ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. BEN AROUS

Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cut-locus

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 21, nº 3 (1988), p. 307-331

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_3_307_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 21, 1988, p. 307 à 331.

DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOYAU DE LA CHALEUR HYPOELLIPTIQUE HORS DU CUT-LOCUS

PAR G. BEN AROUS

Introduction

Nous allons dans cet article étudier le comportement asymptotique en temps petit du noyau de la chaleur associé à un opérateur hypoelliptique, et généraliser les résultats (relatifs au cas où l'opérateur est elliptique) de Molchanov [17] et d'Azencott [3] et [4], et nous prouverons une conjecture de Bismut [8].

Si l'on considère un opérateur : $L = 1/2 \sum_{1 \leqq i \leqq m} X_i^2 + X_0$, où les X_i sont des champs de vecteurs infiniment différentiables sur $\mathbb{R}^d$ satisfaisant l'hypothèse forte d'hypoellipticité de Hormander (*i.e.* $\dim \operatorname{Lie}(X_1, \ldots, X_m)(x) = d$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$), le problème du comportement asymptotique du noyau de la chaleur $p_t(x, y)$ associé à L est encore largement ouvert.

Récemment Léandre [14], [15] a généralisé les résultats de Varadhan [19] et montré que :

$$(0.1) \qquad \lim_{t \to 0} t \log p_t(x, y) = -1/2\, d^2(x, y)$$

où $d(x, y)$ désigne la métrique de Carnot-Carathéodory associée à L.

Nous obtenons ici le développement asymptotique complet :

$$(0.2) \quad p_t(x, y) = t^{-d/2} \exp(-d^2(x, y)/2t)(c_0(x, y) + tc_1(x, y) + \ldots + t^n c_n(x, y) + O(t^{n+1}))$$

sous l'hypothèse que les points x et y sont hors du cut-locus, c'est-à-dire qu'ils sont joints par une unique géodésique minimisante, que cette géodésique est la projection d'une bicaractéristique et qu'ils sont non conjugués le long de cette géodésique.

Ce résultat recouvre le résultat connu pour des points hors du cut-locus dans le cas où l'opérateur L est elliptique, puisqu'alors toute géodésique est projection d'une bicaractéristique. Il contient aussi le résultat de Léandre [16] obtenu en utilisant la méthode proposée par Bismut.

Enfin, nous donnons une majoration suffisamment précise du reste dans ce développement pour obtenir aussi des développement asymptotiques des dérivées en (t, x, y) de $p_t(x, y)$, ce qui permet de vérifier que les coefficients du développement asymptotique sont bien solution des équations de transport liées naturellement au problème.

La preuve utilise essentiellement les résultats de grandes déviations, la méthode de Laplace pour les diffusions dégénérées (Ben Arous [6]) et l'intégration par parties du calcul de Malliavin. Elle est nouvelle, y compris dans le cas où L est elliptique. En effet le résultat est directement obtenu pour des points hors du cut-locus éventuellement lointains, et non pas pour des points proches puis propagé aux points lointains par la relation de semi-groupe. Cette dernière approche semble en effet difficile dans le cas où L est dégénéré.

La méthode utilisée ici revient à obtenir un développement asymptotique de la transformée de Fourier du noyau de la chaleur convenablement localisé, *i.e.* multiplié par une fonction $\exp(-F/t)$. L'obtention de ce développement asymptotique est fondée sur une méthode de Laplace où l'hypothèse de non-conjugaison (*i.e.* le fait que la géodésique est un point de minimum non dégénéré de l'énergie) joue le rôle crucial. Ensuite on effectue une inversion de Fourier en intégrant ce développement asymptotique. Ici le lemme d'intégration par parties du Calcul de Malliavin permet cette inversion de Fourier en raison de l'inversibilité de la matrice de Malliavin déterministe.

Nous commençons, dans la première partie, par rappeler les résultats nécessaires (dus à Bismut [8]) sur la géométrie associée à L. En particulier, nous introduisons un cut-locus hypoelliptique (définitions 1.20 et 1.28) qui généralise le cut-locus elliptique (*cf.* théorème 1.21) et sur le complémentaire duquel le développement asymptotique sera valable.

La seconde partie est consacrée à la méthode de Laplace, c'est-à-dire à l'estimation lorsque t tend vers 0 de $\int e^{-f(y)/t} p_t(x, y)\, dy$, et à la traduction des résultats abstraits de [6] dans le contexte utile ici.

Enfin la troisième partie est consacrée à l'énoncé précis des résultats et à la preuve proprement dite.

Remarquons, pour conclure, que le résultat obtenu ne concerne pas le développement du noyau de la chaleur sur la diagonale puisque, comme Bismut l'a remarqué, le couple (x, x) est dans le cut-locus dès que L n'est pas elliptique au voisinage de x. Néanmoins la méthode employée ici est transposable, moyennant l'utilisation du relèvement de Rotschild-Stein [18] et de l'étude explicite des diffusions invariantes sur un groupe nilpotent (*cf.* Gaveau [10] et Ben Arous [5]). Pour cela nous renvoyons à Ben Arous [7] et Léandre [16].

Je tiens à remercier R. Azencott pour son soutien constant et amical.

I. Rappels sur la géométrie hypoelliptique

I. 1. La distance dans le cadre hypoelliptique

Soient $X_1, \ldots, X_m$ m champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$, C^∞ bornés à dérivées bornées, tels que l'algèbre de Lie engendrée par les X_i soient de rang maximal en tout point :

$$\text{Lie}(X_1, \ldots, X_m)(x) = \mathbb{R}^d \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.1}$$

Sur le fibré cotangent $T^* \mathbb{R}^d$ on introduit le hamiltonien :

$$\mathscr{H}(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \langle X_i(x), p \rangle^2 \tag{1.2}$$

et sa transformée de Legendre, ou le Lagrangien associé :

$$\frac{1}{2} Q^*(x, v) = \sup(\langle v, p \rangle - \mathscr{H}(x, p),\ p \in T_x^* \mathbb{R}^d) \tag{1.3}$$

pour $v \in T_x \mathbb{R}^d$.

On définit alors la fonctionnelle d'action (ou d'énergie ou de Cramer) sur l'espace $\mathscr{C} = C([0, 1], \mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ par :

$$\begin{aligned} \Lambda(\varphi) &= +\infty \quad \text{si} \quad \varphi \notin H_1([0, 1], \mathbb{R}^d) \\ \Lambda(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_0^1 Q^*(\varphi_s, \mathring{\varphi}_s)\, ds \quad \text{si} \quad \varphi \in H_1([0, 1], \mathbb{R}^d). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Rappelons que $\Lambda(\varphi)$ peut être infini même si $\varphi \in H_1([0, 1], \mathbb{R}^d)$.

Enfin, on définit la fonction d par :

$$\frac{1}{2} d^2(x, y) = \inf(\Lambda(\varphi),\ \varphi \in \mathscr{C},\ \varphi_0 = x \text{ et } \varphi_1 = y). \tag{1.5}$$

On peut décrire Λ et d au moyen de la norme $\|h\|_1 = \int_0^1 |\mathring{h}_s|^2\, ds$ de l'espace $H_1 = H_1([0, 1], \mathbb{R}^m)$ et de l'équation différentielle, définie pour $h \in H_1$ par :

$$\begin{aligned} dx_t &= \sum_{i=1}^{m} X_i(x_t)\, dh_t^i \\ x_0 &= x \end{aligned} \tag{1.6}$$

En effet notons $\varphi_t^h(x)$ l'unique solution de (1.6), on a alors :

$$\Lambda(\varphi) = \inf\left(\frac{1}{2} \|h\|_1^2,\ h \in H_1 \text{ et } \varphi^h(x) = \varphi\right) \tag{1.7}$$

et si $\Lambda(\varphi) < \infty$, cet infimum est atteint en un unique $h \in H_1$. (*Voir* [1] proposition (2.10) et [6] théorème 1.)

On définit ensuite l'ensemble $K_x^y \subset H_1$ des chemins joignant x et y par :

$$K_x^y = \{h \in H_1,\ \varphi_1^h(x) = y\}. \tag{1.8}$$

Regroupons ici certains résultats nécessaires pour la suite :

THÉORÈME (1.9):

1) *Si h^n converge faiblement vers h, φ^{h_n} converge vers φ^h uniformément sur* [0, 1] *pour la topologie* C_K^∞.

2) $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^d$ $\qquad \mathrm{K}_x^y \neq \varnothing$

$$\frac{1}{2} d^2(x, y) = \inf\left(\frac{1}{2}\|h\|_1^2,\ h \in \mathrm{K}_x^y\right)$$

et cet infimum est atteint.

3) *d est une distance sur $\mathbb{R}^d$; d est continue.*

4) *Les boules fermées de d sont compactes.* ($\mathbb{R}^d$, d) *est donc un espace métrique complet.*

Les assertions 1), 2) et 3) sont tirées de Bismut [8] (théorèmes 1.1 p. 20 et 1.14 p. 35). Le 4) en est une conséquence simple. En effet : soit $r > 0$ et x, $y_n \in \mathbb{R}^d$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $d(x, y_n) \leqq r$, alors par le 2) on sait qu'il existe $h_n \in \mathrm{K}_x^{y_n}$ tel que $\|h_n\|_1 = d(x, y_n) \leqq r$. Une sous suite $h_{n'}$ de h_n converge donc faiblement vers un $h \in \mathrm{H}_1$, d'où l'on déduit par le 1) que $y_{n'} = \varphi_1^{h_{n'}}(x)$ converge vers $\varphi_1^h(x) = y$ avec $d(x, y) \leqq \|h\|_1 \leqq r$.

Ce qui montre que la boule $\{y,\ d(x, y) \leqq r\}$ est compacte.

Remarque. — Il est important de supposer les champs X_i bornés pour cette propriété 4). Dans le cas où L est elliptique cela permettrait de minorer uniformément la métrique et donc d'obtenir 4) très simplement. Le 4) du théorème 1 montre que dans le cadre étudié ici on ne rencontrera pas les difficultés (classiques déjà dans le cas où L elliptique (*cf.* Azencott [4] p. 131)) liées au passage des estimations locales aux estimations globales pour les asymptotiques du noyau de la chaleur. En effet ces difficultés disparaissent sur une variété complète.

