

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. GALLOT

D. MEYER

**D'un résultat hilbertien à un principe de comparaison
entre spectres. Applications**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 21, n° 4 (1988), p. 561-591

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_4_561_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

D'UN RÉSULTAT HILBERTIEN À UN PRINCIPE DE COMPARAISON ENTRE SPECTRES. APPLICATIONS

PAR S. GALLOT ET D. MEYER

A Marcel Berger, pour son soixantième anniversaire.

« 365
— 1
—
364

... Cela paraît exact . . . quoique je n'aie pas le temps de vérifier à fond maintenant . . . ce calcul démontre qu'il y a trois cent soixante quatre jours où vous pouvez avoir un cadeau de non-naissance.

— Certainement, dit Alice.

— Et un seulement pour le cadeau de naissance. Quelle gloire pour vous! »

De l'autre côté du miroir,
Lewis CAROLL

0. Introduction

Cet article est constitué de deux parties indépendantes (§ 1, 2 et 3 d'une part, § 4 et 5 d'autre part) qui, associées, permettent d'établir des bornes universelles pour des invariants géométriques ou topologiques portant sur des variétés sans bord mais aussi, ce qui est nouveau, sur des variétés à bord (fin du § 5).

Dans la première section, la seule hypothèse faite sur l'espace M est d'être mesuré. L'espace \mathbb{R}^l étant muni de sa norme euclidienne, celle-ci induit une application canonique $s \mapsto |s|$ de $L^2(M, \mathbb{R}^l)$ dans $L^2(M, \mathbb{R})$ qui envoie n'importe quel sous-espace vectoriel \mathcal{E} de $L^2(M, \mathbb{R}^l)$ sur un cône (noté $|\mathcal{E}|$) de $L^2(M, \mathbb{R})$. La distance avec n'importe quel sous-espace vectoriel \mathcal{H} de $L^2(M, \mathbb{R})$ étant évaluée, modulo homothéties, dans l'espace projectif de $L^2(M, \mathbb{R})$, nous montrons que, si $|\mathcal{E}|$ est entièrement contenu dans le ε -voisinage de \mathcal{H} (avec $\varepsilon = [8(l+1)^2]^{-1/2}$, alors $\dim \mathcal{E} < (l+1) \cdot \dim(\mathcal{H})$). Ce résultat est encore valable lorsqu'on remplace $L^2(M, \mathbb{R}^l)$ par l'espace des sections de carré intégrable d'un fibré riemannien de fibre-type \mathbb{R}^l (théorème 2), et ceci avec la même constante universelle ε . Dans le cas particulier où \mathcal{H} est de dimension 1, une version précédente (non optimale) et quelques applications géométriques sont données dans [MR1]. Bernard Maurey a

ensuite donné de ce résultat la version optimale présentée ici dans le théorème 1 et l'exemple 2 de la remarque *b* (cf. [MY]). Le théorème 2 étend ce résultat au cas où \mathcal{H} est de dimension quelconque : on applique dans un premier temps la méthode de B. Maurey à la fonctionnelle obtenue en composant $s \mapsto |s|$ par sa projection L^2 -orthogonale sur \mathcal{H} , on conclut ensuite par un argument de type mini-max.

Dans la deuxième section, nous utilisons le résultat hilbertien ci-dessus pour minorer, valeur propre par valeur propre, le spectre d'un opérateur du type D^*D (défini sur les sections d'un fibré riemannien quelconque muni d'une connexion riemannienne D) à l'aide du spectre du laplacien Δ portant sur les fonctions définies sur la base (proposition 5). Il suffit pour cela de comparer la dimension de l'espace \mathcal{E} , engendré par les sections propres de D^*D correspondant à des valeurs propres inférieures à λ , et la dimension de l'espace \mathcal{H} , engendré par les fonctions propres de Δ correspondant à des valeurs propres inférieures à $8(l+1)^2\lambda$. En effet, par l'inégalité de Kato, les fonctions de $|s|$ ont leurs oscillations bornées par λ . On en déduit que $|s|$ est dans un ε -voisinage de \mathcal{H} pour ε assez petit, donc que $\dim(\mathcal{E}) < (l+1) \cdot \dim(\mathcal{H})$. Cette méthode s'étend au cas de deux opérateurs autoadjoints \bar{A} et A , portant l'un sur l'espace total d'un fibré, l'autre sur la base, dès que ceux-ci satisfont à une inégalité de type Kato, *i. e.* dès que les formes quadratiques associées vérifient

$$Q_{\bar{A}}(s) \geq Q_A(|s|) \geq C \|s\|_{L^2}^2$$

pour au moins une constante réelle C et pour tout s de \mathcal{E} (remarque 9). Ce résultat est à rapprocher de celui de [H-S-U] où il est démontré que, si les deux opérateurs \bar{A} et A vérifient (en chaque point de la base) $|s| \cdot A(|s|) \leq \langle s, \bar{A}(s) \rangle$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$\sum_i e^{-\lambda_i(\bar{A}) \cdot t} \leq l \cdot \sum_i e^{-\lambda_i(A) \cdot t}$$

(où $\lambda_i(\bar{A})$ et $\lambda_i(A)$ désignent les valeurs propres de \bar{A} et A). Pour une étude plus systématique des opérateurs dominés voir [BN]. L'hypothèse que nous utilisons ici est plus faible (puisqu'elle peut s'écrire $\int_M |s| \cdot A(|s|) \leq \int_M \langle s, \bar{A}(s) \rangle$), par ailleurs elle permet aussi d'estimer un nombre fini de valeurs propres de \bar{A} à l'aide d'un nombre fini de valeurs propres de A . En particulier la proposition 5 et la remarque 9 s'appliquent aux variétés non compactes comme un principe de comparaison entre les parties des spectres de \bar{A} et A qui sont situées en dessous du spectre essentiel (en corollaire, un résultat de finitude sur le spectre de \bar{A} , voir remarque 8).

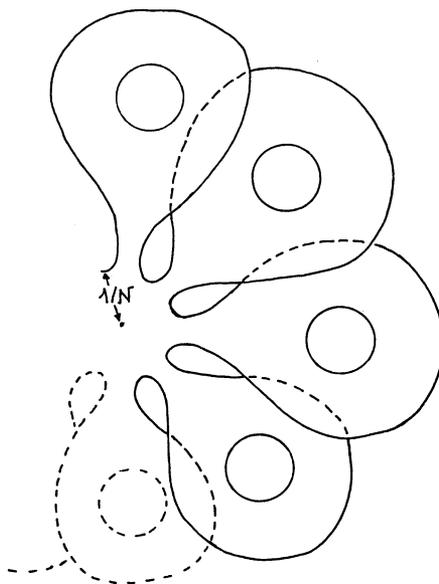
Dans la troisième section, cette méthode est appliquée à la majoration des nombres de Betti (absolus ou relatifs) des variétés compactes (avec ou sans bord). Des résultats antérieurs existaient dans les cas sans bord ou à bord convexe (cf. [G-M], [LI], [GV2], [GT2], [GV3], [MR1], [B-G] et [LY2]); pour des résultats différents portant sur des préoccupations voisines, voir [LN] et [L-M]. Une première approche du cas où le bord est minimal est donnée dans [MR2]. Le résultat est ici démontré pour une variété compacte à bord quelconque (théorèmes 14, 15 et 15 bis). En effet, la formule de Bochner-Weitzenböck présente les nombres de Betti comme la dimension du noyau d'un opérateur

$D^*D + \mathcal{R}$ (où \mathcal{R} est un champ d'endomorphismes symétriques de chaque fibre qui se calcule à l'aide de la courbure). On restreint d'abord de manière classique le domaine de l'opérateur à un sous-espace de formes dont la dérivée normale est contrôlée (lemme 11) pour le rendre semi-borné. On appelle indice d'une forme quadratique Q la dimension maximale des sous-espaces vectoriels sur lesquels Q est négatif ou nul. En appliquant le principe de comparaison de la section 2, on majore chaque nombre de Betti grâce à l'indice de la forme quadratique

$$Q: f \mapsto \int_M (|df|^2 + V \cdot f^2) \cdot dv_g - \tilde{e} \int_{\partial M} f^2 dv_g$$

où V est une fonction-potential qui minore \mathcal{R} (*i.e.* en chaque point x , $\mathcal{R}_x(\dots) \geq V(x) \langle \dots \rangle$), où \tilde{e} mesure le défaut de convexité du bord. Le cas où le bord est localement convexe (*i.e.* $\tilde{e} \leq 0$) se traite comme le cas sans bord : chaque nombre de Betti est alors majoré à l'aide du nombre de valeurs propres du laplacien de $(M, \partial M, g)$ (avec condition de Neumann sur le bord éventuel) qui sont plus petites que $-8(l+1)^2 \text{Min}(V)$ (propositions 10, 12 et 13). Quand le bord n'est pas convexe, s'il est encore possible de démontrer l'existence d'une constante C telle que $Q(f) \geq -C^2 \|f\|_{L^2}^2$ (via les théorèmes de trace), il est moins évident de préciser géométriquement la constante C et l'indice de Q . Nous contourrons ici cette difficulté en remplaçant Q par la forme quadratique Q_Ψ obtenue en multipliant la mesure riemannienne par une fonction-densité Ψ de manière à annuler le terme de bord. Il reste alors à relier Q_Ψ à l'opérateur initial $D^*D + \mathcal{R}$ par une formule de type Kato. Le résultat présenté ici est une majoration universelle des nombres de Betti (absolus et relatifs) en fonction d'une partie finie du spectre du laplacien de $(M, \partial M, g)$ (théorèmes 14 et 15). Ceci peut être traduit, via les estimations de valeurs propres du problème de Neumann sur $(M, \partial M)$ de la section 5, comme une majoration universelle des nombres de Betti (corollaires 21 et 22) qui ne dépend que des bornes habituelles sur la géométrie intrinsèque de la variété (minorant de la courbure sectionnelle et majorant du diamètre) et de bornes sur la géométrie du bord (majorant du défaut de convexité et minorant du rayon de coupure). La figure 1 montre qu'une hypothèse sur le bord est nécessaire pour majorer les nombres de Betti. L'exemple du colimaçon (*cf.* [MR3], exemple 2.5) dans lequel on fait des trous prouve qu'une hypothèse sur le défaut de convexité est indispensable. Nous ne connaissons pas d'exemple prouvant la nécessité d'une hypothèse sur le rayon de coupure.

Dans les sections suivantes, nous donnons des estimations du volume des Boules (section 4) et des valeurs propres du problème de Neumann (section 5) sur des variétés compactes à bord. Nous dégageons les hypothèses géométriques nécessaires pour énoncer ces résultats de manière universelle. Nous sommes amenés à considérer une classe de variétés vérifiant les hypothèses évoquées plus haut : minoration de la courbure sectionnelle et du rayon de coupure, majoration du diamètre et du défaut de convexité. Des exemples prouvent que la minoration des valeurs propres du problème de Neumann serait impossible si l'on abandonnait une de ces hypothèses sur la géométrie intrinsèque (*cf.* [GT1]) ou sur celle du bord (*cf.* [MR3] pour le défaut de convexité et l'exemple donné ici en fin de la section 5 pour le rayon de coupure).

Fig. 1. — Fleur à N pétales troués.

Dans la section 4, la difficulté essentielle réside dans le fait que, sans un contrôle de la géométrie du bord, le rapport entre le volume d'une petite boule et celui de M est impossible à minorer. En effet, considérons l'ensemble des courbes minimisantes de M issues d'un point x_0 qui s'appuient sur le bord; la non-unicité de leur prolongement implique que ces courbes peuvent balayer une fraction de mesure nulle de la boule $B(x_0, \varepsilon)$ et, au contraire, une fraction importante de M (cf. fig. 2). Ceci explique pourquoi les méthodes classiques de comparaison (du type Rauch-Bishop) sont inapplicables telles quelles au cas des variétés à bord.

Dans la section 5, on s'intéresse au problème de Neumann sur les variétés compactes à bord. On borne en fonction d'un nombre λ et des hypothèses géométriques évoquées plus haut le nombre de valeurs propres du laplacien qui sont inférieures à λ . En effet, si E_λ désigne la somme directe des espaces propres correspondant à des valeurs propres inférieures à λ , on peut borner les variations de chacune de ses fonctions propres d'après [MR3]. Ceci permet d'évaluer la distance entre E_λ et un sous-espace préfixé \mathcal{H} de $L^2(M, \mathbb{R})$ dont chaque fonction (localement constante) est entièrement déterminée par sa restriction à un ε -réseau. La dimension de \mathcal{H} (et par suite celle de E_λ) s'évalue géométriquement à l'aide du nombre de points du ε -réseau, donc du rapport entre le volume d'une $\varepsilon/2$ -boule et celui de M . Les résultats préexistants dans ce domaine concernaient les variétés sans bord ou à bord convexe (cf. [L-Y1], [GV1] et [GT1]) ou la première valeur propre des variétés à bord non convexe (cf. [MR3]).

