ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. ALINHAC

Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non-linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 21, nº 1 (1988), p. 91-132

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_1_91_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 21, 1988, p. 91 à 132.

INTERACTION D'ONDES SIMPLES POUR DES ÉQUATIONS COMPLÈTEMENT NON-LINÉAIRES

PAR S. ALINHAC

Introduction

Dans cet article, nous décrivons les singularités C^∞ de solutions d'équations (ou de systèmes) complètement non linéaires, de la forme

$$F(x, u(x), \ldots, \partial_x^\alpha u(x), \ldots) = 0, \qquad |\alpha| \leqq m,$$

dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, n quelconque.

Plus précisément, t étant une coordonnée représentant le temps, on décrit les singularités de u dans le futur Ω_+ connaissant ces singularités dans le passé Ω_- $(\Omega_\pm = \Omega \cap (\pm t > 0))$ ou à l'instant $t=0$: on se limite pour cela aux configurations les plus simples, en supposant en outre la solution u considérée déjà assez régulière ($u \in H^{s+m}_{\text{loc}}(\Omega)$, $s > n/2$ au moins), et l'opérateur linéarisé de F hyperbolique.

Dans le cas des équations (ou systèmes) semi-linéaires, c'est-à-dire de la forme

$$P(x, D_x) u = G(x, u(x), \ldots, \partial_x^\alpha u, \ldots), \qquad |\alpha| \leqq m-1,$$

de nombreux travaux sont disponibles : M. Beals [7], Bony ([8] à [13]), P. Gérard [15], Godin [18], B. Lascar [19], Leichtnam [20], Melrose et Ritter [21], G. Métivier [22], Rauch et Reed ([25], [26], [27]), Sablé-Tougeron [28].

Dans le cas général, en revanche, peu de choses sont connues : P. Gérard [15] dans le cas analytique, P. Godin ([16], [17]) pour la dimension deux, Alinhac ([3], [4]), Chemin [14].

Les théorèmes que nous présentons ici supposent la solution u (resp. les données de Cauchy) C^∞ hors d'une ou plusieurs hypersurfaces caractéristiques dans le passé (resp. C^∞ hors d'une hypersurface Γ de $\{t=0\}$), et établissent que u est C^∞ dans l'avenir (resp. dans l'ouvert) hors d'un nombre fini de surfaces caractéristiques, qui sont elles-mêmes C^∞ hors de leur intersection (resp. hors de Γ) : les énoncés précis font l'objet du paragraphe 1.

Le plan de l'article est le suivant :

Au paragraphe 1, on énonce les résultats principaux, en utilisant uniquement la notion simple de distribution conormale par rapport à une hypersurface C^∞.

Au paragraphe 2, on fait une théorie des espaces de distributions conormales définies par l'action de champs peu réguliers, et du calcul symbolique pour des opérateurs à coefficients dans ces espaces. Ce paragraphe est auto-contenu, et nous espérons que les espaces qui y sont discutés se révèleront utiles dans d'autres applications (solutions striées, etc.).

Au paragraphe 3, nous explicitons les constructions du paragraphe 2 dans des cas particuliers (distributions conormales par rapport à une ou deux surfaces peu régulières, etc.).

Au paragraphe 4, nous précisons les propriétés des distributions conormales associées à une configuration Σ de m hypersurfaces Σ_j peu régulières se coupant selon une arête Γ de codimension 2 (qui sont celles dont on a besoin ici).

Au paragraphe 5, nous considérons des configurations Σ dont les surfaces Σ_j sont caractéristiques pour un symbole $p(x, \xi)$: nous établissons un lien entre la régularité des coefficients de p et celle des surfaces Σ_j et de l'arête Γ.

Au paragraphe 6, on étend aux distributions conormales les théorèmes usuels de propagation des singularités H^s pour des solutions d'équations hyperboliques.

Enfin, le paragraphe 7 précise les preuves des théorèmes.

