

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. GUICHARDET

Sur les groupes EXT^n des représentations des groupes de Lie semi-simples

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 21, n° 3 (1988), p. 333-358

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_3_333_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES GROUPES Ext^n DES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES

PAR A. GUICHARDET

Introduction

Étant donné un groupe de Lie G et une classe de représentations unitaires irréductibles π de G , on peut se poser des problèmes de trois types (parmi bien d'autres...):

(a) déterminer les groupes $\text{Ext}_G^n(\pi, \pi)$ et la structure d'algèbre de cohomologie (pour le cup-produit) de leur somme directe $\text{Ext}_G^*(\pi, \pi)$;

(b) décrire la catégorie $\text{Ext}(G, \pi)$ des G -modules de longueur finie, à sous-quotients simples isomorphes à π ;

(c) étudier la « géométrie différentielle » de \hat{G} au voisinage de π : algèbre des jets d'ordre infini de fonctions C^∞ au voisinage de π , déformations C^∞ de π , vecteurs tangents à \hat{G} en π , etc.

Il se trouve que ces problèmes sont assez intimement liés, comme le montrent les considérations – souvent très formelles – qui suivent.

(i) Si G est compact, les trois problèmes sont triviaux.

(ii) Prenons $G = \mathbf{R}^m$; alors $\hat{G} = \mathbf{R}^m$, $\text{Ext}_G^*(\pi, \pi)$ est l'algèbre extérieure $\Lambda^* \mathbf{C}^m$; la catégorie $\text{Ext}(G, \pi)$ est équivalente à celle des A -modules de dimension finie à sous-quotients simples triviaux, où A est l'algèbre de polynômes $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_m]$; enfin l'algèbre des jets d'ordre infini de fonctions C^∞ au voisinage de π est l'algèbre de séries formelles $\mathbf{C}[[X_1, \dots, X_m]]$.

(iii) Les résultats de (ii) ont été généralisés, sous une forme moins simpliste, au cas d'un groupe G nilpotent simplement connexe par F. du Cloux ([3], [4]); dans ce cas les assertions relatives à $\text{Ext}_G(\pi, \pi)$ et à $\text{Ext}(G, \pi)$ sont vraies « génériquement », et cela semble devoir se généraliser à tous les groupes de Lie (voir [11] et [12] pour d'autres cas).

(iv) Le groupe G étant maintenant quelconque, considérons une réalisation U de π dans un espace E , et une déformation C^∞ de U , i.e. une famille à un paramètre de représentations unitaires U_t de G dans E telles que $U_0 = U$ et que les applications $t \mapsto U_t(g)$ soient C^∞ ; posons

$$\Phi(g) = -i \frac{d}{dt} \Big|_0 U_t(g) \cdot U(g)^{-1};$$

alors Φ est un 1-cocycle sur G à valeurs dans $\text{End } E$; nous noterons $[\Phi]$ sa classe dans le groupe $\text{Ext}_G^1(\pi, \pi)$; la formule correspondante pour l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est

$$\Phi(X) = -i \frac{d}{dt} \Big|_0 U_t(X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Il est clair que $\Phi(\mathfrak{g})$ et $\Phi(X)$ sont hermitiens, ce que nous écrivons

$$[\Phi] \in \text{Ext}_G^1(\pi, \pi)_h;$$

de plus $[\Phi]$ est de cup-carré nul, comme on le voit en dérivant deux fois la relation

$$U_t(g_1 g_2) = U_t(g_1) \cdot U_t(g_2);$$

nous écrivons cela

$$[\Phi] \in \text{Ext}_G^1(\pi, \pi)_{0,h}.$$

Nous dirons qu'un tel 1-cocycle Φ « s'obtient en dérivant une déformation de U »; on a montré dans [14] que, dans le cas des groupes de déplacements, tous les éléments de $\text{Ext}_G^1(\pi, \pi)_{0,h}$ s'obtiennent par ce procédé.

A ce point il est bon de rappeler qu'en Géométrie Algébrique, on définit couramment l'espace tangent à une variété V en un point x comme étant l'espace $\text{Ext}_A^1(x, x)$ où A est l'algèbre des fonctions algébriques sur V .

Revenant au cas qui nous intéresse, l'indice 0 (condition de « cup-carré nul ») indique clairement une situation non commutative; l'indice h est dû, bien entendu, au fait que l'on ne considère que des représentations unitaires. Signalons aussi un phénomène assez inattendu : il peut arriver que deux déformations équivalentes fournissent des 1-cocycles non équivalents; plus précisément il peut exister deux familles à un paramètre (U_t) , (U'_t) vérifiant $U_0 = U'_0 = U$, et des entrelacements $A_t : U_t \rightarrow U'_t$ n'ayant aucune limite lorsque $t \rightarrow 0$, si bien que les 1-cocycles obtenus Φ et Φ' peuvent ne pas être équivalents; ce phénomène se produit pour le groupe nilpotent $G_{5,5}$, et semble être intimement lié à celui, étudié par J. Ludwig [17], des suites d'orbites dans \mathfrak{g}^* qui convergent plusieurs fois vers une orbite donnée.

(v) Pour les groupes G ayant des Ext^n non nuls entre représentations irréductibles distinctes, il s'avère intéressant de considérer aussi des représentations π non irréductibles, à condition de remplacer $\text{Ext}_G^1(\pi, \pi)_{0,h}$ par son sous-ensemble $\text{Ext}_G^1(\pi, \pi)_{0,h,\text{irr}}$ formé des classes α qui sont irréductibles au sens suivant : pour tout élément φ de α , les opérateurs $U(\mathfrak{g})$ et $\Phi(\mathfrak{g})$ forment un ensemble irréductible; puis de diviser ce dernier par l'action (par conjugaison) du groupe \mathcal{U} des éléments unitaires du commutant \mathcal{C} de U . Prenons par exemple le groupe des déplacements du plan : $G = \mathbb{R}^2 \ltimes \text{SO}(2)$; \hat{G} est formé des caractères χ_n , $n \in \mathbb{Z}$, de $\text{SO}(2)$, et d'une famille de représentations de dimension infinie ρ_r , $r \in \mathbb{R}_+^*$; $\text{Ext}_G^1(\chi_n, \chi_n)$ est nul pour tout n ; par contre si l'on considère la représentation $\pi = \bigoplus_n \chi_n$, un calcul direct montre que $\text{Ext}_G^1(\pi, \pi)_{0,h,\text{irr}}/\mathcal{U}$ est naturellement homéomorphe à la famille des ρ_r ; celle-ci doit donc être considérée comme une déformation C^∞ de π , et

non des divers χ_n , bien que, pour la topologie de Fell, elle converge vers tous les χ_n . On trouvera dans [13] une étude plus complète de $\text{Ext}_G^1(\pi, \pi)_{0, h, \text{irr}}/\mathcal{C}^u$ dans le cas des groupes de déplacements quelconques.

Le but initial du présent travail était d'examiner les problèmes ci-dessus dans le cas où G est un groupe semi-simple, et où π est un (\mathfrak{g}, K) -module « série principale généralisée » $I_{P, \delta, \nu}$; il est encore bien loin d'être atteint! Nous décrivons les espaces vectoriels $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^n(I_{P, \delta, \nu}, I_{P, \delta, \nu})$ sans autres hypothèses, mais nous ne décrivons la structure d'algèbre de $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^*(I_{P, \delta, \nu}, I_{P, \delta, \nu})$ que lorsque le groupe $W_{\delta, \nu}^0$ est trivial et ν imaginaire pure.

Nous tenons à remercier très chaleureusement ici P. Delorme dont la compétence dans le vaste domaine « semi-simple » nous a été indispensable tout au long de l'élaboration de ce travail, ainsi que J.-B. Baillon et J. Soto Andrade qui nous ont fourni des démonstrations du lemme 8.10; à la demande du rapporteur nous avons reproduit la seconde, plus intuitive et « géométrique » que la première.

1. Préliminaires

1.1. NOTATIONS GÉNÉRALES

Dans tout ce travail on note :

- G un groupe de Lie réel semi-simple connexe de centre fini;
- \mathfrak{g} son algèbre de Lie;
- K un sous-groupe compact maximal de G ;
- $P = MAN$ un sous-groupe parabolique cuspidal;
- $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ son algèbre de Lie;
- $l = \dim A$;
- $K_M = K \cap M$;
- ρ la demi-somme des racines de \mathfrak{a} dans \mathfrak{n} ;
- $W = N_G(A)/Z_G(A)$ le groupe de Weyl de A ;
- δ un élément de \hat{M}_d (série discrète de M);
- ν un élément de \mathfrak{a}_c^* avec $\text{Re } \nu \in -\bar{C}_P$ (chambre de Weyl négative fermée);
- $W_{\delta, \nu}$ le stabilisateur du couple (δ, ν) dans W , qu'on peut écrire comme une extension

$$1 \rightarrow W_{\delta, \nu}^0 \rightarrow W_{\delta, \nu} \rightarrow R_{\delta, \nu} \rightarrow 1$$

- $I_{P, \delta, \nu}^\infty$ la série principale correspondante, induite au sens C^∞ dans sa réalisation compacte, à savoir :

$$I_{P, \delta, \nu}^\infty = \{ f \in C^\infty(K, E_\delta) \mid f(km) = \delta(m)^{-1} \cdot f(k) \ \forall k \in K, m \in K_M \};$$

- I ou $I_{P, \delta, \nu}$ le (\mathfrak{g}, K) -module correspondant;
- U ou $U_{P, \delta, \nu}$ la représentation dans $I_{P, \delta, \nu}$;
- $\mathcal{A} = S(\mathfrak{a}_c)$ l'algèbre symétrique de \mathfrak{a}_c ;

- \mathcal{B} l'ensemble des éléments de \mathcal{A} invariants par $W_{\delta, \nu}^0$;
- \mathcal{C}_A la catégorie des A -modules C^∞ ;
- $\text{Ext}(A, \nu)$ sa sous-catégorie pleine formée des A -modules de longueur finie à sous-quotients simples isomorphes à C_ν ;
- $\mathcal{C}_{g, K}$ la catégorie des (g, K) -modules;
- $\text{Ext}(g, K; I)$ sa sous-catégorie pleine formée des modules de longueur finie à sous-quotients simples isomorphes à I (lorsque celui-ci est simple);
- $\mathcal{C} = \text{Ext}_{g, K}^0(I, I)$ le commutant de I ;
- \mathcal{C}^* le groupe des éléments inversibles de \mathcal{C} ;
- lorsque $\text{Re } \nu = 0$, \mathcal{C}^u le groupe des éléments unitaires de \mathcal{C} ;
- $\text{Ext}_{g, K}^1(I, I)_0$ le sous-ensemble de $\text{Ext}_{g, K}^1(I, I)$ formé des éléments de cup-carré nul;
- $\text{Ext}_{g, K}^1(I, I)_{\text{irr}}$ le sous-ensemble de $\text{Ext}_{g, K}^1(I, I)$ formé des éléments α qui sont irréductibles au sens suivant : pour tout 1-cocycle $\Phi \in \alpha$, l'ensemble des opérateurs $U(X)$ et $\Phi(X)$, où $X \in g$, ne laisse stable aucun sous-espace non trivial de I ;
- lorsque $\text{Re } \nu = 0$, $\text{Ext}_{g, K}^1(I, I)_h$ le sous-ensemble de $\text{Ext}_{g, K}^1(I, I)$ formé des classes contenant au moins un cocycle hermitien;
- $\text{Ext}_{g, K}^1(I, I)_{0, h, \text{irr}}$ l'intersection des trois sous-ensembles précédents.