I.2. La variété des chemins joignant deux points

Introduisons l'hypothèse :

$$\frac{\partial}{\partial h}\varphi_1^h(x) \text{ est de rang maximal (à savoir } d\text{) en } h \in \mathrm{K}_x^y \tag{1.10}$$

(1.10) est équivalente à l'hypothèse de non dégénérescence de la forme quadratique définie sur $\mathrm{T}_x^* \mathbb{R}^d$ par :

$$\langle \mathrm{C}_1^{h,x} p, p \rangle = \sum_{i=1}^m \int_0^1 \langle \varphi_s^{h^*-1} \mathrm{X}_i(x), p \rangle^2 \, ds \tag{1.11}$$

que Bismut a introduite (*cf.* [8], définition 1.2, p. 21) et appelée matrice de Malliavin déterministe associée à h.

Rappelons que dans le cas où L est elliptique cette hypothèse est toujours vérifiée. On a alors, toujours d'après [8], théorème 1.19 p. 44 :

Théorème 1.12. — *Si $h \in \mathrm{K}_x^y$ est tel que $\mathrm{C}_1^{h,x}$ est inversible, on a :*

1) *Il existe un voisinage V de h dans H_1, tel que : $\mathrm{K}_x^y \cap \mathrm{V}$ est une sous-variété de H_1.*

2) *L'espace tangent $\mathrm{T}_h(\mathrm{K}_x^y \cap \mathrm{V})$ est égal à $\mathrm{Ker}(\partial/\partial h)\,\varphi_1^h(x)$.*

3) *Si l'on introduit l'application linéaire ρ_h de $\mathrm{T}_x^* \mathbb{R}^d$ dans H_1 par :*

$$\rho_h(p) = \left(\int_0^{\cdot} \langle \varphi^{h^*-1} \mathrm{X}_1(x), p \rangle \, ds, \ \ldots, \ \int_0^{\cdot} \langle \varphi^{h^*-1} \mathrm{X}_m(x), p \rangle \, ds\right).$$

On a $H_1 = \operatorname{Ker}(\partial/\partial h)\, \varphi_1^h(x) \oplus \operatorname{Im} \rho_h$ *et cette décomposition est orthogonale.*

Le cadre naturel pour l'étude des géodésiques est celui où K_x^y est une variété au moins au voisinage d'une géodésique. D'où l'intérêt de l'hypothèse (1.10). Nous allons donner ici une condition suffisante pour assurer cette hypothèse.

LEMME (1.13). — *Soit* h_0 *un élément de* H_1 *tel que* $\partial/\partial h\, \varphi_1^h(x)$ *soit de rang constant pour* h *voisin de* h_0, *alors* $\partial/\partial h\, \varphi_1^h(x)$ *est de rang maximal en* h_0 *(et donc au voisinage de* h_0*).*

Preuve. — Par Léandre [15] (*voir* le théorème 1.2 et la remarque suivant le théorème 2.1 de [15]), on sait que l'ensemble des h de H_1 tels que $\partial/\partial h\, \varphi_1^h(x)$ soit de rang maximal est dense dans H_1. Ceci suffit clairement à la preuve du lemme 1.13.

I.3. BICARACTÉRISTIQUES ET GÉODÉSIQUES

A l'hamiltonien $\mathscr{H}$ défini en (1.2) on associe le champ de vecteur hamiltonien

$$Y = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial p} \\ -\dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial x} \end{pmatrix} \text{ sur } T^* \mathbb{R}^d.$$

et on note $\psi_t(x, p)$ le flot associé.

Si $p \in T_x^* \mathbb{R}^d$ définissons $h(p) \in H_1$ par :

$$\dot{h}_t^i(p) = H_i(\psi_t(x, p)) \quad \text{avec} \quad H_i(x, p) = \langle p, X_i(x) \rangle. \tag{1.14}$$

On sait alors que (*cf.* [8], proposition 1.16 p. 37 et théorème 1.17 p. 38) :

THÉORÈME (1.15):

1) $\psi_t(x, p) = (\varphi_t^{h(p)}(x), \varphi_t^{h(p)*} p)$.

2) *Si* $h_0 \in K_x^y$ *est minimisante : i.e.* $\| h_0 \|_1 = d(x, y)$ *et si* $C_1^{h_0, x}$ *est inversible, alors il existe un unique* $p_0 \in T_x^* \mathbb{R}^d$ *tel que :*

$$\varphi_t^{h_0}(x) = \pi \psi_t(x, p_0) \qquad 0 \leqq t \leqq 1 \tag{1.16}$$

où π *désigne la projection de* $T^* \mathbb{R}^d$ *sur* $\mathbb{R}^d$.

Ce résultat permet de décrire géométriquement l'hypothèse de non conjugaison de deux points le long d'une géodésique :

DÉFINITION (1.17). — *Sous les hypothèses du* 2) *du théorème* (1.15), *on dira que* x *et* y *sont non conjugués le long de* h_0 *si et seulement si :*

h_0 *est un minimum non dégénéré de* $1/2 \| \cdot \|_1^2$ *sur la variété* K_x^y.

Remarquons que (1.17) a bien un sens car h_0 est un point critique de $1/2 \| \cdot \|_1^2$ sur K_x^y.

On a alors comme dans le cas où L est elliptique (*cf.* [8], définition 1.25 p. 50).

THÉORÈME (1.18). — *Sous les hypothèses du* 2) *du théorème* 1.15 x *et* y *sont non conjugués le long de* h_0 *si et seulement si :*

(1.19) $(\partial/\partial p)\,\pi\psi_1(x, p_0)$ *est inversible* (*où* p_0 *est défini en* 1.16).

DÉFINITION (1.20). — *On dira que* (x, y) *n'est pas dans le cut-locus si :*

(*a*) *Il existe un unique* $h_0 \in K_x^y$ *tel que* $d(x, y) = \|h_0\|_1$.

(*b*) $C_1^{h_0, x}$ *est inversible.*

(*c*) x *et* y *sont non conjugués le long de* h_0.

Cette définition coïncide avec celle du cut-locus usuel dans le cas elliptique, puisqu'alors (*b*) est toujours vérifiée.

On a alors le théorème de régularité de la distance sur le complémentaire du cut-locus dû à Bismut ([8] théorème 1.26 et remarque 11).

THÉORÈME (1.21):

1) *Le cut-locus est fermé dans* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

2) $d^2(x, y)$ *est une fonction* C^∞ *sur le complémentaire du cut-locus.*

3) *Si* (x_0, y_0) *n'est pas dans le cut-locus : il existe un voisinage* $U \times V$ *de* (x_0, y_0) *et une application* C^∞ : $h : (x, y) \to h(x, y)$ *de* $U \times V$ *dans* H_1, *telle que* $h(x, y)$ *soit l'unique élément* h *de* K_x *tel que* $\|h\|_1 = d(x, y)$.

i.e. La géodésique varie de façon C^∞ *en fonction de ses extrémités.*

Remarques sur la définition du cut-locus : on peut affaiblir la condition (*b*) dans la définition (1.20) :

LEMME (1.22). — *Dans la définition* (1.20) *on peut remplacer la condition* (*b*) *par :*

(*b'*) $C_1^{h, x}$ *est de rang constant pour* h *voisin de* h_0.

En effet la condition (*b*) implique (*b'*) de façon évidente, et (*b'*) implique (*b*) en vertu du lemme (1.13). On peut aussi donner une définition plus géométrique du cut-locus :

LEMME (1.23). — (x, y) *n'appartient pas au cut-locus si et seulement si :*

(*a*) *Il existe un unique* $\varphi \in \mathscr{C}$ $\varphi(0) = x$ *et* $\varphi(1) = y$ *telle que :*

$$\Lambda(\varphi) = \frac{1}{2} d^2(x, y).$$

(*b*) *Cette courbe est la projection d'une unique bicaractéristique i.e.*

$$\exists\, !\, p_0 \in T_x^* \mathbb{R}^d : \varphi_t = \pi\psi_t(x, p_0) \qquad 0 \leqq t \leqq 1.$$

(*c*) $\partial_p \pi\psi_1(x, p_0)$ *est inversible.*

En effet par (1.7) le (*a*) montre qu'il existe un unique $h_0 \in K_x^y$ tel que $d(x, y) = \|h_0\|_1$. Il suffit de démontrer que $C_1^{h_0, x}$ est inversible pour montrer que la définition 1.28 implique les propriétés (*a*), (*b*) (*c*) de (1.20). Or par le 1) du théorème 1.15, on a : $\pi\psi_t(x, p) = \varphi_t^{h(p)}(x)$, d'où

$$\frac{\partial}{\partial p} \pi\psi_1(x, p) = \frac{\partial}{\partial h}[\varphi_1^{h(p)}(x)] \cdot \frac{\partial h(p)}{\partial p}$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial p}\pi\psi_1(x, p_0)(T_x^*\mathbb{R}^d) \subset \frac{\partial}{\partial h}(\varphi_1^{h_0}(x)).(H_1) \subset \mathbb{R}^d.$$

Par l'hypothèse (*c*) le terme de gauche de cette inclusion est de rang d il est donc de même de celui de droite ce qui montre que $C_1^{h_0, x}$ est inversible.

Enfin il est clair que réciproquement les propriétés (*a*), (*b*) et (*c*) de (1.20) impliquent (*a*), (*b*) et (*c*) dans (1.23).

II. Méthode de Laplace

II.1. Le théorème de développement asymptotique

Considérons la diffusion X^ε sur $\mathbb{R}^d$ issue de x_0 de générateur $\varepsilon^2 L$ avec $L = 1/2 \sum_{i=1}^{m} X_i^2 + X_0$, où X_0 est aussi un champ de vecteur C^∞ borné à dérivées bornées sur $\mathbb{R}^d$. X^ε est la solution de l'équation de Stratonovich suivante, où W désigne un mouvement brownien m-dimensionnel.

$$(2.1) \qquad dX_t^\varepsilon = \varepsilon \sum_{i=1}^{m} X_i(X_t^\varepsilon).dW_t^i + \varepsilon^2 X_0(X_t^\varepsilon).dt$$

$$X_0^\varepsilon = x_0$$

Soit F une fonction C^∞, bornée sur $\mathbb{R}^d$ telle que :

(2.2) $a = \inf(F(\varphi_1^h(x_0) + (1/2)\|h\|_1^2, h \in H_1)$ soit atteint en un nombre fini de points $h_1, \ldots, h_n \in H_1$

et

(2.3) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ h_i est un minimum non dégénéré de $h \to F(\varphi_1^h(x_0)) + (1/2)\|h\|_1^2$.

