ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GUY DAVID

Opérateurs d'intégrale singulière sur les surfaces régulières

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 21, nº 2 (1988), p. 225-258

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_2_225_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 21, 1988, p. 225 à 258.

OPÉRATEURS D'INTÉGRALE SINGULIÈRE SUR LES SURFACES RÉGULIÈRES

PAR GUY DAVID

Introduction

L'objet de ce texte est de trouver une classe assez large de surfaces k-dimensionnelles dans $\mathbb{R}^n$ sur lesquelles les opérateurs d'intégrale singulière naturels soient bornés sur L^2. La classe des surfaces qui nous intéresse est celle des surfaces qui sont paramétrées par une fonction lipschitzienne $z:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ telle que, de surcroît, $|\{x\in\mathbb{R}^k ; z(x)\in B\}| \leqq C\,r(B)^k$ pour toute boule B de $\mathbb{R}^n$, et en notant $r(B)$ le rayon de B.

Une telle surface (ou, plus précisément, une telle fonction z) sera appelée une surface régulière par analogie avec le cas où $k=1$, $n=2$ des courbes régulières d'Ahlfors. Nous montrerons que si z définit une surface régulière, et si $K:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ est une fonction C^∞, impaire, et homogène de degré $-k$, alors le noyau $K(z(x)-z(y))$ définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^k)$. Ainsi, si $k=n-1$, le potentiel de double-couche définit un opérateur borné sur $L^2(S)$ lorsque S est une surface régulière de dimension $n-1$.

Les techniques utilisées sont, pour l'essentiel, les mêmes que celles qui ont servi dans [D 1] pour traiter le cas où $k=1$ et $n=2$. Ce sont des méthodes de variable réelle du type de celles utilisées pour la théorie standard des opérateurs de Calderón-Zygmund. On se servira en particulier du lemme du soleil levant et des inégalités aux bons λ pour ramener l'étude d'une surface régulière à celle d'un graphe lipschitzien. Nous rappelons aux paragraphes I et II les outils de base destinés à remplacer la théorie classique des opérateurs de Calderón-Zygmund: une fonction maximale appropriée et le théorème maximal qui lui correspond, puis l'équivalent dans notre cas de l'inégalité de Cotlar (au paragraphe 2).

On introduit au paragraphe 3 la notion de θ-décomposition: si, pour tout cube Q de $\mathbb{R}^k$, la surface z coïncide sur une partie significative de Q avec une fonction $\tilde{z}$ pour laquelle l'opérateur d'intégrale singulière est borné, alors la même chose est vraie pour z. (Ces trois paragraphes sont très peu différents de ce qui est fait dans [D1].)

Les paragraphes 4 et 5 sont là pour nous aider à trouver des θ-décomposition de surfaces régulières; on y prouve que, sous des conditions raisonnables, on peut étendre une surface régulière donnée sur un ensemble E en une surface régulière définie sur $\mathbb{R}^k$

tout entier. Cela nous permet, au paragraphe 6, de démontrer le résultat principal en θ-décomposant toute surface régulière.

Le paragraphe 7 est consacré à quelques remarques [notamment le fait que, lorsque z est régulière, la mesure image de la mesure de Lebesgue par z est équivalente à la mesure de surface sur $z(\mathbb{R}^k)$]. On y explique un peu pourquoi la notion de régularité n'est pas trop loin d'être nécessaire.

Enfin, on indique au paragraphe 8 les modifications à faire pour étendre le théorème au cas de surfaces paramétrées par une fonction z de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas nécessairement lipschitzienne, mais qui est telle que $|\nabla z|^k$ est dominé par un poids de Muckenhoupt. (Nous appellerons les surfaces ainsi obtenues ω-régulières.) Ce paragraphe est motivé par le fait que, en dimension $k=2$, les surfaces «corde-arc avec petite constante» de S. Semmes sont ω-régulières (*voir* [S1]).

L'auteur désire remercier S. Semmes, R. Coifman, et P. Jones pour de nombreuses et fructueuses conversations.

1. Notations et définitions; fonction maximale

On s'intéresse à des surfaces de dimension k dans un espace $\mathbb{R}^n$ de dimension $n \geqq k$. Pour être plus précis, ces surfaces ne nous seront pas données de manière intrinsèque, mais par un paramétrage $x \to z(x)$, que l'on supposera de plus lipschitzien. Pour simplifier les notations, nous entendrons carrément par «surface de dimension k» une fonction $z: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$.

Définition 1. — Soit $z: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Nous dirons que z est une «surface régulière» s'il existe $C_0 \geqq 0$ et $M \geqq 0$ telles que

(1) $x \to z(x)$ est M-lipschitzienne, et

(2) pour tout $w \in \mathbb{R}^n$ et tout $r>0$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^k; z(x) \in B(w, r)\}| \leqq C_0 r^k,$$

où $B(w, r)$ désigne la boule de centre w et de rayon r.

Le paramétrage par x d'une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$, un plongement bi-lipschitzien de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$ (l'équivalent d'une courbe corde-arc) sont deux exemples simples de surfaces régulières.

Nous reprenons dans ce paragraphe les notations introduites dans [D1], qui nous permettront de faire appel, dans la situation un peu plus compliquée de noyaux qui peuvent avoir des singularités hors de la diagonale, à la théorie classique des opérateurs de Calderón-Zygmund. L'essentiel de ce paragraphe, et du suivant, est une extension facile des résultats préliminaires de [D1].

DÉFINITION 2. — On appellera Δ l'ensemble des mesures de Radon positives μ sur $\mathbb{R}^n$ telles qu'il existe $C_0 \geqq 0$ tel que

$$\mu(B(w, r)) \leqq C_0 r^k \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{R}^n \text{ et tout } r > 0. \tag{3}$$

Exemple. — Si z est une surface régulière, on associe à z une mesure μ définie par

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(w)\, d\mu(w) = \int_{\mathbb{R}^k} f(z(x))\, dx.$$

En fait, dire que $\mu \in \Delta$ est la même chose que dire que z vérifie (2).

Notons encore que μ n'est pas tout-à-fait la mesure de surface sur $z(\mathbb{R}^k)$. En particulier, aux points où z serait stationnaire, μ serait bien plus grande que la mesure de surface. Cependant, de tels points ne peuvent exister si l'on ne veut pas contrarier (2) (voir le paragraphe 7).

DÉFINITION 3. — On notera Σ l'ensemble des mesures $\mu \in \Delta$ telles que, pour un certain $\gamma > 0$,

$$\mu(B(w, r)) \geqq \gamma r^k \text{ pour tout } w \text{ dans le support de } \mu \text{ et tout } r > 0. \tag{4}$$

A nouveau, si z est régulière, la mesure μ qui lui est associée est dans Σ car (4) découle de (1).

DÉFINITION 4. — Si μ est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n$, et si $f \in L^1_{\text{loc}}(d\mu)$, on pose

$$M_\mu f(z) = \sup_{r > 0} \frac{1}{r^k} \int_{|z - w| < r} |f(w)|\, d\mu(w). \tag{5}$$

Bien entendu, la fonction $M_\mu f$ est semi-continue inférieurement. Le théorème maximal classique a un analogue dans le cas de M_μ :

PROPOSITION 1. — *Soient* μ_1 *et* $\mu_2 \in \Delta$ *et* $1 < p \leqq +\infty$.
Il existe $C = C(\mu_1, \mu_2, p)$ *tel que, pour* $f \in L^p(d\mu_1)$

$$\| M_{\mu_1} f \|_{L^p(d\mu_2)} \leqq C \| f \|_{L^p(d\mu_1)}. \tag{6}$$

La démonstration est tout-à-fait standard, et se fait en utilisant l'interpolation entre L^1_{faible} et L^∞, et le lemme de recouvrement de Besicovitch. On peut la trouver dans le cas où $k = 1$ et $n = 2$, dans [D1], p. 162-163 ou [D2], p. 22-23. Le cas général se traite pareillement.

2. Opérateur maximal

On se donne maintenant une fonction $K(z, w)$, définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta$ (où Δ est la diagonale $\{z=w\}$), et telle que

$$K(z, w) \leqq C|z-w|^{-k} \tag{7}$$

et

$$|\nabla_z K(z, w)|+|\nabla_w K(z, w)| \leqq C|z-w|^{-k-1} \quad \text{pour} \quad z \neq w. \tag{8}$$

Pour l'étude des surfaces régulières, $K(z, w)$ sera en fait de la forme $K(z-w)$, où $K(u)$ est une fonction C^∞, homogène de degré $-k$, et impaire. Cependant, la généralité un peu inutile que nous introduisons ici ne gène pas.

Pour $\mu \in \Delta$, $f \in L^2(d\mu)$, $\varepsilon>0$ et $z \in \mathbb{R}^k$, on définit

$$T_\mu^\varepsilon f(z)=\int_{|z-w|>\varepsilon} K(z, w) f(w)\, d\mu(w). \tag{9}$$

Notons pour nous rassurer que l'intégrale a un sens, car $K(z, w)$ est dans $L^2(d\mu)$ à l'∞. En effet, $|K(z, w)|^2$ est de l'ordre de 2^{-2kl} lorsque w est dans l'anneau $\{2^l \leqq|z-w| \leqq 2^{l+1}\}$, et la μ-mesure de cet anneau est inférieure à $C\, 2^{kl}$.

On définit aussi un opérateur maximal par

$$T_\mu^* f(z)=\sup_{\varepsilon>0}|T_\mu^\varepsilon f(z)|. \tag{10}$$

On notera encore $\tilde{T}_\mu^\varepsilon$ et $\tilde{T}_\mu^*$ les opérateurs tronqués et maximal définis à partir de la fonction $\tilde{K}(z, w)=K(w, z)$.

Proposition 2. — *Soit* K *une fonction vérifiant* (7) *et* (8). *Soient* $\mu \in \Delta$ *et* $\sigma \in \Sigma$. *On suppose que, pour tout* $1<p<+\infty$, *il existe* C_p *tel que, pour* $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\|T_\sigma^* f\|_{L^p(d\sigma)} \leqq C_p\|f\|_{L^p(d\sigma)}$.

Alors, pour tout $1<p<+\infty$, *il existe* C_p' *tel que*

$$\|T_\sigma^* f\|_{L^p(d\mu)} \leqq C_p'\|f\|_{L^p(d\sigma)} \tag{11}$$

et

$$\|T_\mu^* f\|_{L^p(d\sigma)} \leqq C_p'\|f\|_{L^p(d\mu)} \quad \textit{pour} \quad f \in C_c(\mathbb{R}^n). \tag{12}$$

[*Ici,* $C_c(\mathbb{R}^n)$ *désigne l'ensemble des fonctions continues à support compact.*]

Remarque. — Pour le moment, nous n'avons besoin de formuler aucune condition particulière sur $K(z, w)$. Ces conditions viendront d'elles-mêmes lorsqu'il s'agira de prouver la continuité de T_σ^* sur $L^p(d\sigma)$.

Bien que la démonstration de cette proposition soit, pour l'essentiel, un recopiage du cas où $k=1$ et $n=2$, nous en donnons les étapes essentielles.

LEMME 1. — *Il existe une constante* $C \geqq 0$ *telle que, si* μ *est une mesure de Radon positive sur* $\mathbb{R}^n$, *si* $z_0 \in \mathbb{R}^n$ *et si* $r>0$, *on ait*

$$r \int_{|z-z_0|>r} |f(z)| . |z-z_0|^{-k-1} d\mu(z) \leqq C\, M_\mu f(z_0)$$

pour $f \in L^1_{\text{loc}}(d\mu)$.

La démonstration du lemme est immédiate. On découpe $\{z \in \mathbb{R}^k ; |z-z_0|>r\}$ en la réunion des couronnes $\{z \in \mathbb{R}^k ;\ 2^j r < |z-z_0| \leqq 2^{j+1} r\}$; l'intégrale sur la j-ième couronne est dominée par

$$C(2^j r)^{-k-1} \int_{|z-z_0| \leqq 2^{j+1} r} |f(z)|\, d\mu(z) \leqq C\, 2^{-j} r^{-1} M_\mu f(z_0),$$

et on en déduit le lemme.

LEMME 2. — *Soient* $\sigma \in \Sigma$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$ *et* d *la distance de* z_0 *au support de* σ. *Alors, pour* $r \geqq 2d$, $\sigma(B(z_0, r)) \geqq (\gamma/2^k) r^k$.

En effet, $B(z_0, r)$ contient une boule centrée en un point du support de σ, et de rayon $r/2$.

LEMME 3. — *Soient* K *et* σ *comme dans la proposition. Il existe une constante* $C \geqq 0$ *telle que*

$$T^*_\sigma f(z_0) \leqq CM_\sigma(T^*_\sigma f)(z_0) + CM_\sigma f(z_0) \quad \textit{pour tout } f \in C_c(\mathbb{R}^n) \textit{ et tout } z_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Il s'agit de montrer que, pour tout $\varepsilon>0$ et tout z_0,

$$(13) \qquad |T^\varepsilon_0 f(z_0)| \leqq CM_\sigma(T^*_\sigma f)(z_0) + CM_\sigma f(z_0),$$

avec une constante C qui ne dépend pas de ε.

Écrivons $f = f_1 + f_2$, où $f_1 = f \mathbf{1}_{B(z_0, \varepsilon)}$. Nous avons besoin d'un petit résultat intermédiaire.

LEMME 4. — *Il existe* $C \geqq 0$ *tel que, pour tout* $z \in B(z_0, \varepsilon/2)$,

$$(14) \qquad |T^\varepsilon_\sigma f(z_0)| \leqq T^*_\sigma f(z) + CM_\sigma f(z_0).$$

Pour prouver le lemme 4, on écrit

$$|T^\varepsilon_\sigma f(z_0)| \leqq |T^{\varepsilon/3}_\sigma f(z)| + \left| T^{\varepsilon/3}_\sigma f(z) - \int K(z, w) f_2(w)\, d\sigma(w) \right|$$
$$+ \left| \int K(z, w) f_2(w)\, d\sigma(w) - \int K(z_0, w) f_2(w)\, d\sigma(w) \right|.$$

Le premier membre du terme de droite est inférieur à $T^*_\sigma f(z)$. Le second terme est $\left| \int_E K(z, w) f(w)\, d\sigma(w) \right|$, où $E = \{ w \in B(z_0, \varepsilon) \setminus B(z, \varepsilon/3) \}$, et est aisément majoré par

$CM_\sigma f(z_0)$. Le dernier terme est inférieur à

$$\int |K(z,w)-K(z_0,w)|.|f_2(w)|\,d\sigma(w)$$

$$\leqq C\int_{|w-z_0|>\varepsilon} \varepsilon\,|z_0-w|^{-k-1}\,|f(w)|\,d\sigma(w) \leqq CM_\sigma f(z_0)$$

à cause du lemme 1. On en déduit le lemme 4.