On fait agir \mathcal{C}^* dans $\text{Ext}_{g, K}^1(I, I)$ par conjugaison; plus précisément, le transformé d'un 1-cocycle Φ par un élément T de \mathcal{C}^* est le 1-cocycle $X \mapsto T \cdot \Phi(X) \cdot T^{-1}$; de même lorsque $\text{Re } \nu = 0$ on fait agir \mathcal{C}^u dans $\text{Ext}_{g, K}^1(I, I)_h$.

1.2. STRUCTURE DE $I_{p, \delta, \nu}$ (Voir [6], [16], [18]).

On rappelle que I est somme directe d'une famille finie de sous-modules indécomposables, famille qui a même cardinal que $\hat{R}_{\delta, \nu}$; nous noterons I^χ ou $I_{p, \delta, \nu}^\chi$, avec $\chi \in \hat{R}_{\delta, \nu}$, ces sous-modules; chacun d'eux a un unique sous-module simple noté J^χ ou $J_{p, \delta, \nu}^\chi$.

1.3. CAS OÙ $\text{Re } \nu = 0$.

Dans ce cas les sous-modules $I^\chi = J^\chi$ sont deux à deux inéquivalents; pour tout $w \in W_{\delta, \nu}$ on notera $A(w)$ l'opérateur d'entrelacement unitaire associé, normalisé de façon que $A(w)|_{I^1} = \text{id}$; alors A est un morphisme de groupes, de noyau $W_{\delta, \nu}^0$; les $A(w)$ avec $w \in R_{\delta, \nu}$ forment une base de l'espace vectoriel \mathcal{C} ; enfin on peut choisir l'indexation I^χ de façon que

$$A(w)|_{I^\chi} = \chi(w) \cdot \text{id}.$$

1.4. APPLICATIONS LINÉAIRES $T^n: \Lambda^n \alpha_c^* \rightarrow \text{Ext}_{g, K}^n(I, I)$. (Voir [10] et [12].)

On dispose d'un foncteur $T: \mathcal{C}_A \rightarrow \mathcal{C}_{g, K}$ associant à tout A -module π le (g, K) -module induit au sens K -fini par le (p, K_M) -module $\delta \times e^p \pi \times 1$; il en résulte des applications linéaires

$$T^n: \Lambda^n \alpha_c^* = \text{Ext}_a^n(\nu, \nu) \rightarrow \text{Ext}_{g, K}^n(I, I);$$

pour tout $\xi \in \Lambda^n \alpha_c^*$ et tout $\chi \in \hat{R}_{\delta, v}$, on notera $T^{n, \chi}(\xi)$ la restriction de $T^n(\xi)$ à $\text{Ext}_{g, K}^n(I^\chi, I)$.

Enfin notant T^* la somme directe des divers T^n , $n \geq 0$, on a

$$(1.1) \quad T^*(\xi_1 \wedge \xi_2) = T^*(\xi_1) \smile T^*(\xi_2)$$

pour $\xi_1, \xi_2 \in \Lambda^* \alpha_c^*$, où \smile désigne le cup-produit.

2. Énoncé des résultats

THÉORÈME 1. — *Les données sont celles du 1.1; en particulier $v \in \alpha_c^*$.*

(i) *On a des isomorphismes d'espaces vectoriels*

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{g, K}^n(I^\chi, I) &\sim \text{Ext}_{\mathcal{B}}^n(v, v) \quad \forall \chi \in \hat{R}_{\delta, v} \\ \text{Ext}_{g, K}^n(I, I) &\sim \mathbf{C}^{|\mathbf{R}_{\delta, v}|} \otimes \text{Ext}_{\mathcal{B}}^n(v, v). \end{aligned}$$

(ii) *Pour tout $\xi \in \alpha_c^*$, $T^1(\xi)$ est la classe du 1-cocycle*

$$g \ni X \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_0 U_{P, \delta, v(t)}(X)$$

pour toute courbe différentiable $t \mapsto v(t)$ vérifiant $v(0) = v$, $v'(0) = \xi$.

(iii) *Écrivons $\alpha_c^* = V_0 \oplus V_1$ où V_0 (resp. V_1) est la sous-espace de α_c^* où $W_{\delta, v}^0$ opère trivialement (resp. la somme des sous-espaces isotypiques non triviaux), puis*

$$\Lambda^n \alpha_c^* = \bigoplus_{p=0}^n (\Lambda^{n-p} V_0 \otimes \Lambda^p V_1);$$

alors

$$\text{Ker } T^{n, \chi} = \bigoplus_{p=1}^n (\Lambda^{n-p} V_0 \otimes \Lambda^p V_1).$$

N.B. — On a

$$\text{Ext}_{\mathcal{B}}^n(v, v) \sim \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(v, v) \sim \Lambda^n \alpha_c^*$$

puisque \mathcal{B} est, comme \mathcal{A} , une algèbre de polynômes à n indéterminées; mais cet isomorphisme n'a rien de canonique!

PROPOSITION 1. — *Si $\text{Re } v = 0$ on a, pour tout $\xi \in \Lambda^n \alpha_c^*$ et tout $w \in W_{\delta, v}$,*

$$T^n(w, \xi) = A(w) \cdot T^n(\xi) \cdot A(w)^{-1}.$$

THÉORÈME 2. — On suppose ici $W_{\delta, \nu}$ trivial et I simple.

- (i) T^n est bijectif pour tout $n \geq 0$.
- (ii) L'algèbre de cohomologie $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^*(I, I)$ est isomorphe à l'algèbre extérieure $\Lambda^* \alpha_c^*$.
- (iii) Tout élément de $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^1(I, I)$ s'obtient en dérivant une déformation de I .
- (iv) Si $\text{Re } \nu = 0$, tout élément de $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^1(I, I)_h$ s'obtient en dérivant une déformation unitaire de I .
- (v) Le foncteur T , défini en 1.4, induit une équivalence de catégories de $\text{Ext}(A, \nu)$ sur $\text{Ext}(\mathfrak{g}, \mathfrak{K}; I)$.

N.B. — Les assertions (i), (ii), (v) ont déjà été démontrées dans [12], l'assertion (v) dans [7].

THÉORÈME 3. — On suppose maintenant $W_{\delta, \nu}^0 = \{1\}$ et $\text{Re } \nu = 0$.

- (i) $T^{n, \lambda}$ est bijectif pour tout $n \geq 0$ et tout $\chi \in \hat{R}_{\delta, \nu}$.
- (ii) On a

$$\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^n(I^{\lambda_1}, I^{\lambda_2}) \sim (\Lambda^n \alpha_c^*)_{\chi_1^{-1} \chi_2} \quad \forall \chi_1, \chi_2 \in \hat{R}_{\delta, \nu}$$

où l'indice $\chi_1^{-1} \chi_2$ signifie qu'on prend le sous-espace isotypique de type $\chi_1^{-1} \chi_2$ pour l'action de $R_{\delta, \nu}$.

- (iii) L'algèbre de cohomologie $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^*(I, I)$ est isomorphe au produit croisé $\Lambda^* \alpha_c^* \ltimes R_{\delta, \nu}$.
- (iv) T^1 induit des bijections

$$(\alpha_c^*)_{\text{irr}}/R_{\delta, \nu} \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^1(I, I)_{0, \text{irr}}/\mathcal{C}^*$$

$$(i \alpha_c^*)_{\text{irr}}/R_{\delta, \nu} \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^1(I, I)_{0, h, \text{irr}}/\mathcal{C}^u$$

où $(\alpha_c^*)_{\text{irr}}$ est l'image réciproque de $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^1(I, I)_{\text{irr}}$ par T^1 .

(v) Tout élément de $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^1(I, I)_{0, \text{irr}}$ (resp. de $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^1(I, I)_{0, h, \text{irr}}$) s'obtient en dérivant une déformation irréductible (resp. unitaire irréductible) de I .

N.B. — L'assertion (i) ne suppose pas $\text{Re } \nu = 0$.

Remarque 1. — On sait ([5]) que les assertions suivantes sont équivalentes :

- l'une des représentations I^λ est une limite de séries discrètes;
- toutes les I^λ sont des limites de séries discrètes;
- $(\alpha_c^*)_1 (= (\alpha_c^*)^{R_{\delta, \nu}})$ est nul.

On retrouve donc le fait que, si V est un $(\mathfrak{g}, \mathfrak{K})$ -module limite de séries discrètes, $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^1(V, V)$ est nul; en réalité les $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^n(V, V)$ le sont aussi, d'après un résultat de Schmid et Zuckerman communiqué par D. Vogan.

Remarque 2. — Le cas où $W_{\delta, \nu}^0$ est non trivial semble nettement plus difficile; nous espérons y revenir dans un travail ultérieur; signalons toutefois que, lorsque $R_{\delta, \nu} = \{1\}$, il existe une équivalence de catégories entre $\text{Ext}(\mathcal{B}, \nu)$ et $\text{Ext}(\mathfrak{g}, \mathfrak{K}; I)$ (cf. [7], théorème 2).

Remarque 3. — Il peut être intéressant de rapprocher le théorème 3 de certains résultats connus concernant le dual réduit de G.

(a) Considérons l'ensemble des représentations unitaires obtenues par complétion des divers $I_{P, \delta, v}^{\chi}$ où $P=MAN$ parcourt l'ensemble des sous-groupes paraboliques cuspidaux à association près, $\delta \in \hat{M}_d/W$, $v \in i\alpha^*/W_{\delta}$, $\chi \in \hat{R}_{\delta, v}$; cet ensemble est celui des représentations tempérées de G, et constitue le dual réduit \hat{G}_r de G ([8], 2.3).

(b) Fixant P et δ on obtient un sous-ensemble $S_{P, \delta}$ de \hat{G}_r , qui est ouvert et fermé dans \hat{G}_r , ([8], 2.3); notons $\mathcal{C}_0(i\alpha^*/W_{\delta}^0)$ l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini sur $i\alpha^*/W_{\delta}^0$, et formons la C*-algèbre produit croisé $\mathcal{A}_{P, \delta} = \mathcal{C}_0(i\alpha^*/W_{\delta}^0) \rtimes R_{\delta}$; les représentations irréductibles de cette algèbre sont en correspondance bijective avec les éléments de $S_{P, \delta}$, comme on le voit en appliquant la théorie de Mackey à $\mathcal{A}_{P, \delta}$.

(c) La C*-algèbre réduite de G est Morita-équivalente à la somme des diverses $\mathcal{A}_{P, \delta}$ ([19], théorème 9).