On sait alors (*cf.* [6] théorème 2) que :

Théorème (2.4). — *Si f est une fonction C^∞ bornée sur $\mathscr{C}$, on a pour tout $N \geqq 0$ le développement asymptotique :*

$$E(f(X^\varepsilon)e^{-F(X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2}) = e^{-a/\varepsilon^2}(\alpha_0 + \varepsilon^2\alpha_2 + \ldots + \varepsilon^{2N}\alpha_{2N} + O(\varepsilon^{2N+2}))$$

où les α_j peuvent être décrits explicitement sous la forme :

$$\alpha_j = E(W_j e^Z) \qquad \textit{avec} \quad W_j \in \bigoplus_{i=0}^{j} H_j \quad \textit{et} \quad Z \in \bigoplus_{i=0}^{2} H_j$$

où H_j désigne le j-ième *chaos de Wiener.*

Ce théorème est une conséquence évidente du théorème 2 de [6], en prenant une fonction F qui ne dépend que du point final de la diffusion. En fait il est vrai sans aucune hypothèse d'hypoellipticité.

Les hypothèses (2.2) et (2.3) sont de nature « globale » *i.e.* elles ne portent pas uniquement sur un problème variationnel de dimension finie sur F. Dans les paragraphes suivants nous allons étudier la signification de ces hypothèses et les ramener dans les bons cas à des problèmes de dimension finie.

II.2. Diverses formulations du problème variationnel (2.2)

Le problème de minimisation (2.2) peut être décrit de plusieurs façons. On a :

Théorème (2.5). — *Soit* F *une fonction de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^d$,

1) *Les quatre infima suivant sont égaux et atteints :*

$a=\inf(F(\varphi_1^h(x_0))+1/2\|h\|_1^2,\ h\in H_1)$

$b=\inf(F(\varphi(1))+\Lambda_x(\varphi),\ \varphi\in C)$

$c=\inf(F(y)+1/2\,d^2(x_0, y),\ y\in\mathbb{R}^d)$

$d=\inf(F(\pi(\psi_1(x_0, p)))+H(x_0, p),\ p\in T_x^*(\mathbb{R}^d))$

2) *Si a est atteint en* $h\in H_1$, *alors c est atteint en* $y_0=\varphi_1^h(x_0)$ *et* $d(x_0, y_0)=\|h\|_1$; *de plus la géodésique* $\varphi_t^h(x_0)$ *est la projection d'une bicaractéristique, c'est-à-dire : il existe* $p\in T_x^*(\mathbb{R}^d)$ *tel que, pour tout* $t\in[0, 1]$, *on ait* $\pi(\psi_t(x_0, p))=\varphi_t^h(x_0)$ *et de plus d est atteint en p.*

Réciproquement, si c est atteint en y_0, *pour tout* $h\in H_1$ *tel que* $d(x_0, y_0)=\|h\|_1$, *a est atteint en h. De même si d est atteint en* $p\in T_x^*(\mathbb{R}^d)$ *alors a est atteint en* $h=h(p)$ *(défini en* (1.14)).

Preuve. — L'inégalité évidente : $\|h\|_1^2\geqq d^2(x_0, \varphi_1^h(x_0))$ montre que $a\geqq c$.

D'autre part l'infimum c est atteint car F est bornée et les boules de d sont compactes (théorème 1.9). Soit alors y_0 tel que $F(y_0)+1/2\,d^2(x_0, y_0)=c$, on sait qu'il existe $h\in H_1$ tel que $d(x_0, y_0)=\|h\|_1$.

Pour un tel h on a :

$$F(\varphi_1^h(x_0))+\frac{1}{2}\|h\|_1^2=F(y_0)+\frac{1}{2}d^2(x_0, y_0)=c.$$

Ce qui montre que $a=c$ et que a est atteint en h.

Réciproquement soit h tel que $F(\varphi_1^h(x_0))+1/2\|h\|_1^2=a$, il est clair que, si l'on note $y_0=\varphi_1^h(x_0)$, on a $d(x_0, y_0)=\|h\|_1$. Ce qui montre que $F(y_0)+1/2\,d^2(x_0, y_0)=a=c$ et donc que c est atteint en y_0.

On sait, du fait que l'infimum a est atteint, que $a=b$ et que b est atteint en $\varphi^h(x_0)$ (*cf.* [6], c'est en fait une conséquence immédiate de (1.7)).

Pour $p\in T_x^*(\mathbb{R}^d)$ on a, par le théorème (1.15): $\pi(\psi_t(x_0, p))=\varphi_t^{h(p)}(x_0)$, pour tout $t\in[0, 1]$; de plus $H(x_0, p)=1/2\,\|h(p)\|_1^2$. Ce qui montre que $d\geqq a$.

Il reste à vérifier que, si a est atteint en $h\in H_1$, alors h est la projection d'une bicaractéristique. Pour cela il suffit de suivre la remarque de Bismut [8], p. 40. Posons $y_0=\varphi_1^h(x_0)$, en écrivant que h est un point critique sur H_1 de la fonctionnelle

$F(\varphi_1^h(x_0)) + 1/2 \|h\|_1^2$ on obtient que, pour tout $k \in H_1$ on a :

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \int_{0 \leq s \leq 1} \dot{h}^i . \dot{k}^i \, ds = -dF(y_0) . \varphi_1^{h^*} \int_{0 \leq s \leq 1} (\varphi_s^{h^*})^{-1} X_i(x_0) . \dot{k}^i(s) \, ds.$$

Ce qui montre que, en posant $p = -\varphi_1^{h^*}(\nabla F(y_0))$, on a : $\dot{h}^i(t) = \langle p, (\varphi_s^{h^*})^{-1} X_i(x_0) \rangle$ pour presque tout $t \in [0, 1]$.

On en déduit, par le théorème (1.15), que $\pi(\psi_t(x_0, p)) = \varphi_t^h(x_0)$, pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi la géodésique $\varphi_t^h(x_0)$ est la projection de la bicaractéristique $\psi_t(x_0, p)$.

Ceci montre aussi que $d = a$, et que d est atteint en $p = -\varphi_1^{h^*}(\nabla F(y_0))$, puisque la fonction $F(\pi(\psi_1(x_0, p))) + H(x_0, p)$ prend la valeur a au point $p = -\varphi_1^{h^*}(\nabla F(y_0))$. Ce qui achève la preuve du théorème.

Remarque. — En fait la preuve précédente montre que, s'il existe une fonction F de classe C^1 telle que $F + 1/2 \, d^2(x_0, \cdot)$ atteigne son minimum en y_0, alors toute géodésique joignant x_0 à y_0 est la projection d'une bicaractéristique. Ceci est donc le cas si, par exemple : il existe une fonction g de classe C^1 minorant $d^2(x_0, \cdot)$ au voisinage de y_0 et telle que $g(y_0) = d^2(x_0, y_0)$, (en particulier si la fonction $d^2(x_0, \cdot)$ est de classe C^1 au voisinage de y_0). En effet il suffit alors de choisir la fonction $F(y) = -1/2 \, g(y) + \mathrm{Cste}\,(y - y_0)^2$.

II.3. La non conjugaison et l'hypothèse (2.3) de non dégénérescence des minima

Nous allons montrer ici que l'hypothèse (2.3) de non dégénérescence des minima peut être ramenée à une hypothèse de non dégénérescence en dimension finie associée à une hypothèse de non conjugaison (qui par le théorème 1.18 se vérifie aussi par un critère de dimension finie).

Soit toujours F une fonction C^∞ bornée sur $\mathbb{R}^d$ et soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que :

$$F(y_0) + \frac{1}{2} d^2(x_0, y_0) = \inf (F(y) + \frac{1}{2} d^2(x_0, y), \; y \in \mathbb{R}^d).$$

On a alors :

THÉORÈME (2.6). — *Si (x_0, y_0) n'est pas dans le cut-locus et si y_0 est un minimum non dégénéré de $F + (1/2) \, d^2(x_0, .)$ alors l'unique $h_0 \in K_x^{y_0}$ tel que $d(x_0, y_0) = \|h_0\|$ est un minimum non dégénéré sur H_1 de $h \to F(\varphi_1^h(x_0)) + (1/2) \|h\|_1^2$.*

Preuve. — Posons pour simplifier les notations : $G(h) = F(\varphi_1^h(x_0)) + (1/2) \|h\|_1^2$. Il s'agit de montrer que pour $h \in H_1 \setminus \{0\}$ $(\partial^2/\partial h^2) \, G(h_0) \cdot h^2 > 0$.

Considérons les fonctions de la variable réelle t :

$$u(t) = G(h_0 + th)$$

et

$$v(t) = F(\varphi_1^{h_0 + th}(x_0)) + \frac{1}{2} d^2(x_0, \varphi_1^{h_0 + th}(x_0)).$$

On a alors : $\forall t\ u(t) \geqq v(t)$. $u(0)=v(0)$ et $u'(0)=v'(0)=0$ d'où :

$$u''(0)=\frac{\partial^2}{\partial h^2}G(h_0)\cdot h^2 \geqq v''(0)=\left(F+\frac{1}{2}d^2(x_0,\ \cdot)\right)''(y_0)\left(\frac{\partial}{\partial h}[\varphi_1^h(x)](h_0)\cdot h\right)^2.$$

Si $h \notin \operatorname{Ker}(\partial/\partial h)\varphi_1^h(x_0)(h_0)$ on a donc $v''(0)>0$ puisque y_0 est un minimum non dégénéré. Ce qui montre donc que pour un tel h :

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}G(h_0)\cdot h^2 > 0.$$

Mais si $h \in \operatorname{Ker}(\partial/\partial h)\varphi_1^h(x_0)(h_0)=T_{h_0}K_{x_0}^{y_0}$, on sait que

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}G(h_0)\cdot h^2=\frac{\partial^2}{\partial h^2}(G|_{K_{x_0}^{y_0}})(h_0)\cdot h^2$$

où $G|_{K_{x_0}^{y_0}}$ désigne la restriction de G à la variété $K_{x_0}^{y_0}$.

Or pour $k \in K_{x_0}^{y_0}$

$$G|_{K_{x_0}^{y_0}}(k)=F(y_0)+\frac{1}{2}\|k\|_1^2$$

et donc

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}G|_{K_{x_0}^{y_0}}(h_0)\cdot h^2=\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{1}{2}\|\cdot\|_{1\,|\,K_{x_0}^{y_0}}^2\right)(h_0)\cdot h^2.$$

Cette dernière expression est strictement positive pour $h \neq 0$ puisque x_0 et y_0 sont non conjugués. Ce qui achève la preuve.