1. Résultats principaux

Soit $\Omega \ni 0$ un ouvert de $\mathbb{R}^n (n \geqq 2)$ où la variable (y, t) $(t \in \mathbb{R})$ est notée x; on pose $\Omega_\pm = \Omega \cap \{\pm t > 0\}$.

Soit F une fonction réelle C^∞ de ses arguments, et $u \in H^{s+m}_{loc}(\Omega)$ une solution réelle dans Ω de l'équation

$$F(x, u(x), \ldots, u^{(\alpha)}(x), \ldots) = 0, \qquad u^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u, \qquad |\alpha| \leqq m.$$

On suppose dans tout l'article $s > n/2$, ce qui implique que H^s_{loc} est une algèbre, et l'équation a un sens.

Soit

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} \frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}} (x, u(x), \ldots, u^{(\alpha)}(x), \ldots) \xi^\alpha$$

le symbole principal de l'opérateur linéarisé de F sur u : on suppose les surfaces $t = \text{Cte}$ non caractéristiques pour p.

On rappelle la définition [9] des espaces $H^{s,k}_{loc}(\Sigma)$, lorsque Σ est une hypersurface C^∞ $(s \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$:

$$H^{s,k}_{loc}(\Sigma) = \{ u \in H^s_{loc}(\Omega),\ Z_1 \ldots Z_l u \in H^s_{loc}(\Omega), \qquad l \leqq k,$$
$$\text{pour tous } Z_i \text{ champs tangents à } \Sigma \text{ à coefficients } C^\infty \}.$$

Les deux premiers théorèmes décrivent l'interaction de deux ou plusieurs « ondes simples ».

THÉORÈME 1 (interaction de deux ondes simples). — *Soit* $u \in H^{s+m}_{\text{loc}}(\Omega)$, $s > (n/2)+4$, *une solution dans* Ω *de* $F(x, \ldots, u^{(\alpha)}(x), \ldots) = 0$.

Soit $(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m)$ *m hypersurfaces de classe* C^1 *se coupant le long de* Γ, *de codimension* 2, $\Gamma \subset \bar{\Omega}_+$, *et deux à deux transverses.*

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(H 1) *Le domaine* Ω_+ *est d'influence de* Ω_- *pour p (c'est-à-dire que toute caractéristique de p issues de* Ω_+ *rencontre* Ω_-).

(H 2) *Les hypersurfaces* Σ_j *sont caractéristiques pour p, et les caractéristiques de p issues des normales aux* Σ_j *en des points de* Γ *sont transverses à* Γ.

(H 3) *Dans* Ω_-, Σ_1 *et* Σ_2 *sont* C^∞, *et u est* C^∞ *hors de* $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$; *de plus, localement près de* $\Sigma_i (i=1, 2)$, *on suppose* $u \in H^{s+m, \infty}_{\text{loc}}(\Sigma_i)$.

Les singularités de u dans Ω *peuvent alors être décrites de la façon suivante :*

(i) Γ *est* C^∞.

(ii) *Les surfaces* Σ_1 *et* Σ_2 *sont* C^∞ *hors de* Γ, *ainsi que les surfaces « sortantes »* $\Sigma_3^+, \ldots, \Sigma_m^+$.

(iii) *La solution u est* C^∞ *hors de* $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3^+ \cup \ldots \cup \Sigma_m^+$.

(iv) *Localement près de* $\Sigma_i \setminus \Gamma$ $(i=1, 2)$, $u \in H^{s+m, \infty}_{\text{loc}}(\Sigma_i)$.

(v) *Localement près de* $\Sigma_i^+ \setminus \Gamma (i \geqq 3)$, $u \in H^{t+m, \infty}_{\text{loc}}(\Sigma_i)$, *où* $t = s + s - (n/2) - 1$. ∎

Lorsque plus de deux ondes simples interagissent, on se limite au cas (peu réaliste) du théorème 2.