(d) Supposons, comme au théorème 3, que $W_{\delta, v}^0 = \{1\}$, formons le groupe produit semi-direct $H = A \rtimes R_{\delta, v}$, et notons T la représentation régulière de $R_{\delta, v}$ considérée comme représentation de H; alors il est facile de voir que l'algèbre de cohomologie $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^*(T, T)$ est isomorphe à $\Lambda^* \alpha_c^* \rtimes R_{\delta, v}$, donc à l'algèbre de cohomologie $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^*(I_{P, \delta, v}, I_{P, \delta, v})$.

EXEMPLE

Prenons pour G le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ et pour P le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures; alors M est réduit à I et $-I$; on note 0 et 1 ses caractères, 0 étant le caractère trivial; on identifie α_c^* à \mathbb{C} en associant à tout $v \in \alpha_c^*$ sa valeur sur l'élément $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On se place au point $v=0$; alors $W_{\delta, v} = \mathbb{Z}_2$.

Examinons d'abord le cas $\delta=0$. Alors $R_{\delta, v}$ est trivial et $W_{\delta, v}^0 = \mathbb{Z}_2$; le théorème 1 montre que

$$\dim \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^n(I, I) = \dim \Lambda^n \alpha_c^* = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

mais que l'application T^1 est nulle; le théorème 3 ne donne évidemment rien, mais on peut montrer directement que tout élément de $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^1(I, I)$ (resp. $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^1(I, I)_h$) s'obtient en dérivant une déformation (resp. une déformation unitaire) de I; mais le paramètre par rapport auquel on doit dériver est v^2 et non pas v .

Examinons maintenant le cas $\delta=1$. Alors $W_{\delta, v}^0$ est trivial, $R_{\delta, v} = \mathbb{Z}_2$; le théorème 1 montre que

$$\dim \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^n(I, I) = \begin{cases} 2 & \text{si } n=0, 1 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

le théorème 3 s'applique; $(\alpha_c^*)_{\text{irr}}$ et $(i\alpha^*)_{\text{irr}}$ s'identifient respectivement à \mathbb{C}^* et \mathbb{R}^* ; $(\alpha_c^*)_{\text{irr}}/R_{\delta, v}$ et $(i\alpha^*)_{\text{irr}}/R_{\delta, v} -$ à $\mathbb{C}^*/\{1, -1\}$ et \mathbb{R}_+^* ; les déformations mentionnées au

théorème 3 (v) sont formées respectivement de « séries principales non sphériques » et de « séries principales unitaires non sphériques ».

PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES (ajouté à la demande du rapporteur)

(a) On a des isomorphismes successifs

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^n(I^\lambda, I) &= H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{K}; \text{Hom}(I^\lambda, I)) \\ &\downarrow J_1^{\lambda} \\ H^n(\mathfrak{p}, \mathfrak{K}_{\mathfrak{M}}; \text{Hom}(I^\lambda, \delta \times (v + \rho) \times 1)) \\ &\downarrow J_2^{\lambda} \\ H^n(\mathfrak{a}, \text{Hom}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{K}_{\mathfrak{M}}}(\mathbb{H}_0(\mathfrak{n}, I^\lambda)_{\delta, v + \rho}, \delta \times (v + \rho))) \\ &\downarrow J_3^{\lambda} \\ \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(v, v). \end{aligned}$$

J_1 n'est autre que l'isomorphisme de Shapiro. J_2 s'obtient en écrivant la suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'idéal \mathfrak{n} de \mathfrak{p} , puis en utilisant divers résultats de Hecht et Schmid, Vogan, Zuckerman sur la structure des $\mathfrak{m} + \mathfrak{a}$ -modules $H_q(\mathfrak{n}, I^\lambda)$, et la nullité des Ext^n entre séries discrètes. Enfin J_3 résulte d'un théorème de Delorme sur la structure du \mathfrak{a} -module dont on prend la cohomologie.

(b) Comme I est somme directe des I^λ , on en déduit des isomorphismes

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^n(I, I) \\ &\downarrow J_1 \\ H^n(\mathfrak{p}, \mathfrak{K}_{\mathfrak{M}}; \text{Hom}(I, \delta \times (v + \rho) \times 1)) \\ &\downarrow J_2 \\ H^n(\mathfrak{a}, \text{Hom}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{K}_{\mathfrak{M}}}(\mathbb{H}_0(\mathfrak{n}, I)_{\delta, v + \rho}, \delta \times (v + \rho))) \\ &\downarrow J_3 \\ \mathbb{C}^{|\mathbb{R}_{\delta, v}|} \otimes \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(v, v); \end{aligned}$$

ceci démontre le théorème 1 (i).

(c) On a de plus des applications (associées au foncteur $T : \mathcal{C}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}$) :

$$T^n : \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(v, v) = \Lambda^n \mathfrak{a}_c^* \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^n(I, I);$$

on a une formule explicite (3.7) pour l'application composée $J_1 \circ T^n$; on en déduit le théorème 1 (ii) qui affirme que T^1 s'obtient en dérivant des déformations, puis l'équivariance de T^n relativement à $W_{\delta, v}$ opérant dans \mathfrak{a}_c^* de façon naturelle, et dans I par les opérateurs d'entrelacements (prop. 1). Cette équivariance est la clef du théorème 1 (iii), si l'on se souvient en outre de ce que $A(w)$ est scalaire si et seulement si $w \in W_{\delta, v}^0$; la démonstration complète du théorème 1 (iii) utilise aussi la forme explicite de l'application $J_3 \circ J_2 \circ J_1 \circ T^n$ donnée par (5.4).

(d) Le théorème 2 est une conséquence facile du théorème 1 et, pour l'assertion (v), d'un lemme catégoriel démontré dans [12].

(e) Théorème 3 : (i) est une conséquence facile du théorème 1; (ii) de l'équivariance énoncée à la proposition 2; (iii) est un calcul sans mystère; (v) résulte facilement de (iv). Dans (iv), la partie difficile est la surjectivité de l'application

$$(\alpha_c^*)_{\text{irr}}/\mathbb{R}_{\delta, \nu} \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^1(\mathbb{I}, \mathbb{I})_{0, \text{irr}}/\mathcal{C}^*;$$

le lemme 8.9 la ramène à un problème combinatoire consistant à mettre certaines fonctions sur un groupe \mathbb{Z}_2^n sous une forme « canonique » — problème qui ressemble beaucoup, mais en plus difficile, à celui qui consiste à écrire un 2-cocycle sous la forme d'un cobord; c'est l'objet du lemme 8.10.

3. Description des isomorphismes de Shapiro

$$(3.1) \quad \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^n(\mathbb{I}^x, \mathbb{I}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\mathfrak{p}, \mathbb{K}_M}^n(\mathbb{I}^x, \delta \times (\nu + \rho) \times 1)$$

$$(3.2) \quad \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^n(\mathbb{I}, \mathbb{I}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\mathfrak{p}, \mathbb{K}_M}^n(\mathbb{I}, \delta \times (\nu + \rho) \times 1).$$

3.1. On notera L l'application « évaluation en 1 » de \mathbb{I} vers $E_{\mathfrak{g}}$, soit $L(f) = f(1)$, et L^x sa restriction à \mathbb{I}^x .

3.2. LEMME. — *Les applications L et L^x sont des $(\mathfrak{p}, \mathbb{K}_M)$ -morphisms surjectifs.*

Démonstration. — Il est clair que ce sont des $(\mathfrak{p}, \mathbb{K}_M)$ -morphisms; pour montrer que L^x est surjectif, il suffit de vérifier qu'il est non nul. Supposons donc $L(f) = 0$ pour tout $f \in \mathbb{I}^x$; on aura, pour tout $g \in G$

$$0 = L(U(g).f) = f(g^{-1})$$

donc $f = 0$, d'où contradiction.

3.3. On sait (cf. [1], III.2.5) que l'isomorphisme de Shapiro (3.1) associe à tout n -cocycle $\Phi \in Z^n(\mathfrak{g}, \mathbb{K}; \text{Hom}(\mathbb{I}^x, \mathbb{I}))$ le n -cocycle Φ' défini par

$$(3.3) \quad \Phi'(X_1, \dots, X_n) = L \circ \Phi(X_1, \dots, X_n) \quad \forall X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{p}$$

ou encore par

$$(3.4) \quad \Phi'(p_1, \dots, p_n) = L \circ \Phi(p_1, \dots, p_n) \quad \forall p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}.$$

3.4. Prenons en particulier un 1-cocycle Φ « dérivée de déformation » de la forme

$$\Phi(g) = -i \frac{d}{dt} \Big|_0 U_{\mathbb{P}, \delta, \nu(t)}(g) \cdot U_{\mathbb{P}, \delta, \nu}^{-1}(g);$$

(3.4) donne

$$(3.5) \quad \Phi'(p) = -i \langle \nu'(0), \log a \rangle \cdot L$$

pour $p = m + a + n \in \mathfrak{P}$; par suite, pour $U = X + Y + Z \in \mathfrak{p} = m + a + n$:

$$(3.6) \quad \Phi'(U) = -i \langle v'(0), Y \rangle \cdot L.$$

3.5. CAS OÙ Φ EST DE LA FORME $T^{n, \lambda}(\xi)$ AVEC $\xi \in \Lambda^n \mathfrak{a}_c^*$.

En vertu de [12] lemme 3, on sait que, pour $U_1, \dots, U_n \in \mathfrak{p}$, $U_j = X_j + Y_j + Z_j$ on a

$$(3.7) \quad T^{n, \lambda}(\xi)'(U_1, \dots, U_n) = \langle \xi; Y_1, \dots, Y_n \rangle \cdot L^\lambda.$$

3.6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 (ii).

Il suffit de juxtaposer (3.6) et (3.7).

3.7. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.