*Nous voulons remercier ici tout particulièrement
Bernard Maurey pour sa contribution à ce travail.*

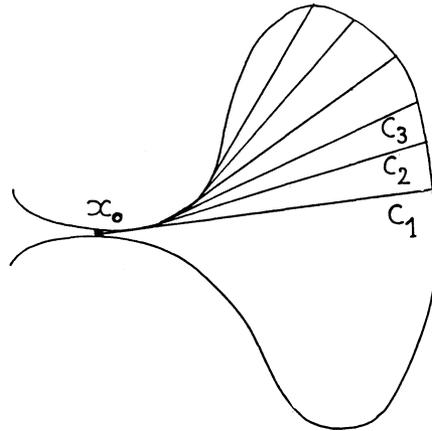


Fig. 2. — Une géodésique tangente au bord admet une infinité de prolongements $C_1, C_2, C_3, \text{ etc.}$

1. Un lemme hilbertien

Soit (M, μ) un espace mesuré. Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel, de fibre type \mathbb{R}^l , muni d'un champ de produits scalaires définis positifs $x \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_x$. Pour toutes les sections s du fibré pour lesquelles ces définitions ont un sens, posons :

$$|s(x)| = \langle s(x), s(x) \rangle^{1/2},$$

$$\|s\|_p = \left(\int_M |s(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Notons $L^2(M, E)$ l'espace des sections s qui sont mesurables et telles que $\|s\|_2 < \infty$. Pour x dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ on pose :

$$\gamma(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \cdot \frac{\Gamma((x+1)/2)}{\Gamma(x/2)}.$$

THÉORÈME 1. — Soit \mathcal{E} un sous-espace vectoriel de $L^2(M, E)$ de dimension N strictement supérieure à la dimension l de la fibre. Notons S^{N-1} la sphère unitaire de \mathcal{E} pour la norme L^2 , munie de la mesure canonique induite. Si M est de mesure totale finie $\mu(M)$, on a :

$$[\text{Vol } S^{N-1}]^{-1} \cdot \int_{S^{N-1}} \| |s| \|_1 ds \leq \sqrt{\mu(M)} \cdot \frac{\gamma(l)}{\gamma(N)}, \quad \text{où } \frac{\gamma(l)}{\gamma(N)} < 1.$$

En conséquence, il existe un élément s_0 de $\mathcal{E} \setminus \{0\}$ tel que

$$\| |s_0| \|_1 \leq \sqrt{\mu(M)} \cdot \frac{\gamma(l)}{\gamma(N)} \cdot \| |s_0| \|_2.$$

N.B. : Les propriétés des fonctions Γ utilisées dans cet article sont démontrées en appendice pour la commodité du lecteur.

L'énoncé suivant s'appuie partiellement sur le précédent et le complète :

THÉORÈME 2. — Soient \mathcal{E} et \mathcal{H} deux sous-espaces vectoriels de $L^2(M, E)$ et de $L^2(M, \mathbb{R})$ respectivement, dont les dimensions respectives sont notées N et k . Appelons $P_{\mathcal{H}}$ la projection orthogonale de $L^2(M, \mathbb{R})$ sur \mathcal{H} . Si $N \geq k(l+1)$ (où l désigne encore la dimension de la fibre de E), il existe un élément s de \mathcal{E} tel que :

$$\|P_{\mathcal{H}}(|s|)\|_2^2 < \left[1 - \frac{1}{8(l+1)^2}\right] \|s\|_2^2.$$

Remarques sur les théorèmes. — Le théorème 1 et le théorème 2 donnent une inégalité de la forme

$$(1) \quad \|P_{\mathcal{H}}(|s|)\|_2^2 \leq C \cdot \|s\|_2^2$$

pour au moins un s de \mathcal{E} .

Le résultat obtenu est non trivial si C est une constante universelle strictement inférieure à 1.

a. Si l'on ne cherche pas à préciser la valeur de C , mais si l'on s'intéresse seulement au fait qu'elle soit strictement inférieure à 1, le théorème 1 est un cas particulier du théorème 2, celui pour lequel la dimension de \mathcal{H} est égale à 1. Le théorème 1 signifie en effet que pour toute fonction f de $L^2(M, \mathbb{R})$ on peut trouver au moins un élément s de \mathcal{E} tel que

$$(2) \quad \int_M |s|f d\mu \leq C \cdot \|s\|_2 \|f\|_2$$

(appliquer le théorème 1 à la mesure de densité f^2 par rapport à la mesure μ en remplaçant \mathcal{E} par $1/f \cdot \mathcal{E}$). Le théorème 2 signifie au contraire que l'inégalité (2) est vérifiée pour toutes les fonctions f de \mathcal{H} et pour un même élément s de \mathcal{E} .

b. La valeur de C donnée par le théorème 1 est optimale. Dans l'inégalité sous-jacente au théorème 1, l'égalité est atteinte si et seulement si les deux inégalités qui interviennent d'une part dans la démonstration du lemme 3 et d'autre part dans la démonstration du théorème 1 sont des égalités. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité soit atteinte est donc que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

(i) Pour tout x de M les valeurs propres non nulles de la forme quadratique $Q_x : s \mapsto |s(x)|^2$ (définie sur \mathcal{E} muni de la structure euclidienne induite par $\|\cdot\|_2$) sont égales entre elles (ceci est toujours vérifié si \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de $L^2(M, \mathbb{R})$, puisque Q_x est alors de rang 1).

(ii) L'application $x \mapsto \text{Trace}(Q_x)$ est constante.

Soit $(G/H, g)$ un espace riemannien homogène, où G est un groupe d'isométries et soit $E \rightarrow G/H$ un fibré vectoriel riemannien sur G/H , sur lequel G agit par isométries et irréductiblement fibre à fibre, de manière à respecter la projection fibrée. Soit \mathcal{E} un espace

de sections globalement invariant sous G de dimension finie strictement supérieure à la dimension de la fibre. Par construction les conditions (i) et (ii) sont vérifiées et *l'inégalité du théorème 1 est toujours une égalité dans ce cas*. Les deux exemples suivants illustrent notre propos :

Exemple 1. — Le fibré E est le fibré trivial $E=(G/H) \times \mathbb{R}$ et \mathcal{E} est l'espace propre correspondant à l'une des valeurs propres du laplacien.

Exemple 2. — G/H est la grassmannienne des l -plans de \mathbb{R}^N , munie de sa mesure canonique de volume 1. Soit $E \rightarrow G/H$ le fibré canonique; on considère l'espace \mathcal{E} qui est l'image de \mathbb{R}^N par l'isomorphisme isométrique suivant : à $v \in \mathbb{R}^N$ on associe la section

$$x \mapsto v(x) = \text{projection de } v \text{ sur le } l\text{-plan } x$$

du fibré canonique. Cet exemple vérifie même pour tout $v \in \mathcal{E}$

$$\|v\|_1 = \frac{\gamma(l)}{\gamma(N)} \cdot \|v\|_2$$

puisqu'il agit transitivement sur $\mathbb{R}^N = \mathcal{E}$ et H agit irréductiblement sur le l -plan-fibre.

c. Quelles sont les hypothèses optimales sur la dimension de \mathcal{E} dans le théorème 2 ?

L'exemple suivant montre que $|\mathcal{E}|$ peut être contenu dans \mathcal{H} lorsque $\dim \mathcal{E} = k \cdot l$. Considérons des sous-ensembles mesurables *disjoints* U_1, \dots, U_k inclus dans M et de mesure positive. Notons \mathcal{H} le sous-espace vectoriel de $L^2(M, \mathbb{R})$ formé des fonctions f qui sont constantes sur chaque U_i et nulles à l'extérieur de leur réunion. Considérons le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^l \rightarrow M$ et l'espace \mathcal{E} des sections s de ce fibré du type

$$x \mapsto s(x) = (x; f_1(x), \dots, f_l(x))$$

où chacun des f_j est pris dans \mathcal{H} . On a $\dim \mathcal{E} = N = k \cdot l$. Remarquons que, si $f \in \mathcal{H}$, il en est de même pour f^2 et $|f|^{1/2}$. Ceci implique que, pour tout s de \mathcal{E} , $|s|$ appartient à \mathcal{H} , d'où

$$\|P_{\mathcal{H}}(|s|)\|_2 = \|s\|_2.$$

Dans la suite, le volume canonique de la sphère S^q est noté ω_q . Avant de démontrer les théorèmes, on établit le

LEMME 3. — Soient \mathbb{R}^N et \mathbb{R}^l les espaces euclidiens de dimensions respectives N et l , où $l \leq N$. Notons S^{N-1} et S^{l-1} leurs sphères unitaires munies de leurs mesures canoniques et P un projecteur orthogonal de \mathbb{R}^N sur \mathbb{R}^l . Si Q est une forme quadratique positive ou nulle de rang l sur \mathbb{R}^N on a :

$$\omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} (Q(y))^{1/2} dy \leq \frac{\gamma(l)}{\gamma(N)} \cdot \sqrt{\frac{\text{Trace}(Q)}{N}},$$

avec égalité si et seulement si toutes les valeurs propres non nulles de Q sont égales.

Preuve. — Par un passage en coordonnées polaires, si Ψ est une application homogène de degré p telle que $\Psi \circ P = \Psi$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Psi(y) e^{-|y|^2/2} dy = 2^{((N+p)/2)-1} \Gamma\left(\frac{N+p}{2}\right) \int_{S^{N-1}} \Psi(y) dy.$$

Par ailleurs, comme $\Psi \circ P = \Psi$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \Psi(y) e^{-|y|^2/2} dy &= \left(\int_{\mathbb{R}^{N-l}} e^{-|t|^2/2} dt \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^l} \Psi(z) e^{-|z|^2/2} dz \right) \\ &= 2^{((N+p)/2)-1} \pi^{(N-l)/2} \cdot \Gamma\left(\frac{l+p}{2}\right) \cdot \int_{S^{l-1}} \Psi(z) dz. \end{aligned}$$

On obtient donc, en remarquant que $\omega_{N-1} = 2 \cdot \pi^{N/2} / \Gamma(N/2)$ et en posant $\gamma_p(x) = (2/x)^{p/2} \Gamma((x+p)/2) / \Gamma(x/2)$.

$$(3) \quad \left(\omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} \Psi(y) dy \right)^{2/p} = \frac{l}{N} \left(\frac{\gamma_p(l)}{\gamma_p(N)} \right)^{2/p} \cdot \left(\omega_{l-1}^{-1} \int_{S^{l-1}} \Psi(y) dy \right)^{2/p}.$$

En écrivant pour Φ homogène de degré 1 le rapport

$$\left(\omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} \Phi(y) dy \right)^2 / \left(\omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} \Phi^2(y) dy \right)$$

on trouve, à l'aide de (3) :

$$\left(\omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} \Phi(y) dy \right)^2 = \frac{\left(\int_{S^{l-1}} \Phi(z) dz \right)^2}{\omega_{l-1} \int_{S^{l-1}} \Phi^2(z) dz} \cdot \left(\frac{\gamma(l)}{\gamma(N)} \right)^2 \cdot \omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} \Phi^2(y) dy.$$

L'inégalité de Schwarz permet d'en déduire

$$(4) \quad \left(\omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} \Phi(y) dy \right)^2 \leq \left(\frac{\gamma(l)}{\gamma(N)} \right)^2 \cdot \omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} \Phi^2(y) dy,$$

puis le lemme en posant $\Phi(y) = \sqrt{Q(y)}$ et en remarquant que :

$$\omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} Q(y) dy = \frac{1}{N} \text{Trace } Q. \quad \blacksquare$$

Preuve du théorème 1. — La forme quadratique $s \mapsto |s(x)|^2$ est de rang l sur \mathcal{E} . En appliquant le lemme 3 nous obtenons

$$\left(\omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} |s(x)| ds \right)^2 \leq \left(\frac{\gamma(l)}{\gamma(N)} \right)^2 \cdot \left(\omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} |s(x)|^2 ds \right),$$

où x est un point quelconque de M et où S^{N-1} est la sphère unité de \mathcal{E} (pour la norme L^2) munie de sa mesure canonique ds . En intégrant sur M et en appliquant l'inégalité de Schwarz, on obtient le théorème 1. ■