THÉORÈME 2 (interaction de plusieurs ondes simples). — *Considérons la situation du théorème* 1, *avec les hypothèses* (H_1) *et* (H_2), *l'hypothèse* (H_3) *étant remplacée par la suivante :*

(H'_3) *Dans* Ω_-, Σ_i $(i=1, \ldots, m)$ *est* C^∞, *et u est* C^∞ *hors de* $\Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_m$; *de plus, localement près de* Σ_i $(i=1, \ldots, m)$, $u \in H^{s+m, \infty}_{\text{loc}}(\Sigma_i)$.

Les singularités de u dans Ω *peuvent alors être décrites de la façon suivante :*

(i) Γ *est* C^∞.

(ii) *Les surfaces* Σ_i *sont* C^∞ *hors de* Γ $(i=1, \ldots, m)$.

(iii) *La solution u est* C^∞ *hors de* $\Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_m$.

(iv) *Localement près de* $\Sigma_i \setminus \Gamma (i=1, \ldots, m)$, $u \in H^{s+m, \infty}_{\text{loc}}(\Sigma_i)$. ∎

Ces deux théorèmes généralisent celui de Bony [9].

Le troisième théorème concerne le problème de Cauchy.

THÉORÈME 3 (problème de Cauchy à données conormales). — *Soit* $u \in H^{s+m}_{\text{loc}}(\Omega)$, $s > (n/2)+5$, *une solution dans* Ω *de*

$$F(x, \ldots, u^{(\alpha)}(x), \ldots) = 0.$$

Soit Γ *une hypersurface* C^∞ *de* $\omega = \{ t = 0 \} \cap \Omega$.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(H 1) *Le symbole p est strictement hyperbolique dans* Ω *par rapport aux surfaces* $t = \text{Cte}$, *et* $\Omega_\pm$ *sont des domaines d'influence de* ω.

(H 2) *Pour* $j=0, \ldots, m-1$, $D_t^j u|_{t=0} \in H_{loc}^{s+m-j, \infty}(\Gamma)$.

Les singularités de u dans Ω peuvent alors être décrites de la façon suivante :

(i) *Les surfaces caractéristiques $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$ issues de Γ sont C^∞ hors de Γ.*

(ii) *La solution u est C^∞ hors de $\Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_m$.*

(iii) *Localement près de $\Sigma_i \setminus \Gamma$ $(i=1, \ldots, m)$, $u \in H_{loc}^{s+m, \infty}(\Sigma_i)$.* ■

Ces énoncés appellent quelques remarques :

1. Pour ne pas alourdir, nous avons omis les énoncés correspondants pour des systèmes, qui ne présentent pas de difficultés.

2. Les conditions « techniques » $s>(n/2)+4$, $s>(n/2)+5$ (Cauchy) peuvent être affaiblies pour des équations de type spécial : on prendra seulement $s>(n/2)+3$, $s>(n/2)+4$ (Cauchy) dans le cas quasi linéaire, etc.

3. Lorsqu'on dispose d'un résultat d'existence de solutions du problème de Cauchy dans les espaces de Sobolev, comme par exemple dans le cas d'équations ou de systèmes quasi linéaires, on peut le combiner avec le théorème 3 pour obtenir une description de la solution près de $\{t=0\}$, car l'hypothèse (H 1) se vérifie alors à l'aide des traces de u.

4. Dans le plan $(n=2)$, on peut établir facilement les résultats correspondants aux théorèmes 1, 2, 3 dans les espaces de fonctions Höldériennes, grâce au résultat de [6].

5. Nous ne savons pas si des hypothèses plus fortes sur u dans le passé (par exemple, « piecewise smooth ») impliquent la régularité correspondante dans l'avenir (*voir* cependant [24]); en revanche, il semble que l'hypothèse « u conormale » soit la plus faible qui garantisse la régularité des surfaces caractéristiques hors de Γ (des exemples simples montrent qu'on ne peut espérer, en général, des surfaces régulières partout).