II.4. Conclusion

On regroupe ici les résultats des sections précédentes :

Théorème (2.7). — *Soit* F C^∞ *bornée sur* $\mathbb{R}^d$ *telle que :* $F+(1/2)\,d^2(x_0,\ \cdot)$ *atteigne son minimum a en un nombre fini de points* $y_j \in \mathbb{R}^d$ *tels que* (x_0, y_j) *ne soient pas dans le cut-locus et que chacun de ces minima soit non dégénérés, alors les conclusions du théorème* (2.4) *sont valides :*

Pour f C^∞ *bornée sur* $\mathscr{C}$ *on a* $\forall N \geqq 0$

$$E(f(X^\varepsilon)\,e^{-F(X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2})=e^{-a/\varepsilon^2}(\alpha_0+\alpha_2\,\varepsilon^2+\ldots+\alpha_{2N}\,\varepsilon^{2N}+O(\varepsilon^{2N+2})).$$

Il n'y a plus rien à démontrer au vu des théorèmes (2.4) (2.5) et (2.6).

Ainsi on a obtenu un théorème de Laplace pour la diffusion X_1^ε avec des hypothèses naturelles, à savoir géométriques.

Remarquons que ce théorème s'écrit simplement de façon analytique :

Théorème (2.7) *bis*. — *Soit* $p_t(x, y)$ *le noyau de la chaleur associé à l'opérateur* $L=(1/2)\sum_1^m X_i^2+X_0$. *Soit* F C^∞ *bornée sur* $\mathbb{R}^d$ *telle que* $F+(1/2)\,d^2(x_0,\ \cdot)$ *atteint son minimum en un point* y_0, *que ce minimum soit non dégénéré, et que* (x_0, y_0) *ne soit pas* *dans le cut-locus. On a alors pour f C^∞ bornée sur $\mathbb{R}^d$:*

$$\int f(z)\, e^{-F(z)/t} p_t(x_0, z)\, dz = e^{-((F(y_0)/t)+d^2(x_0, y_0)/2t)} (\alpha_0 + \alpha_2 t + \ldots + \alpha_N t^N + O(t^{N+1}).$$

III. Développement asymptotique du noyau de la chaleur et de ses dérivées

III.1. Énoncé des résultats

Soient $X_0, X_1, \ldots, X_m$ $m+1$ champs de vecteurs de classe C^∞ bornés, à dérivées bornées sur $\mathbb{R}^d$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathrm{Lie}(X_1, \ldots, X_m)(x) = \mathbb{R}^d.$$

Soit $p_t(x, y)$ le noyau de la chaleur associé à l'opérateur $L = 1/2 \sum_{1 \leqq i \leqq m} X_i^2 + X_0$. Rappelons que le cut-locus est défini en (1.20) ou en (1.23).

Théorème (3.1). — *Soit (x, y) n'appartenant pas au cut-locus, pour tout $n \geqq 0$, on a le développement asymptotique, lorsque t tend vers zéro :*

$$(3.2) \qquad p_t(x, y) = t^{-d/2} \exp(-d^2(x, y)/2t) \Big(\sum_{1 \leqq j \leqq n} c_j(x, y)\, t^j + t^{n+1} r_{n+1}(t, x, y)\Big)$$

où les fonctions c_j sont C^∞ hors du cut-locus, et où $c_0(x, y) > 0$. De plus, si K désigne un compact de $(\mathbb{R}^d)^2$ qui ne rencontre pas le cut-locus, pour tout entier k, tous multi-indices α et β il existe $t_0 > 0$ tel que :

$$(3.3) \qquad \sup_{t \leqq t_0} \sup_{(x, y) \in K} \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^k r_{n+1}(t, x, y) \right| < \infty.$$

En particulier le développement asymptotique (3.2) *est uniforme sur K.*

Ce théorème va être démontré au paragraphe suivant. Nous donnons ici quelques conséquences immédiates de ce résultat.

Théorème (3.4). — *Soit (x, y) n'appartenant pas au cut-locus, pour tout $n \geqq 0$, on a le développement asymptotique, lorsque t tend vers zéro, de la dérivée du noyau de la chaleur $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^k p_t(x, y)$ (où k désigne un entier, α et β deux multi-indices) :*

$$(3.5) \qquad \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^k p_t(x, y) = t^{-(2k+|\alpha|+|\beta|+d/2)} \exp(-d^2(x, y)/2t) \times \Big(\sum_{1 \leqq j \leqq n} c^{\alpha, \beta, k} j(x, y)\, t^j + t^{n+1} r_{n+1}^{\alpha, \beta, k}(t, x, y)\Big).$$

Les $c^{\alpha, \beta, k} j$ sont des fonctions de classe C^∞ hors du cut-locus, et si K désigne un compact de $(\mathbb{R}^d)^2$ qui ne rencontre pas le cut-locus, il existe $t_0 > 0$ tel que :

$$(3.6) \qquad \sup_{t \leqq t_0} \sup_{(x, y) \in K} \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^k r_{n+1}^{\alpha, \beta, k}(t, x, y) \right| < \infty$$

i.e. le développement (3.5) *est uniforme sur* K.

Preuve du théorème (3.4). — Il suffit de dériver le développement asymptotique (3.2). La majoration (3.3) assure que (3.6) est vraie.

Ce théorème permet de décrire analytiquement les coefficients du développement (3.2) :

THÉORÈME 3.7:

1) *Sur le complémentaire du cut-locus, la distance $d(x, y)$ est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi suivante, où les champs X_i agissent sur la variable x :*

$$\sum_{1 \leqq i \leqq m} (X_i d(x, y)^2) = 4 d(x, y)^2$$

2) *Sur le complémentaire du cut-locus, les coefficients c_j du développement asymptotique* (3.2) *sont solutions des équations de transport suivantes, où les champs X_i et l'opérateur L agissent sur la variable x, où on a posé $c_{-1}=0$ et où d désigne la dimension de $\mathbb{R}^d$,*

$$\sum_{1 \leqq i \leqq m} X_i(c_j(x, y)) X_i(d(x, y)^2) - (d - L(d(x, y)^2) - j) c_j(x, y) = 2 L(c_{j-1}(x, y)).$$

Preuve du théorème (3.7). — Par le théorème (3.4) on obtient le développement asymptotique de $L(p_t)$ et de $\partial_t(p_t)$. En les identifiant on obtient le théorème (3.7).

III.2. PREUVE DU THÉORÈME (3.1)

(*a*) Une construction préliminaire et le plan de la preuve :

Soit (x_0, y_0) n'appartenant pas au cut-locus, on sait par le théorème (1.21) qu'il existe un voisinage $U \times V$ de (x_0, y_0) qui ne rencontre pas le cut-locus. Dans la suite on prendra pour U et V des boules (euclidiennes) de centres x_0 et y_0, rayon r assez petit pour que $\overline{U \times V}$ n'intersecte pas le cut-locus.

On va démontrer le théorème (3.1) pour $x, y \in U \times V$ et $K \subset U \times V$ ce qui, bien sûr, suffit.

On commence par construire une fonction auxiliaire qui permettra d'employer la méthode de Laplace :

LEMME (3.8). — *Il existe une fonction $F(x, y, z)$ C^∞ en x, y, z, bornée définie sur $U \times V \times \mathbb{R}^d$ telle que :*

1) *Pour $x, y \in U \times V$ $\inf(F(x, y, z) + 1/2\, d^2(x, z),\ z \in \mathbb{R}^d)$ est atteint en un seul point, à savoir y, et que ce minimum est non dégénéré et nul. Ainsi $F(x, y, \cdot)$ satisfait les hypothèses* (2.2) *et* (2.3) *de la méthode de Laplace grâce au théorème* (2.8).

2) *On peut choisir F telle que hors d'une boule euclidienne fixée $\{z, \|z-y\| \leqq \alpha\}$ $F(x, y, \cdot)$ soit constante, pour tout $x, y \in U \times V$.*

Preuve du lemme (3.8). — Considérons pour $\lambda > 0$ et pour $x, y, z \in U \times V \times \mathbb{R}^d$ la fonction :

$$F_\lambda(x, y, z) = -\left[\partial_y\left(\frac{1}{2} d^2(x, y)\right) \cdot z - y + \frac{1}{2} \partial_y^2\left(\frac{1}{2} d^2(x, y)\right) \cdot (z-y)^2\right] + \lambda (z-y)^2.$$

Posons pour simplifier les notations

$$G_\lambda(x, y, z) = F_\lambda(x, y, z) + \frac{1}{2} d^2(x, z)$$

alors :

$$G_\lambda(x, y, z) = \frac{1}{2} d^2(x, y)$$

$$\partial_z G_\lambda(x, y, y) = 0.$$

Soit $\alpha \geqq 0$ tel que $V \subset B_\alpha = \{z, \|z - y_0\| \leqq \alpha\}$, alors il existe λ_0 tel que si $\lambda \geqq \lambda_0$: $\partial_z^2 G_\lambda(x, y, z)$ est définie positive pour $x, y \in U \times V$ et $z \in B_\alpha$. Ainsi, pour tout $x, y \in U \times V$ $G_\lambda(x, y, \cdot)$ est strictement convexe sur B_α et donc y est l'unique minimum de $G_\lambda(x, y, \cdot)$ sur B_α et c'est un minimum global non dégénéré.

Soit alors $C > \sup_{x, y \in U \times V} (1/2) d^2(x, y)$, il existe λ_1 tel que si $\lambda \geqq \lambda_1$, $F_\lambda(x, y, z) \geqq C$ pour $x, y, \in U \times V$ et $z \in B_\alpha^c$.

Ainsi, pour tout $x, y \in U \times V$, y est un minimum global de $G_\lambda(x, y, \cdot)$ sur $\mathbb{R}^d$ et il est non dégénéré. C'est l'unique point où $G_\lambda(x, y, \cdot)$ atteint son minimum.

F_λ n'est pas bornée en z, mais il suffit de considérer une fonction de troncature C^∞ χ telle que :

$$\chi(z) = 1 \quad \text{sur } \|z - y_0\| \leqq \alpha$$

$$\chi(z) = 0 \quad \text{sur } \|z - y_0\| \geqq 2\alpha$$

et de poser $F(x, y, z) = \chi(z) F_\lambda(x, y, z) + (1 - \chi(z)) C$. F satisfait le lemme 3.8.

Donnons maintenant le plan de la preuve du théorème (3.1). La fonction $z \to e^{-F(x, y, z)/\varepsilon^2} p_\varepsilon(x, z)$ est un élément de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ puisque $z \to p_\varepsilon(x, z)$ l'est et que F est constante hors d'une boule.