En vertu de (1.1) on peut supposer $n = 1$. Considérons une courbe $v(t)$ vérifiant $v(0) = v$, $v'(0) = \xi$; introduisons les opérateurs d'entrelacement $A_t = A_{\mathfrak{p}}(w, \delta, v(t))$ où $w \in W_{\delta, v}$ vérifiant

$$(3.8) \quad U_{\mathfrak{p}, \delta, w, v(t)}(X) = A_t \cdot U_{\mathfrak{p}, \delta, v(t)} \cdot A_t^{-1} \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

et $A_0 = A(w)$ avec les notations du n° 1.3; posons $A'_0 = (d/dt)|_0 A_t$; notons Φ et Φ^w les 1-cocycles associés aux courbes $v(t)$ et $w \cdot v(t)$; dérivant (3.8) pour $t = 0$, on obtient

$$\Phi^w(X) = -i \cdot A'_0 \cdot U(X) \cdot A_0^{-1} + A_0 \cdot \Phi(X) \cdot A_0^{-1} + i \cdot A_0 \cdot U(X) \cdot A_0^{-1} \cdot A'_0 \cdot A_0^{-1};$$

comme A_0 permute à $U(X)$:

$$\Phi^w(X) = A_0 \cdot \Phi(X) \cdot A_0^{-1} + i[U(X), A'_0 \cdot A_0^{-1}]$$

d'où

$$T^1(w, \xi) = A(w) \cdot T^1(\xi) \cdot A(w)^{-1}.$$

4. Construction d'isomorphismes

$$\text{Ext}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{K}_M}^n(\mathfrak{I}^\lambda, \delta \times (v + \rho) \times 1) \xrightarrow{\sim} H^n(\mathfrak{a}, \text{Hom}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{K}_M}(H_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{I}^\lambda)_{\delta, v + \rho}, \delta \times (v + \rho))).$$

4.1. On sait (cf. [1], I.6.5) qu'il existe une suite spectrale (de Hochschild-Serre) vérifiant

$$(4.1) \quad E_2^{p, q} = H^p(\mathfrak{m} + \mathfrak{a}, \mathfrak{K}_M; H^q(\mathfrak{n}, \text{Hom}(\mathfrak{I}^\lambda, \delta \times (v + \rho) \times 1))) \\ \Rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{K}_M}^n(\mathfrak{I}^\lambda, \delta \times (v + \rho) \times 1).$$

Comme \mathfrak{n} opère trivialement dans $\delta \times (v + \rho) \times 1$, on a des isomorphismes de $(\mathfrak{m} + \mathfrak{a}, \mathfrak{K}_M)$ -modules

$$H^q(\mathfrak{n}, \text{Hom}(\mathfrak{I}^\lambda, \delta \times (v + \rho) \times 1)) = \text{Hom}(H_q(\mathfrak{n}, \mathfrak{I}^\lambda), \delta \times (v + \rho)).$$

En vertu de [15], formule (2.29), le \mathfrak{a} -module $H_q(\mathfrak{n}, I^\lambda)$ est somme directe finie de sous-modules propres généralisés que nous noterons $H_q(\mathfrak{n}, I^\lambda)_{\mu+\rho}$ avec $\mu \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$; si $\mu \neq \nu$ on a

$$H^p(\mathfrak{a}, \text{Hom}(H_q(\mathfrak{n}, I^\lambda)_{\mu+\rho}, \nu + \rho)) = 0 \quad \forall p \geq 0;$$

donc, dans l'expression (4.1), seul intervient le terme en $\nu + \rho$, *i.e.*

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{m} + \mathfrak{a}, K_M; \text{Hom}(H_q(\mathfrak{n}, I^\lambda)_{\nu+\rho}, \delta \times (\nu + \rho))).$$

En vertu de [15], 8.4.6 (*voir* aussi [6], proposition 7), on a

$$H_q(\mathfrak{n}, I^\lambda)_{\nu+\rho} = 0 \quad \forall q > 0;$$

donc la suite spectrale dégénère et on obtient

$$(4.2) \quad \text{Ext}_{\mathfrak{p}, K_M}^n(I^\lambda, \delta \times (\nu + \rho) \times 1) \sim H^n(\mathfrak{m} + \mathfrak{a}, K_M; \text{Hom}(H_0(\mathfrak{n}, I^\lambda)_{\nu+\rho}, \delta \times (\nu + \rho))).$$

Ensuite le (\mathfrak{m}, K_M) -module $H_0(\mathfrak{n}, I^\lambda)_{\nu+\rho}$ est somme directe de séries discrètes que nous noterons δ' (résultat de Vogan cité dans [6], proposition 6); or, en vertu d'un résultat non publié de Zuckerman et de Schmid, on a

$$H^n(\mathfrak{m}, K_M; \text{Hom}(\delta', \delta)) = 0$$

sauf pour $\delta' = \delta$ et $n=0$; donc (4.2) devient

$$(4.3) \quad \text{Ext}_{\mathfrak{p}, K_M}^n(I^\lambda, \delta \times (\nu + \rho) \times 1) \sim H^n(\mathfrak{a}, \text{Hom}_{\mathfrak{m}, K_M}(H_0(\mathfrak{n}, I^\lambda)_{\delta, \nu+\rho}, \delta \times (\nu + \rho)))$$

où l'indice δ indique le sous-espace isotypique de type δ .

4.2. CALCUL EXPLICITE DE L'ISOMORPHISME (4.3).

Partons d'un n -cocycle $\Psi \in Z^n(\mathfrak{p}, K_M; \text{Hom}(I^\lambda, \delta \times (\nu + \rho) \times 1))$; par suite de la nullité de $E_2^{p,q}$ pour $q > 0$, on peut supposer que $\Psi(U_1, \dots, U_n)$ est nul dès que l'un des U_i appartient à \mathfrak{n} ; alors, du fait que Ψ est un cocycle, pour $X_i + Y_i \in \mathfrak{m} + \mathfrak{a}$, $\Psi(X_1 + Y_1, \dots, X_n + Y_n)$ est nul sur $\mathfrak{n} \cdot I$, donc définit une application de $H_0(\mathfrak{n}, I^\lambda)$ vers $\delta \times (\nu + \rho)$; enfin l'image Ψ' de Ψ par (4.3) s'obtient en restreignant ceci, d'une part à $\Lambda^n \mathfrak{a}$, d'autre part à $H_0(\mathfrak{n}, I^\lambda)_{\delta, \nu+\rho}$.

4.3. CAS OÙ Ψ EST DE LA FORME $T^{n,\lambda}(\xi)'$ (notations (3.7)).

Le lemme 3.2 montre que L^λ passe au quotient en un $(\mathfrak{m} + \mathfrak{a}, K_M)$ -morphisme surjectif

$$\tilde{L}^\lambda: H_0(\mathfrak{n}, I^\lambda)_{\delta, \nu+\rho} \rightarrow \delta \times (\nu + \rho);$$

(3.7) montre que l'image de $T^{n,\lambda}(\xi)'$ par (4.3) est donnée par

$$(4.4) \quad T^{n,\lambda}(\xi)''(Y_1, \dots, Y_n) = \langle \xi; Y_1, \dots, Y_n \rangle \cdot \tilde{L}^\lambda.$$

5. Construction d'isomorphismes

$$H^n(\mathfrak{a}, \text{Hom}_{\mathfrak{m}, K_M}(H_0(\mathfrak{n}, I^\lambda)_{\delta, \nu+\rho}, \delta \times (\nu + \rho))) \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{B}}^n(\nu, \nu).$$

Nous poserons, pour simplifier les notations :

$$D = \text{Hom}_{m, \kappa_M} (H_0(n, I^x)_{\delta, v+\rho}, \delta \times (v+\rho))$$

$$E = \text{Hom}_{m, \kappa_M} (H_0(n, J^x)_{\delta, v+\rho}, \delta \times (v+\rho))$$

$$F = \text{Hom}_{m, \kappa_M} (\delta, H_0(n, J^x)_{\delta, v+\rho}).$$

5. 1. STRUCTURE DU α -MODULE D.

On sait (voir [6], proposition 7) que l'application naturelle

$$H_0(n, J^x)_{\delta, v+\rho} \rightarrow H_0(n, I^x)_{\delta, v+\rho}$$

est un isomorphisme; donc les α -modules D et E sont isomorphes; d'autre part on a évidemment

$$H_0(n, J^x)_{\delta, v+\rho} \sim \delta \otimes F$$

d'où

$$E \sim \text{Hom}(F, v+\rho);$$

en vertu de [6], théorème 2, on a

$$F \sim (\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} C_v) \otimes C_\rho = (\text{Ind}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} C_v) \otimes C_\rho;$$

donc

$$(5.1) \quad D \sim E \sim \text{Hom}(\text{Ind}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} C_v, C_v).$$

5. 2. ISOMORPHISME $H^n(\alpha, D) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{B}}^n(v, v)$.

La relation (5.1) entraîne

$$H^n(\alpha, D) \sim \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(\text{Ind}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} C_v, C_v);$$

comme \mathcal{A} est un \mathcal{B} -module libre, le lemme de Shapiro pour les algèbres associatives s'applique (cf. [9], proposition C.7) et donne

$$(5.2) \quad H^n(\alpha, D) \sim \text{Ext}_{\mathcal{B}}^n(v, v).$$

5.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 (i)

Il suffit de juxtaposer les isomorphismes (3.1), (3.2), (4.3), (5.2).

5. 4. CALCUL DE L'IMAGE DE $T^{n, \lambda}(\xi)''$ (notations (4.4)) PAR L'ISOMORPHISME (5.2).

L'application \tilde{L}^x de la formule (4.3) est un élément α -invariant non nul de D; par (5.1) il devient un élément α -invariant non nul de $\text{Hom}(\text{Ind}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} C_v, C_v)$, c'est-à-dire une forme linéaire sur \mathcal{A} de la forme $P \mapsto k^x \cdot P(v)$ où k^x est un scalaire non nul; (4.4) signifie que

l'élément $T^{n,\lambda}(\xi)''$, transporté dans $\text{Ext}_a^n(\text{Ind}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} C_v, C_v)$, est le n -cocycle Ψ suivant :

$$\Psi(Y_1, \dots, Y_n)(P) = k^\lambda \cdot \langle \xi; Y_1, \dots, Y_n \rangle \cdot P(v)$$

pour $Y_i \in \mathfrak{a}$, $P \in \mathcal{A}$; Ψ se prolonge en un cocycle $\Psi' \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(\text{Ind}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} C_v, C_v)$ donné par

$$\Psi'(P_1, \dots, P_n)(P) = k^\lambda \cdot \langle \xi; P_1, \dots, P_n \rangle \cdot P(v)$$

où $\langle \xi; P_1, \dots, P_n \rangle$ a le sens suivant : si ξ est un tenseur décomposé $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$, alors

$$(5.3) \quad \langle \xi; P_1, \dots, P_n \rangle = \sum_{s \in S_n} \varepsilon_s \cdot \langle (dP_1)_{v_s}, \xi_{s(1)} \rangle \dots \langle (dP_n)_{v_s}, \xi_{s(n)} \rangle.$$

L'élément Ψ'' de $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^n(v, v)$ qui correspond à Ψ par (5.2) est donné par

$$\begin{aligned} \Psi''(Q_1, \dots, Q_n) &= \Psi'(Q_1, \dots, Q_n)(1) \\ &= k^\lambda \cdot \langle \xi; Q_1, \dots, Q_n \rangle \quad \forall Q_i \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Finalement l'image $T^{n,\lambda}(\xi)'''$ de $T^{n,\lambda}(\xi)''$ par (5.2) est donnée par

$$(5.4) \quad T^{n,\lambda}(\xi)'''(Q_1, \dots, Q_n) = k^\lambda \cdot \langle \xi; Q_1, \dots, Q_n \rangle.$$

6. Démonstration du théorème 1 (iii).

Montrons d'abord que $\text{Ker } T^{n,\lambda}$ contient le second membre; prenons donc ξ de la forme $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$ avec, par exemple, $\xi_n \in V_1$; (5.3) et (5.4) montrent que, pour $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{B}$:

$$T^{n,\lambda}(\xi)'''(Q_1, \dots, Q_n) = k^\lambda \cdot \sum_{s \in S_n} \varepsilon_s \cdot \langle (dQ_1)_{v_s}, \xi_{s(1)} \rangle \dots \langle (dQ_n)_{v_s}, \xi_{s(n)} \rangle;$$

chacun des termes du second membre contient un facteur de la forme $\langle (dQ_i)_{v_s}, \xi_n \rangle$; la forme bilinéaire sur $\mathcal{B} \times V_1$:

$$(Q_i, \xi_n) \mapsto \langle (dQ_i)_{v_s}, \xi_n \rangle$$

est invariante par $W_{\mathfrak{g}, v}^0$, donc nulle.