Revenant à la démonstration du lemme 3, limitons-nous d'abord au cas où $\varepsilon \geqq 4d$, où d est la distance de z_0 au support de σ. Prenons alors la moyenne, par rapport à $d\sigma$ et sur $z \in B(z_0, \varepsilon/2)$, des inégalités (14). Il vient

$$|T_\sigma^\varepsilon f(z_0)| \leqq \sigma(B(z_0,\varepsilon/2))^{-1}\int_{|z-z_0|<\varepsilon/2} T_\sigma^* f(z)\,d\sigma(z) + CM_\sigma f(z_0)$$

$$\leqq \frac{2^k}{\gamma}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-k}\int_{|z-z_0|<\varepsilon/2} T_\sigma^* f(z)\,d\sigma(z) + CM_\sigma f(z_0)$$

(à cause du lemme 2)

$$\leqq \frac{2^k}{\gamma} M_\sigma(T_\sigma^* f)(z_0) + CM_\sigma f(z_0),$$

ce qui est l'inégalité (13).

Supposons maintenant que $d/2 \leqq \varepsilon < 4d$. Alors

$$|T_\sigma^\varepsilon f(z_0)| \leqq |T_\sigma^{4d} f(z_0)| + \int_{\varepsilon \leqq |z_0-w| \leqq 4d} |K(z_0,w)|.|f(w)|\,d\sigma(w)$$

$$\leqq \frac{2^k}{\gamma} M_\sigma(T_\sigma^* f)(z_0) + CM_\sigma f(z_0),$$

et (13) est établi lorsque $d/2 \leqq \varepsilon$.

Lorsque $\varepsilon < d/2$, on observe que $T_\sigma^\varepsilon f(z_0) = T_\sigma^{d/2} f(z_0)$, de sorte que (13) est vrai en toute généralité, ce qui achève de démontrer le lemme 3.

L'inégalité (11) est maintenant une conséquence facile du lemme 3 et de la proposition 1 : si $f \in L^p(d\sigma)$, alors $M_\sigma f \in L^p(d\mu)$ et [par continuité de T_σ sur $L^p(d\sigma)$], $T_\sigma^* f \in L^p(d\sigma)$, donc $M_\sigma(T_\sigma^* f) \in L^p(d\mu)$.

Entamons maintenant la démonstration de (12). Donnons-nous $\mu \in \Delta$ et $1 < p < +\infty$, et soit q l'exposant conjugué. Grâce à (11), il est clair que les T_σ^ε sont uniformément bornés de $L^q(d\sigma)$ dans $L^q(d\mu)$. Cela signifie que

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_\sigma^\varepsilon f(z)\, g(z)\, d\mu(z) \leqq C \|f\|_{L^q(d\sigma)} \|g\|_{L^p(d\mu)},$$

ou encore que

$$\iint_{|z-w|>\varepsilon} K(z, w)\, g(z) f(w)\, d\sigma(w)\, d\mu(z) \leqq C \|f\|_{L^q(d\sigma)} \|g\|_{L^p(d\mu)},$$

ou encore que les $\bar{T}_\mu^\varepsilon$ sont uniformément bornés de $L^p(d\mu)$ dans $L^p(d\sigma)$ [rappelons que les $\bar{T}_\mu^\varepsilon$ sont définis comme les T_μ^ε, mais avec le noyau $\tilde{K}(z, w) = K(w, z)$]. On peut donc trouver une suite ε_j tendant vers 0 telle que les $\bar{T}_\mu^{\varepsilon_j}$ convergent faiblement vers un opérateur continu, que l'on notera $\bar{T}_\mu$.

Nous avons maintenant besoin d'une inégalité qui permette de dominer l'opérateur $\bar{T}_\mu^*$ à l'aide de $\bar{T}_\mu$.

LEMME 5. — *On se donne $1<r<p$. Alors, si z_0 est dans le support de σ,*

$$\bar{T}_\mu^* f(z_0) \leqq CM_\sigma(\bar{T}_\mu f)(z_0) + CM_\mu f(z_0) + C[M_\mu(|f|^r)]^{1/r}(z_0). \tag{15}$$

Pour démontrer ce lemme, donnons-nous $\varepsilon>0$, et reprenons la décomposition $f=f_1+f_2$, où $f_1 = f\,\mathbf{1}_{B(z_0, \varepsilon)}$. Pour $z \in B(z_0, \varepsilon/2)$,

$$|\bar{T}_\mu^\varepsilon f(z_0) - \bar{T}_\mu f_2(z)| \leqq \int |K(w, z) - K(w, z_0)| . |f_2(w)|\, d\mu(w)$$

$$\leqq CM_\mu f(z_0) \quad \text{comme au lemme 4.}$$

Puisque $f_2 = f - f_1$,

$$|\bar{T}_\mu^\varepsilon f(z_0)| \leqq |\bar{T}_\mu f_2(z)| + CM_\mu f(z_0) \leqq |\bar{T}_\mu f(z)| + |\bar{T}_\mu f_1(z)| + CM_\mu f(z_0).$$

Prenons la moyenne de cette inégalité par rapport à σ et sur la boule $B(z_0, \varepsilon/2) = B$. Il vient

$$|\bar{T}_\mu^\varepsilon f(z_0)| \leqq \sigma(B)^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k M_\sigma(\bar{T}_\mu f)(z_0) + \sigma(B)^{-1} \int_{|z-z_0|<\varepsilon/2} |\bar{T}_\mu f_1(z)|\, d\sigma(z) + CM_\mu f(z).$$

Le premier terme est inférieur à $\gamma^{-1} M_\sigma(\bar{T}_\mu f)(z_0)$ puisque z_0 est dans le support de σ. Il ne reste donc plus qu'à estimer le second terme. Une application de l'inégalité de

Hölder donne le majorant

$$\left\{\sigma(\mathrm{B})^{-1}\int_{|z-z_0|<\varepsilon/2}|\bar{\mathrm{T}}_\mu f_1(z)|^r\,d\sigma(z)\right\}^{1/r}\leqq \mathrm{C}\,\sigma(\mathrm{B})^{-1/r}\|f_1\|_{\mathrm{L}^r(d\mu)}$$

[car $\bar{\mathrm{T}}_\mu$ est continu de $\mathrm{L}^p(d\mu)$ dans $\mathrm{L}^p(d\sigma)$]

$$\leqq \mathrm{C}\,\gamma^{-1/r}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{k/r}\left\{\int_{|z-z_0|<\varepsilon}|f|^r\,d\mu\right\}^{1/r}\leqq \mathrm{C}\,\{\mathrm{M}_\mu(|f|^r)\}^{1/r}(z_0),$$

ce qui démontre le lemme 5.

On déduit du lemme 5 et de la propositon 1 que

$$\|\bar{\mathrm{T}}_\mu^* f\|_{\mathrm{L}^p(d\sigma)}\leqq \mathrm{C}\,\|f\|_{\mathrm{L}^p(d\mu)}. \tag{16}$$

Pour montrer (12), il faut encore se débarasser de la barre. On peut d'abord appliquer (16) au cas où $\mu=\sigma$, ce qui donne la continuité de $\bar{\mathrm{T}}_\sigma^*$ sur $\mathrm{L}^p(d\sigma)$. Il ne reste plus qu'à appliquer ce qui précède à l'opérateur $\bar{\mathrm{T}}$ défini à l'aide de $\mathrm{K}(w, z)$.

3. Effet d'un changement de variable bi-lipschitzien; θ-décompositions

Commençons par vérifier que la composition d'une surface régulière z avec un changement de variable bi-lipschitzien de $\mathbb{R}^k$ n'a que peu d'incidence sur la continuité de l'opérateur T_μ^* sur $\mathrm{L}^p(d\mu)$ (où μ est la mesure associée à z comme au paragraphe 1).

Proposition 3. — *Soit z une surface régulière. Supposons que, si μ est la mesure associée à z, l'opérateur T_μ^* est continu de $\mathrm{L}^p(d\mu)$. Soit $h:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ un homéomorphisme bi-lipschitzien. Alors $\mathrm{Z}=z\circ h$ est aussi une surface régulière, et si ν est la mesure qui lui est naturellement associée, alors T_ν^* est continu sur $\mathrm{L}^p(d\nu)$.*

Rappelons que, si $f\in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^n)$,

$$\mu(f)=\int_{\mathbb{R}^k} f(z(x))\,dx \qquad \text{et} \qquad \nu(f)=\int_{\mathbb{R}^k} f[z(h(x)]\,dx.$$

Comme h est bi-lipschitzienne, on peut trouver $\mathrm{C}>0$ tel que $(1/\mathrm{C})\,\mu\leqq\nu\leqq \mathrm{C}\,\mu$. En particulier, T_μ^* est continu sur $\mathrm{L}^p(d\mu)$ si et seulement si T_ν^* est continu sur $\mathrm{L}^p(d\nu)$. Le fait que Z soit régulière est une conséquence facile des définitions [Z est bien sûr lipschitzienne, et $\nu\in\Delta$ puisque $\mu\in\Delta$].

Avant d'introduire les θ-décompositions, convenons de noter $\mathscr{R}$ la famille des surfaces régulières, et $\mathscr{R}(\mathrm{M}, \mathrm{C}_0)$ la famille des $z\in\mathscr{R}$ qui vérifient (1) et (2) avec les constantes M et C_0.

Définition 5. — *On se donne une famille $\mathscr{F}\subset\mathscr{R}$ de surfaces régulières, et un nombre $\theta\in]0, 1[$. On dira que $z\in\mathscr{R}$ est θ-décomposable dans la famille $\mathscr{F}$ si, pour tout cube* $\mathrm{Q}\subset\mathbb{R}^k$, *on peut trouver* $Z \in \mathscr{F}$ *telle que*

$$|\{x \in Q; Z(x) = z(x)\}| \geqq \theta |Q|.$$

La proposition suivante montre l'usage que l'on compte faire des θ-décompositions.

PROPOSITION 4. — *On se donne une famille* $\mathscr{F} \subset \mathscr{R}(M, C_0)$ *pour un* M *et un* C_0, *et un nombre* $\theta \in]0, 1[$. *On suppose que* $z \in \mathscr{R}$ *est* θ-*décomposable dans la famille* $\mathscr{F}$. *On suppose encore que, pour* $1 < p < +\infty$, *il existe* $A_p \geqq 0$ *tel que, si* $Z \in \mathscr{F}$ *et si* σ *est la mesure qui lui est associée,*

$$\|T_\sigma^* f\|_{L^p(d\sigma)} \leqq A_p \|f\|_{L^p(d\sigma)} \qquad pour \quad f \in C_c(\mathbb{R}^n). \tag{17}$$

Alors, pour tout $1 < p < +\infty$, *il existe* $B_p \geqq 0$ *tel que*

$$\|T_\mu^* f\|_{L^p(d\mu)} \leqq B_p \|f\|_{L^p(d\mu)} \qquad pour \quad f \in C_c(\mathbb{R}^n), \tag{18}$$

où μ *est la mesure associée à* z.

Nous allons en fait prouver un résultat un peu plus général, qui pourra être utilisé plus tard. On pourrait aussi donner une démonstration un peu plus directe utilisant le paramétrage de manière plus explicite.

PROPOSITION 4 bis. — *Soit* $\mu \in \Sigma$ *telle que, pour un* $\theta > 0$ *et pour toute boule* $B \subset \mathbb{R}^n$ *centrée en un point du support de* μ, *on puisse trouver une mesure* $\sigma \in \Sigma$ [*avec* (3) *et* (4) *vérifiés de manière uniforme quand on change* B] *et un ensemble compact* $E \subset B \cap \operatorname{supp} \mu$ *tels qu'on ait à la fois* $\mu(E) \geqq \theta \mu(B)$, $\mathbf{1}_E \mu \leqq \sigma$, *et l'inégalité* (17). *Alors,* (18) *est vérifiée.*

On vérifie aisément en utilisant la définition 1 que les mesures μ et σ de la proposition 4 satisfont aux hypothèses de la proposition 4 *bis* (avec, peut-être, un θ différent).

Démontrons maintenant la proposition.

LEMME 6. — *Avec les notations de la proposition* 4 bis, *on a*

$$\|T_\mu^* f\|_{L^p(d\sigma)} \leqq C_p \|f\|_{L^p(d\mu)} \qquad pour \quad f \in C_c(\mathbb{R}^n).$$

Il suffit d'appliquer la proposition 2.

Rappelons les « inégalités aux bons λ » de Burkholder et Gundy.

LEMME 7. — *Soit* $u : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *une fonction mesurable coïncidant, en dehors d'un compact, avec une fonction de* $L^p(\mathbb{R}^n, d\mu)$. *Soit* $v : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *une fonction de* $L^p(\mathbb{R}^n, d\mu)$. *On suppose qu'il existe* $0 < \nu < 1$ *et, pour tout* $\varepsilon > 0$, *une constante* γ *telle que, pour tout* $\lambda > 0$, *on ait*

$$\mu(\{u(x) > \lambda + \varepsilon\lambda \text{ et } v(x) \leqq \gamma\lambda\}) \leqq (1 - \nu)\, \mu(\{u(x) > \lambda\}). \tag{19}$$

Alors $u \in L^p(\mathbb{R}^n, d\mu)$, *et*

$$\|u\|_{L^p(d\mu)} \leqq C[(1+\varepsilon)^{-p} - (1-\nu)]^{-1/p} \gamma^{-1} \|v\|_{L^p(d\mu)}.$$

On pourra trouver une démonstration de ce lemme dans [D1], p. 171 ou [D2], p. 36.

On se donne maintenant $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, et on voudrait prouver (18). On va appliquer le lemme 7 avec $u(x) = T_\mu^* f(x)$. Vérifions d'abord l'hypothèse qualitative.

LEMME 8. — *Pour $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, la fonction $u(x)$ coïncide, hors d'un compact, avec une fonction de $L^p(\mathbb{R}^n, d\mu)$.*

En effet, si R est assez grand pour que $\operatorname{supp} f \subset B(0, R)$, alors, pour tout w tel que $|w| > 2R$,

$$T_\mu^* f(w) \leqq \int_{|s| \leqq R} |K(w, s)| . |f(s)| \, d\mu(s) \leqq C M_\mu f(w),$$

ce qui démontre le lemme car, en vertu de la proposition 1, $M_\mu f$ est dans $L^p(d\mu)$.

On veut maintenant vérifier que les fonctions

$$u(x) = T_\mu^* f(x) \qquad \text{et} \qquad v(x) = M_\mu f(x) + \{ M_\mu(|f|^r) \}^{1/r}(x),$$

où l'on a choisi $r = p^{1/2}$, vérifient les hypothèses du lemme 7. Notons que

$$\| v \|_{L^p(d\mu)} \leqq \| M_\mu f \|_{L^p(d\mu)} + \{ \| M_\mu(|f|^r) \|_{L^p(d\mu)} \}^{1/r} \leqq C \| f \|_{L^p(d\mu)}$$

grâce à la proposition 1. Il s'agit donc de trouver des constantes ν et $\gamma = \gamma(\varepsilon)$, indépendantes de f, telles que (19) soit satisfaite.