On a donc par inversion de Fourier :

$$p_\varepsilon(x, y) e^{-F(x, y, y)/\varepsilon^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i\xi y} d\xi \int e^{i\xi z} e^{-F(x, y, z)/\varepsilon^2} p_\varepsilon(x, z)\, dz$$

$$= \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^d} \int e^{-i(\zeta/\varepsilon) y} d\zeta \int e^{i(\zeta/\varepsilon) z} e^{-F(x, y, z)/\varepsilon^2} p_\varepsilon(x, z)\, dz$$

d'où

$$\text{(3.9)} \qquad p_\varepsilon(x, y) e^{-F(x, y, y)/\varepsilon^2} = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^d} \int d\zeta\, E_x\left(e^{i(\zeta/\varepsilon)(X_1^\varepsilon - y)} e^{-F(x, y, X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2}\right).$$

La méthode de Laplace, à peine modifiée, va nous permettre d'obtenir le développement asymptotique, à ζ fixé, de $E_x(e^{i(\zeta/\varepsilon)(X_1^\varepsilon - y)} e^{-F(x, y, X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2})$ (*voir* le § (*b*)). Le calcul de Malliavin nous permettra ensuite d'intégrer ce développement en ζ et donc d'obtenir celui de $p_\varepsilon(x, y)$. (*Voir* le § (*c*)).

Remarques. — 1) La preuve est considérablement alourdie par le fait que nous voulons garder le contrôle en x, y de toutes les grandeurs qui interviennent pour obtenir la régularité en x, y des coefficients, l'uniformité dans le développement asymptotique et surtout le contrôle des dérivées du reste dans ce développement.

(*b*) Développement asymptotique de la transformée de Fourier de $e^{-F(z)/\varepsilon^2} p_\varepsilon(x, z)$.

Soit $x, y \in U \times V$, et $h(x, y)$ l'unique élément de K_x^y tel que $d(x, y) = \|h(x, y)\|_1$.

Considérons alors $Z_t^\varepsilon(x, y)$ la solution de l'équation de Stratonovich

$$dZ_t^\varepsilon(x, y) = \varepsilon \sum_{i=1}^{m} X_i(Z_t^\varepsilon(x, y))\, dw_t^i + \varepsilon^2 X_0(Z_t^\varepsilon(x, y))\, dt + \sum_{i=1}^{m} X_i(Z_t^\varepsilon(x, y))\, dh_t^i(x, y)$$

$$Z_0^\varepsilon(x, y) = x.$$

On sait alors que :

LEMME (3.10):

1) *$Z_t^\varepsilon(x, y)$ est une fonction C^∞ de (ε, x, y).*

2) *Pour tout $(k, l, m, n) \in \mathbb{N}^n$, pour tout $\alpha \in \{1, \ldots, d\}^k$, $\beta \in \{1, \ldots, d\}^l$ et pour tout $q \geqq 2$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que*

$$\sup_{\varepsilon \leqq \varepsilon_0} \sup_{x, y \in U \times V} \sum_{j \leqq n} E(\sup_{t \in [0, 1]} \| D^j(\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\varepsilon^m Z_t^\varepsilon(x, y)) \|_{HS}^q) < \infty \tag{3.11}$$

où D désigne la dérivée au sens de Malliavin (ou de Shigekewa) (cf. [20]) et $\| \cdot \|_{HS}$ désigne la norme Hilbert-Schmidt.

Preuve du lemme (3.10). — La remarque essentielle est que, par le théorème (1.21), la « géodésique » $h(x, y)$ varie de façon C^∞ avec x et y et reste dans un borné de H_1.

Le 1) du lemme (3.10) est alors clair, car si une équation stochastique dépend de façon C^∞ d'un paramètre, sa solution dépend de façon C^∞ du paramètre et du point initial.

Pour le 2) du lemme (3.10), remarquons que sous sa forme la plus simple, à savoir pour $k = l = n = 0$, il s'écrit :

$$\sup_{\varepsilon \leqq \varepsilon_0} \sup_{x, y \in U \times V} E(\sup_{t \in [0, 1]} |\partial_\varepsilon^m Z_t^\varepsilon(x, y)|^q) < \infty.$$

Ceci est une conséquence directe du lemme 4 de Doss [9] puisque $h(x, y)$ reste dans un borné de H_1. En fait on pourrait généraliser ici la preuve du lemme 4 de [9], mais c'est inutile car la forme générale du résultat est une conséquence du théorème (2.19) de Kusuoka-Stroock [13].

En effet : pour k, l, n fixés dans $\mathbb{N}$, notons $\mathscr{X}_t(\varepsilon, x, y)$ le processus constitué de toutes les dérivées : $(\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\varepsilon^j Z^\varepsilon(\varepsilon, x, y))$ pour $|\alpha| \leqq k$, $|\beta| \leqq l$, $j \leqq m$. Ce processus $\mathscr{X}_t$ est solution d'une équation des variations stochastiques *a priori* sous forme de Statonovich mais que l'on peut convertir simplement sous forme d'Ito. Du fait que les champs X_i sont bornés, à dérivées bornées, et que $h(x, y)$ reste dans un borné de H_1, les coefficients de cette équation d'Ito des variations stochastiques vérifient la condition de croissance lente (2.10) de Kusuoka-Stroock [13]. Le lemme est alors une conséquence immédiate de la majoration (2.21) du théorème (2.19) de [13].

Considérons alors le développement de Taylor stochastique de Z^ε :

$$Z_t^\varepsilon(x, y) = \varphi_t(x, y) + \sum_{1}^{N} \varepsilon^k g_t^{(k)}(x, y) + \varepsilon^{N+1} R_t^{(N+1)}(\varepsilon, x, y) \tag{3.12}$$

avec

$$\varphi_t(x, y) = \varphi_t^{h(x, y)}(x) \tag{3.13}$$

$$g_t^{(k)}(x, y) = \frac{1}{k!} \partial_\varepsilon^k Z_t^\varepsilon(x, y) \big|_{\varepsilon=0}$$

et

$$R_t^{(N+1)}(\varepsilon, x, y) = \int_0^1 \partial_\varepsilon^{N+1} (Z_t^{\varepsilon v}(x, y)) \frac{(1-v)^N}{N!} dv. \tag{3.14}$$

Posons alors :

$$\theta(\varepsilon, x, y) = F(x, y, Z_1^\varepsilon(x, y)) \tag{3.15}$$

et considérons le développement de Taylor de $\theta(\cdot, x, y)$ à l'ordre 2 en $\varepsilon = 0$:

$$\theta(\varepsilon, x, y) = \theta(0, x, y) + \varepsilon \partial_\varepsilon \theta(0, x, y) + \varepsilon^2 U(\varepsilon, x, y) \tag{3.16}$$

avec

$$U(\varepsilon, x, y) = \int_0^1 \partial_\varepsilon^2 \theta(\varepsilon v, x, y)(1-v) dv. \tag{3.17}$$

Rappelons que : (*cf.* [6])

LEMME (3.18):

1) $\theta(0, x, y) = F(x, y, \varphi_1(x, y)) = F(x, y, y)$

2) $\partial_\varepsilon \theta(0, x, y) = \partial_z F(x, y, y) \cdot g_1^{(1)}(x, y) = -\int_0^1 \dot{h}_s(x, y) \cdot dw_s.$

Preuve du lemme (3.18). — Le 1) du lemme est évident. Rappelons brièvement la preuve du 2) qui est prouvé dans un contexte plus général dans [6]. Il suffit d'écrire que $h(x, y)$ est un point critique sur H_1 de la fonctionnelle $h \to F(x, y, \varphi_1^h(x)) + 1/2 \|h\|_1^2$. C'est-à-dire que, pour tout $k \in H_1$:

$$\partial_z F(x, y, y) \partial_h(\varphi_1^h(x))(h(x, y)) . k = -\sum_{1 \leqq i \leqq m} \int \dot{h}^i(s) . \dot{k}^i(s) ds.$$

Une intégration par parties montre que le membre de droite de cette égalité se prolonge par continuité de H_1 à C pour donner $-\sum_{1 \leqq i \leqq m} \int \dot{h}^i(s) . dw^i(s)$.

Or

$$\partial_h(\varphi_1^h(x))(h(x, y)) . k = \varphi_1^{h*} \int (\varphi_s^{h*})^{-1} X_i(x_0) . \dot{k}^i(s) ds.$$

De même une intégration par parties montre que cette forme linéaire se prolonge de H_1 à C pour donner :

$$\partial_h(\varphi_1^h(x))(h(x, y)) . w = \varphi_1^{h*} \int (\varphi_s^{h*})^{-1} X_i(x_0) . dw^i(s) = g_1^{(1)}(x, y).$$

Ce qui montre que : $\partial_z F(x, y, y) g_1^{(1)}(x, y) = -\sum_{1 \leqq i \leqq m} \int \mathring{h}^i(s) . dw^i(s)$, et prouve le 2) du lemme (3.18).

On a ainsi :

$$\text{(3.19)} \qquad F(x, y, Z_1^\varepsilon(x, y)) = F(x, y, y) - \varepsilon \int \mathring{h}(s) . dw(s) + \varepsilon^2 U(\varepsilon, x, y).$$

Par la formule de Girsanov on a :

$$\text{(3.20)} \quad E_x(\exp[i\zeta . (X_1^\varepsilon - y)/\varepsilon - F(x, y, X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2])$$
$$= E_x\left(\exp[i\zeta . (Z_1^\varepsilon - y)/\varepsilon - F(x, y, Z_1^\varepsilon)/\varepsilon^2] \exp\left(-(1/\varepsilon) \int \mathring{h}(s)\, dw(s) - (1/2\varepsilon^2) \int \mathring{h}(s)^2\, ds\right)\right).$$

Si l'on pose :

$$\text{(3.21)} \qquad a(x, y) = F(x, y, y) + d^2(x, y)/2$$

et

$$\text{(3.23)} \qquad V(\varepsilon, x, y) = [Z_1^\varepsilon(x, y) - y - \varepsilon g_1^{(1)}(x, y)]/\varepsilon = \varepsilon R_1^{(2)}(\varepsilon, x, y)$$

on obtient par (3.19) :

$$\text{(3.24)} \quad E_x(exp[i\zeta . (X_1^\varepsilon - y)/\varepsilon - F(x, y, X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2])$$
$$= \exp(-a(x, y)/\varepsilon^2) E_x(\exp i\zeta . g_1^{(1)}(x, y) \exp[i\zeta V(\varepsilon, x, y) - U(\varepsilon, x, y)]).$$

Remarquons qu'en fait le choix fait ici de la fonction F est tel que $a(x, y) = 0$.