Preuve du théorème 2. — Afin de simplifier les expressions, la mesure canonique de S^{N-1} sera dans toute cette démonstration multipliée par ω_{N-1}^{-1} , rendant ainsi le volume de S^{N-1} égal à 1. Nous noterons $\ll f, g \gg$ et $\ll s, h \gg$ les produits scalaires intégraux de deux fonctions f et g ou de deux sections s et h . Nous noterons $|s|_\varepsilon$ la fonction définie par $|s|_\varepsilon(x) = (|s(x)|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$. Pour toute fonction f de \mathcal{H} et pour tout ε positif fixé, soit $\Phi_{\varepsilon, f}$ l'application de \mathcal{E} dans \mathbb{R} définie par

$$\Phi_{\varepsilon, f}(s) = \ll f, |s|_\varepsilon \gg.$$

Cette application est différentiable et sa différentielle $d\Phi_{\varepsilon, f}(s)$ est l'application $h \mapsto \ll f, s/|s|_\varepsilon, h \gg$. La norme de son gradient est donc majorée par 1. Soit $\nabla \Phi_{\varepsilon, f}$ le gradient de $\Phi_{\varepsilon, f}$ restreint à la sphère unitaire S^{N-1} de \mathcal{E} . On a

$$\|\nabla \Phi_{\varepsilon, f}\|^2 \leq 1 - \ll f, \frac{|s|^2}{|s|_\varepsilon} \gg^2.$$

Comme $\Phi_{\varepsilon, f}$ est paire, elle passe au quotient sur $P^{N-1}(\mathbb{R})$ et le principe du minimax donne

$$\lambda_2[P^{N-1}(\mathbb{R})] \cdot \left[\int_{S^{N-1}} \Phi_{\varepsilon, f}^2(s) ds - \left(\int_{S^{N-1}} \Phi_{\varepsilon, f}(s) ds \right)^2 \right] \leq \int_{S^{N-1}} \|\nabla \Phi_{\varepsilon, f}\|^2.$$

Comme $\lambda_2[P^{N-1}(\mathbb{R})] = 2N$, en faisant tendre ε vers zéro et en posant

$$S(x) = \int_{S^{N-1}} |s(x)| ds,$$

on obtient

$$(5) \quad (2N+1) \int_{S^{N-1}} \ll f, |s| \gg^2 ds - 2N \ll f, S \gg^2 \leq 1.$$

Si $\{f_i\}$ est un repère orthonormé de \mathcal{H} , la linéarité de la projection $P_{\mathcal{H}}$ sur \mathcal{H} donne :

$$\sum_{i=1}^k \ll f_i, S \gg^2 = \|P_{\mathcal{H}}(S)\|_2^2 \leq \|S\|_2^2.$$

Par ailleurs on obtient, d'après l'inégalité (4) de la preuve du lemme 3,

$$\sum_{i=1}^k \ll f_i, S \gg^2 \leq \left(\frac{\gamma(l)}{\gamma(N)} \right)^2 \cdot \int_M \int_{S^{N-1}} |s(x)|^2 \cdot ds \cdot dx.$$

En reportant dans la formule (5), que l'on somme pour tous les f_i , on obtient

$$(5 \text{ bis}) \quad (2N+1) \cdot \int_{S^{N-1}} \|P_{\mathcal{F}}(|s|)\|_2^2 ds \leq k + 2N [\gamma(l)/\gamma(N)]^2.$$

La log-concavité de la fonction γ implique que $\gamma'(x)/\gamma(x) - \gamma'(a+x)/\gamma(a+x)$ est positif dès que a est positif. On en déduit que $x \mapsto \gamma(x)/\gamma(a+x)$ est croissante. Un calcul direct donne alors :

$$\left(\frac{\gamma(l)}{\gamma(N)}\right)^2 \leq \frac{\gamma(l+1)}{\gamma(N+1)} \cdot \frac{\gamma(l)}{\gamma(N)} = \left[\frac{(N+1)l}{N(l+1)}\right]^{1/2} \leq \frac{2N+1}{2N} \left(\frac{l}{l+1}\right)^{1/2}.$$

L'inégalité (5 bis) implique par conséquent

$$\int_{S^{N-1}} \|P_{\mathcal{F}}(|s|)\|_2^2 ds \leq \frac{k}{2N+1} + \left(\frac{l}{l+1}\right)^{1/2} < 1 - \frac{1}{8(l+1)^2}. \quad \blacksquare$$

Nous allons donner maintenant une version L^p du théorème 1 qui a l'intérêt en particulier de faire le pont entre ce théorème 1 et le lemme de Peter Li (cf. [LI]). Posons :

$$\gamma_p(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{p/2} \frac{\Gamma((x+p)/2)}{\Gamma(x/2)}.$$

THÉORÈME 4. — *Sous les hypothèses du théorème 1, si p est dans $]0, 2[$ on a :*

$$(\text{vol}(S^{N-1}))^{-1} \int_{S^{N-1}} \left(\frac{\|s\|_p}{\|s\|_2}\right)^p ds \leq \frac{\gamma_p(l)}{\gamma_p(N)} \cdot \mu(M)^{1-p/2}$$

où $\gamma_p(l)/\gamma_p(N) < 1$. Si $p > 2$, l'inégalité vaut en sens inverse et $\gamma_p(l)/\gamma_p(N) > 1$. Si $p = +\infty$, ceci se traduit par l'existence d'un $s \in \mathcal{E}$ tel que :

$$\mu(M) \|s\|_\infty^2 \geq (N/l) \|s\|_2^2.$$

Preuve du théorème 4. — On procède de manière analogue à celle développée dans la preuve du lemme 3 en écrivant le rapport

$$\left(\omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} \Phi^p(y) dy\right)^{2/p} / \left(\omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} \Phi^2(y) dy\right)$$

à l'aide de (3).

En utilisant l'inégalité de Hölder en place de celle de Schwarz, on trouve, pour p quelconque dans $]0, 2[$

$$\left(\omega_{N-1}^{-1} \int_{S^{N-1}} \Phi(y)^p dy\right)^{2/p} \leq \left(\frac{\gamma_p(l)}{\gamma_p(N)}\right)^{2/p} \cdot \omega_{N-1}^{-1} \cdot \int_{S^{N-1}} \Phi^2(y) dy,$$

(où l'égalité est atteinte si et seulement si $\Phi(y) = \|P(y)\|$). L'inégalité de Hölder conduit également au résultat cherché pour $p \in]2, \infty[$. On prouve le théorème 4 en posant $\Phi(s) = \sqrt{Q_x(s)}$, où $Q_x(x) = |s(x)|^2$, et en intégrant sur M. ■

2. Applications : comparaison du spectre d'un opérateur auto-adjoint défini sur les sections d'un fibré avec le spectre d'un opérateur auto-adjoint défini sur la base

Soit (M, g) une variété riemannienne (compacte ou non, avec ou sans bord). Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel riemannien de fibre de dimension l , de métrique notée $\langle \dots \rangle$ et de connexion associée notée D . Dans ce qui suit, sauf spécification contraire, toutes les intégrales sur M sont calculées par rapport à la mesure canonique dv_g , associée à g .

Soit Q une forme quadratique définie sur un sous-espace W de $L^2(M, E)$ et y vérifiant, pour au moins une constante réelle C ,

$$(*) \quad \forall w \in W, \quad Q(w) \geq C \|w\|_2^2$$

(i. e. la forme Q est *semi-bornée* dans la terminologie de [R-S, II]).

DÉFINITIONS. — La suite croissante de nombres de $[C, +\infty[$ définie par :

$$\lambda_i(Q) = \sup_{\substack{\text{V ss. exp. vect.} \\ \text{de dimension } i-1 \\ \text{de } W}} \inf_{\substack{w \perp V \\ \|w\| = 1}} (Q(w))$$

est appelée *spectre de Q*. La fonction de comptage $N_Q(\lambda)$ est le nombre de valeurs du spectre de Q qui sont inférieures ou égales à λ .

On désignera, suivant l'usage, par $W^{1,2}(M, E)$ le complété (pour la norme de Sobolev correspondante) de l'espace des sections de E qui sont C^∞ à support compact dans M , ce support pouvant rencontrer le bord lorsque celui-ci est non vide.

On considérera la forme quadratique $Q_D(s) = \|Ds\|_2^2$ sur $W = W^{1,2}(M, E)$. Un cas particulier est celui où E est le fibré trivial en droites, muni de sa métrique et de sa connexion canoniques; alors la forme quadratique Q_D coïncide avec :

$$Q_d(f) = \|df\|_2^2 \quad \text{sur } W = W^{1,2}(M, \mathbb{R}).$$

On notera $\{\lambda_i\}$ le spectre de Q_d et $\{\bar{\lambda}_i\}$ celui de Q_D (au sens du max-min défini ci-dessus). Dans cette définition, $\lambda_1(Q_d) = 0$.

La forme quadratique $\|Ds\|_2^2$ est positive et fermée sur $W = W^{1,2}(M, E)$ donc le théorème VIII-15 de [R-S, I] s'applique : à cette forme quadratique correspond un unique opérateur auto-adjoint qui soit une extension de Friedrichs.

Que M soit ou non compacte, on pose $\Lambda(Q) = \sup \{\lambda_i(Q)\}$ [où $\Lambda(Q)$ peut éventuellement être infini]. Sur $[0, \Lambda(Q)[$ le spectre de $Q = Q_D$ (respectivement celui de $Q = Q_d$) coïncide avec la partie du spectre du Laplacien brut D^*D (respectivement de l'opérateur de Laplace-Beltrami) incluse dans $[0, \Lambda(Q)[$ (cf. [R-S, IV], théorème III-1). Comme ci-dessus (définitions) on introduit les fonctions de comptage correspondantes : N_{Q_D} et

N_{Q_d} . Dans le cas à bord, les conditions qui permettent de définir les domaines des opérateurs sont les conditions de Neumann (cf. [R-S, IV], p. 253ff).

PROPOSITION 5. — Soit (M, g) une variété riemannienne (compacte ou non, avec ou sans bord) et soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel riemannien dont la fibre est de dimension l . On a pour tout $\lambda \geq 0$,

$$N_{Q_D}(\lambda) \leq N_{Q_d}[8(l+1)^2\lambda] \cdot (l+1) - 1.$$

Conséquence. — Une relecture de cet énoncé donne la minoration

$$\bar{\lambda}_{i(l+1)} \geq \frac{1}{8(l+1)^2} \cdot \lambda_{i+1}.$$

Remarque. — Sur le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^l$, on a

$$N_{Q_D}(\lambda) = l \cdot N_{Q_d}(\lambda).$$

En comparant cette inégalité à la majoration de la proposition 5, on voit que celle-ci est quasi-optimale lorsque λ tend vers l'infini.

En utilisant le théorème 1 dans la démonstration de la proposition 5, on obtient

$$N_{Q_D}(\lambda) \leq l \text{ pour tout } \lambda < (1 - [\gamma(l)/\gamma(l+1)]^2) \lambda_2.$$

En comparant avec l'égalité écrite ci-dessus pour le fibré trivial, on voit que la proposition 5 est également optimale pour les petites valeurs de λ .

Avant de démontrer la proposition, nous allons établir le résultat intermédiaire suivant :

Soient Q et \bar{Q} deux formes quadratiques définies respectivement sur deux sous-espaces W et \bar{W} de $L^2(M, \mathbb{R})$ et $L^2(M, E)$. On suppose que Q vérifie :

- (c) Il existe un $C \in \mathbb{R}$ tel que $Q(f) \geq C \cdot \|f\|_2^2$ pour toute $f \in W$; et en outre :
- (cc) Si $s \in \bar{W}$, alors $|s| \in W$
- (ccc) $Q(|s|) \leq \bar{Q}(s)$ pour tout $s \in \bar{W}$.

LEMME 6. — Soit (Q, \bar{Q}) une paire de formes quadratiques vérifiant les hypothèses (c) et (cc). S'il existe deux sous-espaces $\mathcal{H} \subset W$ et $\mathcal{E} \subset \bar{W}$ de dimensions finies tels que, pour au moins un λ positif, on ait :

- (i) $Q(|s|) \leq \bar{Q}(s) \leq (\lambda + C) \|s\|_2^2$ pour tout $s \in \mathcal{E}$;
 - (ii) $Q(f) \geq [8(l+1)^2\lambda + C] \cdot \|f\|_2^2$ pour tout $f \in \mathcal{H}^\perp$;
 - (iii) toute fonction de W qui est L^2 -orthogonale à \mathcal{H} est aussi Q -orthogonale à \mathcal{H} .
- Alors : $\dim \mathcal{E} < (l+1) \cdot \dim(\mathcal{H})$.

Remarque 7. — L'hypothèse (ccc) n'intervient dans la démonstration du lemme que sous la forme affaiblie donnée dans (i).