Donnons-nous un $\lambda > 0$, et soit $\Omega = \Omega_\lambda = \{ x \in \mathbb{R}^n, u(x) > \lambda \}$. Recouvrons $\Omega \cap \operatorname{supp} \mu$ par les boules $B(x, 1/2 \operatorname{dist}(x, \Omega^c))$, où $x \in \Omega \cap \operatorname{supp} \mu$ (comme $T_\mu^* f$ est s. c. i., Ω est un ouvert, et les boules ont un rayon non nul). On peut appliquer un lemme de recouvrement à la Vitali et obtenir une suite de points x_i tels que les boules $B_i = B(x_i, 1/2 \operatorname{dist}(x_i, \Omega^c))$ soient disjointes, mais $\Omega \cap \operatorname{supp} \mu \subset \bigcup B(x_i, 5 \operatorname{dist}(x_i, \Omega^c))$ [on utilise par exemple la preuve donnée dans [St], p. 9-10, et le fait que, grâce au lemme 8 et à ce que $\mu \in \Sigma$, les rayons des boules $B(x, 1/2 \operatorname{dist}(x, \Omega^c))$ sont bornés, et qu'on ne peut jamais trouver une infinité de boules disjointes dont les rayons soient $> r_0 > 0$].

Nous allons prouver que pour chaque i, on a

$$\mu(\{ x \in B_i, u(x) \leqq \lambda + \varepsilon\lambda \text{ ou } v(x) > \gamma\lambda \}) > (\theta/2) \mu(B_i). \tag{20}$$

On en déduira en sommant sur i que

$$\mu(\{ x \in \Omega, u(x) \leqq \lambda + \varepsilon\lambda \text{ ou } v(x) > \gamma\lambda \}) > (\theta/2) \sum \mu(B_i) \geqq C^{-1} \theta \sum \{ \mu[B(x_i, 5 \operatorname{dist}(x_i, \Omega^c)] \}$$

(car $\mu \in \Sigma$ et les B_i sont centrées en des points de supp μ) $\geqq C^{-1} \theta \mu(\Omega)$, ce qui entraîne (19) avec $\nu = \theta/C$.

Pour prouver (20), on peut bien sûr se contenter du cas où $v(\xi) \leqq \gamma\lambda$ pour un $\xi \in B_i$. On écrit $f = f_1 + f_2$, où $f_1 = f \mathbf{1}_{B(\xi, R)}$, avec $R = C \operatorname{dist}(x_i, \Omega^c)$ pour un C assez grand. Commençons par majorer $T_\mu^* f_2(x)$. Choisissons $a \in 3 B_i$ tel que $a \notin \Omega$. On vérifie aisément, par un argument analogue à ceux utilisés pour les lemmes 4 et 5, que, pour $x \in B_i$, $T_\mu^* f_2(x) \leqq T_\mu^* f(a) + C M_\mu f(\xi) \leqq \lambda + \varepsilon\lambda/2$ si l'on a choisi γ assez petit. Il ne reste donc plus qu'à prouver que

$$\mu(\{x \in B_i, T_\mu^* f_1(x) \leqq \varepsilon\lambda/2\}) > (\theta/2)\,\mu(B_i). \tag{21}$$

On utilise maintenant la mesure σ et l'ensemble E donnés par l'hypothèse de la proposition (appliquée à B_i); Comme $\mu(E) \geqq \theta\mu(B_i)$, il suffit de montrer que $\mu(\{x \in E, T_\mu^* f_1(x) > \varepsilon\lambda/2\}) < (\theta/2)\,\mu(B_i)$.

Or le premier terme est, par définition de E, inférieur à

$$\begin{aligned} C\,\sigma(\{x, [T_\mu^* f_1(x)]^r > \varepsilon^r \lambda^r/2^r\} &\leqq C\,2^r \varepsilon^{-r} \lambda^{-r} \{\|T_\mu^* f_1\|_{L^r(d\sigma)}\}^r \\ &\leqq C\,\varepsilon^{-r} \lambda^{-r} \{\|f_1\|_{L^r(d\mu)}\}^r \quad \text{(grâce au lemme 6)} \\ &\leqq C\,\varepsilon^{-r} \lambda^{-r} R^k M_\mu(|f|^r)(\xi) \leqq C\,\varepsilon^{-r} \gamma^r \mu(B_i) < (\theta/2)\,\mu(B_i) \end{aligned}$$

si l'on a pris γ assez petit. On a montré que les fonctions u et v satisfont aux conditions du lemme 7; on en déduit les propositions 4 et 4 *bis*.

4. Prolongement d'une surface régulière

Nous aurons besoin, lorsque nous voudrons ramener l'étude d'opérateurs sur des surfaces régulières au cas où ces surfaces sont des graphes lipschitziens, de trouver des θ-décompositions de surfaces régulières. Pour pouvoir faire ces θ-décompositions, il sera utile de pouvoir prolonger une fonction z, donnée sur un ensemble E, en une surface régulière.

PROPOSITION 5. — *On suppose que $k < n/2$. On se donne une surface régulière z, un ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^k$, et une fonction M-lipschitzienne $\hat{z} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, telle que $\hat{z}(x) = z(x)$ pour tout $x \in E$. On se donne aussi $\varepsilon > 0$.*

Alors on peut trouver une fonction $(M+1)$-lipschitzienne Z, qui est aussi une surface régulière, telle que $|Z(x) - \hat{z}(x)| \leqq \varepsilon \operatorname{dist}(x, E)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^k$.

Si, de plus, pour un certain nombre de coordonnées m, on a $\hat{z}_m(x) = x_m$ pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, alors on peut choisir la fonction Z de telle sorte que

$$1 - \varepsilon \leqq \frac{\partial Z_m}{\partial x_m}(x) \leqq 1 + \varepsilon, \qquad \textit{et} \qquad \left|\frac{\partial Z_m}{\partial x_j}(x)\right| \leqq \varepsilon \quad \textit{pour tout } j \neq m. \tag{22}$$

Notons, avant de commencer la démonstration, que nous n'avons besoin d'aucune hypothèse sur la taille de E : l'existence de z nous suffira pour éviter que la surface que l'on construira se recoupe trop souvent.

Nous noterons $\mathscr{V} = z(\mathbb{R}^k)$ et, pour $w \in \mathbb{R}^n$, $d(w) = \operatorname{dist}(w, \mathscr{V})$ la distance de w à $\mathscr{V}$. Le lemme suivant montre que $\mathscr{V}$ n'est pas trop différent d'une variété affine de dimension k.

LEMME 9. — *Il existe $C \geqq 0$ tel que, si $N \geqq 1$ et si $B \subset \mathbb{R}^n$ est une boule de rayon $r(B)$, alors $\{w \in B; d(w) \leqq r(B)/N\}$ peut être recouvert par un nombre inférieur à CN^k de cubes d'arête $r(B)/N$.*

Recouvrons B par un réseau de cubes q_i d'arête $r(\mathrm{B})/\mathrm{N}$. Pour chacun des q_i contenant un point de $\mathscr{V}$, on a

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^k ; z(x) \in 2 q_i\}\right| \geqq \frac{1}{\mathrm{C}}\left[\frac{r(\mathrm{B})}{\mathrm{N}}\right]^k$$

car z est lipschitzienne. Soit m le nombre des q_i du réseau qui rencontrent $\mathscr{V}$. Chaque cube $2 q_j$ ne rencontre pas plus de C tels q_i, de sorte que

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^k ; z(x) \text{ est dans l'un des } 2 q_j\}\right| \geqq \frac{1}{\mathrm{C}} m\left(\frac{r(\mathrm{B})}{\mathrm{N}}\right)^k .$$

Or, z est régulière, de sorte que

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^k ; z(x) \text{ est dans l'un des } 2 q_j\}\right| \leqq\left|\{x \in \mathbb{R}^k ; z(x) \in 2 \mathrm{B}\}\right| \leqq \mathrm{C}\, r(\mathrm{B})^k .$$

Par conséquent, $m \leqq \mathrm{CN}^k$, et on en déduit le lemme.

Pour la suite, nous pouvons supposer que E n'est pas vide. Soit $\mathcal{O}$ le complémentaire de E; nous appellerons $(\mathrm{Q}_j)_{j \in \mathrm{J}}$ la collection des cubes dyadiques fermés Q tels que $\mathrm{C}_1 \mathrm{Q} \subset \mathcal{O}$, et qui sont maximaux parmi les cubes dyadiques ayant cette propriété. Notons que les Q_j sont un recouvrement de $\mathcal{O}$ en cubes d'intérieurs disjoints et que, si C_1 est choisi assez grand, on a les deux propriétés suivantes. D'une part, la distance de Q_j à E est équivalente à l'arête R_j de Q_j; d'autre part, si Q_i et Q_j sont adjacents (ou même si la distance de Q_i à Q_j est inférieure au diamètre de Q_j), alors $(1/2)\, \mathrm{R}_j \leqq \mathrm{R}_i \leqq 2 \mathrm{R}_j$.

Pour $j \in \mathrm{J}$, notons Q_j^0 l'ensemble des sommets de Q_j et, plus généralement, $\mathrm{Q}_j^l\ (l \leqq k)$ l'ensemble des faces de dimension l de Q_j. Notons aussi $\overline{\mathrm{Q}}_j^0$ la réunion de Q_j^0 et de l'ensemble des centres des faces des Q_j^l. Enfin, $\overline{\mathrm{Q}}^0$ sera l'union des $\overline{\mathrm{Q}}_j^0$, $j \in \mathrm{J}$, et Q^l, $l \leqq k$, sera l'union des Q_j^l.

La fonction Z que nous allons construire sera définie à partir de ses valeurs sur $\overline{\mathrm{Q}}^0$ par le procédé que nous allons décrire. On prendra toujours $\mathrm{Z}(x)=\hat{z}(x)=z(x)$ pour $x \in \mathrm{E}$, de sorte qu'il ne faut définir Z que sur les Q_j. On définit la fonction Z successivement sur l'union des arêtes (les faces de dimension 1) des Q_j, puis sur l'union des faces de dimension 2 des Q_i, et ainsi de suite.

Supposons que l'on ait déjà défini Z sur toutes les faces de dimension $l-1$ (où $l \geqq 1$) des Q_j, et soit $\mathrm{F} \in \mathrm{Q}^l$ une face de dimension l.

Il peut se faire que F ne contienne strictement aucune face de même dimension [on dira dans ce cas que F est une face minimale]. Dans ce cas, on définit Z sur F à partir de ses valeurs au centre x_0 de F et sur le bord $\partial \mathrm{F}$ de F en décidant que Z est affine sur chaque segment joignant x_0 à un point du bord. Comme $x_0 \in \overline{\mathrm{Q}}^0$ et $\partial \mathrm{F}$ est une réunion de faces de dimension $l-1$, cela permet de définir, de manière non équivoque, Z sur F.

Il se peut aussi que F contienne une face de même dimension l, et d'arête strictement plus petite (appelons-la G). Si F est une des faces du cube Q_j, et G une des faces du cube Q_i, on a $\mathrm{R}_i<\mathrm{R}_j$ (rappelons que R_i est l'arête du cube Q_i), donc en fait, $\mathrm{R}_i=(1/2)\, \mathrm{R}_j$. Le fait que $\mathrm{C}_1 \mathrm{Q}_j$ est contenu dans $\mathcal{O}$ entraîne que, si Q est un cube dyadique d'arête R_i contenu dans le père de Q_i (c'est-à-dire le seul cube dyadique de taille $2 \mathrm{R}_i$ qui contienne

Q_i), alors $C_1 Q \subset \mathcal{O}$. Comme le père de Q_i ne fait pas partie de notre recouvrement, cela entraîne que Q est l'un des Q_l, $l \in J$. La face F se décompose en 2^l faces d'arête $R_i = R_j/2$, et chacune d'entre elles est une face d'un cube Q, et à ce titre, est dans Q^l. De plus, aucune de ces faces ne peut contenir strictement une face plus petite, car cela signifierait qu'on peut trouver un cube d'arête $\leqq R_j/4$ adjacent à Q_j. La fonction Z est définie comme on l'a décrit plus haut sur chacune de ces faces, et il n'y a plus rien à faire. Notons au passage que, même au centre de F, la valeur que l'on donne à la fonction Z coïncide avec celle qu'on s'est donnée sur $\bar{Q}^0$. En effet, le centre de F est l'un des sommets de chacune des 2^l faces minimales qui la composent.

Nous venons de voir comment définir la fonction Z sur $\mathcal{O}$ à partir de ses valeurs sur $\bar{Q}^0$. Dans l'avenir, c'est toujours ainsi que nous ferons; il nous reste malgré tout à choisir les valeurs de Z sur $\bar{Q}^0$.

La première règle que nous imposerons est que, pour tout $j \in J$,

$$|Z(x) - \hat{z}(x)| < \varepsilon_1 R_j \quad \text{dès que } x \in \bar{Q}_j^0. \tag{23}$$

Notons que chaque $x \in \bar{Q}^0$ est au plus dans un nombre fini de $\bar{Q}_j^0$, dont d'ailleurs les R_j sont dans un rapport 2.

Cette première règle assure d'une part que $|Z(x) - \hat{z}(x)| \leqq \varepsilon \operatorname{dist}(x, E)$ si ε_1 est assez petit et si C_1 est assez grand, et d'autre part, le fait que $Z = (Z - \hat{z}) + \hat{z}$ est M+1-lipschitzienne si ε_1 est assez petit. Enfin, si $m \leqq k$ est tel que $\hat{z}_m(x) = x_m$ pour tout x, alors on aura (22) automatiquement si ε_1 est assez petit.

La seconde règle que nous imposerons est à peine plus compliquée. Notons que chaque face $F \in Q^l$ pour un $l \geqq 1$ est la réunion d'au plus 2^l faces minimales de dimension l. Le bord de chacune de ces faces est lui-même composé d'un certain nombre (majoré) de faces minimales de dimension $l-1$, et ainsi de suite. Compte tenu de la manière dont Z est définie, F est la réunion d'un certain nombre de pyramides (appelons-les S_m) dont l'image par Z est contenue dans une variété affine de dimension l [cela se montre aisément par récurrence]. On exige que, chaque fois que l'on choisit $Z(x_0)$, où x_0 est le centre d'une face minimale de dimension l et l'arête R_j, on prenne $Z(x_0)$ à distance $\geqq \varepsilon_2 R_j$ de toutes les variétés affines de dimension $l-1$ correspondant aux diverses faces composant ∂F. Si ε_2 est assez petit, on voit qu'il est possible de respecter à la fois la première et la seconde règle.