Rappelons alors le lemme essentiel dans la méthode de Laplace (*cf.* [6]), qui est le point où la non dégénérescence du minimum au sens de (2.3) est importante :

LEMME (3.25). — *Il existe $c > 0$, et $\varepsilon_0 > 0$ tels que :*

$$\sup_{x, y \in U \times V} \sup_{\varepsilon < \varepsilon_0} E(e^{-(1+c) U(\varepsilon, x, y)}) < \infty.$$

Preuve du lemme (3.25). — Pour démontrer ce lemme nous allons procéder en trois étapes. Nous allons d'abord montrer le résultat de localisation suivant : pour tout $\rho > 0$, il existe $c > 0$, $\lambda > 0$, et $\varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, pour tout $(x, y) \in U \times V$ on ait :

$$\text{(3.26)} \qquad E_x(e^{-(1+c) U(\varepsilon, x, y)}; \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |Z_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho) \leqq \exp(-\lambda/\varepsilon^2).$$

Pour montrer (3.26) commençons par rappeler que le principe des grandes déviations pour la diffusion X^ε montre que, pour tout $\rho > 0$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log E_x[\exp(-F(x, y, X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2); \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |X_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho] < -a(x, y) = 0$$

et donc qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ on ait :

$$\text{(3.27)} \qquad E_x[\exp(-F(x, y, X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2); \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |X_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho] \leqq \exp(-\alpha/\varepsilon^2).$$

Ainsi, si l'on note $m = m(x, y) = \inf F(x, y, .)$, on a, pour tout $\beta > 0$:

$$\text{(3.28)} \qquad E_x[\exp(-(1+\beta) F(x, y, X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2); \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |X_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho] \leqq \exp(-(m\beta + \alpha)/\varepsilon^2).$$

Or la formule de Girsanov montre que :

$$E_x[\exp(-(1+\beta) F(x, y, X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2); \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |X_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho]$$
$$= E_x\left[\exp(-(1+\beta) F(x, y, Z_1^\varepsilon)/\varepsilon^2) \exp\left(-(1/\varepsilon) \int \dot{h}_t\, dw_t - (1/2\varepsilon^2) \int \dot{h}_t^2\, dt\right); \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |Z_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho\right].$$

Par le lemme (3.18) on obtient donc :

$$\text{(3.29)} \qquad E_x[\exp(-(1+\beta) F(x, y, X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2); \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |X_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho]$$
$$= \exp(\beta d^2(x, y)/2\varepsilon^2) E_x\left(\exp\left[-(1+\beta) U(\varepsilon, x, y) + (\beta/\varepsilon) \int \dot{h}_t\, dw_t\right]; \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |Z_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho\right).$$

Or par l'inégalité de Hölder on a, pour tout $K > 0$ et pour p et q tels que $1/p + 1/q = 1$:

$$E_x(e^{-(1+c) U(\varepsilon, x, y)}; \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |Z_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho) \leqq E(\exp - (Kp/\varepsilon) \int \dot{h}_t\, dw_t)^{1/p}$$
$$\times E_x\left(\exp\left[-q(1+c) U(\varepsilon, x, y) + (Kq/\varepsilon) \int \dot{h}_t\, dw_t\right]; \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |Z_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho\right)^{1/q}$$

d'où l'on tire :

$$E_x(e^{-(1+c) U(\varepsilon, x, y)}; \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |Z_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho) \leqq \exp(K^2 p d^2(x, y)/2\varepsilon^2)$$
$$\times E_x\left(\exp\left[-q(1+c) U(\varepsilon, x, y) + (Kq/\varepsilon) \int \dot{h}_t\, dw_t\right]; \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |Z_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho\right)^{1/q}.$$

En choisissant $\beta = q(1+c) - 1$ et $K = \beta/q$ on obtient donc :

$$E_x(e^{-(1+c) U(\varepsilon, x, y)}; \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |Z_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho) \leqq \exp(K^2 p d^2(x, y)/2\varepsilon^2)$$
$$\times E_x\left(\exp\left[-(1+\beta) U(\varepsilon, x, y) + (\beta/\varepsilon) \int \dot{h}_t\, dw_t\right]; \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |Z_t^\varepsilon - \varphi_t(x, y)| \geqq \rho\right)^{1/q}$$

et donc, par (3.29) on a :

$$E_x(e^{-(1+c)U(\varepsilon,x,y)}; \sup_{0\leq t\leq 1} |Z_t^\varepsilon-\varphi_t(x,y)|\geqq\rho)\leqq \exp[(K_p^2-\beta/q)\,d^2(x,y)/2\varepsilon^2]$$
$$\times E_x[\exp(-(1+\beta)F(x,y,X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2); \sup_{0\leq t\leq 1}|X_t^\varepsilon-\varphi_t(x,y)|\geqq\rho]^{1/q}.$$

Par (3.28) on a donc, si l'on pose $\lambda(c)=-[(K^2p-K)\,d^2(x,y)/2-(m\beta+\alpha)/q]$:

$$E_x(e^{-(1+c)U(\varepsilon,x,y)}; \sup_{0\leq t\leq 1}|Z_t^\varepsilon-\varphi_t(x,y)|\geqq\rho)\leqq \exp-\lambda(c)/\varepsilon^2.$$

Or, lorsque c tend vers 0, β tend vers $q-1$ et K tend vers $1/p$, ainsi $\lambda(c)$ tend vers $m/p-\alpha/q$. Il suffit donc de choisir p assez grand, plus précisemment $p>1-m/\alpha$, pour conclure que pour c assez petit $\lambda(c)$ est strictement positif. Ce qui achève la preuve de (3.26) pour (x, y) fixés. Ce résultat est évidemment uniforme en (x, y) puisque le résultat de grandes déviations (3.27) l'est, du fait que la fonction $F(x, y, .)$ varie continûment avec (x, y).

Pour démontrer le lemme (3.25) on rappelle ensuite que : pour tout $c>0$ il existe $\rho>0$ et $\varepsilon_0>0$ tels que :

$$(3.30)\quad \sup_{\varepsilon<\varepsilon}\ \sup_{x,y\in U\times V} E_x(\exp[-(1+c)(U(\varepsilon,x,y)-U(0,x,y))];$$
$$\sup_{0\leq t\leq 1}|Z_t^\varepsilon-\varphi_t(x,y)|\leqq\rho)<\infty.$$

Ceci est démontré dans un contexte plus général dans [6] pour (x, y) fixés, en recopiant les idées d'Azencott ([2] proposition 4.3 et inégalité (34) au paragraphe 7.8). Cette majoration peut être très facilement rendue uniforme en (x, y) du fait que les coefficients de l'équation stochastique définissant $Z_t^\varepsilon(x, y)$ sont de classe C^∞ en (x, y) (en particulier du fait (*cf.* théorème 1.21) que la géodésique $h(x, y)$ vaire de façon C^∞ avec (x, y) lorsque (x, y) varie dans le complémentaire du cut-locus).

Enfin pour achever la preuve du lemme (3.25) on montre qu'il existe un $c>0$ tel que :

$$(3.31)\quad \sup_{(x,y)\in U\times V} E_x[\exp-(1+c)U(0,x,y)]<\infty.$$

Cette majoration est le point crucial où joue l'hypothèse géométrique de non conjugaison des points x et y. Ce résultat est aussi démontré (pour (x, y) fixés) dans un contexte plus général dans [6] ([6] lemme 1.49). Rappelons brièvement la preuve : $U(0, x, y)$ appartient à la somme des deux chaos de Wiener H_0 et H_2, c'est-à-dire que $U(0, x, y)$ est la somme d'une constante et d'un élément du second chaos de Wiener H_2 que nous noterons $U_2(0, x, y)$.

L'opérateur de Hilbert-Schmidt $A(x, y)$ canoniquement associé à cet élément $U_2(0, x, y)$ du second chaos de Wiener est simplement donné par :

$$(A(x,y)k_1, k_2)=d^2F(\varphi((x,y)))(k_1,k_2)\qquad \text{pour } k_1 \text{ et } k_2 \text{ dans } H_1.$$

Soit $\lambda_1(x, y)$ la première valeur propre de l'opérateur $A(x, y)$, on sait, par un calcul classique, que :

$$(3.32)\quad E_x[\exp-(1+c)U_2(0,x,y)]<\infty \text{ si et seulement si } (1+c)\lambda_1(x,y)>-1.$$

Dans le cas où cette espérance est finie, on sait que, en notant $\det_2$ le déterminant réduit, on a :

$$\mathrm{E}_x[\exp-(1+c)\mathrm{U}_2(0, x, y)]=\det_2(\mathrm{I}d+(1+c)\mathrm{A}(x, y))^{-1/2}. \tag{3.33}$$

Or l'hypothèse de non-conjugaison des points x et y, ou encore l'hypothèse de non dégénérescence du minimum au sens de (2.3) montrent que : $\lambda_1(x, y)$ est strictement supérieur à -1 et donc qu'il existe un $c>0$ tel que $\mathrm{E}_x[\exp-(1+c)\mathrm{U}_2(0, x, y)]<\infty$.

De plus la première valeur propre $\lambda_1(x, y)$ varie continûment avec (x, y), on peut donc choisir ce c indépendamment de (x, y). Enfin (3.33) montre que l'espérance $\mathrm{E}_x[\exp-(1+c)\mathrm{U}_2(0, x, y)]$ varie continûment avec (x, y) et donc que l'on peut la majorer uniformément pour $(x, y)\in\mathrm{U}\times\mathrm{V}$. Ce qui prouve (3.31).

Il est alors clair que les estimations (3.26), (3.30), et (3.31) donnent le lemme (3.25).