Preuve du lemme 6. — Considérons une section $s \in \mathcal{E}$. Notons f la fonction $|s|$ et π la projection L^2 -orthogonale de W sur \mathcal{H} . D'après (ii), on a

$$[C + 8(l+1)^2\lambda] \cdot \|f - \pi(f)\|_2^2 \leq Q[f - \pi(f)].$$

En utilisant (iii), puis (c) et (i), on obtient

$$Q[f - \pi(f)] = Q(f) - Q[\pi(f)] \leq \bar{Q}(s) - C \|\pi(f)\|_2^2 \leq \lambda \|s\|_2^2 + C \|f - \pi(f)\|_2^2.$$

De ces deux inégalités, on déduit

$$8(l+1)^2 \lambda \|\pi(s) - \pi(|s|)\|_2^2 \leq \lambda \|s\|_2^2.$$

D'après le théorème 2 ceci implique, lorsque la dimension de \mathcal{E} est non nulle, que

$$\dim \mathcal{E} < \dim(\mathcal{H})(l+1). \quad \blacksquare$$

Preuve de la proposition. — Comme $Q_d \geq 0$, l'hypothèse (c) vaut pour $C=0$. Les hypothèses (cc) et (ccc) sont vérifiées lorsqu'on remplace Q par Q_d et \bar{Q} par Q_D . Elles découlent de l'inégalité ponctuelle $|d(|s|)| \leq |Ds|$. Si $N_{Q_d}[8(l+1)^2 \lambda]$ est infini, il n'y a rien à démontrer. Si ce nombre est fini, les λ_i tels que $\lambda_i \leq 8(l+1)^2 \lambda$ étant en nombre fini, ce sont tous des valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami. Notons \mathcal{H} la somme directe des espaces propres correspondants, on obtient un espace de dimension $N_{Q_d}[8(l+1)^2 \lambda]$ qui vérifie manifestement les hypothèses (ii) et (iii) du lemme 6 précédent. Par ailleurs $N_{Q_D}(\lambda)$ est la borne supérieure des dimensions des espaces \mathcal{E} qui vérifient l'hypothèse (i). Du lemme 6 précédent, on déduit la proposition. \blacksquare

Remarque 8. — Pour tout $\lambda \in [0, \Lambda(Q_d)[$, le nombre $N_{Q_d}(\lambda)$ est fini par définition. La proposition 5 prouve donc également que $N_{Q_D}(\lambda/8(l+1)^2)$ est fini, donc que :

$$\Lambda(Q_D) \geq \frac{1}{8(l+1)^2} \Lambda(Q_d).$$

Remarque 9. — Soient A et \bar{A} deux opérateurs auto-adjoints de domaines W et \bar{W} , inclus respectivement dans $L^2(M, \mathbb{R})$ et $L^2(M, E)$ dont les formes quadratiques associées Q et \bar{Q} vérifient encore les propriétés (c) et (cc). Les observations rappelées en tête de cette section relatives aux relations entre les spectres de ces opérateurs A et \bar{A} et ceux de Q et \bar{Q} sont valables ici (cf. [R-S], IV, théorème XIII-1). Si l'on se fixe pour but de minorer toutes les valeurs propres du spectre de \bar{Q} , on ajoute aux hypothèses précédentes l'hypothèse (ccc); un raisonnement analogue à celui de la proposition 5 donne alors, pour tout $\lambda \in]\lambda_1(Q), +\infty[$,

$$N_{\bar{Q}}(\lambda) \leq (l+1)N_Q[8(l+1)^2(\lambda - \lambda_1(Q)) + \lambda_1(Q)] - 1.$$

Par contre, pour obtenir un résultat analogue sur un nombre fini de valeurs propres, il suffit (en vertu de la remarque 7) que la condition (ccc) soit vérifiée pour toute section de l'espace \mathcal{E} engendré par les sections propres correspondant aux valeurs propres considérées.

Cette méthode s'applique en particulier à des opérateurs \bar{A} du type $D^*D + \mathcal{V}$, où \mathcal{V} est un champ d'endomorphismes symétriques de la fibre. L'opérateur A défini sur la base, qui permet la comparaison, est alors du type $\Delta + V$, où V est une fonction-potentiel

telle qu'en tout point x on ait

$$\mathcal{V}_x \geq V(x) \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Les formules de Bochner-Weitzenböck montrent que le laplacien de Hodge de Rham s'écrit sous la forme $D^*D + \mathcal{R}$. L'estimation des valeurs propres de ce laplacien et (en particulier) de la dimension de l'espace des formes fortement harmoniques relève donc du procédé que nous venons de décrire. C'est ce que nous allons voir maintenant.

3. Applications (suite) : Bornes sur les nombres de Betti

(a) *Majoration des nombres de Betti et minoration des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham pour les variétés compactes connexes, orientées, sans bord.* — Le laplacien de Hodge sur les p -formes différentielles de M est l'opérateur $\Delta_p = d \circ \delta + \delta \circ d$. Nous noterons $\lambda_i(\Delta_p)$ ses valeurs propres (répétées autant de fois que leurs multiplicités l'exigent) classées dans l'ordre croissant. Nous noterons $b_p(M)$ le nombre de Betti d'ordre p de M ; par la décomposition de Hodge, ce nombre coïncide avec le nombre de valeurs propres nulles de Δ_p . On dira qu'un champ d'endomorphismes symétriques, défini sur un fibré E vectoriel de dimension finie sur M , est minoré par $K \in \mathbb{R}$ si, en tout point x de M , l'endomorphisme symétrique sur E_x a toutes ses valeurs propres $\geq K$.

Les variétés riemanniennes considérées étant toujours compactes, connexes, orientées, sans bord et de dimension n , nous noterons $\mathcal{M}_p(n, K)$ l'ensemble de ces variétés qui vérifient la condition supplémentaire suivante :

- (i) Courbure de Ricci minorée par $(n-1)K$ lorsque $p=1$ ou $n-1$;
- (ii) Opérateur de courbure minoré par K lorsque p est un entier contenu dans l'intervalle $[2, n-2]$.

COROLLAIRE 10. — Pour tout $K \in]-\infty, +\infty[$, pour tous les entiers n, p et i tels que $n \geq 2, 1 \leq p \leq n-1$ et $i \geq 1$, toute variété (M, g) de $\mathcal{M}_p(n, K)$ vérifie

$$\lambda_{i(l+1)}(\Delta_p) \geq \frac{1}{8(l+1)^2} \cdot \lambda_{i+1}(\Delta) + p(n-p)K,$$

$$b_p(M) \leq (l+1) \cdot N_{Q_d}[(-p(n-p)K) \cdot 8(l+1)^2] - 1,$$

où $l = \binom{n}{p}$.

Preuve. — La formule de Bochner-Weitzenböck pour les p -formes s'écrit

$$(6) \quad \langle \Delta_p \alpha, \alpha \rangle = \frac{1}{2} \Delta(|\alpha|^2) + |D\alpha|^2 + \mathcal{R}_p(\alpha, \alpha),$$

où \mathcal{R}_p est le tenseur de Ricci lorsque $p=1$ et, dans les autres cas, un champ d'endomorphismes symétriques défini sur les p -formes à partir de l'opérateur de courbure. Les hypothèses faites sur la courbure dans la définition de $\mathcal{M}_p(n, K)$ et l'estimation de \mathcal{R}_p

donnée dans [G-M] impliquent que \mathcal{R}_p est, pour toute valeur de p , minoré par $p(n-p)K$. Par intégration sur M de (6), on obtient :

$$Q_{(d+\delta)}(\alpha) = Q_D(\alpha) + \int_M \mathcal{R}_p(\alpha, \alpha) \cdot dv_g,$$

où $Q_{(d+\delta)}$ est la forme quadratique associée à $\Delta_p = (d+\delta)^2$. Notons \bar{Q} la forme quadratique associée à l'opérateur $\Delta_p - p(n-p)K \cdot \text{Id}$. On a

$$\bar{Q}(\alpha) \geq Q_d(|\alpha|).$$

D'après la proposition 5 (utilisée sous la version décrite dans la remarque 9), on obtient

$$N_{Q_{(d+\delta)}}[\lambda + p(n-p)K] = N_{\bar{Q}}(\lambda) \leq (l+1)N_{Q_d}[8(l+1)^2\lambda] - 1$$

d'où le théorème. ■

Remarque. — Supposons que V soit une fonction telle que le tenseur de courbure de Ricci (resp. l'opérateur de courbure) soit minoré par $V(x)$ (resp. par $V(x)/p(n-p)$) en tout point x lorsque $p=1$ (resp. lorsque $p>1$). Un raisonnement analogue au précédent s'appuyant sur une comparaison entre $D^*D + \mathcal{R}_p$ et $\Delta + V$ dans l'esprit de la remarque 9 donne, lorsque $b_p(M) \neq 0$,

$$b_p(M) \leq (l+1)N_{\Delta+V}[-(8(l+1)^2-1)\lambda_1(\Delta+V)] - 1,$$

où $\lambda_1(\Delta+V)$ désigne la première valeur propre de l'opérateur $\Delta+V$ et où $N_{\Delta+V}(\lambda)$ est le nombre de valeurs propres inférieures ou égales à λ de $\Delta+V$.

(b) *Majoration des nombres de Betti des variétés compactes à bord.* — Soit $(M, \partial M, g)$ une variété riemannienne compacte, orientée, de dimension n et de bord ∂M . On appelle courbures principales du bord les valeurs propres de la *seconde forme fondamentale* $\text{II}(\cdot, \cdot)$ donnée, pour tous les champs de vecteurs X et Y tangents à ∂M , par

$$\text{II}(X, Y) = \langle D_X N, Y \rangle = -\langle D_X Y, N \rangle,$$

où N est la normale unitaire au bord dirigée vers l'intérieur de M . Avec ces conventions, la seconde forme fondamentale est définie négative pour les variétés à bord strictement convexe. L'opérateur $X \mapsto D_X N$ de $T_x(\partial M)$ dans lui-même est l'homomorphisme de Weingarten et sera noté A . Ses valeurs propres sont celles de II , sa trace est la courbure moyenne de ∂M en x . On notera encore A l'endomorphisme de $\Lambda^p(T^*(\partial M))$ obtenu en prolongeant A comme une dérivation. On appelle *rayon de coupure* en x de ∂M le rayon d'injectivité de l'application exponentielle normale en x au bord, on le note $a(x)$. Le *rayon de coupure global* a_0 est le minimum de $a(x)$ lorsque x parcourt ∂M . Notons $\mathcal{E}_p(M, \partial M)$ [respectivement $\mathcal{E}_p(M)$] l'espace des p -formes fortement harmoniques α qui vérifient $i_*\alpha = 0$, où i est le plongement canonique de ∂M dans M [resp. $\text{int}(N)\alpha = 0$]. D'après la théorie de [D-S], les dimensions de $\mathcal{E}_p(M, \partial M)$ et de $\mathcal{E}_p(M)$ sont les nombres de Betti relatif $b_p(M, \partial M)$ et absolu $b_p(M)$ de la variété M [i. e.

$b_p(M, \partial M) = \dim H_p(M, \partial M; \mathbb{R})$ et $b_p(M) = \dim H_p(M; \mathbb{R})$. Enfin, la dualité classique $b_p(M, \partial M) = b_{n-p}(M)$ est, au niveau des formes, réalisée par l'opérateur $*$ de Hodge.

Pour borner ces nombres de Betti, nous nous appuyons, comme dans le cas sans bord, sur la formule de Bochner-Weitzenböck (6). En intégrant celle-ci par parties nous obtenons, pour toute p -forme α ,

$$Q_{(d+\delta)}(\alpha) = Q_D(\alpha) + \int_M \mathcal{R}_p(\alpha, \alpha) \cdot dv_g + Q_{\partial M}(\alpha),$$

où $Q_{\partial M}(\alpha) = \int_{\partial M} \langle D_N \alpha, \alpha \rangle dv_{\partial M}$. La présence du terme $Q_{\partial M}$ fait que $Q_{d+\delta}$ n'est pas semi-bornée et que la paire de formes quadratiques $(Q_d, Q_{d+\delta})$ ne vérifie pas l'hypothèse (ccc) qui précède le lemme 6. Nous allons cependant montrer qu'en restriction aux espaces $\mathcal{E}_p(M, \partial M)$ et $\mathcal{E}_p(M)$ le terme de bord peut-être contrôlé. Ceci est l'objet du (cf. aussi [HS]) :

LEMME 11. — *En tout point x de ∂M et pour toute p -forme fermée α vérifiant $\text{int}(N)\alpha = 0$, on a $i_* (D_N \alpha) = -A(\alpha)$. De même, pour toute p -forme cofermée α vérifiant $i_*(\alpha) = 0$, on a*

$$\text{int}(N)[D_N \alpha] = -(-1)^p (n-p) \text{int}(N)[*A*\alpha].$$

Preuve. — Soient X_1, \dots, X_p des vecteurs de $T_x(\partial M)$ qu'on prolonge au voisinage de x de manière à respecter le feuilletage local de M en $\partial M \times [0, \varepsilon]$. Si $d\alpha = 0$ et si $\text{int}(N)\alpha = 0$, la dérivée de la fonction $\alpha(X_1, \dots, X_p)$ dans la direction N est nulle.