Cette seconde règle nous assure que la restriction de Z à chaque Q_j sera régulière. En d'autres termes, il existe $C_0 \geqq 0$ tel que, si B est une boule, $r(B)$ est son rayon, et $j \in J$, alors

$$|\{x \in Q_j; Z(x) \in B\}| \leqq C_0 r(B)^k. \tag{24}$$

En effet, il suffit de vérifier cela sur chacune des pyramides S_m séparément. On démontre aisément par récurrence (sur la dimension de S_m) que la fonction Z, restreinte à S_m, vérifie une inégalité du type $|Z(x) - Z(x')| \geqq \eta |x' - x|$ ce qui entraîne aussitôt l'inégalité (24).

Récapitulons les résultats obtenus jusqu'ici.

LEMME 10. — *Il existe une constante* ε_0 *et, pour chaque* $x_0 \in \bar{Q}_j^0$ *pour un* $j \in J$, *une boule* $D(x_0)$ *de rayon* $\varepsilon_0 R_j$ *telles que, si l'on choisit, pour tout* $x_0 \in \bar{Q}^0$, $Z(x_0)$ *dans* $D(x_0)$, *alors la fonction* Z *obtenue a les propriétés suivantes*:

Z *est* $(M+1)$-*lipschitzienne;* $|Z(x) - \hat{z}(x)| \leqq \varepsilon \operatorname{dist}(x, E)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^k$; Z, *restreinte à chaque* Q_j, *est (uniformément en j) régulière, ce qui signifie que* (24) *est satisfaite. De plus,* (22) *est satisfaite dès que* $\hat{z}_m(x) = x_m$ *pour tout x.*

Il ne nous reste donc plus qu'à faire un choix judicieux des $Z(x_0)$, de manière à ce que Z soit, globalement cette fois, régulière. L'idée qui nous guide dans la suite est d'essayer d'éviter, autant que possible, que $Z(Q_j)$ rencontre $\mathscr{V}$; ce devrait être possible, car $Z(Q_j)$ et $\mathscr{V}$ ressemblent tous deux à des surfaces affines de dimension k dans un espace de dimension $n > 2k$. Nous allons en fait nous débrouiller pour que, pour tout $j \in J$,

$$(25) \qquad d(Z(x)) > \frac{R_j}{N} \quad \text{pour tout } x \in Q_j,$$

où, rappelons-le, $d(w)$ est la distance de w à $\mathscr{V}$, et où N ne dépendra ni de j, ni de x.

LEMME 11. — *On peut, pour tout j, choisir les valeurs de* $Z(x_0)$ *pour* $x_0 \in Q_j^0$ *de manière que* $Z(x_0) \in D(x_0)$ *et* $d(Z(x_0)) \geqq R_j/N_0$.

Ce lemme est une conséquence facile du lemme 9. Plus précisément, si $x \in Q_j^0$, $D(x)$ est une boule de rayon $\varepsilon_0 R_j$ ou $2\varepsilon_0 R_j$, et l'ensemble des $w \in D(x)$ tels que $d(w) \leqq R_j/N_0$ peut être recouvert par moins de $C(N_0/\varepsilon_0)^k$ cubes d'arête R_j/N_0. Le volume total en est inférieur à $C(N_0/\varepsilon_0)^k (R_j/N_0)^n$, qui est inférieur au volume de $D(x)$ si N_0 est assez grand. Il suffit de choisir $Z(x)$ en dehors de l'union de ces cubes.

Supposons maintenant que l'on ait déjà défini $Z(x)$, lorsque x est le centre d'une face minimale de dimension $\leqq l-1$, où $l \geqq 1$, de telle sorte que $Z(x) \in D(x)$ pour tous ces points, et aussi que la propriété suivante soit satisfaite. Si $j \in J$ et si F est une face de dimension $l-1$ de Q_j, alors

$$(26) \qquad d(Z(x)) \geqq \frac{R_j}{N_{l-1}} \quad \text{pour tout } x \in F,$$

et une certaine constante N_{l-1} qui ne dépend ni de j, ni de x.

Nous allons définir $Z(x_0)$, lorsque x_0 est le centre d'une face minimale de dimension l, de manière à avoir encore

$$(27) \qquad d(Z(x)) \geqq \frac{R_j}{N_l} \quad \text{pour tout } x \text{ dans une face F de dimension } l \text{ de } Q_j.$$

Notons au passage que si x_0 est le centre d'une face de dimension l qui n'est pas minimale, alors x_0 est dans un Q_j^0, et $Z(x_0)$ a déjà été défini. Notons aussi que, quitte à multiplier N_l par 2, on peut se contenter d'assurer (27) lorsque F est une face minimale. Donnons-nous donc une telle face F, et soit x_0 son centre; nous allons choisir $Z(x_0)$ dans $D(x_0)$ de manière à avoir (27) pour tout $x \in F$.

Comme la fonction Z sera, de toute manière, $(M+1)$-lipschitzienne, et que F est composé de faces de dimension $l-1$ et dont l'arête R_j est la même que celle de F (on convient, si $l=1$, d'appeler arête d'un point de Q_j^0 le nombre R_j), on a

$$d(Z(x)) \geqq \frac{R_j}{2N_{l-1}} \quad \text{dès que dist}(x, F) < \frac{R_j}{2(M+1)N_{l-1}}. \tag{28}$$

Notons $\eta_l = 1/2(M+1)N_{l-1}$, et donnons-nous une suite finie x_m, $m=1, \ldots, T$, de points de F tels que $d(x_m, F) \geqq \eta_l R_j$, et tels que tout point de F qui est à une distance supérieure à $\eta_l R_j$ de ∂F soit à distance $< R_j/(M+1)N_l$ de l'un des x_m [la valeur de N_l sera décidée un peu plus bas]. On peut s'arranger pour que le nombre total des x_m soit inférieur à $(CN_l)^l$, où C dépend de M et de l, mais pas de N_l.

Compte tenu de (28), et du fait que Z sera $(M+1)$-lipschitzienne, on voit que (27) sera satisfaite dès que $d(Z(x_m)) \geqq 2R_j/N_l$ pour tout m.

Utilisons à nouveau le lemme 9, en l'appliquant cette fois à la boule B de même centre que $D(x_0)$, et de rayon $10n(M+1)R_j$. L'ensemble $\{w \in B; d(w) \leqq 2R_j/N_l\}$ peut être recouvert par moins de CN_l^k cubes d'arête $2R_j/N_l$. Appelons ces cubes q_s, $s=1, \ldots, S$. Pour chacun des x_m, $Z(x_m) = \lambda_m Z(x_0) + (1-\lambda_m) Z(y_m)$ pour un $y_m \in \partial F$ et un $\lambda_m \in]0, 1]$. De plus, comme x_m est à une distance $\geqq \eta_l R_j$ de ∂F, on a $\lambda_m \geqq 1/C$. Alors, pour chaque m, l'ensemble des $w_0 \in D(x_0)$ tels que, si l'on décidait que $Z(x_0) = w_0$, alors $Z(x_m) \in q_s$, est contenu dans un cube d'arête CR_j/N_l.

La mesure de la réunion de ces cubes (lorsque $1 \leqq m \leqq T$ et $1 \leqq s \leqq S$) est inférieure à

$$CTS\left(\frac{R_j}{N_l}\right)^n \leqq CN_l^l N_l^k \frac{R_j^n}{N_l^n} \leqq CN_l^{-n+2k} R_j^n.$$

Comme ici $n > 2k$, on peut choisir N_l assez grand pour que ceci soit inférieur au volume de $D(x_0)$. On peut donc choisir w_0 hors de tous ces cubes, de sorte que $d(Z(x_m)) \geqq 2R_j/N$ pour tout m, et dans ce cas (27) est satisfaite.

Nous venons de voir comment choisir $Z(x_0)$, lorsque x_0 est le centre d'une face minimale de dimension l, pour passer de (26) à (27). Après plusieurs applications de cette stratégie, on a défini la fonction Z, et cette fonction Z satisfait à (25) avec $N = N_k$.

Comme on l'a remarqué au lemme 10, il ne reste plus pour démontrer la proposition 5 qu'à vérifier que, si B est une boule et r son rayon, $|\{x \in \mathbb{R}^k; Z(x) \in B\}| \leqq Cr^k$. Comme $Z(x) = z(x)$ pour $x \in E$, on a $|\{x \in E; Z(x) \in B\}| \leqq Cr^k$, et il ne reste plus qu'à prouver que

$$|\{x \in \mathcal{O}; Z(x) \in B\}| \leqq Cr^k. \tag{29}$$

Commençons par le cas où R rencontre $\mathscr{V}$. Soit $j \in J$ tel que $Z(Q_j)$ rencontre B. On peut trouver $x \in Q_j$ tel que $d(Z(x)) \leqq 2r$ et, compte tenu de (25), $R_j \leqq Cr$. Alors, si $x \in Q_j$, $|Z(x) - z(x)| \leqq Cr$ car Z et z sont lipschitziennes et coïncident sur E, qui est à distance $\leqq CR_j$ de Q_j. On en déduit (toujours parce que z est lipschitzienne) que $z(Q_j) \subset CB$.

Ainsi,

$$|\{x\in\mathcal{O}; Z(x)\in B\}|\leqq\Big|\bigcup_{Z(Q_j)\cap B\neq\varnothing} Q_j\Big|\leqq|\{x\in\mathbb{R}^k; z(x)\in CB\}|\leqq C r^k,$$

et (29) est satisfaite.

Si B ne rencontre pas $\mathscr{V}$, mais $2B$ rencontre $\mathscr{V}$, on se ramène au cas précédent en considérant $2B$.

Si la distance d de B à $\mathscr{V}$ est supérieure à r, notons J_0 l'ensemble des $j\in J$ tels que $Z(Q_j)$ rencontre B. Si $j\in J_0$, alors on peut trouver $x\in Q_j$ tel que $d(Z(x))\geqq d$. Cependant, comme z et Z sont lipschitziennes et coïncident sur E, on a aussi $d(Z(x))\leqq CR_j$, de sorte que $R_j\geqq(1/C)\,d$.

Par ailleurs, $Z(Q_j)$ rencontre aussi la boule D de même centre que B et de rayon $3d$, et cette boule D rencontre $\mathscr{V}$. On a vu que dans un tel cas, $z(Q_j)\subset CD$. Par conséquent, le nombre d'éléments de J_0 vérifie

$$|J_0|=\sum_{j\in J_0}\left(\frac{R_j}{R_j}\right)^k\leqq C\sum_{j\in J_0} d^{-k}|Q_j|\leqq C d^{-k}|\{x\in\mathbb{R}^k; z(x)\in CD\}|\leqq C.$$

L'inégalité (29) est maintenant une conséquence du fait que la restriction de Z à chaque Q_j est régulière [l'inégalité (24)]. Nous avons enfin démontré la proposition 5.

5. Le cas où $n=2k$

Lorsque $n=2k$, on ne peut pas espérer démontrer l'équivalent de la proposition 5 aussi facilement. La raison en est que l'on ne peut pas, en modifiant légèrement deux surfaces de dimension k dans $\mathbb{R}^{2k}$, les empêcher de se rencontrer. L'analogue de la proposition 5 est cependant vrai, mais il faudra à la fois éviter que les deux surfaces ne se rencontrent trop, et aussi éviter tous les points de rencontre entre deux surfaces précédentes. Avant de commencer à démontrer ce résultat, signalons que nous ne nous en servirons pas, et que le lecteur peut en sauter la lecture. Signalons également que nous ne savons pas ce qu'il en est du cas où $n<2k$.

Proposition 6. — *L'énoncé de la proposition 5 est encore vrai quand* $n=2k$.

Le début de la démonstration est le même que pour la proposition 5; ce n'est qu'au moment de choisir $Z(x_0)$, lorsque x_0 est le centre d'un des Q_j, que l'on rencontre une difficulté.

Les étapes précédentes donnent encore

$$d(Z(x)\geqq\frac{R_j}{N}\quad\text{dès que dist}(x,\partial Q_j)\leqq\frac{R_j}{C_0}\tag{30}$$

pour peu que l'on choisisse $N=N_k$ assez grand, et où C_0 ne dépend pas de N [à vrai dire, convenons dès maintenant que, jusqu'à ce que l'on ait décidé de la valeur de N, aucune des constantes que nous écrirons ne dépendra de N].

Choisissons encore une suite x_m, $m=1, \ldots, T$ de points de Q_j tels que $\operatorname{dist}(x_m, \partial Q_j) \geqq R_j/C_0$, et aussi tels que tout point de Q_j dont la distance à ∂Q_j est supérieure à R_j/C_0 soit à une distance inférieure à $R_j/2(M+1)N$ de l'un des x_m. On peut se débrouiller pour que le nombre total des x_m vérifie $T \leqq CN^k$.

Choisissons $C_1 \geqq 0$ et une boule B, de rayon R_j/C_1 et contenue dans $(1/2)D(x_0)$. Pour chaque m, soit E_m l'ensemble des $w \in B$ tels que, si l'on choisit $Z(x_0)=w$, alors $d(Z(x_m)) \leqq 2R_j/N$. Comme w reste dans une boule de rayon R_j/C_1, les valeurs correspondantes de $Z(x_m)$ sont aussi contenues dans une boule de rayon R_j/C_1, que nous appellerons B_m. L'ensemble des points de B_m dont la distance à $\mathscr{V}$ est $\leqq 2R_j/N$ peut être, en vertu du lemme 9, recouvert par moins de CN^k cubes d'arête $2R_j/N$. Par conséquent E_m est contenu dans la réunion d'au plus CN^k cubes d'arête CR_j/N, et $|E_m| \leqq CR_j^n N^{-k}$.

Donnons-nous une constante $C_2 \geqq 0$, et supposons que tout $w \in B$ appartienne à au moins C_2 ensembles E_m différents. Alors

$$C_2|B| = \int_B C_2 \leqq \sum_m |E_m| \leqq CN^k R_j^n N^{-k} = CR_j^n.$$

Si l'on a choisi C_2 assez grand, on arrive à une contradiction. On peut donc choisir $w_0 \in B$ tel que, si $Z(x_0)=w_0$, le nombre des points x_m tels que $d(Z(x_m)) \leqq 2R_j/N$ soit inférieur à C_2. Faisons un tel choix pour chacun des cubes Q_j; nous obtenons une fonction, que l'on appellera Z^0.

Rebaptisons $X_1, \ldots, X_S$ les points de la suite x_m qui vérifient $d(Z^0(x_m)) \leqq 2R_j/N$. Nous dirons volontiers que les X_s, $s=1, \ldots, S$, sont les chocs de Q_j, et l'on retiendra que leur nombre S est inférieur à C_2.