Considérons alors la fonction :

$$\chi(\varepsilon, x, y, \zeta)=e^{i\zeta\cdot\mathrm{V}(\varepsilon, x, y)-\mathrm{U}(\varepsilon, x, y)} \tag{3.34}$$

et son développement de Taylor à l'ordre N en $\varepsilon=0$:

$$\chi(\varepsilon, x, y, \zeta)=\sum_{m=0}^{\mathrm{N}}\frac{\varepsilon^m}{m!}\partial_\varepsilon^n\chi(0, x, y, \zeta)+\mathrm{S}_{\mathrm{N}+1}(\varepsilon, x, y, \zeta)\varepsilon^{\mathrm{N}+1} \tag{3.35}$$

avec

$$\mathrm{S}_{\mathrm{N}+1}(\varepsilon, x, y, \zeta)=\int_0^1\partial_\varepsilon^{\mathrm{N}+1}\chi(\varepsilon v, x, y, \zeta)\frac{(1-v)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}dv.$$

On a alors :

LEMME (3.36). — *Pour tout* $(k, l, m, n)\in\mathbb{N}^4$, *pour tout* $\alpha\in\{1, \ldots, d\}^k$, $\beta\in\{1, \ldots, d\}^l$ *on a :*

1) *Pour tout* $q\geqq 2$ *il existe* $\varepsilon_0>0$ *tel que :*

$$\sup_{\varepsilon\leqq\varepsilon_0}\sup_{x, y\in\mathrm{U}\times\mathrm{V}}\mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^n\sup_{t\in[0, 1]}\|\mathrm{D}^j\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\varepsilon^m i\zeta\mathrm{V}(\varepsilon, x, y)-\mathrm{U}(\varepsilon, x, y)\|_{\mathrm{HS}}^q\right)<\infty. \tag{3.37}$$

2) *D'où l'on déduit par le lemme* (3.20) *: il existe* $c>0$, $\mathrm{K}>0$ et $\varepsilon_0>0$ *tel que :*

$$\sup_{\varepsilon\leqq\varepsilon_0}\sup_{x, y\in\mathrm{U}\times\mathrm{V}}\mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^n\sup_{t\in[0, 1]}\|\mathrm{D}^j\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\varepsilon^m\chi(\varepsilon, x, y, \zeta)\|_{\mathrm{HS}}^{1+c}\right)\leqq\mathrm{K}(\|\zeta\|_\wedge 1)^{m+k+l} \tag{3.38}$$

et de même :

$$\sup_{\varepsilon\leqq\varepsilon_0}\sup_{x, y\in\mathrm{U}\times\mathrm{V}}\mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^n\sup_{t\in[0, 1]}\|\mathrm{D}^j\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\varepsilon^m(e^{i\zeta\cdot g_1^{(1)}(x, y)}\chi(\varepsilon, x, y, \zeta))\|_{\mathrm{HS}}^{1+c}\right)\leqq\mathrm{K}(\|\zeta\|_\wedge 1)^{m+k+l}. \tag{3.39}$$

PREUVE DU LEMME (3.36)

Preuve du 1). — On a :

$$i\zeta\,V(\varepsilon, x, y)-U(\varepsilon, x, y)=i\zeta\int_0^1 \partial_\varepsilon^2 Z_1^{\varepsilon v}(x, y)(1-v)\,dv-\int_0^1 \partial_\varepsilon^2\theta(\varepsilon v, x, y)(1-v)\,dv.$$

Sachant que $\theta(\varepsilon, x, y)=F(x, y, Z_1^\varepsilon(x))$ et que les dérivées de F sont toutes bornées. Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme (3.10).

Preuve du 2). — Il n'est pas clair *a priori* que $\chi=e^{i\zeta V-U}$ soit dérivable au sens de Malliavin même si $i\zeta V-U$ l'est car la fonction $\varphi: x\to e^x$ n'est pas à croissance lente. Néanmoins le lemme (3.25) et le fait que l'opérateur D ait un graphe fermé (Kusuoka-Stroock, lemme (1.7)) assurent ce résultat, en effet, soit ψ une fonction de troncature C^∞ sur $\mathbb{R}$:

$$\psi\equiv 1 \text{ sur } x\leqq 1 \text{ et } \psi\equiv 0 \text{ sur } x\geqq 2.$$

Considérons alors la fonction :

$$\varphi_n(x)=e^{-\psi(x/n).x}.$$

φ_n est égale à $\varphi(x)=e^{-x}$ sur $x\leqq n$ et $\varphi_n\equiv 1$ sur $x\geqq 2n$. φ_n est donc a croissance lente. On a alors :

$$D\varphi_n(U)=\varphi_n'(U)\,DU=-\left(\frac{1}{n}\psi'\left(\frac{U}{n}\right).U+\psi\left(\frac{U}{n}\right)\right)\varphi_n(U)\,DU.$$

Or :

$$E\left(\left|\frac{1}{n}\psi'\left(\frac{U}{n}\right).U\,\varphi_n(U)\right|\right)\leqq\frac{1}{n}E(\varphi_n(U)^q)\,P(U\geqq n).$$

Or par le lemme (3.25), il existe $q>1$ tel que $E(\varphi_n(U)^q)\leqq E(e^{qU})<\infty$ et $P(U\geqq n)\leqq e^{-n}E(e^U)\leqq K.e^{-n}$ d'où

$$E\left(\left|\frac{1}{n}\psi'\left(\frac{U}{n}\right)U\,\varphi_n(U)\right|\right)\quad\text{tend vers 0,}$$

et d'autre part on a de même $E(|\psi(U/n).\varphi_n(U)\,DU|^q)$ borné uniformément en n et donc $\psi(U/n)\,\varphi_n(U)\,DU$ converge dans L^1 vers $\varphi(U)\,DU$ et donc par le lemme (1.7) de [13] on sait que e^{-U} est différentiable au sens de Malliavin et que $D(e^{-U})=-e^{-U}DU$.

Ainsi χ est différentiable au sens de Malliavin.

De plus il est clair que $\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\varepsilon^m\chi$ peut s'écrire sous la forme $W.\chi$ où W est un polynome en ζ de degré $m+|\alpha|+|\beta|$ dont les coefficients sont eux-mêmes des polynomes en les dérivées en x, y, ε de V et de U. On déduit donc du 1) du lemme que :

$$\sup_{x,\,y\in U\times V}\ \sup_{\varepsilon\leqq\varepsilon_0}\ \sum_{j=0}^{n} E(\|D^jW\|_{HS}^q)\leqq K(\|\zeta\|_\wedge 1)^{m+|\alpha|+|\beta|}$$

du fait que

$$D(\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\varepsilon^m\chi)=(DW+i\zeta\,DV-DU)\,\chi$$

et du lemme (3.25) on tire le résultat (3.38).

(3.39) est une conséquence immédiate de (3.38) puisque par le lemme (3.10), on peut majorer les dérivées au sens de Malliavin de $g_1^{(1)}(x, y)$ et de ses dérivées $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta g_1^{(1)}(x, y)$.

On peut alors conclure et obtenir un développement asymptotique de

$$E_x(e^{i\zeta(X_1^\varepsilon - y/\varepsilon)} e^{-F(x, y, X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2}):$$

le lemme (3.36), sous sa forme la plus simple, à savoir avec $n=k=l=0$ montre que :

$$\text{(3.40)} \qquad \sup_{\varepsilon \leqq \varepsilon_0} \sup_{x, y \in U \times V} E\,|S_{N+1}(\varepsilon, x, y, \zeta)| < \infty$$

et que

$$\text{(3.41)} \qquad E(|\partial_\varepsilon^m \chi(0, x, y, \zeta)|) < \infty.$$

Par (3.35) on a donc :

$$\text{(3.42)} \qquad E(e^{i\zeta g_1^{(1)}(x, y)} \chi(\varepsilon, x, y, \zeta)) = \sum_0^N \varepsilon^m \alpha_m(x, y, \zeta) + \varepsilon^{N+1} T_{N+1}(\varepsilon, x, y, \zeta)$$

avec :

$$\text{(3.43)} \qquad \alpha_m(x, y, \zeta) = E(e^{i\zeta g_1^{(1)}(x, y)} \chi(0, x, y, \zeta))$$

et en particulier :

$$\text{(3.44)} \qquad \alpha_0(x, y, \zeta) = E(e^{i\zeta g_1^{(1)}(x, y)} e^{-U(0, x, y)})$$

et

$$\text{(3.45)} \qquad T_{N+1}(\varepsilon, x, y, \zeta) = E(S_{N+1}(\varepsilon, x, y, \zeta)\, e^{i\zeta g_1^{(1)}(x, y)}).$$

On vérifie enfin, toujours par le lemme (3.36), avec $n=0$, mais k, l, m arbitraires que $\alpha_m(x, y, \zeta)$ et $T_{N+1}(\varepsilon, x, y, \zeta)$ sont des fonctions C^∞ de (x, y) et de (ε, x, y).

On a donc ainsi obtenu le développement pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^d$:

$$\text{(3.46)} \qquad E_x(e^{i\zeta((X_1^\varepsilon - y)/\varepsilon)} e^{-F(x, y, X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2}) = e^{-(a(x, y)/\varepsilon^2)} \left(\sum_0^N \alpha_m(x, y, \zeta)\, \varepsilon^m + \varepsilon^{N+1} T_{N+1}(\varepsilon, x, y, \zeta) \right)$$

avec :

$$\sup_{\varepsilon \leqq \varepsilon_0} \sup_{x, y \in U \times V} |T_{N+1}(\varepsilon, x, y, \zeta)| < \infty \quad \text{(par 3.40).}$$

Alors, la symétrie de la loi du mouvement brownien montre que :

(3.47) $\alpha_m(x, y, \zeta)$ est une fonction impaire de ζ, si m est impair en effet $\zeta \to E_x(e^{i\zeta((X_1^\varepsilon - y)/\varepsilon)} e^{-F(x, y, X_1^\varepsilon)/\varepsilon^2})$ est une fonction paire de ζ.

(*c*) Inversion de Fourier :

Il reste à intégrer en ζ le développement (3.46) pour obtenir grâce à (3.9) le développement de $p_\varepsilon(x, y)$. Pour cela nous allons montrer grâce au calcul de Malliavin et au lemme (3.26) que :

LEMME (3.48) :

1) Pour tout $p\in\mathbb{N}$, tout $\alpha\in\{1, \ldots, d\}^k$, $\beta\in\{1, \ldots, d\}^l$ il existe $K_p(\alpha, \beta)$ tel que :

$$\forall\zeta\in\mathbb{R}^d \sup_{x,\, y\in U\times V} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \alpha_m(x, y, \zeta)| \leqq \frac{K_p(\alpha, \beta)}{\|\zeta\|^{2p}}(\|\zeta\|_\wedge 1)^{m+k+l}.$$

2) Pour tout $p\in\mathbb{N}$, $N\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\{1, \ldots, d\}^d$, $\beta\in\{1, \ldots, d\}^l$, $m\in\mathbb{N}$ il existe $\varepsilon_0>0$ et $K=K(p, N, \alpha, \beta, m)$ tel que :

$$\forall\zeta\in\mathbb{R}^d \sup_{\varepsilon\leqq\varepsilon_0} \sup_{x,\, y} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\varepsilon^m T_{N+1}(\varepsilon, x, y, \zeta)| \leqq \frac{K}{\|\zeta\|^{2p}}(\|\zeta\|_\wedge 1)^{(N+1)+k+l}.$$

Preuve du lemme (3.48). — Ce lemme est fondé sur l'intégration par parties du Calcul de Malliavin : soit ψ une fonction sur $\mathscr{C}$, régulière au sens de Malliavin et telle que :

$$E(|\psi|^q)+E(|D\psi|_{HS}^q) < \infty \quad \text{avec } q > 1$$

(*i.e.* $\psi\in\mathbb{D}_{q,1}$ avec les notations de [20]).