Ceci implique que

$$(D_N \alpha)(X_1, \dots, X_p) = - \sum_{i=1}^p \alpha(X_1, \dots, D_N X_i, \dots, X_p).$$

Le premier résultat s'en déduit en remarquant que $D_N X_i = D_{X_i} N = A(X_i)$. Le second résultat se déduit du premier par la dualité associée à $*$, car la dérivation covariante commute avec $*$. ■

On notera $m_p(n, K, e)$ [respectivement $\tilde{m}_p(n, K, e)$] l'ensemble des variétés riemanniennes compactes, connexes, orientées, de dimension n , dont la courbure \mathcal{R}_p est minorée par $p(n-p)K$ (voir en 3. a la signification géométrique de cette hypothèse) et dont le bord ∂M vérifie l'hypothèse suivante : pour tout point x de ∂M et tout sous-espace V de dimension $(n-p)$ de $T_x(\partial M)$, la trace de $\pi_V \circ A \uparrow_V$ (où π_V est la projection orthogonale de $T_x(\partial M)$ sur V) est majorée par $\tilde{e} = (n-p)e$ (resp. pour tout sous-espace W de dimension p de $T_x(\partial M)$, la trace de $\pi_W \circ A \uparrow_W$ est majorée par $\tilde{e} = p \cdot e$).

Posons $\mathcal{E} = \mathcal{E}_p(M, \partial M)$ [resp. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_p(M)$]. Lorsque $e \leq 0$, la forme quadratique $Q_{\partial M}$ est positive en restriction à \mathcal{E} d'après le lemme précédent. Posons $\bar{Q} = Q_D + p(n-p)K$, on obtient $\bar{Q}(\alpha) < 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{E}$. En appliquant la proposition 5 nous en déduisons

$$\dim \mathcal{E} \leq N_{\bar{Q}}(0) < (l+1)N_{Q_d}[-8(l+1)^2 p(n-p)K].$$

Ceci donne les

COROLLAIRE 12. — Soit $K \in]-\infty, +\infty[$. Toute variété riemannienne à bord orientée, compacte, connexe, dont la courbure de Ricci est minorée par $(n-1)K$ et dont le bord est de courbure moyenne négative ou nulle (resp. dont le bord est convexe) a son premier nombre de Betti relatif (resp. son premier nombre de Betti absolu) majoré par :

$$(n+1) \cdot N_{Q_d}[-8(n+1)^2(n-1)K] - 1.$$

COROLLAIRE 13. — Soit $K \in]-\infty, +\infty[$. Toute variété riemannienne à bord, orientée, compacte, connexe, dont l'opérateur de courbure est minoré par K et dont le bord est convexe a ses p -ièmes nombres de Betti absolu et relatif majorés par

$$(l+1) \cdot N_{Q_d}[-8(l+1)^2 p(n-p)K] - 1,$$

où $l = \binom{n}{p}$.

Nous allons maintenant démontrer des théorèmes analogues lorsque la courbure du bord n'est pas négative. Considérons la formule de Bochner (6) multipliée par une fonction positive Ψ puis intégrée, on a

$$\int_M \star \Psi \langle \Delta_p \alpha, \alpha \rangle = \frac{1}{2} \int_M \star \Psi \cdot \Delta(|\alpha|^2) + \int_M \star \Psi \cdot |D\alpha|^2 + \int_M \star \Psi \cdot \mathcal{R}_p(\alpha, \alpha).$$

Le premier terme du membre de droite se contrôle grâce à l'identité

$$f_1(\Delta f_2) = (\Delta f_1) \cdot f_2 - \Delta(f_1 \cdot f_2) - 2 \star d[\star(f_1 df_2)].$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_M \star \Psi \cdot \Delta(|\alpha|^2) &= \frac{1}{2} \int_M \star(\Delta \Psi) \cdot |\alpha|^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial N}(\Psi |\alpha|^2) dv_{\partial M} - \int_{\partial M} \star[\Psi d(|\alpha|^2)] \\ &= \frac{1}{2} \int_M \star(\Delta \Psi) |\alpha|^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial M} \star \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial N} \cdot |\alpha|^2 + \Psi \frac{\partial}{\partial N}(|\alpha|^2) \right]. \end{aligned}$$

Choisissons la fonction Ψ de manière à rendre le terme de bord positif. Pour cela, nous reprenons grosso-modo la fonction définie en [MR 3], § 5 : posons $\Psi = 2 - \varphi[d(\cdot, \partial M)]$, où φ est une fonction de \mathbb{R}^+ dans $[0, 1]$ satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= k \cdot r \quad \text{pour } r \leq a_0/4 \\ \varphi(r) &= 1 \quad \text{pour } r \geq 3a_0/4 \\ -\frac{3k}{a_0} &\leq \varphi''(r) \leq 0, \end{aligned}$$

et où $k = 4 \cdot \sup(\tilde{e}, 1/a_0)$. Rappelons que \mathcal{E} est, suivant le cas, égal à $\mathcal{E}_p(M, \partial M)$ ou à $\mathcal{E}_p(M)$. Pour toute $\alpha \in \mathcal{E}$ on a, d'après le lemme,

$$\frac{\partial}{\partial N}(|\alpha|^2) = 2 \langle D_N \alpha, \alpha \rangle \geq -2\tilde{e} \cdot |\alpha|^2.$$

Comme par ailleurs $-\partial\Psi/\partial N = \varphi'(0) \geq 4\tilde{e}$, on a

$$\int_{\partial M} \star \left[-\frac{\partial\Psi}{\partial N} |\alpha|^2 + \Psi \cdot \frac{\partial}{\partial N} (|\alpha|^2) \right] \geq 0.$$

Par ailleurs, en écrivant le laplacien en coordonnées normales au bord et en utilisant un théorème de comparaison, on obtient (cf. [MR 3] § 5)

$$\Delta\Psi \geq \varphi''[d(\cdot, \partial M)] - \varphi'[d(\cdot, \partial M)](n-1) \frac{\sqrt{|\mathbf{K}|}}{\mathbf{T}(\sqrt{|\mathbf{K}|} \cdot a_0/4)}$$

où

$$\mathbf{T}(t) = \begin{cases} tg(t) & \text{pour } \mathbf{K} > 0, \\ t & \text{pour } \mathbf{K} = 0, \\ th(t) & \text{pour } \mathbf{K} < 0. \end{cases}$$

D'après la construction de φ et l'inégalité $th(t) \geq t/(1+t)$ (qui se déduit du fait que la fonction $t(1+t)^{-1}$ vérifie l'inéquation différentielle $y' \leq 1 - y^2$), nous obtenons

$$\Delta\Psi \geq -nk^2 - (n-1)k \sqrt{|\mathbf{K}|}.$$

En reportant dans les équations ci-dessus et en remarquant que, par définition de \mathcal{E} , $\Delta_p \alpha = 0$, nous obtenons

$$\int \star\Psi \cdot |D\alpha|^2 + \int \star\Psi \cdot \mathcal{R}_p(\alpha, \alpha) \leq \frac{1}{2}(nk^2 + (n-1)k \sqrt{|\mathbf{K}|}) \|\alpha\|_2^2.$$

Posons

$$\bar{Q}(\alpha) = Q_D(\alpha) + [2p(n-p)\mathbf{K} - (1/2)(nk^2 + (n-1)k \sqrt{|\mathbf{K}|})] \|\alpha\|_2^2,$$

comme $1 \leq \Psi \leq 2$, on a $\bar{Q}(\alpha) < 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{E}$. En appliquant la proposition 5, on en déduit

$$\dim \mathcal{E} \leq (l+1)N_{Q_d}[4(l+1)^2(nk^2 + (n-1)k \sqrt{|\mathbf{K}|} - 4p(n-p)\mathbf{K})] - 1.$$

Ceci donne les

THÉORÈME 14. — Soit $\mathbf{K} \in]-\infty, +\infty[$. Soient $a, e \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Soit $(M, \partial M, g)$ une variété riemannienne à bord, orientée, compacte, connexe, de dimension n , dont la courbure de Ricci est minorée par $(n-1)\mathbf{K}$, le rayon de coupure minoré par a_0 et la courbure moyenne majorée par $(n-1)e$ (resp. les courbures principales majorées par e). Le premier

nombre de Betti relatif (resp. absolu) de $(M, \partial M)$ est alors majoré par

$$(n+1) N_{Q_d} [4(n+1)^2 (nk^2 + (n-1)k \sqrt{|K|} - 4(n-1)K)] - 1$$

où $k = 4 \cdot \sup[(n-1)e, 1/a_0]$ [resp. $k = 4 \cdot \sup(e, 1/a_0)$].

THÉORÈME 15. — Soit $K \in]-\infty, +\infty[$. Soient a_0 et $e \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Soit $(M, \partial M, g)$ une variété riemannienne à bord orientée, compacte, connexe, de dimension n , dont l'opérateur de courbure est minoré par K , le rayon de coupure minoré par a_0 et les courbures principales du bord majorées par e . Alors, pour tout p compris entre 1 et $(n-1)$, $b_p(M, \partial M)$ [resp. $b_p(M)$] est majoré par

$$(l+1) N_{Q_d} [4(l+1)^2 (nk^2 + (n-1)k \sqrt{|K|} - 4p(n-p)K)] - 1$$

où $l = \binom{n}{p}$ et où $k = 4 \cdot \sup((n-p)e, 1/a_0)$ [resp. $k = 4 \cdot \sup(p \cdot e, 1/a_0)$].

Ces deux théorèmes mettent en balance les hypothèses faites sur la géométrie intrinsèque et celles sur la géométrie de son bord. On peut gagner d'un côté en perdant sur l'autre, par exemple on a le résultat d'annulation suivant pour les variétés à courbure positive et à bord non convexe :

COROLLAIRE 15 bis. — Soit $(M, \partial M, g)$ une variété riemannienne orientée, compacte, connexe, de dimension n , dont le rayon de coupure global est noté a_0 .

(i) Si la courbure de Ricci est minorée par $(n-1)$ et si la courbure moyenne du bord est strictement inférieure à $(n-1) \operatorname{tg}(a_0)$, alors $b_1(M, \partial M) = 0$.

(ii) Si l'opérateur de courbure est plus grand que celui de la sphère et si toutes les courbures principales du bord sont strictement inférieures à $\operatorname{tg}(a_0)$, alors $b_p(M) = b_p(M, \partial M) = 0$ pour tout p .

Remarque. — Ce résultat est optimal. Prenons en effet pour variété M le a_0 -voisinage tubulaire d'une sous-sphère totalement géodésique S^p dans la sphère S^n . Lorsque $p = n-1$, la courbure moyenne du bord est égale à $(n-1) \operatorname{tg}(a_0)$ et $b_1(M, \partial M)$ est non nul. Pour p quelconque, la plus grande des courbures principales est égale à $\operatorname{tg}(a_0)$, alors que $b_p(M)$ et $b_{n-p}(M, \partial M)$ sont non nuls. Cet exemple indique également que, dans le cas de variétés non convexes, il est nécessaire de faire une hypothèse mettant en relation défaut de convexité et rayon de coupure pour obtenir un théorème d'annulation.