Démontrons l'inclusion inverse, à savoir que si ξ appartient à $\Lambda^n V_0$ et est non nul, il existe $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{B}$ vérifiant $\langle \xi; Q_1, \dots, Q_n \rangle \neq 0$ (on rappelle que k^λ est non nul). Prenons une base Y_1, \dots, Y_r de l'ensemble M des éléments de \mathfrak{a} invariants par $W_{\mathfrak{g}, v}^0$; V_0 est le dual de cet espace $\Lambda^n V_0$ est celui de $\Lambda^n M$, donc il existe $i_1 < \dots < i_n$ tels que

$$\langle \xi; Y_{i_1}, \dots, Y_{i_n} \rangle \neq 0;$$

enfin il est clair que les Y_{i_j} appartiennent à \mathcal{B} .

7. Démonstration du théorème 2.

(i) L'application T^n est injective d'après le théorème 1 (iii), et donc bijective pour des raisons de dimension (théorème 1 (i) avec $R_{\delta, \nu} = \{1\}$).

(ii) résulte de la formule (1.1).

(iii) résulte du théorème 1 (ii).

(iv) résulte de ce que $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^1(\mathbf{I}, \mathbf{I})$ est le complexifié de sa partie hermitienne.

(v) Voir [12].

8. Démonstration du théorème 3

8.1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3 (i).

L'application $T^{n, \chi}$ est injective d'après le théorème 1 (iii), donc bijective pour des raisons de dimension (théorème 1 (i)).

8.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3 (ii).

Fixons $\chi_1 \in \hat{R}_{\delta, \nu}$ et écrivons

$$T^{n, \chi_1} : \Lambda^n \mathfrak{a}_c^* \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^n(\mathbf{I}^{\chi_1}, \mathbf{I}) = \bigoplus_{\chi_2} \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^n(\mathbf{I}^{\chi_1}, \mathbf{I}^{\chi_2});$$

pour tout $\chi \in \hat{R}_{\delta, \nu}$, tout $\xi \in (\Lambda^n \mathfrak{a}_c^*)_{\chi}$, et tout $w \in R_{\delta, \nu}$, on a, en vertu de la proposition 1

$$\chi(w) \cdot T^{n, \chi_1}(\xi) = \bigoplus_{\chi_2} (\chi_1^{-1} \chi_2)(w) \cdot T^{n, \chi_1}(\xi);$$

donc T^{n, χ_1} est en fait une bijection de $(\Lambda^n \mathfrak{a}_c^*)_{\chi}$ sur le sous-espace $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^n(\mathbf{I}^{\chi_1}, \mathbf{I}^{\chi_1})$.

8.3. LEMME. — On peut identifier $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^n(\mathbf{I}, \mathbf{I})$ à l'ensemble des familles $\xi = (\xi^{\chi_1, \chi_2})$ avec $\chi_1, \chi_2 \in \hat{R}_{\delta, \nu}$ et $\xi^{\chi_1, \chi_2} \in (\Lambda^n \mathfrak{a}_c^*)_{\chi_1^{-1} \chi_2}$; dans cette identification le cup-produit devient

$$(\xi \smile \eta)^{\chi_1, \chi_2} = \sum_{\chi_3} \xi^{\chi_3, \chi_2} \wedge \eta^{\chi_1, \chi_3};$$

enfin T^n est donné par

$$T^n(\zeta)^{\chi_1, \chi_2} = \zeta_{\chi_1^{-1} \chi_2} \quad \forall \zeta \in \Lambda^n \mathfrak{a}_c^*.$$

Démonstration :

(a) Le numéro 8.2 dit que pour tout $\Phi \in \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^p(\mathbf{I}^{\chi_1}, \mathbf{I}^{\chi_2})$ il existe un unique $\xi \in (\Lambda^p \mathfrak{a}_c^*)_{\chi_1^{-1} \chi_2}$ vérifiant $T^p(\xi)|_{\chi_1} = \Phi$; de même pour tout $\Psi \in \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^q(\mathbf{I}^{\chi_2}, \mathbf{I}^{\chi_3})$ il existe un unique $\eta \in (\Lambda^q \mathfrak{a}_c^*)_{\chi_2^{-1} \chi_3}$ vérifiant $T^q(\eta)|_{\chi_2} = \Psi$; on a alors en vertu de (1.1)

$$T^q(\eta) \smile T^p(\xi) = T^{p+q}(\eta \wedge \xi)$$

d'où

$$\Psi \smile \Phi = T^{p+q}(\eta \wedge \xi) |_{\chi_1}.$$

(b) Soit maintenant Φ et Ψ des éléments de $\text{Ext}_{g, \kappa}^p(I, I)$ et $\text{Ext}_{g, \kappa}^q(I, I)$; on peut écrire

$$\Phi = \sum_{\chi_1, \chi_2} \Phi^{\chi_1, \chi_2}, \quad \Psi = \sum_{\chi_1, \chi_2} \Psi^{\chi_1, \chi_2};$$

d'après (a) il leur correspond des éléments

$$\xi^{\chi_1, \chi_2} \in (\Lambda^p \alpha_c^*)_{\chi_1^{-1} \chi_2}, \quad \eta^{\chi_1, \chi_2} \in (\Lambda^q \alpha_c^*)_{\chi_1^{-1} \chi_2}$$

auxquels il suffit d'appliquer la partie a).

8.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3 (iii).

La famille ξ étant définie comme au lemme 8.3, il sera commode de poser

$$\xi_x^{\chi_1} = \xi^{\chi_1, \chi_1} \in (\Lambda^n \alpha_c^*)_x$$

puis

$$\xi^{\chi_1} = \sum_x \xi_x^{\chi_1} \in \wedge^n \alpha_c^*;$$

autrement dit $\text{Ext}_{g, \kappa}^*(I, I)$ s'identifie à l'ensemble des applications de $\hat{R}_{\delta, \nu}$ dans $\Lambda^* \alpha_c^*$, le cup-produit s'écrivant alors

$$(8.1) \quad (\xi \smile \eta)_x^{\chi_1} = \sum_{\chi_2} \xi_{\chi_2}^{\chi_1 \chi_2} \wedge \eta_{\chi_2}^{\chi_1}.$$

D'autre part le produit croisé $\Lambda^* \alpha_c^* \times R_{\delta, \nu}$ est l'ensemble des applications f de $R_{\delta, \nu}$ dans $\Lambda^* \alpha_c^*$ avec le produit

$$(f * g)(w) = \sum_{w'} f(w') \wedge w' \cdot g(w'^{-1} w);$$

définissons une application U de ce produit croisé dans $\text{Ext}_{g, \kappa}^*(I, I)$ par

$$U(f)^{\chi_1} = \hat{f}(\chi_1) = \sum_w \chi_1(w) \cdot f(w)$$

soit encore

$$U(f)_x^{\chi_1} = \sum_w \chi_1(w) \cdot f(w)_x;$$

un calcul facile utilisant (8.1) montre que

$$U(f * g)_x^{\chi_1} = (U(f) \smile U(g))_x^{\chi_1}.$$

8.5. LEMME. — Soient Φ un élément de $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^1(I, I)$ et ξ la famille associée à Φ par le lemme 8.3; alors Φ appartient à $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^1(I, I)_{\text{irr}}$ si et seulement si pour toute partie J de $\hat{R}_{\delta, \nu}$ distincte de \emptyset et de $\hat{R}_{\delta, \nu}$, il existe $\chi_1 \in J$ et $\chi_2 \in \hat{R}_{\delta, \nu} \setminus J$ vérifiant $\xi^{\chi_1, \chi_2} \neq 0$.

Démonstration. — Comme les sous-modules simples I^λ de I sont deux à deux non isomorphes, les sous-espaces de I stables par les $U(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, et non triviaux sont exactement les sommes directes $\bigoplus_{\chi \in J} I^\chi$, $J \neq \emptyset$, $\hat{R}_{\delta, \nu}$; si maintenant φ est un 1-cocycle de la classe Φ , ce sous-espace sera stable par les $\varphi(X)$ si et seulement si φ^{χ_1, χ_2} est nul pour tous $\chi_1 \in J$, $\chi_2 \in \hat{R}_{\delta, \nu} \setminus J$.

8.6. LEMME. — Un élément ζ de α_c^* appartient à $(\alpha_c^*)_{\text{irr}}$ si et seulement si, notant ζ_χ la composante de ζ dans $(\alpha_c^*)_\chi$, le sous-groupe Γ de $\hat{R}_{\delta, \nu}$ engendré par les χ vérifiant $\zeta_\chi \neq 0$ est égal à $\hat{R}_{\delta, \nu}$ ⁽¹⁾.

Démonstration. — Condition nécessaire : supposons Γ distinct de $\hat{R}_{\delta, \nu}$; prenons $\chi_1 \in \Gamma$, $\chi_2 \in \hat{R}_{\delta, \nu} \setminus \Gamma$; alors $\chi_1^{-1} \chi_2 \in \hat{R}_{\delta, \nu} \setminus \Gamma$; puis, d'après le lemme 8.3

$$T^1(\zeta)^{\chi_1, \chi_2} = \zeta_{\chi_1^{-1} \chi_2} = 0$$

donc

$$T^1(\zeta) \notin \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^1(I, I)_{\text{irr}}$$

Condition suffisante : supposons-la réalisée et prenons $J \neq \emptyset$, $\hat{R}_{\delta, \nu}$; il existe $\chi \in \hat{R}_{\delta, \nu}$ tel que $\chi \cdot J \neq J$; par hypothèse χ s'écrit $\chi_1 \dots \chi_r$ avec $\zeta_{\chi_i} \neq 0$; donc il existe i tel que $\chi_i \cdot J \neq J$, donc il existe $\chi' \in J$ tel que $\chi'' = \chi_i \chi' \in \hat{R}_{\delta, \nu} \setminus J$; enfin

$$T^1(\zeta)^{\chi', \chi''} = \zeta_{\chi_i^{-1} \chi''} = \zeta_{\chi_i} \neq 0.$$

8.7. LEMME. — L'application

$$(\alpha_c^*)_{\text{irr}} / \mathbb{R}_{\delta, \nu} \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^1(I, I)_{0, \text{irr}} / \mathcal{C}^*$$

est injective.