Soit F une fonction à croissance lente sur $\mathbb{R}^d$, on a :

$$E(\partial_{u_i} F(g_1^{(1)})\psi)=E(F(g_1^{(1)})\, l_i(\psi))$$

(ici on ne note pas la dépendance en x, y de $g_1^{(1)}$)

où

$$l_i(\psi)=-\sum_{j=1}^d \langle D(\gamma^{ij}\psi), Dg_1^{(1)}\rangle_H+\gamma^{ij}\psi\mathscr{L}g_1^{(1)j}$$

où $\mathscr{L}$ est l'opérateur de Ornstein-Uhlenbeck, et (γ^{ij}) est l'inverse de la matrice de Malliavin de $g_1^{(1)}$ à savoir de sa matrice de covariance usuelle $C_1^{h(x,y),x}$ que nous noterons ici (σ_{ij}).

On peut alors, comme dans [20] p. 54, réécrire :

$$l_i(\psi)=-\sum_{j=1}^d\left(\sum_{k,\, l=1}^d -\psi\gamma^{ik}\gamma^{jl}\langle D\sigma^{k,l}, Dg_1^{(1)j}\rangle+\gamma^{ij}\langle D\psi, Dg_1^{(1)}\rangle\right)+\gamma^{ij}\psi\mathscr{L}g_1^{(1)j}.$$

Donc si $r<q$ et si $1/p=1/r-1/q$, on a :

$$E(|l_i(\psi)|^r)^{1/r} \leqq K_p((E|\psi|^q)^{1/q}+E(|D\psi|_{HS}^q)^{1/q})$$

où K_p peut être contrôlé uniformément en x, y, puisqu'il dépend des normes L^p de $Dg_1^{(1)}$ qui sont uniformément majorées par le lemme (3.10), (γ^{ij}) et (σ^{ij}) étant ici des matrices déterministes variant continûment avec x, y par le lemme.

On peut évidemment itérer cette procédure et, si $\sum_{j=0}^n E(|D^j\psi|_{HS}^q)<\infty$, écrire :

$$E(\partial^\alpha F(g_1^{(1)})\psi)=E(F(g_1^{(1)})\, l_\alpha(\psi))$$

avec

$$E(l_\alpha(\psi)|^r)^{1/r} \leqq K \sum_{j=0}^{n} E(|D^j \psi|_{HS}^q)^{1/q}$$

où K est contrôlé uniformément en x, y.

Si l'on considère la fonction $F(u)=e^{i\zeta u}$ ceci donne

$$\left| E\left(\left(\sum_1^d \partial_{u_i}^2\right)^p . F(g_1^{(1)})\right)\right| \leqq K \sum_{j=0}^{2p} E(|D^j \psi|_{HS}^q)^{1/q}$$

et donc :

$$|E(e^{i\zeta g_1^{(1)}}.\psi)| \leqq \frac{K}{\|\zeta\|^{2p}} \sum_{j=0}^{2p} E(D^j \psi|_{HS}^q)^{1/q}.$$

Il suffit de considérer alors les fonctionnelles :

$$\psi_1 = \partial_x^\alpha \partial_j^\beta \partial_\varepsilon^m \chi(0, x, y, \zeta)$$

puis

$$\psi_2 = \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\varepsilon^m (S_{N+1}(\varepsilon, x, y, \zeta) e^{i\zeta g_1^{(1)}(x, y)}) . e^{-i\zeta g^{(1)}.(x, y)}$$

pour montrer le 1) et 2) du lemme (3.48) grâce aux majorations 1) et 2) du lemme 3.36.

Si l'on prend dans le lemme (3.48) $2p > d+(N+1)+k+l$, on déduit du lemme que l'on peut intégrer le développement (3.46) et obtenir par (3.9) :

$$(3.49)\qquad p_\varepsilon(x, y) e^{-F(x, y, y)/\varepsilon^2} = e^{-(a(x, y)/\varepsilon^2)} \frac{1}{\varepsilon^d}\left(\sum_0^N \varepsilon^m \beta_m(x, y) + \varepsilon^{N+1} t_{N+1}(\varepsilon, x, y)\right)$$

avec :

$$(3.50)\qquad \beta_m(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\zeta\, \alpha_m(x, y, \zeta)$$

et donc $\beta_m \equiv 0$ pour m impair par (3.47), et

$$(3.51)\qquad t_{N+1}(\varepsilon, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\zeta\, T_{N+1}(\varepsilon, x, y, \zeta).$$

Le 2) du Lemme (3.48) montre donc que :

$$(3.52)\qquad \sup_{\varepsilon \leqq \varepsilon_0}\ \sup_{x, y \in U\times V} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\varepsilon^m t_{N+1}(\varepsilon, x, y)| < \infty.$$

En rappelant que $a(x, y) = F(x, y, y) + (1/2) d^2(x, y)$, on a bien le développement cherché, en prenant $N=2n+1$:

$$p_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\varepsilon^d} e^{-(d^2(x, y)/2\varepsilon^2)}\left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^{2k} \beta_{2k}(x, y) + \varepsilon^{2n+2} t_{2n+2}(\varepsilon, x, y)\right)$$

et donc en posant $\varepsilon^2 = t$:

$$(3.53) \qquad p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{t^d}} e^{-(d^2(x, y)/2t)} \left(\sum_{k=0}^{n} t^k c_k(x, y) + t^{n+1} r_{n+1}(t, x, y) \right)$$

en posant bien sûr : $c_k(x, y) = \beta_{2k}(x, y)$ et

$$r_{n+1}(t, x, y) = t_{2n+2}(\sqrt{t}, x, y)$$

d_k est bien une fonction C^∞ de x, y, et

$$(3.54) \qquad \sup_{t \leqq t_0} \sup_{x, y \in U \times V} (\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^m r_{n+1}(t, x, y) | < \infty.$$

Enfin on peut donner une expression « explicite » de $c_0(x, y)$: on a

$$c_0(x, y) = \frac{1}{2\pi^d} \int E_x(e^{i\zeta \cdot g_1^{(1)}(x, y)} e^{-U(0, x, y)}) d\zeta.$$

Or $g_1^{(1)}(x, y)$ est une gaussienne centrée de covariance $C_1^{h(x, y), x}$ d'où :

$$c_0(x, y) = \frac{1}{2\pi^d} \int d\zeta \int e^{i\zeta z} E_x(e^{-U(0, x, y)} | g_1^{(1)}(x, y) = z) \frac{e^{-(1/2) \langle C_1^{h(x, y), x} \cdot z, z \rangle^2}}{\sqrt{2\pi^d} \sqrt{\det C_1^{h(x, y), x}}} dz$$

d'où, encore par inversion de Fourier :

$$(3.55) \qquad c_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^d}} (\det C_1^{h(x, y), x})^{-1/2} E(e^{-U(0, x, y)} | g_1^{(1)}(x, y) = 0).$$

Sur cette expression on vérifie évidemment que $c_0(x, y) > 0$. Le théorème est ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AZENCOTT, *Grandes déviations et applications* (*École d'été de Saint-Flour VIII, Lecture Notes in Math.*, n° 774, Springer-Verlag, 1980).

[2] R. AZENCOTT, *Formule de Taylor stochastique et développement asymptotiques d'intégrales de Feynman* (*Séminaire de Probabilités XVI* (1980-1981), *Lecture Notes in Math.*, n° 921, p. 237-284, Springer-Verlag).

[3] R. AZENCOTT, *Densité des diffusions en temps petit : développements asymptotiques* (*Séminaire de Probabilités* (1982-1983), *Lecture Notes in Math.*, n° 1059, p. 402-498, Springer Verlag).

[4] R. AZENCOTT et Al, *Géodésiques et diffusions en temps petit* (*Astérisque* 1984-1985, S.M.F., 1981).

[5] G. BEN AROUS, *Flots et séries de Taylor stochastiques* [*J. Probability Theory and Related Fields* (à paraître)].

[6] G. BEN AROUS, *Méthode de Laplace et de la phase stationnaire pour des diffusions dégénérées* (à paraître).

[7] G. BEN AROUS, *Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique sur la diagonale* [*Ann. de l'Institut Fourier* (à paraître)].

[8] J. M. BISMUT, *Large Deviations and Malliavin calculus* (*Progress in Maths*, n° 45, Birkhaüser Basel, 1984).

[9] H. DOSS, *Démonstration probabiliste de certains développements asymptotiques quasi classiques* (*Bull. Sc. Math.*, 2ᵉ série, vol. 109, 1985, p. 179-208).

[10] B. GAVEAU, *Principe de moindre action, propagation de la chaleur, estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents*, (Acta Math., vol. 139, p. 96-153, 1977).

[11] Y. KANNAI, *Off Diagonal Short Time Asymptotics for Solutions of Diffusion Equations* (*Comm. in P.D.E.*, vol. 2 (8), p. 781-830, 1977).

[13] S. KUSUOKA et D. W. STROOCK, *Applications of the Malliavin Calculus*, Part 1. (*Proceedings of the conference at Katata* (1982). Kinokuniya publishing Co. Tokyo and New York.

[14] R. LÉANDRE, *Majoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénérée. J. of Probability Theory and Related Fields*, vol. 76, 1987).

[15] R. LÉANDRE, *Minoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénérée* (*J. Funct. Anal.*, vol. 74, oct. 1987, p. 399-414).

[16] R. LÉANDRE, *Développement asymptotique de la densité de diffusions dégénérées* (*J. Probability Theory and Related Fields*, vol. 76, 1987, p. 341-358).

[17] S. A. MOLCHANOV, *Diffusion Processes and Riemannian Geometry* (*Russian Math. Survey*, vol. 30, p. 1-53, 1975).

[18] L. P. ROTSCHILD, E. M. STEIN, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups* (*Acta Math.*, vol. 137, p. 247-320, 1976).

[19] S. R. S. VARADHAN, *Diffusion Processes in a Small Time Interval* (*Comm. in pure and applied Maths*, vol. 20, p. 659-685, 1967).

[20] S. WATANABE, *Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus*, Published for the Tata institute, Bombay (1984), Springer-Verlag.

(Manuscrit reçu le 15 octobre 1986,
révisé le 25 mars 1988).

G. BEN AROUS,
Centre de Mathématiques appliquées,
École Normale Supérieure,
Paris.