Preuve. — Une preuve de ce résultat (à une constante multiplicative près) peut-être obtenue en reprenant la démonstration des théorèmes 14 et 15. Nous en donnons ici une preuve plus simple. Si Φ est l'application exponentielle normale de $\partial M \times [0, a_0[$ dans M , la courbure moyenne $\eta(x, t)$ de l'hypersurface $\Phi(\partial M \times \{t\})$ est, en vertu de [H-K] (p. 458), majorée par

$$(n-1) \left[\frac{-\sin t + (\eta(x, 0)/(n-1)) \cos t}{\cos t + (\eta(x, 0)/(n-1)) \sin t} \right].$$

Si $\eta(x, 0) < (n-1) \operatorname{tg}(a_0)$, il existe un $t \in [0, a_0[$ tel que $\eta(x, 0) \leq (n-1) \operatorname{tg}(t)$ et alors $\eta(x, t) \leq 0$. L'ensemble \bar{M}_t des points de M qui sont situés à une distance supérieure à t

du bord est une variété difféomorphe à M et dont le bord est de courbure moyenne négative. Par le corollaire 12, son premier nombre de Betti relatif est nul, puisque $N_{Q_d}(\lambda) = 0$ lorsque $\lambda < 0$. Ceci prouve (i). Le résultat (ii) se démontre de manière identique, mais comme la courbure sectionnelle est minorée par 1, on démontre que l'ensemble \tilde{M}_t est de bord convexe, ce qui permet d'appliquer le corollaire 13. ■

4. Variétés à bord contrôlé

Dans la suite on désignera par $m(n, K)$ l'ensemble des variétés riemanniennes sans bord ou à bord localement convexe ($e \leq 0$ dans les notations du paragraphe 3. b) dont la courbure de Ricci est minorée par $(n-1)K$, tandis que $m(n, K, a, e)$ sera l'ensemble des variétés riemanniennes complètes connexes à bord dont la courbure sectionnelle est minorée par K , les courbures principales majorées par e et le rayon de coupure minoré par a . Les estimations des invariants, géométriques ou topologiques (rapport de volumes, valeurs propres du laplacien, nombres de Betti. . .) seront uniformes dans les classes $m(n, K, D)$ (resp. $m(n, K, a, e, D)$) qui sont définies comme les sous-ensembles des classes précédentes dont les éléments sont de surcroît des variétés de diamètre majoré par D .

Pour tout nombre positif r , notons $\beta(r)$ le maximum, lorsque x varie dans M , du rapport : $\text{vol}(M)/\text{vol}(B(x, r))$.

L'inégalité de Bishop assure que, pour toute variété de $m(n, K, D)$, on a

$$\beta(r) \leq \frac{\int_0^D S(\sqrt{|K|}t)^{n-1} dt}{\int_0^r S(\sqrt{|K|}t)^{n-1} dt}$$

où

$$S(\sqrt{|K|}t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sin(\sqrt{|K|}t) & \text{si } K > 0, \\ t & \text{si } K = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}} \text{sh}(\sqrt{|K|}t) & \text{si } K < 0. \end{cases}$$

Cette inégalité est encore valable sur les variétés à bord localement convexe puisque, dans ce cas, un « plus court chemin » n'atteint le bord qu'en une de ses extrémités.

Du lemme suivant on déduit, en particulier, un analogue de l'inégalité de Bishop pour les variétés de $m(n, K, a, e)$. Ceci se fera via une description d'un « collier » au bord : soit $M^{a/2}$ l'ensemble des points situés à une distance du bord inférieure à $a/2$; la distance entre deux points de $M^{a/2}$ définie par la métrique g ne coïncidant en général pas avec d , qui est relative à M , est notée \tilde{d} ; on a bien sûr $\tilde{d} \geq d$. Il est naturel de comparer \tilde{d} et

\tilde{d} , qui sera la distance induite par la métrique riemannienne produit $(g \upharpoonright_{\partial M}) \times dt^2$ sur $\partial M \times [0, a/2]$.

LEMME DU COLLIER 16. — (i) Il existe deux constantes k_1 et k_2 , uniformes sur $m(n, K, a, e)$ telles que, pour toute variété (M, g) de cette classe, il existe une presque-isométrie

$$\Phi : (\partial M \times [0, a/2], \tilde{d}) \rightarrow (M^{a/2}, \check{d})$$

vérifiant

$$k_2 \tilde{d}(\cdot, \bullet) \leq \check{d}(\Phi(\cdot), \Phi(\bullet)) \leq k_1 \tilde{d}(\cdot, \bullet).$$

(ii) Il existe une constante Z , uniforme sur $m(n, K, a, e, D)$, telle que pour toute variété (M, g) de cette classe et tout $\varepsilon \leq a/24$ on ait $\text{vol } B(x, 6\varepsilon) / \text{vol } B(x, \varepsilon) \leq Z$.

N.B. : On se placera par la suite et pour alléger les notations dans l'hypothèse (la plus défavorable car la courbure sectionnelle est alors autorisée à prendre les deux signes) où $K < 0$; dans ce cas, on peut faire le choix suivant pour les constantes :

$$k_1 = \exp\left(\left(e + \sqrt{|K|}\right) \frac{a}{2}\right)$$

$$k_2 = \exp\left(-1 - a\sqrt{|K|}/2\right)$$

$$Z = 6\sqrt{2} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{n+1} \left[\int_0^{a/4 k_2} \text{sh}(\sqrt{|\alpha|}t)^{n-2} dt / \int_0^{a/24 \sqrt{2} k_1} \text{sh}(\sqrt{|\alpha|}t)^{n-2} dt \right]$$

où $\alpha = -K + e\sqrt{|K|} + e/a$.

Preuve. — L'application Φ est définie par $\Phi(y, t) = \exp_y(t \cdot N_y)$, où N_y est la normale unitaire intérieure à ∂M , au point y . Notons g_t la métrique $\Phi^* g \upharpoonright_{\partial M \times \{t\}}$ Sur $\partial M \times [0, a/2]$, $\tilde{g} = g_0 + dt^2$ et $\Phi^* g = g_t + dt^2$. Par ailleurs $d/dt(g_t) = 2h_t$, où h_t est la seconde forme fondamentale de l'hypersurface régulière :

$$(\partial M)_t = \Phi(\partial M \times \{t\}).$$

D'après [H-K], 3.2 (c), p. 458 on a $h_t \leq (e + \sqrt{|K|})g_t$ puisque la courbure sectionnelle est minorée par K .

Par ailleurs, pour toute valeur fixée $t \in [0, a]$, la fonction $z \mapsto d[\Phi(z, t), \Phi(y, a)]$ atteint son minimum en $z = y$. L'hypersurface H_t est donc tangente extérieurement à la sphère de centre $\Phi(y, a)$ et de rayon $(a-t)$; cette sphère est régulière au voisinage du point $\Phi(y, t)$ puisque la géodésique $s \mapsto \Phi(y, s)$ est minimisante sur $[0, a]$. Le rapport h_t/g_t est donc minoré par la seconde forme fondamentale de cette sphère, elle-même minorée (d'après le théorème de Rauch) par

$$\frac{-\sqrt{|K|}}{\text{th}(\sqrt{|K|}(a-t))} \geq \frac{-\sqrt{|K|}}{\text{th}(\sqrt{|K|}(a/2))} \geq -\left(\frac{2}{a} + \sqrt{|K|}\right)$$

cette dernière inégalité découlant de l'inégalité élémentaire : sur \mathbb{R}^+ , $th(x) \geq x/(1+x)$, déjà utilisée (cf. section 3, démonstration des théorèmes 14 et 15).

Donc par ces deux estimations :

$$-2 \left(\frac{2}{a} + \sqrt{|\mathbf{K}|} \right) \leq \frac{d}{dt} (g_t)/g_t \leq 2(e + \sqrt{|\mathbf{K}|}).$$

Le résultat (i) en découle par intégration et définition des distances \tilde{d} et \tilde{d} comme distances riemanniennes associées à g et \tilde{g} sur $M^{a/2}$.

Pour (ii), si $B(x, 6\varepsilon)$ ne rencontre pas le bord, l'inégalité cherchée résulte de l'inégalité de Bishop rappelée plus haut. D'après le choix $\varepsilon \leq a/24$, si la boule $B(x, 6\varepsilon)$ rencontre le bord, elle est contenue dans $M^{a/2}$, et donc $B(x, 6\varepsilon) = B_d(x, 6\varepsilon) = B_{\tilde{d}}(x, 6\varepsilon)$. De (i) on déduit

$$\frac{\text{vol}_g B(x, 6\varepsilon)}{\text{vol}_g B(x, \varepsilon)} \leq (k_1/k_2)^n \frac{\text{vol}_{\tilde{g}} B(x, 6\varepsilon)}{\text{vol}_{\tilde{g}} B(x, \varepsilon)}.$$

On écrit $x = \Phi(y, t_0)$ et on appelle D_δ la boule de centre y et de rayon δ tracée sur ∂M pour la distance riemannienne induite par $g|_{\partial M}$. On a :

$$D_{\varepsilon/\sqrt{2}k_1} \times \left[t_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}k_1}, t_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}k_1} \right] \subset B(x, \varepsilon)$$

$$D_{6\varepsilon/k_2} \times \left[t_0 - \frac{6\varepsilon}{k_2}, t_0 + \frac{6\varepsilon}{k_2} \right] \supset B(x, 6\varepsilon).$$

D'après la formule de Gauss, puisque la seconde forme fondamentale de ∂M est bornée, la courbure de Ricci de ∂M est minorée par $-(n-2)\alpha$. L'inégalité de Bishop permet alors de comparer les volumes de $D_{\varepsilon/\sqrt{2}k_1}$ et de $D_{6\varepsilon/k_2}$, ce qui donne :

$$\frac{\text{vol}_{\tilde{g}} B(x, 6\varepsilon)}{\text{vol}_{\tilde{g}} B(x, \varepsilon)} \leq 6 \sqrt{2} \frac{k_1}{k_2} \frac{\int_0^{6\varepsilon/k_2} (\text{sh}(\sqrt{|\alpha|}t))^{n-2} dt}{\int_0^{\varepsilon/\sqrt{2}k_1} (\text{sh}(\sqrt{|\alpha|}t))^{n-2} dt}.$$

Puisque le second membre est croissant en ε , on a démontré (ii) avec les constantes annoncées [ce dernier fait peut se démontrer ainsi : posant $J_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon) \text{sh}(\varepsilon t)$, on se

ramène, par changement de variables, à démontrer que pour $\alpha > 1$, la fonction

$$\varepsilon \mapsto \frac{\int_1^\alpha J_\varepsilon(t)^{n-2} dt}{\int_0^1 J_\varepsilon(t)^{n-2} dt}$$

est croissante.

Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ on a

$$J''_{\varepsilon_1} - \varepsilon_2^2 J_{\varepsilon_1} \leq 0 \quad \text{et} \quad J''_{\varepsilon_2} - \varepsilon_2^2 J_{\varepsilon_2} = 0$$

ce qui implique que $J_{\varepsilon_1}(t)/J_{\varepsilon_2}(t)$ est une fonction décroissante de t d'où

$$\left[\frac{\int_0^1 (J_{\varepsilon_1}(t))^{n-1} dt}{\int_0^1 (J_{\varepsilon_2}(t))^{n-1} dt} \geq \left(\frac{J_{\varepsilon_1}(1)}{J_{\varepsilon_2}(1)} \right)^{n-1} \geq \frac{\int_1^\alpha (J_{\varepsilon_1}(t))^{n-1} dt}{\int_1^\alpha (J_{\varepsilon_2}(t))^{n-1} dt} \right].$$

THÉORÈME 17. — Soit $(M, g) \in m(n, K, a, e)$.

(i) $\forall r \geq a/8, \forall R \geq r, \forall x \in M$

$$\frac{\text{vol } B(x, R)}{\text{vol } B(x, r)} \leq Z^{[24(R-r)/a]+1}.$$

(ii) $\forall r < a/8, \forall R \geq r, \forall x \in M$

$$\frac{\text{vol } B(x, R)}{\text{vol } B(x, r)} \leq Z^{[24R/a] + [\log(a/8r)/\log 6] - 1}.$$

(iii) Le nombre minimal de ε -boules qui recouvrent M est majoré par $Z^{2D/\varepsilon}$, où D est un majorant du diamètre interne, lorsque $\varepsilon < a/12$.

(iv) Le diamètre de ∂M , pour la distance définie par $g \uparrow \partial M$, est majoré par $(a/6k_2) \cdot Z^{24D/a}$.

N.B. : $[.]$ signifie la partie entière du réel . .

Remarque. — D'après (ii) $\text{vol } B(x, r)$ se comporte comme une puissance de r , lorsque $r \rightarrow 0$.