LEMME 12. — *Si l'on choisit la fonction* Z *de sorte que* $Z(x)=Z^0(x)$ *sur chacun des* ∂Q_j, *et* $|Z(x_0)-Z^0(x_0)|<R_j/2N$ *lorsque* x_0 *est le centre du cube* Q_j, *alors* $d(Z(x)) \geqq R_j/N$ *pour tout* $x \in Q_j$, *sauf peut-être si* $|x-X_s|<R_j/2(M+1)N$ *pour l'un des chocs* X_s *du cube* Q_j. *De plus, si* N *est assez grand, l'hypothèse du lemme* 10 *est satisfaite.*

La dernière affirmation découle de ce que l'on a choisi $Z^0(x_0)$ dans $(1/2)D(x_0)$. Si $x \in Q_j$ est tel que $\operatorname{dist}(x, \partial Q_j) \leqq R_j/C_0$, on sait déjà que $d(Z(x)) \geqq R_j/N$ grâce à (30). Si ce n'est pas le cas, on peut trouver un x_m de la suite construite plus haut tel que $|x-x_m|<R_j/2(M+1)N$. Si cet x_m n'est pas un choc, alors

$$d(Z(x)) \geqq d(Z^0(x_m)) - |Z(x)-Z^0(x_m)| \geqq \frac{2R_j}{N} - \frac{R_j}{N} = \frac{R_j}{N}$$

car $|Z(x_0)-Z^0(x_0)|<R_j/2N$ entraîne que $|Z(x)-Z^0(x)|<R_j/2N$ pour tout $x \in Q_j$. On en déduit le lemme.

Nous aurons bientôt besoin de contrôler le nombre des chocs dont les images par Z^0 sont contenues dans une boule donnée.

LEMME 13. — *Soient* B *une boule de* $\mathbb{R}^n$ *et* $r(B)$ *son rayon. On note* J_B *l'ensemble des* $j \in J$ *tels que* $R_j \leqq r(B)$ *et tels que* $Z^0(Q_j)$ *rencontre* B. *Alors* $\sum_{j \in J_B} R_j^k \leqq C\, r(B)^k$.

En effet, soient $j \in J_B$ et $x \in Q_j$. Alors $|z(x) - Z^0(x)| \leqq CR_j$ car $\operatorname{dist}(x, E) \leqq CR_j$ et z et Z^0 coïncident sur E. On en déduit que $z(Q_j) \subset CB$ car $R_j \leqq r(B)$. Alors,

$$\sum_{j \in J_B} R_j^k \leqq C \sum_{j \in J_B} |Q_j| \leqq C\,|\{x \in \mathbb{R}^k;\, z(x) \in CB\}| \leqq C\, r(B)^k.$$

LEMME 14. — *On peut choisir* $N \geqq 0$ *et, pour tout* j, *une valeur de* $Z(x_0)$ *vérifiant l'hypothèse du lemme* 12 *et telle que, si* Q_i *est un cube tel que* $R_i \leqq R_j/N$ *et si* y *est l'un des chocs de* Q_i, *alors* $|Z(x) - Z^0(y)| \geqq 10\, R_i/N$ *pour tout* $x \in Q_j$.

Il s'agit de choisir $Z(x_0)$ de manière à ce que $Z(Q_j)$ évite toutes les images par Z^0 de chocs provenant des petits cubes. Supposons que l'on ait choisi $w = Z(x_0)$ dans la boule $D = B(Z^0(x_0),\, R_j/2N)$ et que l'on ait $|Z(x) - Z^0(y)| \leqq 10\, R_i/N$ pour un $x \in Q_j$ et un choc y d'un Q_i. Alors, $d(Z^0(y)) \leqq 2\, R_i/N \leqq 2\, R_j/N^2$, ce qui entraîne que $d(Z(x)) \leqq 12\, R_j/N^2 < 2\, R_j/N$ si N est assez grand. Le lemme 12 nous dit qu'alors $|x - X_s| < R_j/2(M+1)\,N$ pour l'un des chocs X_s de Q_j.

Notons $X_1, \ldots, X_S$ tous les chocs de Q_j et, pour $1 \leqq s \leqq S$,

$$B_s = B\left(X_s,\, \frac{R_j}{2(M+1)\,N}\right) \subset \mathbb{R}^k \qquad \text{et} \qquad D_s = B\left(Z^0(X_s),\, \frac{4\,R_j}{N}\right) \subset \mathbb{R}^n.$$

Nous venons de voir que si $|Z(x) - Z^0(y)| \leqq 10\, R_i/N$, alors x est dans l'un des B_s. Alors

$$|Z(x) - Z^0(X_s)| \leqq |Z(x) - Z^0(x)| + |Z^0(x) - Z^0(X_s)| \leqq \frac{R_j}{N},$$

de sorte que $Z^0(y) \in D_s$.

Maintenant que nous savons plus précisément où peuvent se produire des problèmes, nous pouvons chercher à les éviter.

Notons $(y_l)_{l \in L}$ l'ensemble de tous les chocs provenant de cubes Q_i tels que $R_i \leqq R_j/N$, et tels que $w_l = Z^0(y_l) \in D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_S$. Pour chaque $l \in L$, notons E_l l'ensemble des $w \in D$ tels que, si l'on choisit $Z(x_0) = w$, alors $|Z(x) - w_l| \leqq 10\, R_{j(l)}/N$ pour un $x \in Q_j$ [où l'on a noté $j(l)$ l'indice i tel que y_l soit un choc de Q_i]. Nous aurons prouvé le lemme 14 dès que nous aurons montré que D n'est pas contenu dans l'union des E_l.

Pour chaque l, choisissons une suite finie x_m^l de points de $B_1 \cup \ldots \cup B_S = B$ telle que tout point de B soit à une distance inférieure à $10\, R_{j(l)}/2(M+1)\,N$ de l'un des x_m^l. Comme le nombre des B_s est $\leqq C_2$, il est possible de faire cela en prenant moins de $C(R_j/R_{j(l)})^k$ points x_m^l.

Pour chaque m, soit $E_{l,m}$ l'ensemble des $w \in D$ tels que, si $Z(x_0) = w$, alors $|Z(x_m^l) - w_l| \leqq 20\, R_{j(l)}/N$. On voit aisément que $E_l \subset \bigcup_m E_{l,m}$, car les seuls points x susceptibles de vérifier $|Z(x) - w_l| \leqq 10\, R_{j(l)}/N$ sont dans B. Par ailleurs, comme x_m^l est à distance supérieure à R_j/C_0 de ∂Q_j, $E_{l,m}$ est contenu dans une boule de rayon $C(R_{j(l)}/N)$ et

$|E_{l,m}| \leqq C(R_{j(l)}/N)^n$. Donc,

$$|E_l| \leqq C\left[\frac{R_j}{R_{j(l)}}\right]^k \left[\frac{R_{j(l)}}{N}\right]^n \leqq CR_j^k R_{j(l)}^k N^{-n}, \qquad \text{et} \qquad \left|\bigcup_{l \in L} E_l\right| \leqq CR_j^k N^{-n} \sum_{l \in L} R_{j(l)}^k.$$

Pour chaque l, $j(l)$ est dans $J_{D_1} \cup \ldots \cup J_{D_S}$, en reprenant les notations du lemme 13. De plus, si $i \in I = J_{D_1} \cup \ldots J_{D_S}$, alors Q_i contient au plus C_2 chocs y_l. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{l \in L} E_l\right| &\leqq CR_j^k N^{-n} \sum_{i \in I} R_i^k \\ &\leqq CR_j^k N^{-n} \left(\frac{4R_j}{N}\right)^k \quad \text{(grâce au lemme 13)} \\ &\leqq \frac{1}{2}|D| \quad \text{si N est assez grand.} \end{aligned}$$

Donc on peut choisir $w \in D$ qui ne soit dans aucun des E_l. On en déduit le lemme 14.

Nous avons enfin défini une fonction Z; il ne reste plus qu'à vérifier que Z est une surface régulière.

LEMME 15. — *On se donne une constante* $K > 0$. *Il existe une constante* C (*qui peut maintenant dépendre de* N, K, *etc.*) *telle que, si* D *est une boule de* $\mathbb{R}^n$ *rencontrant* $\mathscr{V}$ *et si* R *est son rayon, alors le nombre total des* $j \in J$ *tels que* $Z(Q_j)$ *rencontre* D *et* $R_j \geqq R/K$ *est inférieur à* C.

Soit d'abord $\bar{J}$ l'ensemble des $j \in J$ tels que $Z(Q_j)$ rencontre D et tels que $R/K \leqq R_j \leqq 2NR$. Soit $j \in \bar{J}$; on a toujours $|Z(x) - z(x)| \leqq CR_j$ sur Q_j, et on en déduit que $z(Q_j) \subset CD$. Alors

$$|\bar{J}| = \sum_{j \in \bar{J}} \frac{|Q_j|}{|Q_j|} \leqq C \sum_{j \in \bar{J}} R^{-k} |Q_j| \leqq CR^{-k} |\{x \in \mathbb{R}^k; z(x) \in CD\}| \leqq C.$$

Supposons maintenant que $R_j > 2NR$, et soit $\bar{x} \in Q_j$ tel que $Z(\bar{x}) \in D$. Alors $d(Z(\bar{x})) \leqq 2R < R_j/N$. Compte tenu du lemme 12, cela implique que $|\bar{x} - X| \leqq R_j/2(M+1)N$, où X est l'un des chocs de Q_j. Choisissons, une fois pour toutes, un j tel que R_j soit minimal parmi les côtés des cubes Q_i tels que $Z(Q_i)$ rencontre D et tels que $Z(Q_i) > 2NR$ (à supposer qu'il en existe).

Soit maintenant $i \in J$ tel que $R_i \geqq NR_j$. Le lemme 14 nous dit que $|Z(x) - Z^0(X)| \geqq 10R_j/N$ pour tout $x \in Q_i$, ce qui entraîne que la distance de $Z(x)$ au centre de D est supérieure à

$$(10R_j/N) - |Z^0(X) - Z(\bar{x})| - R \geqq (10R_j/N) - (2R_j/N) - R > 2R,$$

et $Z(Q_i)$ ne peut rencontrer D. Par conséquent, les seuls cubes Q_i tels que $Z(Q_i)$ puisse rencontrer D et tels que $R_i > 2NR$ sont en fait tels que $R_j \leqq R_i \leqq NR_j$. Comme les $Z(Q_i)$ rencontrent tous la boule de même centre que D et de rayon R_j, l'étude faite plus haut du cas où $R_j \leqq 2NR$ s'applique, et le nombre de ces Q_i est inférieur à C. Le lemme 15 est démontré.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver que, si B est une boule de $\mathbb{R}^n$ et r son rayon,

$$(31) \qquad |\{x \in \mathcal{O}; Z(x) \in B\}| \leqq C r^k.$$

Comme pour la propositon 5, on en déduira aussitôt que Z est une surface régulière, et la démonstration de la proposition 6 sera achevée.

Supposons d'abord que la distance d de la boule B à $\mathcal{V}$ soit supérieure à r. Soit $j \in J$ tel que $Z(Q_j)$ rencontre B. Alors $d(Z(x)) \geqq d$ pour un $x \in Q_j$, ce qui entraîne que $R_j \geqq (1/C)\, d$. Soit maintenant D la boule de même centre que B et de rayon $R = 3d$. Cette boule rencontre $\mathcal{V}$, et l'on peut appliquer le lemme 15. On en déduit que le nombre des $j \in J$ tels que $Z(Q_j)$ rencontre B (et donc D) est borné. L'inégalité (31) résulte du fait que la restriction de Z à chaque Q_j est régulière.

Supposons maintenant que 2 B rencontre $\mathcal{V}$. On sait déjà que le nombre des $j \in J$ tels que $Z(Q_j)$ rencontre 2 B et $R_j \geqq r$ est inférieur à une constante (c'est le lemme 15). Il ne reste donc plus qu'à montrer que, si $\bar{J}$ est l'ensemble des $j \in J$ tels que $Z(Q_j)$ rencontre B et $R_j \leqq r$, alors $\sum_{j \in J} |Q_j| \leqq C r^k$. Mais si $j \in \bar{J}$, alors (par un argument déjà utilisé plusieurs fois) $z(Q_j) \subset CB$ et $\sum_{j \in \bar{J}} |Q_j| \leqq |\{x \in \mathbb{R}^k; z(x) \in CB\}| \leqq C r^k$.

L'inégalité (31) est démontrée, et du même coup la proposition 6.

6. Opérateurs d'intégrale singulière sur les surfaces régulières

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME. — *Soit* $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ *une fonction* C^∞, *positivement homogène de degré* $-k$ $(k \leqq n)$, *et impaire. Soit* $z : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *une surface régulière* (*au sens de la définition* 1). *Soit encore* σ *la mesure borélienne sur* $\mathbb{R}^n$ *définie par* $\sigma(f) = \int_{\mathbb{R}^k} f(z(x))\, dx$ *pour* $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. *Alors l'opérateur maximal* T_σ^* *défini au paragraphe* 2 *à l'aide du noyau* $K(x-y)$ *est borné sur* $L^p(d\sigma)$ *pour* $1 < p < +\infty$.

COROLLAIRE. — *Si* $\mu \in \Delta$, *alors* T_σ^* *est continu de* $L^p(d\sigma)$ *dans* $L^p(d\mu)$ *et* T_μ^* *est continu de* $L^p(d\mu)$ *dans* $L^p(d\sigma)$.

Dès que nous aurons prouvé le théorème, le corollaire sera une conséquence triviale de la proposition 2. Pour démontrer le théorème, il nous faudra faire quelques θ-décompositions pour nous ramener au cas plus simple des graphes lipschitziens. Traitons d'abord le cas des graphes lipschitziens.

LEMME 16. — *Le théorème est vrai lorsque, pour* $1 \leqq m \leqq k$, *la* m-*ième coordonnée de* $z(x)$ *est* $z_m(x) = x_m$ *pour tout* x.

Ce lemme est une conséquence assez facile du théorème de Coifman, McIntosh et Meyer sur le noyau de Cauchy [CMM]. Notons que T_σ^* est équivalent à l'opérateur maximal défini sur $\mathbb{R}^k$ à partir du noyau $H(x, y) = K(z(x) - z(y))$ [seule une troncature légèrement différente permet de distinguer ces deux opérateurs; la différence est comme toujours dominée par une fonction maximale]. En particulier, comme $H(x, y)$ est un noyau standard, il suffira de montrer la continuité L^2.

Appliquons la méthode des rotations à l'opérateur défini par

$$Tf(x) = \text{v. p.} \int K(z(x) - z(y)) f(y)\, dy = c \int_{\theta \in S^{k-1}} T_\theta f(x)\, d\theta$$

où S^{k-1} désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^k$, et

$$T_\theta f(x) = \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}} K(z(x) - z(x + u\theta)) f(x + u\theta) |u|^{k-1}\, du.$$

Il suffit de montrer que les T_θ sont bornés sur $L^2(\mathbb{R}^k)$ uniformément en θ. Pour cela, notons ξ le point courant de l'hyperplan de $\mathbb{R}^k$ perpendiculaire à θ. On a

$$\| T_\theta f \|_2^2 = \int_\xi \| T_\theta f(\xi + .\, \theta) \|_2^2\, d\xi.$$

Notons f_ξ la fonction d'une variable donnée par $f_\xi(t) = f(\xi + t\theta)$. Alors

$$\begin{aligned} T_\theta f(\xi + s\theta) &= \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}} K(z(\xi + s\theta) - z(\xi + s\theta + u\theta)) f(\xi + s\theta + u\theta) |u|^{k-1}\, dt \\ &= \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}} K(z(\xi + s\theta) - z(\xi + t\theta)) f_\xi(t) |t - s|^{k-1}\, dt. \end{aligned}$$

On voit que

$$\| T_\theta f \|_2^2 = \int_\xi \| T_{\theta, \xi} f_\xi \|_2^2\, d\xi,$$

où $T_{\theta, \xi}$ est l'opérateur de valeur principale défini à l'aide du noyau

$$H_{\theta, \xi}(x, y) = K[z(\xi + x\theta) - z(\xi + y\theta)] |x - y|^{k-1}.$$

Il suffira, pour prouver le lemme 16, de montrer que les opérateurs $T_{\theta, \xi}$ sont bornés sur $L^2(\mathbb{R})$ uniformément en ξ et θ.

