) f(x) - (a x^{n-p} + \ldots + a_{n-p}) F(x) = 0, \end{array}\right.$$

celles-ci pouvant se prendre sous la forme

$$\frac{A x^{m-n} + \ldots + A_{m-n}}{a} = \frac{A_{m-n+1} x^{n-1} + \ldots + A_m}{a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n},$$

$$\frac{A x^{m-n+1} + \ldots + A_{m-n+1}}{a x + a_1} = \frac{A_{m-n+2} x^{n-2} + \ldots + A_m}{a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{A x^{m-p} + \ldots + A_{m-p}}{a x^{n-p} + \ldots + a_{n-p}} = \frac{A_{m-p+1} x^{p-1} + \ldots + A_m}{a_{n-p+1} x^{p-1} + \ldots + a_n},$$

se prête à des considérations et conclusions analogues relativement au système

$$(\beta')\quad \left\{\begin{array}{rr} f(x) = 0, & \\ x f(x) = 0, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ x^{m-n-1} f(x) = 0, & \\ x^{m-n} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ x^{m-n+1} f(x) = 0, & x F(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ x^{m-p} f(x) = 0, & x^{n-p} F(x) = 0. \end{array}\right.$$

20. D'après cela, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ aient p racines communes sans en avoir davantage sont que le déterminant des coefficients de x^p, x^{p+1}, ..., x^{m-1} dans les $m - p$ premières équations du système (α'_2) soit différent de zéro, et que les valeurs de x^p, x^{p+1}, ..., x^{m-1}, qui résultent de ces $m - p$ équations, substituées dans la dernière du système, y satisfassent, quelles que soient les valeurs de x, x^2, ..., x^{m-1}.

L'élimination de x^{p+1}, ..., x^{m-1} entre les $m - p$ premières équations conduira à l'équation des racines communes. On pourra effectuer l'élimination en multipliant les équations respectivement par les multiplicateurs des coefficients de x^p dans le déterminant que forment les coefficients de x^p, x^{p+1}, ..., x^{m-1} dans ces équations, puis en ajoutant.

En résumé, les $m-p+1$ équations à considérer étant constituées et ordonnées suivant les puissances décroissantes de x, si l'on y relève les coefficients de x^{m-1}, x^{m-2}, ..., x^p, et que, tour à tour, on y joigne ceux de x^{p-1}, x^{p-2}, ..., x, x^0, on aura, en égalant à zéro les p déterminants d'ordre $m-p+1$ que formeront ainsi les colonnes de coefficients, pourvu que le déterminant des coefficients de x^{m-1}, ..., x^p dans les $m-p$ premières équations ne soit pas nul, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ aient tout au juste p racines communes, finies, déterminées.

Puis l'équation aux racines communes s'obtiendra en égalant à zéro le polynôme de degré p, où les coefficients de x^p, x^{p-1}, ..., x^0 seront les déterminants formés par les coefficients de x^{m-1}, ..., x^{p+1}, en y adjoignant tour à tour ceux de x^p, x^{p-1}, ..., x^0 dans les $m-p$ premières équations considérées.

Le polynôme ainsi formé sera le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $f(x)$, si les relations de condition sont satisfaites.

21. Il importe de remarquer que, si les équations $F(x)=0, f(x)=0$ ont p racines communes, sans en avoir davantage, le déterminant d'ordre $m+n$, dit *de Sylvester*, ou le déterminant de Cauchy ou de Bezout, d'ordre m, ainsi que les déterminants mineurs qui en dérivent, jusqu'à ceux de l'ordre $m+n-2p+2$ d'un côté, de l'ordre $m-p+1$ de l'autre inclusivement, sont tous nuls.

Considérons, en effet, en supposant $q<p$, le système d'équations

$$\begin{array}{ll} f(x)=0, & F(x)=0, \\ xf(x)=0, & xF(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ x^{m-q}f(x)=0, & x^{n-q}F(x)=0. \end{array}$$

D'après ce qui a été reconnu à l'occasion du procédé d'Euler, une combinaison linéaire de ces équations pourra être nulle, et cela même d'une infinité de manières.

En conséquence, si l'on y fait passer les exposants en indices et que l'on y applique ce qui a été fait au n° 8, en désignant $m+n-2q+2$ par N', les multiplicateurs étant $M_1, M_2, \ldots, M_{N'}$, la somme sera nulle identiquement moyennant $m+n-q+1$ relations homogènes du premier degré par rapport à ces indéterminées, de sorte que le nombre des relations surpassera de $q-1$ celui des multiplicateurs. Ces relations pouvant être satisfaites à la fois par des valeurs des multiplicateurs, si l'on prend N' de ces relations, n'importe comment, le déterminant des coefficients de $M_1, M_2, \ldots, M_{N'}$ dans le groupe sera nul. Or les déterminants dont la nullité apparaît ainsi seront, en faisant varier q de $p-1$ à 1, tous les déterminants mineurs en question et le déterminant Sylvester lui-même.

Le même fait s'étend aux équations de Cauchy, au moins comme conséquence de l'étude générale qui va suivre, des déterminants qui naissent des deux systèmes d'équations (α') et (β').