Preuve. — On va d'abord démontrer :

$$(0) \quad \forall \varepsilon \in \left] 0, \frac{a}{24} \right] \quad \text{et} \quad \forall r > 3\varepsilon \quad \text{et} \quad \forall x \in M \quad \frac{\text{vol } B(x, r+\varepsilon)}{\text{vol } B(x, r)} \leq Z.$$

Soit $\{x_i\}$ un ensemble de points pour lequel les $B(x_i, \varepsilon)$ forment un système maximal de boules disjointes. Les $B(x_i, 2\varepsilon)$ forment alors un recouvrement de M . Soit $r \geq 3\varepsilon$ et soit

J_x la collection des indices i pour lesquels $x_i \in B(x, r - \varepsilon)$. Alors la réunion disjointe $\prod_{i \in J_x} B(x_i, \varepsilon) \subset B(x, r)$. Tout point de $B(x, r - 3\varepsilon)$ appartient à l'une des boules $B(x_i, 2\varepsilon)$, où $i \in J_x$, d'après le choix de J_x et l'inégalité triangulaire; ceci implique :

$$B(x, r + \varepsilon) \subset \bigcup_{i \in J_x} B(x_i, 6\varepsilon).$$

Donc :

$$\frac{\text{vol } B(x, r + \varepsilon)}{\text{vol } B(x, r)} \leq \frac{\text{vol}(\bigcup_{i \in J_x} B(x_i, 6\varepsilon))}{\text{vol}(\prod_{i \in J_x} B(x_i, \varepsilon))} \leq \frac{\sum_{i \in J_x} \text{vol } B(x_i, 6\varepsilon)}{\sum_{i \in J_x} \text{vol } B(x_i, \varepsilon)}$$

d'où (0), puisque d'après le lemme du collier (ii)

$$(\forall i \in J_x) \text{vol } B(x_i, 6\varepsilon) \leq Z \text{vol } B(x_i, \varepsilon).$$

On obtient (i) à partir de (0) en posant $\varepsilon = a/24$. Si $r < a/8$, on commence par établir :

$$\frac{\text{vol } B(x, a/8)}{\text{vol } B(x, r)} \leq Z^{\lceil \log(a/8r)/\log 6 \rceil + 1},$$

d'après le lemme du collier (ii) en cherchant la première puissance k telle que $6^k \cdot r > a/8$, d'où (ii), en appliquant (i).

Pour (iii), remplissons M par un nombre maximal de boules disjointes de rayon $\varepsilon/2$; les boules concentriques de rayon ε formant un recouvrement de M , le nombre de ces boules est majoré par $\beta(\varepsilon/2)$, le maximum en x du rapport $\text{vol } B(x, D)/\text{vol } B(x, \varepsilon/2)$, qui se majore à l'aide de (ii) :

$$\beta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq Z^{\lceil 24 D/a \rceil + \lceil \log(a/4\varepsilon)/\log 6 \rceil - 1}.$$

Pour obtenir le résultat, puisque $D \geq a$, par définition du rayon de coupure, et puisque $p + q \leq p \cdot q + 1$ pour tous les p, q de \mathbb{N}^* , il suffit de montrer que

$$\frac{\log(a/4\varepsilon)}{\log 6} \leq \frac{a}{12\varepsilon}$$

ce qui découle de l'inégalité $(\log x)/x \leq (\log 6)/3$.

Pour (iv), chaque boule $B(x_i, \varepsilon)$, où $\varepsilon = a/12$, étant de diamètre (pour la distance \tilde{d}) inférieur à 2ε , son intersection $\tilde{B}_i = B(x_i, \varepsilon) \cap \partial M$ est de diamètre intrinsèque borné par $2\varepsilon/k_2$, puisque la boule $B(x_i, \varepsilon)$ est de diamètre borné par $2\varepsilon/k_2$ pour la distance produit \tilde{d} [lemme du collier (i)]. Les \tilde{B}_i formant un recouvrement de ∂M , nous avons,

d'après (ii)

$$\text{diam}_{\partial M}(\partial M) \leq \sum_i \text{diam}_{\partial M}(\tilde{B}_i) \leq \frac{2\varepsilon}{k_2} Z^{2D/\varepsilon}.$$

Remarque. — Si $r < a$, pour tout $x \in M$ l'ensemble $B(x, r) \cap \partial M$ a au plus une composante connexe (variation première). Le théorème fournit donc en prime une borne (très grossière !) sur le nombre de composantes connexes du bord.

5. Estimations universelles des valeurs propres

Avant d'énoncer le théorème principal, établissons d'abord les lemmes élémentaires suivants :

LEMME 18. — Soit $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ une famille L^2 -orthonormée de fonctions et $\mathcal{R}_\varepsilon = \{x_i\}_{i \in I}$ un ε -réseau de M . Alors :

$$N \leq \text{card}(\mathcal{R}_\varepsilon) (1 - \varepsilon^2 \text{vol}(M) \sup_j \|d\varphi_j\|_\infty^2)^{-1}.$$

LEMME 19. — Pour toute fonction u vérifiant $\Delta u = \lambda u$ on a :

(α)
$$\|du\|_\infty \leq (C + 12\sqrt{n\lambda}) \|u\|_\infty;$$

(β)
$$\frac{\text{vol}(M) \|u\|_\infty^2}{\|u\|_2^2} \leq 4\beta \left(\frac{1}{2(C + 12\sqrt{n\lambda})} \right),$$

où

$$C = 6(n-1)\sqrt{|K|} \quad \text{sur } m(n, K);$$

$$C = 6(n-1)\sqrt{|K|} + 24n \sup(e, 2/a) \quad \text{sur } m(n, K, a, e);$$

N.B. : On peut aussi donner une version analogue du lemme 18 qui ne nécessite que le contrôle suivant : il existe une fonction ω , continue, positive, nulle en 0, telle que :

$$\forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad |\varphi_j(\cdot) - \varphi_j(\bullet)| \leq \omega(d(\cdot, \bullet)).$$

Cependant ce cadre plus général est moins précis et nous ne le développons pas ici.

Preuve de 18. — Notons B_i la boule de rayon ε centrée en x_i et $D_i = B_i \setminus (\cup_{j < i} B_j)$. Les

D_i forment une partition de M . Notons \mathcal{H}_0 l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des D_i et π la projection sur $\mathcal{H}_0 \subset L^2(M, \mathbb{R})$. Pour toute fonction φ de $L^2(M, \mathbb{R})$ on a :

$$\|\varphi - \pi(\varphi)\|_2^2 = \inf_{f \in \mathcal{H}_0} \|\varphi - f\|_2^2 \leq \sum_i \int_{D_i} [\varphi(x) - \varphi(x_i)]^2 d \text{vol} \leq \varepsilon^2 \cdot \text{vol}(M) \cdot \|d\varphi\|_\infty^2.$$

Par ailleurs, on a :

$$\sum_1^N \|\varphi_j - \pi(\varphi_j)\|_2^2 = \sum_1^N (\|\varphi_j\|_2^2 - \langle \varphi_j, \pi(\varphi_j) \rangle_2) = N - \text{Trace}(\pi) \geq N - \text{card}(\mathcal{R}_e),$$

d'où le résultat. ■

Preuve de 19. — On normalise u de sorte que $\|u\|_\infty = 1$. D'après l'inégalité de [MR3] (p. 124 ligne 5) on a :

$$\left| \frac{du}{\mu - u} \right| \leq 2 \sqrt{\frac{\lambda}{\mu - u}} [2^{-1/4} + (\mu(n-1))^{1/2}] + \sqrt{2} \cdot \theta(k)$$

où

$$\theta(k) = (2n-3)k + (n-1)^{1/2} \left(\frac{5}{2}k^2 + k(n-1) \frac{\sqrt{|\mathbf{K}|}}{\Gamma(\sqrt{|\mathbf{K}|}(a/2))} + 2(n-1)|\mathbf{K}| \right)^{1/2}$$

et où $k = 2 \cdot \sup(e, 2/a)$. Posant $\mu = 2$ et remarquant que $|\mu - u| \leq 3$, utilisant une nouvelle fois l'inégalité $\text{th } x \geq x/(1+x)$ sur \mathbb{R}^+ , on obtient $(1/3)|du| \leq 4\sqrt{n\lambda} + \sqrt{2} \cdot \theta(k)$ où

$$\begin{aligned} \theta(k) &\leq (2n-3)k + \left(\frac{(n-1)5k^2}{2} + (n-1)^2 k \left(\frac{2}{a} + \sqrt{|\mathbf{K}|} \right) + 2(n-1)^2 |\mathbf{K}| \right)^{1/2} \\ &\leq (2n-3)k + \sqrt{\frac{(n+4)(n-1)}{2}} k + \sqrt{2(n-1)} \sqrt{|\mathbf{K}|} \end{aligned}$$

d'où (α).

Au point x_0 où u atteint son maximum (à un changement de signe près, on peut supposer $u(x_0) = 1 = \|u\|_\infty$) on a : ($\forall x \in \mathbf{M}$),

$$u(x) \geq 1 - d(x, x_0) \cdot \|du\|_\infty \geq 1 - (C + 12\sqrt{n\lambda})d(x, x_0), \quad \text{par } (\alpha).$$

En tout point x de la boule centrée en x_0 et de rayon $(1/2) \frac{1}{(C + 12\sqrt{n\lambda})}$ on a $u(x) \geq 1/2$,

ce qui prouve (β). ■

Définissons la fonction $f_m(\lambda)$ (uniforme sur la classe m considérée, par définition de la constante C) par

$$\varepsilon = f_m(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 4} (C + 12\sqrt{n\lambda})^{-1} \cdot \beta \left(\frac{1}{2(C + 12\sqrt{n\lambda})} \right)^{-1/2}.$$

THÉORÈME 20. — Pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$N(\lambda) \leq 2 \cdot \beta(f_m(\lambda)) \leq 2Z^{2D/f_m(\lambda)}.$$

où $Z=Z(n, K, a, e, D)$ est la constante définie au lemme 16 et où $\beta(r)$ désigne encore (cf. début du paragraphe 4) le maximum, lorsque x varie dans M du rapport : $\text{vol}(M)/\text{vol}(B(x, r))$.

Preuve. — On remplit (M, g) par un nombre maximal de boules disjointes de rayon $\varepsilon=f_m(\lambda)$.

Les centres des boules forment un 2ε -réseau dans (M, g) , et le nombre de ces boules est majoré par $\beta(\varepsilon)$. On applique le lemme 18 en prenant pour fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_N$, les fonctions propres du laplacien correspondant à des valeurs propres inférieures à λ . D'après le lemme 19 on en déduit :

$$N(\lambda) \leq \beta(\varepsilon) \left[1 - 4\varepsilon^2 (C + 12\sqrt{n\lambda})^2 4\beta \left(\frac{1}{2(C + 12\sqrt{n\lambda})} \right) \right]^{-1}$$

ce qui d'après le choix de $\varepsilon=f_m(\lambda)$ entraîne le résultat. On termine la preuve en appliquant le théorème 17 (iii).

Remarque. — En reprenant les exemples décrits dans [GT1] et [MR3], on voit que chacune des hypothèses, faites dans le théorème 20, sur courbure, diamètre et défaut de convexité est nécessaire. Le contre-exemple suivant prouve que l'hypothèse sur le rayon de coupure l'est aussi : considérons en effet une fonction φ de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^+ , égale à 1 au voisinage de zéro, égale à 4 au voisinage de 1 et égale à ε^2 sur l'intervalle $[1/4, 3/4]$. Posons $\varphi_p(x) = 4^{-p} \cdot \varphi(2^p \cdot x)$. Comme $\varphi_{p+1}[2^{-(p+1)}] = \varphi_p(0)$, on obtient une fonction C^∞ de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^+ en posant

$$\Psi_N(x) = \begin{cases} 4^{-N} & \text{si } x \in [0, 2^{-N}] \\ \varphi_p(x - 2^{-p}) & \text{sur l'intervalle } [2^{-p}, 2^{-(p-1)}], \text{ pour tout } p \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{cases}$$

Complétons Ψ_N en une fonction C^∞ de $[0, 2[$ dans \mathbb{R}^+ comme sur la figure 3, puis comme une fonction C^∞ paire de $]-2, 2[$ dans \mathbb{R}^+ .