Compte tenu de l'homogénéité de la fonction K, et de ce qu'elle est impaire, on a

$$\mathrm{H}_{\theta,\xi}(x, y)=\frac{1}{x-y}\mathrm{K}\left[\frac{z(\xi+x\theta)-z(\xi+y\theta)}{x-y}\right].$$

De plus, comme $z_i(x)=x_i$ pour $i=1, \ldots, k$,

$$\mathrm{H}_{\theta,\xi}(x, y)=\frac{1}{x-y}\mathrm{F}_\theta\left[\frac{z_{k+1}(\xi+x\theta)-z_{k+1}(\xi+y\theta)}{x-y}, \ldots, \frac{z_n(\xi+x\theta)-z_n(\xi+y\theta)}{x-y}\right]$$

où F_θ est la fonction C^∞ de $n-k$ variables donnée par

$$\mathrm{F}_\theta(u_{k+1}, \ldots, u_n)=\mathrm{K}(\theta_1, \ldots, \theta_k, u_{k+1}, \ldots, u_n),$$

où $\theta_1, \ldots, \theta_k$ sont les coordonnées de θ.

Notons que les fonctions $x \to z_l(\xi+x\theta)$ sont, uniformément en ξ et θ, lipschitziennes. Le noyau $\mathrm{H}_{\theta,\xi}(x, y)$ est donc l'un des noyaux étudiés dans [CDM], et qui définissent un opérateur borné sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ en vertu du théorème de Coifman, McIntosh, Meyer. On en déduit le lemme 16.

Notre outil principal pour démontrer le théorème sera la θ-décomposition suivante.

Proposition 7. — *Supposons que $n>2k$, et soient C_0 et M. Alors il existe $\theta>0$, C'_0, $\mathrm{M}'>0$, et $\mathrm{K}>0$ avec les propriétés suivantes. Si z est une surface régulière de dimension k dans $\mathbb{R}^n$ (avec les constantes M et C_0) et si Q est un cube, alors il existe un changement de variable h de $\mathbb{R}^k$, une surface régulière Z (avec les constantes C'_0 et M') et un ensemble compact $\mathrm{E} \subset \mathrm{Q}$ tels que l'on ait :*

(32) *Il existe un $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, $\mathrm{Z}_m(x)=x_1$.*

(33) *Pour tout $x \in \mathrm{E}$, $z(x)=\mathrm{Z} \circ h(x)$.*

(34) $|\mathrm{E}| \geqq \theta|\mathrm{Q}|$

et

(35) *h et h^{-1} sont K-lipschitziens.*

Si de plus il existe $1<l \leqq k$ tel que $z_j(x)=x_j$ pour tout $j \in \{l, l+1, \ldots, k\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $m \notin \{l, \ldots, k\}$ et la fonction Z vérifie aussi

(36) $$\mathrm{Z}_j(x)=x_j \qquad \textit{pour} \quad j=l, l+1, \ldots, k.$$

Pour démontrer cette proposition, on peut supposer que Q est le cube unité. Nous supposerons aussi que $k>1$ (dans le cas contraire, la démonstration est beaucoup plus simple), et nous noterons (x, y) le point courant de $\mathbb{R}^k$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{k-1}$.

LEMME 17. — *Il existe une constante* $\gamma>0$ *telle que, si*

$$S=\{z(0,y);\ y\in[0,1]^{k-1}\}$$

et si

$$F=\{y\in[0,1]^{k-1};\ \sup_{x\in[0,1]}\{\operatorname{dist}(z(x,y),S)\}\geqq\gamma\},$$

alors $|F|>1/2$.

En effet, si $x\in[0,1]$ et $y\in[0,1]^{k-1}\setminus F$, alors

$$z(x,y)\in S_\gamma=\{z\in\mathbb{R}_n;\ \operatorname{dist}(z,S)<\gamma\},$$

de sorte que, si le lemme est faux,

$$|\{(x,y);\ z(x,y)\in S_\gamma\}|\geqq\frac{1}{2}.$$

Cependant, comme z est M-lipschitzienne, S peut être recouvert par moins de $C\gamma^{-k+1}(M+1)^{k-1}$ boules de rayon γ, de sorte que S_γ peut être recouvert par autant de boules de rayon 2γ. On déduit de l'inégalité (2) que

$$|\{(x,y):z(x,y)\in S_\gamma\}|\leqq C\gamma^{-k+1}(M+1)^{k-1}C_0\gamma^k<\frac{1}{2}$$

si γ est assez petit (une contradiction).

LEMME 18. — *On peut trouver une coordonnée* $m\leqq n$ *telle que l'un des ensembles*

$$F_+^m=\left\{y\in[0,1]^{k-1};\ \sup_{x\in[0,1]} z_m(x,y)\geqq z_m(0,y)+\frac{\gamma}{n}\right\}$$

et

$$F_-^m=\left\{y\in[0,1]^{k-1};\ \inf_{x\in[0,1]} z_m(x,y)\leqq z_m(0,y)-\frac{\gamma}{n}\right\}$$

ait une mesure supérieure à $1/4n$.

En effet, si $y\in F$, alors $\sup_{x\in[0,1]}|z(x,y)-z(0,y)|\geqq\gamma$, de sorte que y est dans l'un des $F_\pm^m$. On en déduit le lemme.

Notons que, si j est tel que $z_j(x,y)=x_j$ [où x_j est la j-ième coordonnée de (x,y), c'est-à-dire la $(j-1)$-ième coordonnée de y], alors $m\neq j$ car les ensembles $F_\pm^j$ sont tous les deux vides.

Pour simplifier les écritures, nous supposerons dans la suite que $|F_+^1|\geqq 1/4n$. Les autres cas seraient traités pareillement. On veut maintenant appliquer le lemme du soleil levant (avec un paramètre y), et pour cela on définit une fonction f par

$$f(x, y) = z_1(0, y) + \frac{\gamma x}{10\,n} \qquad \text{pour} \quad x \leqq 0$$

$$f(x, y) = \sup_{0 \leqq t \leqq x} \left\{ z_1(t, y) - \frac{\gamma t}{10\,n} \right\} + \frac{\gamma x}{10\,n} \qquad \text{pour} \quad x \geqq 0.$$

LEMME 19. — *Le changement de variable* H *de* $\mathbb{R}^k$ *défini par* $\mathrm{H}(x, y) = (f(x, y), y)$ *est bi-lipschitzien.*

Lorsque $x \geqq 0$ est fixé, chacune des fonctions $z_1(t, y) - (\gamma t/10\,n)$, $0 \leqq t \leqq x$, est M-lipschitzienne en y, et par conséquent $f(x, y)$ est M-lipschitzienne en y.

Fixons maintenant y. La fonction $h(x)$ qui est nulle pour $x \leqq 0$ et égale à $\sup_{0 \leqq t \leqq x} (z_1(t, y) - (\gamma t/10\,n)) - z_1(0, y)$ pour $x \geqq 0$ est croissante, donc

$$f(x, y) - f(x', y) \geqq \frac{\gamma}{10\,n}(x - x') \qquad si \quad x \geqq x'. \tag{37}$$

D'autre part, si $0 \leqq x' \leqq x$,

$$\sup_{x' \leqq t \leqq x} \left[z_1(t, y) - \frac{\gamma t}{10\,n} \right] \leqq \sup_{x' \leqq t \leqq x} \left[z_1(x' y) - \frac{\gamma x'}{10\,n} + \left(\mathrm{M} - \frac{\gamma}{10\,n} \right)(t - x') \right]$$
$$\leqq z_1(x', y) - \frac{\gamma x'}{10\,n} + \left(\mathrm{M} - \frac{\gamma}{10\,n} \right)(x - x')$$

si l'on a choisi $\gamma < 10\,n\mathrm{M}$. On en déduit que

$$\sup_{0 \leqq t \leqq x} \left[z_1(t, y) - \frac{\gamma t}{10\,n} \right] \leqq \sup_{0 \leqq t \leqq x'} \left[z_1(t, y) - \frac{\gamma t}{10\,n} \right] + \left(\mathrm{M} - \frac{\gamma}{10\,n} \right)(x - x')$$

et que, si $0 \leqq x' \leqq x$,

$$f(x, y) - f(x', y) \leqq \mathrm{M}(x - x'). \tag{38}$$

Cette inégalité reste vraie, bien entendu, lorsque $x' < 0$.

Nous venons de montrer que H est 2M-lipschitzienne; il reste à prouver que H^{-1} aussi est lipschitzienne. Pour cela, il suffit de trouver un $\delta > 0$ tel que

$$|f(x', y') - f(x, y)| + |y' - y| \geqq \delta \{ |x' - x| + |y' - y| \}.$$

Cette inégalité est triviale dès que $|y' - y| \geqq \delta \{ |x' - x| + |y' - y| \}$; donc on peut supposer que $|y'-y| \leqq (\delta/(1-\delta))|x'-x|$. Mais alors

$$\begin{aligned}|f(x',y')-f(x,y)| &\geqq |f(x',y')-f(x,y')|-|f(x,y')-f(x,y)|\\ &\geqq \frac{\gamma}{10n}|x'-x|-\mathrm{M}|y'-y|\\ &\geqq \left(\frac{\gamma}{10n}-\frac{\mathrm{M}\delta}{1-\delta}\right)|x'-x| \geqq \delta|x'-x|\end{aligned}$$

si l'on a choisi δ assez petit. Ceci démontre le lemme 19.

Soit maintenant E le sous-ensemble fermé de Q formé des points $(x, y) \in \mathrm{Q}$ tels que $z_1(x, y) = f(x, y)$. Montrons que $|\mathrm{E}| \geqq \theta |\mathrm{Q}|$.

Comme $|\mathrm{F}_+^1| \geqq 1/4n$, il suffit de montrer que, pour chaque $y \in \mathrm{F}_+^1$,

$$|\{x \in [0, 1];\, z_1(x, y) = f(x, y)\}| \geqq 4n\theta.$$

Oublions un instant la variable y, et notons $g(t) = z_1(t, y) - (\gamma t/10n)$ pour $t \geqq 0$, et $h(x) = \sup_{0 \leqq t \leqq x} g(t)$ pour $x \geqq 0$. Il s'agit de prouver que

$$|\{x \in [0, 1];\, h(x) = g(x)\}| \geqq 4n\theta.$$

Soit x_0 un point de [0, 1] en lequel le maximum de la fonction g sur [0, 1] est atteint. Alors

$$\begin{aligned}g(x_0) = \sup_{t \in [0,1]}\left(z_1(t, y) - \frac{\gamma t}{10n}\right) &\geqq \sup_{t \in [0,1]} z_1(t, y) - \frac{\gamma}{10n}\\ &\geqq \frac{9\gamma}{10n} + z_1(0, y) = g(0) + \frac{9\gamma}{10n} \quad \text{car } y \in \mathrm{F}_+^1.\end{aligned}$$

Soit $\Omega = \{x \in [0, x_0[;\ h(x) \neq g(x)\}$, et soit $\Omega = \bigcup \mathrm{I}_j$ sa décomposition en intervalles ouverts disjoints.

Pour chaque j, on a $\int_{\mathrm{I}_j} g'(t)\,dt \leqq 0$ [avec, en fait, égalité, sauf peut-être lorsque I_j est la dernière composante connexe de Ω] (pour plus de détails sur le lemme du soleil levant, on peut se reporter à [Z], p. 31).

Alors,

$$\frac{9\gamma}{10n} \leqq g(x_0) - g(0) \leqq \int_{[0,\, x_0[\, \setminus \Omega} g'(t)\,dt \leqq \mathrm{M}\,|[0, x_0[\setminus \Omega|,$$

de sorte que

$$|\{x \in [0, x_0];\, h(x) = g(x)\}| \geqq \frac{9\gamma}{10n\mathrm{M}} > 4n\theta$$

si θ est assez petit. Donc $|\mathrm{E}| \geqq \theta |\mathrm{Q}|$.

Intéressons-nous à la surface régulière $z^1 = z \circ \mathrm{H}^{-1}$. Pour $(x, y) \in \mathrm{E}$, on a $z_1^1(\mathrm{H}(x, y)) = z_1(x, y) = f(x, y)$ [qui est la première coordonnée de $\mathrm{H}(x, y)$]. Soit $\mathrm{E}^1 = \mathrm{H}(\mathrm{E})$ et définissons une fonction $\hat{z}$ sur $\mathbb{R}^k$ par $\hat{z}_1(u) = u_1$ et $\hat{z}_j(u) = z_j^1(u)$ pour $j = 2, \ldots, m$. La fonction $\hat{z}$ coïncide avec z^1 sur l'ensemble $\mathrm{H}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}^1$. De plus, si, pour $1 < l \leqq j \leqq k$, on a $z_j(x) = x_j$, on a aussi $\hat{z}_j(u) = u_j$ car H ne change pas la j-ième coordonnée. Appliquons la proposition 5 à z^1, $\hat{z}$ et E^1. On obtient une surface régulière Z^1, qui coïncide avec z^1 sur E^1 et telle que $|(\partial \mathrm{Z}_i^1 / \partial u_j)(u) - \delta_{i,j}| \leqq \varepsilon$ pour $j = 1$ et $j \geqq l$, et $i = 1, \ldots, n$.

On considère maintenant le changement de variable G donné par $\mathrm{G}_j(u) = \mathrm{Z}_j^1(u)$ pour $j = 1$ et $j \geqq l$, et $\mathrm{G}_j(u) = u_j$ pour $1 < j < l$. Si ε est assez petit, G est un changement de variable bi-lipschitzien (sa matrice jacobienne est aussi proche de l'identité qu'on le souhaite). La fonction Z que nous cherchons est $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}^1 \circ \mathrm{G}^{-1}$, et le changement de variable est $h = \mathrm{H} \circ \mathrm{G}$.

Si $u \in \mathbb{R}^k$ et $j = 1$ ou $j \geqq l$, on a bien $\mathrm{Z}_j(\mathrm{G}(u)) = \mathrm{Z}_j^1(u)$, qui est la j-ième coordonnée de $\mathrm{G}(u)$. Ceci prouve (32) et (36).