Démonstration. — Prenons $\zeta, \eta \in (\alpha_c^*)_{\text{irr}}$, $U \in \mathcal{C}^*$ et supposons que l'on ait

$$(8.2) \quad T^1(\eta) = U \cdot T^1(\zeta) \cdot U^{-1};$$

on doit montrer que η appartient à $\mathbb{R}_{\delta, \nu} \cdot \zeta$. L'opérateur U a des composantes $u(\chi) \in \mathbb{C}^*$ dans les divers I^χ , et on peut supposer que $u(1) = 1$; (8.2) s'écrit

$$T^1(\eta)^{\chi_1, \chi_2} = (u(\chi_1))^{-1} \cdot u(\chi_2) \cdot T^1(\zeta)^{\chi_1, \chi_2}$$

⁽¹⁾ Ou encore si et seulement si le stabilisateur de ζ dans $\mathbb{R}_{\delta, \nu}$ est trivial.

ou encore

$$(8.3) \quad \eta_\chi = (u(\chi_1))^{-1} \cdot u(\chi_1 \chi) \cdot \zeta_\chi;$$

il suffit maintenant de montrer que u est un caractère, car alors il sera de la forme $u(\chi) = \langle \chi, w \rangle$ avec $w \in \mathbb{R}_{\delta, \nu}$. Notons E l'ensemble des χ vérifiant

$$u(\chi_1 \chi) = u(\chi_1) \cdot u(\chi) \quad \forall \chi_1;$$

il est immédiat que E est un sous-groupe; (8.3) montre qu'il contient les χ pour lesquels $\zeta_\chi \neq 0$; le lemme 8.6 montre enfin que $E = \hat{\mathbb{R}}_{\delta, \nu}$.

8.8. DÉMONSTRATION DE LA SURJECTIVITÉ DE L'APPLICATION

$$(\alpha_c^*)_{\text{irr}}/\mathbb{R}_{\delta, \nu} \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{K}}^1(\mathbb{I}, \mathbb{I})_{0, \text{irr}}/\mathcal{C}^*.$$

En utilisant les notations de 8.3 on doit montrer que si une famille

$$\xi = (\xi^{x_1, x_2}), \chi_1, \chi_2 \in \hat{\mathbb{R}}_{\delta, \nu}, \xi^{x_1, x_2} \in (\alpha_c^*)_{x_1^{-1} x_2}$$

vérifie les deux conditions suivantes :

$$(C) \quad \sum_{x_3} \xi^{x_3, x_2} \wedge \xi^{x_1, x_3} = 0 \quad \forall \chi_1, \chi_2.$$

(C') pour toute partie J de $\hat{\mathbb{R}}_{\delta, \nu}$ distincte de \emptyset et de $\hat{\mathbb{R}}_{\delta, \nu}$, il existe $\chi_1 \in J, \chi_2 \in \hat{\mathbb{R}}_{\delta, \nu} \setminus J$ vérifiant $\xi^{x_1, x_2} \neq 0$ alors il existe des familles $(\zeta_\chi), (u_\chi)$ telles que

$$\zeta_\chi \in (\alpha_c^*)_{\chi}, u_\chi \in \mathbb{C}^*, \xi^{x_1, x_2} = u_{x_1}^{-1} \cdot u_{x_2} \cdot \zeta_{x_1^{-1} x_2}.$$

La démonstration de cette assertion sera divisée en deux lemmes; nous écrirons pour alléger les notations A au lieu de $\hat{\mathbb{R}}_{\delta, \nu}$; $a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$ au lieu de $\chi, \chi_1, \chi_2, \dots$; E au lieu de α_c^* .

8.9. LEMME. — On se donne :

- un groupe A isomorphe à une puissance de \mathbb{Z}_2 ;
- un espace vectoriel complexe de dimension finie E ;
- une décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{a \in A} E_a$ où certains E_a peuvent être nuls;
- une famille $(x_{a,b})$ avec $a, b \in A, x_{a,b} \in E_{ab}$ vérifiant les conditions suivantes :

(C) pour toute partie J de A distincte de \emptyset et de A , il existe $a \in J, b \in A \setminus J$ vérifiant $x_{a,b} \neq 0$

$$(C') \quad \sum_b x_{a,b} \wedge x_{b,c} = 0 \quad \forall a, c \in A.$$

Alors il existe des éléments $y_a \in E_a$ et une fonction complexe f sur $A \times A$ vérifiant les conditions suivantes :

- $x_{a,b} = f(a, b) \cdot y_{ab}$
- $f(a, b) \cdot f(b, c) = f(a, abc) \cdot f(abc, c) \quad \forall a, b, c.$

Démonstration :

(a) On a :

$$(8.4) \quad x_{a,b} \wedge x_{b,a} = 0 \quad \forall a, b.$$

En effet la condition (C') avec $a=c$ donne $\sum_b x_{a,b} \wedge x_{b,a} = 0$; mais $x_{a,b}$ et $x_{b,a}$ appartiennent à E_{ab} et la somme $\sum_b \Lambda^2 E_{ab}$ est directe; d'où l'assertion.

(b) On a

$$(8.5) \quad x_{a,b} \wedge x_{b,c} + x_{a,abc} \wedge x_{abc,c} = 0 \quad \forall a, b, c.$$

En effet si $a=c$ cela résulte de (a); supposons donc $a \neq c$; dans la condition (C') on peut grouper les termes en b et en abc :

$$x_{a,b} \wedge x_{b,c} + x_{a,abc} \wedge x_{abc,c} \in E_{ab} \wedge E_{bc};$$

la somme $\sum_b E_{ab} \wedge E_{bc}$ obtenue en prenant un seul élément de chaque couple (b, abc) est directe; d'où l'assertion.

(c) On a

$$(8.6) \quad x_{a,a} = x_{1,1} \quad \forall a.$$

En effet notons J l'ensemble des a ayant cette propriété et supposons $J \neq A$; d'après la condition (C) il existe $a \in J, c \in A \setminus J$ tels que $x_{a,c} \neq 0$; écrivons (8.5) avec $b=a$:

$$(x_{a,a} - x_{c,c}) \wedge x_{a,c} = 0;$$

$x_{a,a} - x_{c,c}$ et $x_{a,c}$ sont non nuls et appartiennent respectivement à E_1 et E_{ac} , qui ont une intersection nulle; d'où contradiction.

(d) Montrons que pour tout $b \neq 1$ les éléments $x_{a,ab}$ sont tous proportionnels, et en outre tous nuls ou tous non nuls.

Montrons d'abord que $x_{d,bd} = 0$ pour un d implique $x_{a,ab} = 0$ pour tout a ; notons J l'ensemble des a ayant cette propriété et supposons $J \neq A$; il existe $a \in J$ et $c \in A \setminus J$ tels que $x_{a,c} \neq 0$; écrivons (8.5) en remplaçant a, b, c respectivement par a, c, bc :

$$(8.7) \quad x_{a,c} \wedge x_{c,bc} + x_{a,ab} \wedge x_{ab,bc} = 0;$$

comme $a \in J, x_{a,ab} = 0$; comme $c \in A \setminus J, x_{c,bc} \neq 0$; puis $x_{a,c} \in E_{ac}, x_{c,bc} \in E_b$; comme $x_{a,ab} = 0 \neq x_{a,c}$ on a $c \neq ab$, d'où $b \neq ac$, E_{ac} et E_b ont une intersection nulle, $x_{a,c} \wedge x_{c,bc}$ est non nul, ce qui contredit (8.7).

Montrons maintenant que si $x_{1,b}$ est non nul, $x_{a,ab}$ lui est proportionnel pour tout a ; notons J l'ensemble des a ayant cette propriété et supposons $J \neq A$; il existe $a \in J$ et $c \in A \setminus J$ tels que $x_{a,c} \neq 0$; écrivons (8.5) en remplaçant a, b, c respectivement

par a, ab, bc :

$$(8.8) \quad x_{a, ab} \wedge x_{ab, bc} = x_{c, bc} \wedge x_{a, c};$$

d'après (a), $x_{ab, a}$ est proportionnel à $x_{a, ab}$, donc non proportionnel à $x_{c, bc}$, ce qui implique $c \neq ab$, donc $b \neq ac$; E_b et E_{ac} ont une intersection nulle; dans la relation (8.8) $x_{a, ab}$ et $x_{c, bc}$ sont dans E_b et non proportionnels, $x_{ab, bc}$ et $x_{a, c}$ sont dans E_{ac} , $x_{a, c}$ est non nul; cela contredit (8.8).

(e) Posons

$$A_1 = \{a \mid x_{b, ab} \neq 0 \forall b\};$$

pour $a \in A \setminus A_1$ on posera $y_a = 0$, $f(b, ab) = 0 \forall b$; pour $a \in A_1$ on posera $y_a = x_{1, a}$ et on définira $f(b, ab)$ par $x_{b, ab} = f(b, ab) \cdot y_a$; il sera alors clair que f et les y_a vérifieront les conditions de l'énoncé.

8.10. LEMME. — On se donne un groupe A isomorphe à une puissance de Z_2 et une fonction complexe f sur $A \times A$ vérifiant les conditions suivantes :

(C) pour toute partie J de A distincte de \emptyset et de A , il existe $x \in J$ et $y \in A \setminus J$ vérifiant $f(x, y) \neq 0$

$$(Z) \quad f(x, y) \cdot f(y, z) = f(x, xyz) \cdot f(xyz, z) \quad \forall x, y, z \in A.$$

Alors il existe des fonctions complexes g et h sur A vérifiant

$$g(1) = 1, \quad g(x) \neq 0 \quad \forall x, \quad f(x, y) = g(x)^{-1} \cdot g(y) \cdot h(xy).$$

La démonstration est donnée en Appendice.

8.11. DÉMONSTRATION DE LA SURJECTIVITÉ DE L'APPLICATION

$$(i \alpha^*)_{\text{irr}} / \mathbb{R}_{\delta, \nu} \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^1(\mathbb{I}, \mathbb{I})_{0, h, \text{irr}} / \mathcal{C}^u.$$

Du fait que T^1 est \mathbb{C} -linéaire et que $T^1(\xi)$ est hermitien lorsque $\xi \in i \alpha^*$, il résulte que l'on a

$$T^1(\xi)^* = T^1(-\bar{\xi}),$$

puis qu'une famille ξ (avec les notations du lemme 8.3) représente un élément hermitien de $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbb{K}}^1(\mathbb{I}, \mathbb{I})$ si et seulement si l'on a

$$\xi^{x_1 \cdot x_2} = -\overline{\xi^{x_2 \cdot x_1}}.$$

Ensuite, avec les notations du lemme 8.9, si $x_{a, b} = -\overline{x_{b, a}}$ on peut choisir les y_a dans $i \alpha^*$; alors $f(a, b) = \overline{f(b, a)}$; enfin, avec les notations du lemme 8.10, il suffit de montrer que si f vérifie cette relation, g est de module 1 et h est réelle; or on a

$$0 \leq f(x, y) \cdot f(y, x) = h(xy)^2$$

d'où résulte que h est réelle; pour montrer que g est de module 1, on remarque que

$$|g(x)|^{-1} \cdot |g(y)| \cdot |h(xy)| = |f(x, y)| = |f(y, x)| = |g(y)|^{-1} \cdot |g(x)| \cdot |h(xy)|$$

d'où $|g(x)| = |g(y)|$ si $f(x, y) \neq 0$; enfin on applique la condition (C_J) en prenant pour J l'ensemble des x vérifiant $|g(x)| = 1$.