Soit $M_{N,\varepsilon}$ le domaine plan d'équation $|y| \leq \Psi_N(x)$. Son diamètre et sa courbure intrinsèque sont bornés. Comme $\|\varphi_p'\|_\infty$ et $\|\varphi_p''\|_\infty$ sont bornés par $\|\varphi'\|_\infty$ et $\|\varphi''\|_\infty$, la courbure du bord est elle-même bornée indépendamment de N et de ε . Par contre, le rayon de coupure est égal à $4^{-N} \cdot \varepsilon^2$. Notons C_p les parties étroites de $M_{N,\varepsilon}$ (plus précisément celles dont l'abscisse est comprise entre $(5/4) \cdot 2^{-p}$ et $(7/4) \cdot 2^{-p}$ et notons B_p les parties plus larges (i. e. les composantes connexes du complémentaire des C_p). Notons u_p la fonction de M dans \mathbb{R}^+ , dépendant de la seule variable x , égale à 1 sur B_p et à zéro sur les autres B_i et qui se raccorde linéairement sur les C_i . Parmi ces fonctions, il en existe $(N-1)$ qui sont de supports deux à deux disjoints. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{\int |\nabla u_p|^2}{\int u_p^2} &\leq \frac{1}{\text{Aire}(B_p)} \left[\frac{\text{Aire}(C_p)}{\text{longueur}(C_p)^2} + \frac{\text{Aire}(C_{p+1})}{\text{longueur}(C_{p+1})^2} \right] \\ &\leq c \cdot 4^N \cdot \varepsilon^2. \end{aligned}$$

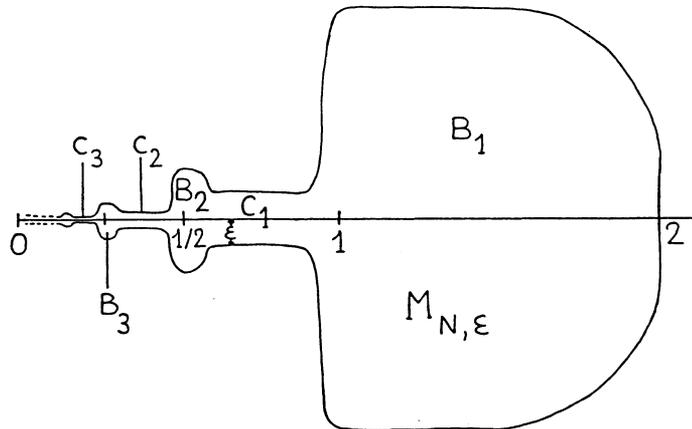


Fig. 3

Ceci prouve (en choisissant $\epsilon < 4^{-N/c}$) que le spectre de $M_{N, \epsilon}$ possède au moins $(N-1)$ valeurs propres inférieures à ϵ . Ce nombre tend vers l'infini avec N , en même temps que le rayon de coupure tend vers zéro. ■

Bornes géométriques universelles pour les nombres de Betti absolus et relatifs. — A partir des constantes $Z = Z(n, K, a, e, D)$ et $f_m(\lambda) = f_m(\lambda, n, K, a, e, D)$ définies respectivement au lemme 16 et au théorème 20, définissons de nouvelles constantes

$$\Lambda_p = 4(l+1)^2 (nk^2 + (n-1)k \sqrt{|K|} - 4p(n-p)K),$$

où $l = \binom{n}{p}$ et où $k = 4 \cdot \sup[(n-p)e, p \cdot e, 1/a]$, et

$$C_p(n, K, a, e, D) = 2Z^{2D/f_m(\Lambda_p)}(l+1) - 1$$

Des théorèmes 14, 15 et 20, on déduit le

COROLLAIRE 21. — Soit (n, K, a, e, D) un élément donné de

$$(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \times \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Toute variété riemannienne $(M, \partial M, g)$ à bord, compacte, connexe, orientée, de dimension n , dont la courbure sectionnelle et le rayon de coupure sont minorés par K et a et dont le diamètre est majoré par D vérifie

(i) $b_1(M, \partial M) \leq C_1(n, K, e, a, D)$ lorsque la courbure moyenne du bord est majorée par e ;

(ii) $b_1(M) \leq C_1(n, K, e, a, D)$ lorsque toutes les courbures principales du bord sont majorées par e ;

(iii) $b_p(M) \leq C_p(n, K, e, a, D)$ et $b_p(M, \partial M) \leq C_p(n, K, e, a, D)$ lorsque toutes les courbures principales du bord sont majorées par e et lorsque, de plus, l'opérateur de courbure

de M est minoré par K (cette dernière hypothèse peut être remplacée par une hypothèse d'encadrement de la courbure sectionnelle d'après [KR]).

APPENDICE

**Propriétés de la fonction γ
et des fonctions γ_p utilisées dans la section 1**

Pour tous les p, x de $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, posons

$$\gamma_p(x) = (2/x)^{p/2} \frac{\Gamma((x+p)/2)}{\Gamma(x/2)}.$$

La fonction γ définie dans la section 1 coïncide avec γ_1 .

Interprétation géométrique des fonctions γ_p . — Considérons la fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$ de S^{n-1} dans \mathbb{R} . Les propriétés classiques de la fonction Γ [cf. la formule (3) du lemme 3] donnent :

$$\frac{n^{p/2}}{\text{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} |x_1|^p \cdot dx = \frac{\gamma_p(1)}{\gamma_p(n)}.$$

En particulier, on a

$$\gamma(n) = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\text{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} |x_1| \cdot dx\right)^{-1}.$$

LEMME. — *Quand $p < 2$, la fonction γ_p est croissante, Log-concave et tend vers 1 à l'infini.*

Quand $p > 2$, la fonction γ_p est décroissante, Log-convexe et tend vers 1 à l'infini.

Pour tous les $l, N \in \mathbb{R}^+$, $(\gamma_p(l)/\gamma_p(N))^{2/p}$ tend vers (N/l) quand p tend vers l'infini.

Preuve. — La fonction $(\Gamma'/\Gamma)(x) + (1/x) - \sum_{n=1}^{\infty} x/n(x+n)$ est constante (cf. Dieudonné, calcul infinitésimal, p. 476). En dérivant, nous obtenons que $d^n/dx^n[\text{Log } \Gamma]$ a le même signe que $(-1)^n$ pour tout entier n au moins égal à 2 et en tout point de $]0, +\infty[$. Posons

$$f(x) = \gamma_p(2x) = x^{-p/2} \cdot \Gamma\left(x + \frac{p}{2}\right) / \Gamma(x).$$

Un calcul direct donne

$$(A1) \quad \frac{d}{dx} [\text{Log } f(x)] = \frac{\Gamma'(x+p/2)}{\Gamma(x+p/2)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{p}{2x},$$

$$(A2) \quad \frac{d^2}{dx^2} [\text{Log} f(x)] = \frac{d^2}{dx^2} [\text{Log} \Gamma(x+p/2) - \text{Log} \Gamma(x)] + \frac{p}{2x^2}.$$

Comme Γ'/Γ est concave, $\Gamma'(x+p/2)/\Gamma(x+p/2)$ est minoré (resp. majoré) par $(1-p/2) \cdot (\Gamma'/\Gamma)(x) + (p/2) \cdot (\Gamma'/\Gamma)(x+1)$ lorsque $p < 2$ (resp. $p > 2$), cette dernière quantité étant elle-même égale à $(\Gamma'/\Gamma)(x) + (p/(2x))$ [dérivée $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$]. En reportant dans (A1), on en déduit que $\text{Log} f(x)$ est croissante (resp. décroissante) lorsque $p < 2$ (resp. $p > 2$).

Une démonstration identique, partant du fait que la dérivée seconde de $\text{Log}(\Gamma)$ est une fonction convexe, prouve que $d^2/dx^2 [\text{Log} \Gamma(x+p/2) - \text{Log} \Gamma(x)]$ est majorée (resp. minorée) par

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} [\text{Log} \Gamma(x+1) - \text{Log} \Gamma(x)] = -\frac{p}{2x^2}$$

lorsque $p < 2$ (resp. $p > 2$). En reportant dans (A2), on en déduit que f est Log-concave (resp. Log-convexe).

Le fait que γ_p tende vers 1 à l'infini se déduit des propriétés asymptotiques classiques de la fonction Γ .

Pour montrer que $[\gamma_p(l)/\gamma_p(N)]^{2/p}$ tend vers N/l quand p tend vers l'infini, il suffit de montrer que, pour tous les a, b fixés dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$,

$$\frac{1}{x} [\text{Log}(\Gamma(a+x)) - \text{Log}(\Gamma(b+x))]$$

tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. La règle de L'hospital assure que la limite cherchée est égale à

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+x) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(b+x) \right],$$

qui est nulle d'après la formule rappelée ci-dessus. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [B-B] M. BERGER et P. BÉRARD, *Bibliographie : Le spectre d'une variété riemannienne (Spectra of Riemannian Manifolds)*, Kaigai, 1984, accessible également en appendice du livre de Pierre Bérard, *Lecture Notes in Math.*, n° 1207, Springer, 1986.
- [B-C] R. BISHOP et R. CRITTENDEN, *Geometry of Manifolds*, Acad. Press, New York, 1964.
- [B-G] P. BÉRARD et S. GALLOT, *Inégalités isopérimétriques pour l'équation de la chaleur et applications à l'estimation de quelques invariants géométriques (Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, École Polytechnique, Palaiseau, 1983-1984)*.
- [BN] G. BESSON, *Appendice au livre de P. Bérard, Spectral Geometry: Direct and Inverse problems (Lecture Notes in Math.*, n° 1207, Springer, 1986).
- [C-L] S. Y. CHENG et P. LI, *Heat Kernel Estimates and Lower Bound of Eigenvalues (Comment. Math. Helv.*, vol. 56, 1981, p. 327-338).

- [D-S] G. DUFF et D. C. SPENCER, *Harmonic Tensors on Riemannian Manifolds with Boundary* (*Ann. of Math. Stud.*, vol. 56, n° 1, 1952, p. 115-127).
- [G-M] S. GALLOT et D. MEYER, *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne* (*J. Math. Pures Appl.*, vol. 54, 1975, p. 259-284).
- [GT1] S. GALLOT, *Inégalités isopérimétriques, courbure de Ricci et invariants géométriques, I* (*C.R. Acad. Sci. Paris*, 296, série I, 1983, p. 333-336).
- [GT2] S. GALLOT, *Inégalités isopérimétriques, courbure de Ricci et invariants géométriques, II* (*C.R. Acad. Sci. Paris*, 296, série I, 1983, p. 365-368).
- [GT3] S. GALLOT, *Minorations sur le λ_1 des variétés riemanniennes* [*Sém. Bourbaki*, 1980-1981 (*Lecture Notes in Math.*, Springer, n° 901, 1981, p. 132-148)].
- [GV1] M. GROMOV, *Paul Levy's Isoperimetric Inequality*, Preprint I.H.E.S., 1980.
- [GV2] M. GROMOV, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Textes Math., n° 1, Cedric-Nathan, 1981.
- [GV3] M. GROMOV, *Curvature, Diameter and Betti Numbers* (*Comment. Math. Helv.*, vol. 56, 1981, p. 179-197).
- [H-K] E. HEINTZE et H. KARCHER, *A General Comparison Theorem with Applications to Volume Estimates for Submanifolds* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, vol. 11, 1978, p. 451-470).
- [HS] C. C. HSIUNG, *Curvature and Homology of Riemannian Manifolds with Boundary* (*Math. Zeit.*, vol. 82, 1963, p. 67-81).
- [H-S-U] H. HESS, R. SCHRADER et D. A. UHLENBROCK, *Kato's Inequality and the Spectral Distribution of Laplacian on Compact Riem. Manifolds* (*J. Differential Geom.*, vol. 15, 1980, p. 27-37).
- [KR] H. KARCHER, *Pinching Implies Strong Pinching* (*Comment. Math. Helv.*, vol. 46, 1971, p. 124-126).
- [LI] P. LI, *On the Sobolev Constant and the p -Spectrum of a Compact Riemannian Manifold* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, vol. 13, 1981, p. 451-457).
- [L-M] B. LAWSON et M. L. MICHELSON, *Imbeddings and Surrounding with Positive Mean Curvature* (*Invent. Math.*, vol. 77, 1984, p. 399-419).
- [LN] B. LAWSON, *The Unknottedness of Minimal Imbeddings* (*Invent. Math.*, vol. 11, 1970, p. 183-187).
- [L-Y1] P. LI et S. T. YAU, *Estimates of Eigenvalues of a Compact Riemannian Manifold* (*Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 36, 1980, p. 205-239).
- [L-Y2] P. LI et S. T. YAU, *On the Parabolic Kernel of the Schrödinger Operator* (*Acta Math.*, vol. 156, 1986, p. 153-201).
- [MR1] D. MEYER, *Un lemme de géométrie hilbertienne et des applications à la géométrie riemannienne* (*C.R. Acad. Sci. Paris*, 295, série I, 1982, p. 467-469).
- [MR2] D. MEYER, *Un lemme de géométrie hilbertienne et des applications à la géométrie riemannienne, II*, preprint.
- [MR3] D. MEYER, *Une minoration de la première valeur propre non nulle du problème de Neumann pour les variétés riemanniennes à bord* (*Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, vol. 36, n° 2, 1986, p. 113-125).
- [MR4] D. MEYER, *Sur les hypersurfaces minimales des variétés riemanniennes à courbure de Ricci positive ou nulle* (*Bull. Soc. Math. France*, vol. 111, 1983, p. 359-366).
- [MY] B. MAUREY, *Communications écrites et orales adressées à D. Meyer*, 1982.
- [R-S] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. I à IV, Acad. Press, 1978.

(Manuscrit reçu le 24 septembre 1987,
révisé le 9 juin 1988).

S. GALLOT,
L.A.-C.N.R.S. n° 188,
B.P. n° 74,
38402 Saint-Martin-d'Hères;

D. MEYER,
U.A.-C.N.R.S. n° 212,
Tours n° 45-55 5-08,
2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05.