Si $x \in \mathrm{E}$, alors $z^1 \circ \mathrm{H}(x) = z(x)$ par définition de z^1; $\mathrm{Z}^1 \circ \mathrm{H}(x) = z(x)$ par construction de Z^1, et $\mathrm{Z} \circ h(x) = z(x)$ par définition de Z, ce qui établit (33).

Enfin, (34) et (35) ont été prouvés en cours de route. La proposition 7 est démontrée.

Nous pouvons passer à la démonstration du théorème. Commençons par le cas où $n > 2k$. Le lemme 16 nous dit que le théorème est vrai quand $z_j(x) = x_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, k$. Cela reste vrai, bien entendu, si $z_m(x) = x_1$ pour un $m > k$ et $z_j(x) = x_j$ pour $j = 2, \ldots, k$. La proposition 3 nous permet de remplacer de telles fonctions z par $z \circ h$, où h est un changement de variable bi-lipschitzien de $\mathbb{R}^k$. Soit maintenant z une surface régulière telle que $z_j(x) = x_j$ pour $j = 2, \ldots, k$. La proposition 7 nous donne une θ-décomposition de z en surfaces régulières que nous savons déjà traiter. On en déduit la continuité de T_σ^* pour la fonction z (proposition 4).

Un nouveau changement de coordonnées dans $\mathbb{R}^n$, et une application de la proposition 3 montrent que le théorème est encore vrai pour les surfaces $z \circ h$, où h est bi-lipschitzien et où z est une surface régulière telle que $z_j(x) = x_j$ pour $j = 3, \ldots, k$, et $z_m(x) = x_1$ pour un $m \neq 3, \ldots, k$. Une nouvelle application des propositions 4 et 7 permet de passer au cas où $z_j(x) = x_j$ pour $j = 3, \ldots, k$.

Après un certain nombre d'itérations de ce procédé, on arrive au cas le plus général de surface régulière de dimension k dans un espace de dimension $n > 2k$.

Dans le cas où $n \leqq 2k$, on étend la fonction K en une fonction C^∞, homogène de degré $-k$, et impaire définie sur $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, $\mathrm{N} = 2k + 1$. Il ne reste plus qu'à constater que z est aussi une surface régulière dans $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, et que l'opérateur T_σ^* est le même en dimension n qu'en dimension N. Et voilà!

7. Quelques remarques sur le théorème

Commençons par énoncer quelques extensions faciles du résultat principal.

1. Nous avons supposé, dans le théorème, que K était de classe C^∞. On peut se contenter de supposer que K est de classe C^N sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Une valeur raisonnable de la

constante N (qui dépend de n) pourra être obtenue à partir des résultats de Murai [M], en utilisant par exemple la méthode indiquée dans [CDM] et la proposition 6 de préférence à la proposition 5 lorsque $k \geqq n/2$.

2. Le corollaire s'étend aisément au cas où μ est ce que l'on pourrait appeler une « mesure de Carleson de dimension k par rapport à la surface z », c'est-à-dire une mesure telle que $\mu(\mathrm{B}) \leqq \mathrm{C}\, r(\mathrm{B})^k$ pour toute boule rencontrant $z(\mathbb{R}^k)$, où $r(\mathrm{B})$ désigne le rayon de B. La démonstration est la même que dans le cas où $k=1$ et $n=2$.

3. On peut aussi démontrer une variante à poids du théorème. Lorsque $\sigma \in \Sigma$ on peut définir une classe $\mathrm{A}^1(\sigma)$ de la manière suivante: le poids ω, défini sur le support de σ dans $\mathbb{R}^n$, est dans $\mathrm{A}^1(\sigma)$ s'il existe une constante $\mathrm{C} \geqq 0$ telle que, pour $x_0 \in \operatorname{supp} \sigma$ et $r>0$,

$$\sigma(\mathrm{B}(x_0, r))^{-1} \int_{\mathrm{B}(x_0, r)} \omega\, d\sigma \leqq \operatorname*{infess}_{\mathrm{B}(x_0, r)} \omega.$$

On obtient sans difficulté la continuité de l'opérateur maximal M_σ sur $\mathrm{L}^p(\omega\, d\sigma)$ pour $1<p<+\infty$ [notons au passage que si on veut la continuité de $\mathrm{M}_\mu : \mathrm{L}^p(\omega\, d\mu) \to \mathrm{L}^p(\omega\, d\sigma)$, il faut supposer que ω est définie partout, et remplacer l'infess par un inf, ou au moins par un infess par rapport à $d\mu$]. On peut alors montrer que l'opérateur T_σ^* du théorème est aussi continu sur $\mathrm{L}^p(\omega\, d\sigma)$: on utilise simplement les inégalités aux bons λ obtenues au paragraphe 3 et le fait que, si $\omega \in \mathrm{A}^1(\sigma)$, alors $\omega \circ z$ est dans A^1 (sur $\mathbb{R}^k$).

4. Nous avons prouvé le théorème lorsque la surface z était définie sur $\mathbb{R}^k$ tout entier. On peut se demander s'il reste vrai lorsque z est seulement définie sur un ensemble fermé $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^k$, et vérifie quand même (1) et (2). On ne peut évidemment pas espérer un tel résultat pour tout E (penser au cas où E est de mesure nulle). Cependant, lorsque E est, par exemple, l'image par une application bi-lipschitzienne de $\mathbb{R}^k$ d'une boule (ou une réunion finie de tels ensembles) le théorème est encore vrai. Il suffit, pour le voir, de vérifier que si z_0 est définie sur la boule unité de $\mathbb{R}^k$ et vérifie (1) et (2), alors on peut trouver une surface régulière z, définie sur $\mathbb{R}^k$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, et telle que $z(x) = (z_0(x), 0)$ lorsque x est dans la boule unité. Si $\theta \in \mathrm{S}^{k-1}$ est dans la sphère unité de $\mathbb{R}^k$ et si $\lambda \geqq 0$, on définit $z(\lambda\theta)$ par

$$z(\lambda\theta) = \begin{cases} (z_0(\lambda\theta), 0) & \text{si} \quad \lambda \leqq 1 \\ (z_0(\theta), (\lambda-1)\theta) & \text{si} \quad \lambda \geqq 1 \end{cases}$$

On vérifie sans trop de peine que z est bien une surface régulière, et on en déduit le résultat.

5. On peut imaginer un résultat semblable au théorème 1, mais s'appliquant encore lorsque z n'est pas régulière [et notamment ne vérifie pas (2)]. Les hypothèses plus faibles seraient compensées par l'obtention d'un résultat plus faible, comme la continuité de T_σ^*: $\mathrm{L}^p(\omega\, d\sigma) \to \mathrm{L}^p(\omega^{-1}\, d\sigma)$, où ω serait un poids qui tienne compte du défaut de régularité de z. On pense à des puissances de la fonction $\mu(x) = 1 + \sup_{\mathrm{B} \ni x} r(\mathrm{B})^{-k} \int_{\mathrm{B}} d\sigma$. L'auteur a reculé devant la technicité de la vérification.

6. On peut se demander si la notion de surface régulière n'est pas trop restrictive. Notons pour commencer que si z est une fonction lipschitzienne, et si σ est la mesure définie à partir de z, alors la continuité de l'opérateur T_σ^* sur $L^p(d\sigma)$ [pour un $p>1$ et tout K vérifiant les conditions du théorème] entraîne l'inégalité (2). On peut même se contenter d'un nombre fini de noyaux K_i, à condition qu'en tout $z\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, l'un des K_i soit non nul. La démonstration est tout-à-fait élémentaire, et est la même que quand $k=1$ et $n=2$.

Il reste que la mesure σ n'est pas nécessairement la mesure de surface sur $z(\mathbb{R}^k)$, et d'ailleurs que toute surface de dimension k dans $\mathbb{R}^n$, même rectifiable, ne peut pas nécessairement être paramétrée par une fonction lipschitzienne.

Montrons cependant que si z est une surface régulière, alors la mesure σ définie plus haut est équivalente à la mesure de surface sur $z(\mathbb{R}^k)$. Notons μ la mesure de Hausdorff k-dimensionnelle. Le fait que μ soit dominée par σ sur $z(\mathbb{R}^k)$ est une conséquence facile du fait que z est lipschitzienne : si $E\subset\mathbb{R}^k$ peut être recouvert par des boules $B_i=B(x_i, r_i)$ avec $\Sigma r_i^k\leqq C$, alors $z(E)$ est recouvert par les $B(z(x_i), M r_i)$.

Le fait que μ soit dominée par σ est une conséquence de (2) : si $F\subset z(\mathbb{R}^k)$ peut être recouvert par des boules $B_i=B(w_i, r_i)$ avec $\sum_i r_i^k\leqq A$, alors $z^{-1}(F)$ a une mesure totale inférieure à $\sum_i |z^{-1}(B_i)|\leqq C\Sigma r_i^k\leqq CA$. Donc, au moins en ce qui concerne les surfaces régulières, la confusion entre σ et la mesure de surface n'a aucune répercussion sur la continuité des opérateurs qui nous intéressent.

7. Dans le cas où l'on considère une surface rectifiable quelconque $\mathscr{S}$, la continuité sur L^2 de l'opérateur T_μ (où μ est la mesure de surface k-dimensionnelle sur $\mathscr{S}$) n'entraîne pas que $\mathscr{S}$ est l'image de $\mathbb{R}^k$ par une surface régulière, ou même est contenue dans une union finie de telles images. S. Semmes [S2] a trouvé une classe d'hypersurfaces sur lesquelles le potentiel de double-couche (ainsi que d'autres noyaux semblables) définit un opérateur borné; mais les surfaces de Semmes peuvent avoir une topologie bien plus compliquée que celle d'une surface régulière (en particulier, elles peuvent avoir de nombreuses anses).

Il n'est pas vrai non plus que la condition $\mu\in\Sigma$ (où μ est la mesure de surface sur $\mathscr{S}$) soit suffisante. On peut trouver une suite de surfaces telles que $\mu\in\Sigma$ uniformément, et qui convergent vers l'ensemble $(K\times K\times[0,1])\cup P\subset\mathbb{R}^3$ où P est contenu dans un plan vertical et où K est l'ensemble de Cantor où l'on retire la moitié centrale de chaque intervalle à chaque étape (l'ensemble $K\times K$ est connu sous le nom d'exemple de Garnett). Il est connu que le noyau de Cauchy ne définit pas un opérateur borné sur $L^2(K\times K)$ (*voir* par exemple [D 2]), et on en déduit que l'on peut trouver un noyau K pour lequel T_μ n'est pas uniformément borné pour $\mu\in\Sigma$ (uniformément).

8. Surfaces ω-régulières

L'étude récente, par S. Semmes, des surfaces « corde-arc avec petite constante » [c'est-à-dire les surfaces séparant $\mathbb{R}^n$ pour lesquelles les analogues, en termes d'algèbre de

Clifford, des espaces de Hardy $H^2_\pm$ sont en position de somme presque-orthogonale dans L^2] permet de penser qu'il est préférable de considérer une notion de paramétrage plus souple que celle de paramétrage lipschitzien: les surfaces «corde-arc avec petite constante» semblent très difficiles à paramétrer de manière lipschitzienne. Nous allons donc donner, dans ce dernier paragraphe, une généralisation du théorème autorisant des paramétrages de surface par des fonctions qui ne sont pas lipschitziennes.

DÉFINITION 6. — On se donne un poids $\omega \in A^\infty(\mathbb{R}^k)$ dans la classe de Muckenhoupt. On dira que $z : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ est une surface ω-régulière si

(39) $$|\nabla z(x)| \leqq \omega(x)^{1/k} \quad \text{(au sens des distributions)}$$

et

(40) la mesure borélienne μ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^k} f \circ z(x)\, \omega(x)\, dx$ est dans Δ.

On pourra trouver les propriétés classiques des poids de A^∞ que nous utiliserons dans [J], p. 19-28. Notons aussi que, quand ω est une constante, on retrouve les surfaces régulières.

Nous voulons généraliser le théorème du paragraphe 6 de la manière suivante.

PROPOSITION 8. — *Soient* $\omega \in A^\infty(\mathbb{R}^k)$, *$z$ une surface ω-régulière, μ la mesure qui lui est associée en* (40), *et* $K : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{C}$ *une fonction vérifiant les hypothèses du théorème. Alors l'opérateur maximal* T^*_μ *défini au paragraphe* 2 *à l'aide du noyau* $K(x-y)$ *est borné sur* $L^p(d\mu)$ *pour* $1 < p < +\infty$.

Nous verrons bientôt que $\mu \in \Sigma$; on déduit donc de la proposition 2 que T^*_μ est aussi continu de $L^p(d\mu)$ dans $L^p(d\nu)$ et que T^*_ν envoie $L^p(d\nu)$ dans $L^p(d\mu)$ dès que $\nu \in \Delta$.

L'idée de la démonstration est de trouver une θ-décomposition de z en surfaces régulières. Nous remplacerons souvent le fait que z est lipschitzienne (qui n'est plus vrai) par le lemme suivant.

LEMME 20. — *Si z est ω-régulière et si $x, y \in \mathbb{R}^k$, alors*

$$|z(x) - z(y)| \leqq C \left\{ \int_B \omega(t)\, dt \right\}^{1/k},$$

où B *est la boule de* $\mathbb{R}^k$ *dont un diamètre est* $[x, y]$.

Comme $\omega \in A^\infty$, on peut trouver un $q > 1$ tel que ω vérifie une inégalité de Hölder inversée:

(41) $$\left\{ \frac{1}{|B|} \int_B \omega^q \right\}^{1/q} \leqq C \frac{1}{|B|} \int_B \omega \quad \text{pour toute boule B.}$$

D'autre part, si B est la boule mentionnée dans le lemme, on a

$$|z(x) - z(y)| \leqq C |x - y| \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |\nabla z|^{kq} \right\}^{1/kq}.$$

[Cette inégalité s'obtient en écrivant $z(x) - z(y)$ comme l'intégrale de ∇z sur un certain nombre de chemins, et en faisant la moyenne sur ces chemins; penser au théorème de Sobolev]. Il ne reste plus maintenant qu'à utiliser (39) et (41):

$$|z(x)-z(y)| \leqq C|x-y|\left\{\frac{1}{|B|}\int \omega^q\right\}^{1/kq} \leqq C|x-y|\left\{\frac{1}{|B|}\int_B \omega\right\}^{1/k},$$

ce qui prouve le lemme.

LEMME 21. — *La mesure* μ *définie par* (40) *est dans* Σ.

En effet, soient w un point du support de μ et $D=B(w, r)$ une boule de $\mathbb{R}^n$ centrée en w. Soit x tel que $z(x)=w$, et soit R tel que

$$\omega(B(x, R))=\int_{B(x, R)} \omega=\frac{r^k}{C^k},$$

où C est la constante du lemme 20.