8.12. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3 (v).

En vertu du théorème 1 (ii), tout élément de la forme $T^1(\xi)$ avec $\xi \in \mathfrak{a}_c^*$ s'obtient en dérivant une déformation $U_{P, \delta, \nu(t)}$; alors tout élément de la forme $S \cdot T^1(\xi) \cdot S^{-1}$ avec $S \in \mathcal{C}^*$ s'obtient en dérivant la déformation $S \cdot U_{P, \delta, \nu(t)} \cdot S^{-1}$. Supposons maintenant $\xi \in i\mathfrak{a}^*$; alors on peut prendre $\nu(t) \subset i\mathfrak{a}^*$ et $U_{P, \delta, \nu(t)}$ sera unitaire; enfin on peut supposer S unitaire, alors $S \cdot U_{P, \delta, \nu(t)} \cdot S^{-1}$ est aussi unitaire.

APPENDICE

Démonstration homotopique du lemme 8.10

par J. Soto-Andrade

1. TRADUCTION DU LEMME 8.10 EN TERMES DE GRAPHS DE CAYLEY

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du lemme 8.10.

LEMME 1. — Pour chaque $u \in A$, posons $\Delta_u = \{(x, xu) \mid x \in A\}$. Alors $\text{Supp } f = \bigcup_{u \in S} \Delta_u$,

pour une certaine partie S de A .

Démonstration. — Supposons $f(x_0, x_0 u) \neq 0$. On veut montrer que $f(y, yu) \neq 0$ pour tout $y \in A$. Posons $J = \{z \in A \mid f(z, zu) = 0\}$. Alors $J \not\subseteq A$ car $x_0 \notin J$. Si $J \neq \emptyset$, on aurait, par (C), $f(x, y) \neq 0$ pour $x \in J$, $y \in A - J$ convenable. Mais alors, par (Z), il s'ensuit que

$$0 = f(x, xu) f(xu, yu) = f(x, y) f(y, yu) \neq 0,$$

d'où $J = \emptyset$, comme voulu.

C.Q.F.D.

Notons G_f le graphe d'ensemble de sommets A , dont les arêtes sont les parties à deux éléments $\{x, y\} \subset A$ telles que $f(x, y) \neq 0$. Il est alors clair que l'hypothèse (C) sur f équivaut à chacune des conditions suivantes.

(C') le graphe G_f est connexe;

(C'') la partie S engendre le groupe A .

On peut donc reformuler le lemme 8.10 comme suit.

LEMME 8.10 bis. — Soit A un groupe isomorphe à une puissance de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et S un ensemble générateur de A . Soit f une fonction complexe jamais nulle sur l'ensemble \mathfrak{a}_S des arêtes du graphe de Cayley orienté G_S de A associé à S , telle que

$$(Z) \quad f(x, xu) f(xu, xuv) = f(x, xv) f(xv, xvuv) \quad (x \in A, u, v \in S).$$

Alors il existe une fonction complexe h sur A et une fonction complexe (jamais nulle) g sur S telles que

$$f(x, y) = \frac{g(y)}{g(x)} h\left(\frac{y}{x}\right) \quad ((x, y) \in \alpha_S).$$

Rappelons que le *graphe de Cayley orienté* G_S de A associé à S a pour ensemble de sommets, l'ensemble A , et pour ensemble α_S d'arêtes, l'ensemble des $(x, y) \in A \times A$ tels que $(y/x) \in S$.

Il sera commode de reformuler encore notre lemme à l'aide des notations suivantes.

Pour $a = (x, y) \in \alpha_S$, on appelle *type* de a et l'on note $\tau(a)$, l'élément $(y/x) \in S$. Pour une fonction complexe jamais nulle g sur A , on pose

$$(\partial g)(x, y) = \frac{g(y)}{g(x)} \quad (x, y \in A).$$

On désigne par \mathcal{L} le groupe multiplicatif de toutes les fonctions $f: \alpha_S \rightarrow \mathbb{C}^\times$ vérifiant (Z) et par \mathcal{B} le groupe multiplicatif de toutes les fonctions complexes sur α_S qui sont de la forme $(\partial g) \cdot (h \circ \tau)$, où $g: A \rightarrow \mathbb{C}^\times$ et $h: S \rightarrow \mathbb{C}^\times$.

Il est clair que $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$. Il s'agit de démontrer que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$, d'où $\mathcal{L} = \mathcal{B}$.

2. SCHÉMA DE LA DÉMONSTRATION DE $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

L'idée de la démonstration est de décomposer $f \in \mathcal{L}$ en parties symétrique et antisymétrique, au sens suivant.

Pour toute fonction complexe f jamais nulle sur α_S , on pose

$$\check{f}(x, y) = f(y, x) \quad \left(\frac{y}{x} \in S\right)$$

et

$$f^+ = f \cdot \check{f}, \quad f^- = f \check{f}.$$

Il est clair que si $f \in \mathcal{L}$, alors il en est de même de \check{f}, f^+, f^- et $f^2 = f^+ \cdot f^-$.

Pour $f \in \mathcal{L}$, on établit ci-dessous que $f^+, f^- \in \mathcal{B}$, d'où $f^2 \in \mathcal{B}$. Autrement dit, on prouve que $\mathcal{L}^2 \in \mathcal{B}$. Comme il n'est pas clair a priori que $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$, on remarque que, évidemment, $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}$ et donc que $\mathcal{L}^2 = \mathcal{B}^2$. On est ainsi ramené au cas $f^2 = 1$, où l'on achève la démonstration par une analyse directe, en se ramenant tout d'abord au cas symétrique.

3. DÉMONSTRATION DE : $f \in \mathcal{L} \Rightarrow f^+ \in \mathcal{B}$.

LEMME 2. — Pour tout $f \in \mathcal{L}$, on a

$$f(x, xu) f(xu, x) = f(y, yu) f(yu, y) \quad (x, y \in A, u \in S).$$

Démonstration. — Pour $x \in A$ et $s \in S$ quelconque, on a, par (Z),

$$f(x, xu) f(xu, xus) = f(x, xs) f(xs, xsu)$$

et aussi

$$f(xu, xus) f(xus, xs) = f(xu, x) f(x, xs)$$

d'où

$$\frac{f(x, xu)}{f(xsu, xs)} = \frac{f(xs, xsu)}{f(xu, x)} \quad (x \in A, u, s \in S),$$

c'est-à-dire

$$f(x, xu) f(xu, x) = f(xs, xsu) f(xsu, xs) \quad (x \in A, u, s \in S).$$

Comme tout $y \in A$ s'écrit $y = xs_1 \dots s_m$ pour $s_1, \dots, s_m \in S$ convenables, le lemme s'ensuit aussitôt.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. — Pour tout $f \in \mathcal{L}$, on a

$$f^+ = h \circ \tau$$

pour une fonction $h: S \rightarrow \mathbb{C}^\times$ convenable. En particulier $f^+ \in \mathcal{B}$.

4. DÉMONSTRATION DE : $f \in \mathcal{L} \Rightarrow f^- \in \mathcal{B}$.

DÉFINITION. — Si $\gamma = (x_1, \dots, x_n)$ (où $(x_i, x_{i+1}) \in \alpha_S$, $1 \leq i \leq n-1$) est un chemin quelconque dans le graphe de Cayley G_S et φ est une fonction complexe sur α_S , on pose

$$\tilde{\varphi}(\gamma) = \varphi(x_1, x_2) \varphi(x_2, x_3) \dots \varphi(x_{n-1}, x_n).$$

Remarque. — Pour $f \in \mathcal{L}$ on a

$$\tilde{f}(x, xu, xuv) = \tilde{f}(x, xv, xvu) \quad (x \in A, u, v \in S),$$

ce qui peut s'interpréter comme une propriété d'invariance par certaines déformations de chemins. Cette propriété suffit en fait à entraîner des propriétés d'invariance plus générales (cf. lemmes ci-dessous).

LEMME 3. — Soient $s_1, s_2, \dots, s_m \in S$ tels que $s := s_1 \dots s_m \in S$ et soit $\varphi \in \mathcal{L}$. Alors on a, quel que soit $x \in A$,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, xs_1, xs_1 s_2, \dots, xs, x) &= \tilde{\varphi}(xs_1 \dots s_i, xs_1 \dots s_{i+1}, \dots, xs_1 \dots s_{i-1}) \\ &= \tilde{\varphi}(xs, xs_2 \dots s_m, \dots, x, xs) \end{aligned}$$

pour $1 \leq i \leq m$.

Démonstration. — Il suffit de remplacer successivement le facteur $\tilde{\varphi}(xs, x, xs_1)$ par $\tilde{\varphi}(xs, xs_2 \dots s_m, xs_1)$, $\tilde{\varphi}(xs_2 \dots s_m, xs_1, xs_1 s_2)$ par $\tilde{\varphi}(xs_2 \dots s_m, xs_3 \dots s_m, xs_1 s_2)$, et ainsi

de suite, jusqu'à $\tilde{\varphi}(xs_m, xs_1 \dots s_{m-1}, xs)$ par $\tilde{\varphi}(xs_m, x, xs)$, à l'aide de la propriété (Z).

C.Q.F.D.

LEMME 4. — Soient $s_1, \dots, s_m \in S$ tels que $s := s_1 \dots s_m \in S$ et $\varphi \in \mathcal{Z}$. Alors on a

$$\tilde{\varphi}(x, xs_1, xs_1 s_2, \dots, xs, x) = \tilde{\varphi}(x, xs, xs_1 \dots s_{m-1}, \dots, xs_1, x)$$

quel que soit $x \in A$.

Démonstration. — D'après le lemme 3, on a

$$\tilde{\varphi}(x, xs_1, \dots, x) = \tilde{\varphi}(x, xs, xs_2 \dots s_m, \dots, xs_m, x).$$

Or, par des applications successives de (Z), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(xs, xs_2 \dots s_m, xs_3 \dots s_m, xs_m, x) &= \varphi(xs, xs_1 \dots s_{m-1}, xs_2 \dots s_{m-1}, \dots, xs_{m-1}, x) \\ &= \tilde{\varphi}(xs, xs_1 \dots s_{m-1}, xs_1 \dots s_{m-2}, xs_2 \dots s_{m-2}, \dots, xs_{m-2}, x) \\ &= \tilde{\varphi}(xs, xs_1 \dots s_{m-1}, xs_1 \dots s_{m-2}, \dots, xs_1, x). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

LEMME 5. — Pour $f \in \mathcal{Z}$, la fonction \tilde{f}^- vaut 1 sur tous les lacets du graphe G_S et par conséquent, pour tout $x, y \in A$, $\tilde{f}^-(\gamma) = \tilde{f}^-(\gamma')$ quels que soient les chemins γ et γ' joignant x à y dans G_S .

Démonstration. — Le lemme 4 montre que si $\delta = (x_0, x_1, \dots, x_m, x_0)$ est un lacet dans G_S , alors $f(\delta) = f(\tilde{\delta})$, où $\tilde{\delta}$ désigne le lacet opposé à δ , autrement dit

$$f(x_0, x_1) f(x_1, x_2) \dots f(x_m, x_0) = f(x_0, x_m) \dots f(x_2, x_1) f(x_1, x_0),$$

c'est-à-dire

$$\tilde{f}^-(\delta) = f^-(x_0, x_1) f^-(x_1, x_2) \dots f^-(x_m, x_0) = 1,$$

comme voulu. Enfin, si γ et γ' sont deux lacets dans G_S joignant x à y , il suffit de remarquer que $\delta = \gamma' \tilde{\gamma}$ est un lacet en x et par conséquent

$$1 = \tilde{f}^-(\gamma' \tilde{\gamma}) = \tilde{f}^-(\gamma') \tilde{f}^-(\tilde{\gamma}) = \tilde{f}^-(\gamma') (\tilde{f}^-(\gamma))^{-1}.$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. — Pour $f \in \mathcal{Z}$, on a $f^- = \partial g$, où $g: A \rightarrow C^\times$ est définie par

$$g(x) = \tilde{f}^-(\gamma) \quad (x \in A),$$

où γ est un chemin quelconque dans G_S joignant l'élément neutre e de A à x .

En effet, il suffit de remarquer que, g étant bien définie en vertu du lemme 5, on a, pour $(x, y) \in a_S$ et un chemin quelconque $\gamma = (e, \dots, x)$ joignant e et x dans G_S ,

$$\tilde{f}^-(e, \dots, x, y) = \tilde{f}^-(x, y),$$

c'est-à-dire

$$g(y) = g(x) f^{-}(x, y),$$

comme annoncé.

5. RÉDUCTION OU CAS $f^2 = 1$.

Si $f \in \mathcal{L}$, on a, d'après les corollaires ci-dessus,

$$f^2 = f^+ \cdot f^- = (h \circ \tau) \cdot (\partial g),$$

pour $h: S \rightarrow \mathbf{C}^\times$ et $g: A \rightarrow \mathbf{C}^\times$ convenables.

Comme évidemment h (resp. g) admet une racine carrée h' (resp. g'), on a $f = [(h' \circ \tau) \cdot (\partial g')]. \varepsilon$, où $\varepsilon: \alpha_S \rightarrow \{\pm 1\}$ et $\varepsilon \in \mathcal{L}$.

Pour prouver que $f \in \mathcal{B}$, il suffit donc de vérifier que $\varepsilon \in \mathcal{B}$. On est ainsi ramené au cas $f \in \mathcal{L}$, $f^2 = 1$.

6. RÉDUCTION AU CAS $f^2 = 1$ et $f = \tilde{f}$.

Soit $f \in \mathcal{L}$, $f^2 = 1$. D'après le lemme 2, on aura

$$f(y, x) = \varepsilon_f \left(\frac{y}{x} \right) f(x, y)$$

pour toute arête $(x, y) \in \alpha_S$, où le signe $\varepsilon_f(y/x)$ ne dépend donc que du type $(y/x) \in S$ de l'arête (x, y) .

LEMME 6. — Fixons une base B de A contenue dans S . Alors pour chaque $b \in B$ il existe une fonction $\varphi_b \in \mathcal{B}$, $(\varphi_b)^2 = 1$, telle que ε_{φ_b} vaut -1 sur tous les éléments de S dont l'expression réduite relative à la base B contient b et vaut 1 ailleurs; en particulier $\varepsilon_{\varphi_b}(b') = 1$ pour $b' \neq b$ ($b' \in B$).

Démonstration. — On pose $\varphi_b := (\partial g_b) \cdot (h_b \circ \tau)$, où g_b (resp. h_b) est la fonction complexe sur A (resp. S) qui vaut i sur les $x \in A$ (resp. $s \in S$) dont l'expression réduite par rapport à B contient b , et vaut 1 ailleurs.

C.Q.F.D.

LEMME 7. — Si $f \in \mathcal{L}$, $f^2 = 1$, alors il existe $\varphi \in \mathcal{B}$, $\varphi^2 = 1$, telle que $f' := f \cdot \varphi$ soit symétrique.

Démonstration. — On pose $\varphi = \prod_{b \in B_{\tilde{f}}} \varphi_b$, où

$$B_{\tilde{f}} = \{b \in B \mid \varepsilon_f(b) = -1\}.$$

Il est clair que $\varepsilon_{f'}(b) = \varepsilon_f(b) \varepsilon_{\varphi}(b) = \varepsilon_f(b) \prod_{b' \in B_{\tilde{f}}} \varepsilon_{\varphi_{b'}}(b) = 1$, pour tout $b \in B$. Montrons

maintenant que $\varepsilon_{f'}(s) = 1$ pour tout $s \in S$.

Soit $s = b_1 \dots b_m \in S$. Considérons le lacet $\gamma = (e, b_1, b_1 b_2, \dots, b_1 \dots b_{m-1}, s, e)$ en $e \in A$. D'après le lemme 4, on a $\tilde{f}'(\gamma) = \tilde{f}'(\tilde{\gamma})$, c'est-à-dire

$$f'(e, b_1) f'(b_1, b_1 b_2) \dots f'(s, e) = f'(e, s) f'(s, b_1 \dots b_{m-1}) \dots f'(b_1, e);$$

comme $\varepsilon_{f'}(b) = 1$ quel que soit $b \in B$, il s'ensuit que $f'(s, e) = f'(e, s)$, d'où $\varepsilon_{f'}(s) = 1$, comme voulu.

C.Q.F.D.

On est ainsi ramené au cas $f \in Z, f^2 = 1, f = \tilde{f}$.

7. DÉMONSTRATION DE : $f \in \mathcal{L}, f^2 = 1, f = \tilde{f} \Rightarrow f \in \mathcal{B}$.

Soit donc $f \in \mathcal{L}$, à valeurs 1 ou -1 , telle que $f(y, x) = f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \alpha_S$.

Considérons le graphe de Cayley G_B de A associé à la base B de A . Des applications successives de la propriété (Z) entraînent aussitôt que, pour $x, y \in A$, on a

$$\tilde{f}(\gamma) = \tilde{f}(\gamma')$$

quels que soient les chemins γ et γ' joignant x à y dans G_B .

LEMME 8. — Il existe $g : A \rightarrow C^\times$ telle que $f \cdot (\partial g)^{-1}$ vaut 1 sur le sous-ensemble α_B de α_S .

Démonstration. — Il suffit de poser

$$g(x) = \tilde{f}(\gamma) \quad (x \in A),$$

où γ est un chemin quelconque dans α_B joignant e à x . Alors f et ∂g coïncident sur α_B .

C.Q.F.D.

On est ainsi ramené au cas où $f = 1$ sur α_B .

LEMME 9. — Soit $f \in \mathcal{L}$ telle que $f^2 = 1, f = \tilde{f}$ et $f = 1$ sur α_B . Alors $f = h \circ \tau$, où $h : S \rightarrow C^\times$.

Démonstration. — Soient $s \in S$ et $x \in A$. On a à montrer que $f(e, s) = f(x, xs)$. Or $x = b_1 \dots b_m$, pour $b_1, \dots, b_m \in B$ convenables. A l'aide de (Z), on obtient

$$\begin{aligned} f(e, b_1) f(b_1, b_1 s) &= f(e, s) f(s, sb_1) \\ f(b_1, b_1 b_2) f(b_1 b_2, b_1 b_2 s) &= f(b_1, b_1 s) f(b_1 s, b_1 sb_2) \\ &\vdots \\ f(b_1 \dots b_{m-1}, x) f(x, xs) &= f(b_1 \dots b_{m-1}, b_1 \dots b_{m-1} s) f(b_1 \dots b_{m-1} s, xs), \end{aligned}$$

d'où

$$f(e, s) = f(b_1, b_1 s) = f(b_1 b_2, b_1 b_2 s) = \dots = f(x, xs),$$

puisque $f = 1$ sur α_B .

C.Q.F.D.

On a ainsi achevé la démonstration de $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOREL et N. WALLACH, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups and Representations of Reductive Groups* (*Ann. Math. Studies*, vol. 94, 1980).
- [2] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitre 5.
- [3] F. du CLOUX, *Extensions entre représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie nilpotents* (*Astérisque*, vol. 124-125, 1985).
- [4] F. du CLOUX, *Jets de fonctions différentiables sur le dual d'un groupe de Lie nilpotent* (*Invent. Math.*, t. 88, 1987, p. 375-394).
- [5] L. CLOZEL et P. DELORME, *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs*, II (à paraître).
- [6] P. DELORME, *Homomorphismes de Harish-Chandra liés aux K-types minimaux des séries principales généralisées des groupes de Lie réductifs connexes* (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 17, 1984, p. 117-156).
- [7] P. DELORME, *Self-extensions de modules de Harish-Chandra irréductibles, et une question de I. M. Gelfand* (*Astérisque*, vol. 124-125, 1985).
- [8] P. DELORME, *Formules limites et formules asymptotiques pour les multiplicités dans $L^2(G/\Gamma)$* (*Duke Math. J.*, t. 53, 1986, p. 691-731).
- [9] A. GUICHARDET, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie* (C.E.D.I.C., 1980).
- [10] A. GUICHARDET, *Représentations de longueur finie des groupes de Lie inhomogènes* (*Astérisque*, vol. 124-125, 1985).
- [11] A. GUICHARDET, *Méthode des orbites pour les représentations de longueur finie* (*Invent. Math.*, t. 85, 1986, p. 199-215).
- [12] A. GUICHARDET, *Méthode des orbites pour les représentations de longueur finie*, II (*Bull. Soc. Math. France*, t. 115, 1987, p. 197-210).
- [13] A. GUICHARDET, *Représentations de longueur finie et géométrie différentielle sur \hat{G}* (exposé au Colloque J. Braconnier, Lyon, 1986).
- [14] A. GUICHARDET, *Groupes Ext^1 et déformations des représentations des groupes de déplacements* (*C.R. Acad. Sci.*, t. 305, 1987, p. 323-325).
- [15] H. HECHT et W. SCHMID, *Characters, Asymptotics and n -Homology of Harish-Chandra Modules* (*Acta Math.*, t. 151, 1983, p. 49-151).
- [16] A. KNAPP, *Representation Theory of Semi-Simple Groups* (Princeton Univ. Press, 1986).
- [17] J. LUDWIG, *On the Behaviour of Sequences in the Dual of a Nilpotent Lie Group* (à paraître).
- [18] D. VOGAN, *Representations of Real Reductive Groups* (Birkhäuser, 1981).
- [19] A. WASSERMANN, *Une démonstration de la conjecture de Connes-Kasparov pour les groupes de Lie linéaires connexes réductifs* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 29 mai 1987,
révisé le 12 avril 1988).

A. GUICHARDET,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
91128 Palaiseau.