Alors $z[B(x, R)] \subset B(w, C\{r^k/C^k\}^{1/k})=D$ grâce au lemme 20, et par conséquent $\mu(D) \geqq \omega(B)=r^k/C^k$, ce qui prouve que $\mu \in \Sigma$.

Pour poursuivre la démonstration de la proposition 8, nous allons essayer de θ-décomposer z. Donnons-nous donc un cube Q. Donnons-nous aussi une constante C_0, qui sera fixée plus tard. On définit deux ensembles E_1 et E_2 par

$$E_1=\left\{x \in Q ; [\omega \mathbf{1}_{C_0 Q}]^*(x) \leqq C_1 \frac{\omega(Q)}{|Q|}\right\}.$$

où f^* est la fonction maximale de Hardy-Littlewood, et C_1 sera bientôt choisie (en fonction de C_0), et

$$E_2=\left\{x \in Q ; \mathscr{M}_\omega\left(\frac{1}{\omega} \mathbf{1}_{C_0 Q}\right)(x) \leqq C_1 \frac{|Q|}{\omega(Q)}\right\},$$

où

$$\mathscr{M}_\omega f(x)=\sup_{Q \ni x} \omega(Q)^{-1} \int_Q|f(t)| \omega(t)\, dt$$

est la fonction maximale de f par rapport à la mesure $\omega\, dx$. On pose $E=E_1 \cap E_2$.

LEMME 22. — *Si* $0<\theta<1$ *et* C_0 *sont fixés, on peut trouver* C_1 *tel que* $\omega(E) \geqq \theta \omega(Q)$.

Soient $F_1=Q \setminus E_1$ et $F_2=Q \setminus E_2$. Nous allons montrer que $|F_1| . |Q|^{-1}$ et $\omega(F_2) \omega(Q)^{-1}$ sont aussi petits qu'on veut. On en déduira le lemme car $\omega \in A^\infty$. Pour F_1, le théorème maximal donne

$$|F_1| \leqq \frac{C}{C_1} \frac{|Q|}{\omega(Q)} \omega(C_0 Q) \leqq \frac{C}{C_1}|Q|$$

car $\omega\, dx$ est une mesure doublante.

Pour F_2, notons que $\mathcal{M}_\omega$ envoie continûment $L^1(\omega\,dx)$ dans $L^1_{\text{faible}}(\omega\,dx)$ car $\omega\,dx$ est une mesure doublante, de sorte que

$$\omega(F_2) \leqq \frac{C}{C_1}\,\frac{\omega(Q)}{|Q|}\,\|\mathbf{1}_{C_0Q}\,\omega^{-1}\|_{L^1(\omega\,dx)} \leqq \frac{C}{C_1}\,\frac{\omega(Q)}{|Q|}\int_{C_0Q}\omega^{-1}\,\omega\,dx \leqq \frac{CC_0^k}{C_1}\,\omega(Q),$$

ce qui démontre le lemme.

LEMME 23. — *Supposons que $k<n/2$. Alors il existe une fonction régulière* Z *telle que*

$$z(x) = \left[\frac{\omega(Q)}{|Q|}\right]^{1/k} Z(x) \quad \textit{pour tout } x\in E.$$

Notons que, si l'on remplace $\omega(x)$ par le poids $\bar\omega(x) = (|Q|/\omega(Q))\,\omega(x)$ et $z(x)$ par $\bar z(x) = [|Q|/\omega(Q)]^{1/k} z(x)$, alors la surface $\bar z$ est $\bar\omega$-régulière avec les mêmes constantes, E ne change pas, et $\bar\omega(Q) = |Q|$. On peut donc supposer que $\omega(Q) = |Q|$. On peut aussi supposer que Q est le cube unité.

Pour construire la fonction Z, on procède exactement comme pour la proposition 5. Il nous faut pour cela une fonction $\hat z$ qui soit lipschitzienne et qui coïncide avec z sur E. Notons que, si x et y sont dans E (et si C_0 a été choisi assez grand), la boule B de diamètre $[x, y]$ est contenue dans $C_0\,Q$. Le lemme 20 nous dit que

$$|z(x)-z(y)| \leqq C\left\{\int_B \omega\right\}^{1/k} \leqq C\,|x-y|\left\{\frac{1}{|B|}\int_B \omega(t)\,dt\right\}^{1/k} \leqq C\,|x-y| \quad \text{car } x\in E_1.$$

La restriction de z à E est donc C_2-lipschitzienne pour un certain $C_2 \geqq 0$. On peut maintenant définir $\hat z$, par exemple par

$$\hat z_l(x) = \inf_{t\in E}\{z_l(t) + C_2\,|t-x|\} \qquad \text{pour} \quad l=1,\ldots,n.$$

On peut maintenant construire la fonction Z comme au paragraphe 4, car le lemme 9 est encore valable dans notre cas (la seule chose qu'on y utilise, en fait, est que $\mathscr{V}$ est le support d'une mesure de Σ). On obtient une fonction lipschitzienne Z, qui coïncide avec z sur E, qui est (uniformément en j) régulière sur chaque Q_j; et qui vérifie $d(Z(x)) = \operatorname{dist}(Z(x), \mathscr{V}) \geqq R_j/N$ pour tout $x\in Q_j$. Il faut encore vérifier que cette fonction Z est (globalement) régulière.

Donnons-nous une boule B, et soit r son rayon. Soit $F = \{x\in E;\, Z(x)\in B\}$. Comme Z coïncide avec z sur E, on a $\omega(F) \leqq C r^k$ car z est ω-régulière. Puisque $F \subset E_2$, $\omega^{-1}(x)$ reste inférieure à C_1 sur F. Par conséquent $|F| = \int_F \omega^{-1}\,\omega \leqq C_1\,\omega(F) \leqq C r^k$.

Soit maintenant $G = \{x\notin 10\,Q;\ Z(x)\in B\}$. Notons que, hors de $10\,Q$, $d(Z(x)) \geqq (1/C)$ $\operatorname{dist}(x, Q)$. Ainsi, si $3\,B$ rencontre $\mathscr{V}$ et si G n'est pas vide, alors $r \geqq (1/C)\,|Q|^{1/k}$. De plus, G est contenu dans $\{x\in\mathbb{R}^k;\, \operatorname{dist}(x, Q) \leqq C r\}$; on en déduit que $|G| \leqq C r^k$.

Supposons maintenant que $3\,B$ ne rencontre pas $\mathscr{V}$, et soit d la distance de B à $\mathscr{V}$. Alors pour tout $x\in G$, $\operatorname{dist}(x, Q) \leqq C\,d(Z(x)) \leqq C\,d$, de sorte que si le cube Q_j rencontre

G, il vérifie $|Q_j| \leqq C d^k$. D'autre part, si x est hors de $10 Q$, $d(Z(x)) \leqq C \operatorname{dist}(x, Q)$ car Z est lipschitzienne et $d(Z(u))=0$ sur E. Donc $\operatorname{dist}(x, Q) \geqq (1/C) d$ pour $x \in G$, et tout cube Q_j qui rencontre G vérifie aussi $|Q_j| \geqq (1/C) d^k$. Le nombre de cubes Q_j qui rencontrent G est borné, et comme les restrictions de Z aux Q_j sont uniformément régulières, $|G| \leqq C r^k$.

Il ne nous reste donc plus qu'à vérifier que

$$|H| \leqq C r^k, \qquad \text{où} \quad H = \{x \in \mathcal{O} \cap 10 Q; Z(x) \in B\}. \tag{42}$$

Commençons par le cas où B rencontre $\mathscr{V}$. Soient J_0 l'ensemble des $j \in J$ tels que Q_j rencontre H, j un élément de J_0 et $x_0 \in Q_j \cap H$. On a à la fois $d(Z(x_0)) \leqq 2r$ et $d(Z(x_0)) \geqq R_j/N$, de sorte que $R_j \leqq C r$. Choisissons un $y \in E$ minimisant la distance à Q_j. Si l'on a choisi C_0 assez grand, alors pour tout $x \in Q_j$, la boule de diamètre $[y, x]$ est contenue dans $C_0 Q$ [notons que ce choix de C_0 ne dépend que des constantes qui interviennent dans la construction de la fonction Z qui a été faite au cours du paragraphe 4, et pas de E].

Le lemme 20 donne

$$|z(x)-z(y)| \leqq C |x-y| [\mathbf{1}_{C_0 Q}]^*(y)^{1/k} \leqq C |x-y| \leqq C r$$

car $y \in E_1$. On en déduit que $z(Q_j) \subset CB$, car Z est lipschitzienne et $z(y)=Z(y)$.

Pour estimer $|Q_j|$ quand $j \in J_0$, notons que CQ_j rencontre E si la constante C est assez grande. Soit $y \in E \cap CQ_j$. Si C_0 a été choisi assez grand, on a encore $CQ_j \subset C_0 Q$ parce que Q_j rencontre $10 Q$, et

$$|CQ_j| = \int_{CQ_j} \omega^{-1} \mathbf{1}_{C_0 Q}\, \omega\, dx \leqq \omega(CQ_j)\, \mathscr{M}_\omega(\omega^{-1} \mathbf{1}_{C_0 Q})(y) \leqq C_1\, \omega(CQ_j) \leqq C\, \omega(Q_j).$$

Par conséquent,

$$|H| \leqq \sum_{j \in J_0} |Q_j| \leqq C \sum_{j \in J_0} \omega(Q_j) \leqq C\, \omega(\{x \in \mathcal{O}; z(x) \in CB\}) \leqq C r^k.$$

Ceci prouve (42) lorsque B rencontre $\mathscr{V}$.

Lorsque $2B$ rencontre $\mathscr{V}$, on se ramène au cas précédent.

Supposons maintenant que $d = \operatorname{dist}(B, \mathscr{V}) \geqq r$. Soit encore J_0 l'ensemble des $j \in J$ tels que Q_j rencontre H. Si $j \in J_0$, on peut trouver $x \in Q_j$ tel que $d(Z(x)) \geqq d$, et par conséquent $R_j \geqq (1/C) d$. En notant D la boule de même centre que B et de rayon $2d$, on a, comme dans le cas où B rencontrait $\mathscr{V}$,

$$z(Q_j) \subset CD$$

et

$$|J_0| = \sum_{j \in J_0} \left(\frac{R_j}{R_j}\right)^k \leqq C \sum_{j \in J_0} d^{-k} |Q_j| \leqq C \sum_{j \in J_0} d^{-k} \omega(Q_j) \leqq C d^{-k} \omega(\{x \in \mathcal{O}; z(x) \in CD\}) \leqq C.$$

On en déduit (42) parce que la restriction de Z à chaque Q_j est régulière.

Nous avons fini de démontrer le lemme 23. Nous voulons maintenant vérifier que l'image μ de la mesure $\omega\,dx$ par z satisfait aux hypothèses de la proposition 4 *bis*. Nous savons déjà (lemme 21) que $\mu \in \Sigma$. Il ne reste plus qu'à trouver la mesure σ et l'ensemble E. Donnons-nous donc un point $w \in z(\mathbb{R}^k)$ et un rayon $R > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^k$ tel que $z(x) = w$. Choisissons aussi r tel que $\omega(B(x, r)) = C^{-k} R^k$ (où C est la constante du lemme 20). Soit Q le plus grand cube contenu dans $B(x, r)$. Appliquons le lemme 23 (si $n \leqq 2k$, on commence par plonger $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{2k+1}$ et par prolonger le noyau K, comme on l'a fait pour le théorème). Choisissons pour σ l'image par $(\omega(Q)/|Q|)^{1/k} Z$ de la mesure $(\omega(Q)/|Q|)\,dx$. Le lemme 22 nous dit que, si $\tilde{E} = z(E)$, $\mu(\tilde{E}) \geqq \theta\omega(Q) \geqq (\theta/C)\,\omega(B(x, r)) \geqq (\theta/C)\,R^k \geqq \tilde{\theta}\,\mu(B)$ car $\mu \in \Sigma$. D'autre part, les inégalités (17) découlent du théorème. Il ne reste donc plus qu'à vérifier que $\mathbf{1}_{\tilde{E}}\,\mu \leqq C\,\sigma$ pour une constante C qui ne dépend pas de Q. Ceci découle de ce que $\mathbf{1}_{\tilde{E}}\,\mu$ est dominé par la mesure de Haussdorff k-dimensionnelle sur $\tilde{E}$, qui est elle-même dominée par σ (la remarque 6 du paragraphe 7 reste valable dans le cas ω-régulier avec la même démonstration; il faut simplement remplacer dx par $\omega\,dx$).

On a fini de prouver la proposition 8.

Remarque. — Comme dans le cas des surfaces régulières, la mesure $d\mu$ que l'on a mise sur la surface $z(\mathbb{R}^k)$ est la mesure image de $\omega\,dx$ par z. Il aurait été plus naturel de considérer la mesure de Hausdorff k-dimensionnelle sur $z(\mathbb{R}^k)$ (appelons-la $d\sigma$). Heureusement, si z est ω-régulière, alors les mesures $d\mu$ et $d\sigma$ sont équivalentes (c'est-à-dire que chacune est inférieure à C fois l'autre). La démonstration est la même que dans le cas où ω est une constante.

BIBLIOGRAPHIE

[A] L. AHLFORS, *Zur Theorie der Uberlagerungsfläschen* (Acta Math., vol. 65, 1935, p. 157-194).

[CDM] R. R. COIFMAN, G. DAVID et Y. MEYER, *La solution des conjectures de Calderón* (*Advances in Math.*, vol. 48, 1983, p. 144-148).

[CMM] R. R. COIFMAN, A. MCINTOSH et Y. MEYER, *L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur* L^2 *pour les courbes lipschitziennes* (*Ann. of Math.*, vol. 116, 1982, p. 361-387).

[D 1] G. DAVID, *Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe* (*Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, vol. 17, 1984, p. 157-189).

[D2] G. DAVID, *Noyau de Cauchy et opérateurs de Calderón-Zygmund* (*Thèse d'État*, Paris-XI - Orsay, 3193, 1986).

[J] J.-L. JOURNÉ, *Calderón-Zygmund operators, pseudodifferential operators and the Cauchy integral of Calderón* (*Lecture Notes in Mathematics*, n° 994, Springer, 1983).

[M] T. MURAI, *Boundedness of Singular Integral Operators of Calderón type* VI, Preprint series, College of general Education, Nagoya, n° 8, 1984.

[S1] S. SEMMES, *Chord-arc Surfaces with Small Constants*, I et II, preprint.

[S2] S. SEMMES, *A Criterion for the Boundedness of Singular Integrals on Hypersurfaces*, à paraître, Trans. A.M.S.

[St] E. M. STEIN, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[Z] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, 1968.

(Manuscrit reçu le 9 février 1987,
révisé le 2 février 1988).

G. DAVID,
Unité associée au C.N.R.S.
n° 169,
Centre de Mathématiques
de l'École Polytechnique,
plateau de Palaiseau,
91128 Palaiseau Cedex.