Notons enfin que la méthode de preuve permet d'obtenir en fait un résultat beaucoup plus fin :

(i) une hypothèse de régularité limitée du type « $u \in H_{loc}^{s+m, k}(\Sigma_i)$ » dans le passé implique la régularité correspondante des surfaces Σ_i et de u dans l'avenir.

(ii) On connait le comportement des surfaces Σ_i et de la solution u près de Γ, en termes d'espaces de distributions conormales qui sont assez compliqués à décrire (§§ 2, 3, 4).

Le lecteur trouvera les énoncés précisés au paragraphe 7.

2. Espaces de distributions conormales définis à l'aide de parachamps

Pour une construction un peu analogue dans un autre contexte, *voir* [14].

2.0. Notations. — Dans tout l'article, nous utilisons les notations des articles [8] de Bony et [2] d'Alinhac, que nous rappelons très brièvement :

(*a*) Les espaces de Sobolev (sur $\mathbb{R}^n$) sont notés H^s (norme $|\,.\,|_s$), les espaces de fonctions Höldériennes C^σ, $\sigma \notin \mathbb{Z}$ (norme $\|\,.\,\|_\sigma$). Lorsque $\sigma \in \mathbb{Z}$, $\sigma \neq 0$, C^σ désigne l'espace construit à partir de la classe de Zygmund C_*^1 (comme dans Meyer [23]), et $\|\ \ \|_0$ désigne la norme uniforme.

(*b*) Pour opérer les « décompositions en couronnes dyadiques » (de Littlewood et Paley), on utilise des fonctions φ_0, φ vérifiant $1=\varphi_0(\xi)+\sum_{j=0}^{+\infty}\varphi(2^{-j}\xi)$, et, pour $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$u=\sum_{p=-1}^{+\infty}u_p,\qquad u_{-1}=S_0 u=\varphi_0(D)\,u,\qquad u_p=\varphi(2^{-p}D)\,u,$$

$$S_p u=\sum_{q=-1}^{p-1}u_q.$$

Les espaces C^σ ($\sigma\neq 0$) sont alors caractérisés par

$$\|u_p\|_0\leqq c\,2^{-p\sigma}.$$

(*c*) Le spectre de u est le support de $\hat{u}$. On suppose le lecteur familier avec les techniques de localisation spectrale dans des « couronnes » ou des « boules », telles qu'elles apparaissent dans les articles cités; on désignera génériquement par c_p la couronne

$$c_p=\left\{\xi\in\mathbb{R}^n,\ \frac{1}{c}2^p\leqq|\xi|\leqq c\,2^{p+1}\right\},$$

la constante c prenant diverses valeurs suivant le contexte, et par B_p la boule

$$B_p=\{\xi\in\mathbb{R}^n,\ |\xi|\leqq c\,2^{p+1}\}.$$

(*d*) Pour un difféomorphisme $\chi:\Omega_1\to\Omega_2$ de classe $C^{\rho+1}_{\text{loc}}$ ($\rho>0$), χ^* désigne un opérateur de paracomposition associé à χ, au sens de [2]; lorsque $u\in\mathscr{E}'(\Omega_2)$, on peut prendre

$$\chi^* u=\sum_p[\psi(u_p\circ\chi)]_p,\qquad \text{où}\qquad \psi\in C^\infty_0(\Omega_1),\quad \psi=1$$

au voisinage de $\chi^{-1}(\operatorname{Supp} u)$, $[\ \ ]_p$ désignant une « recoupe » spectrale au voisinage d'une grande couronne c_p.

2.1. Résumé des résultats. — 2.1.1. *Les espaces* $\tilde{C}^{\varepsilon,l}_{\text{loc}}(\mathscr{V})$. — Soit $\alpha>1$, et $\mathscr{V}$ un C^∞-sous-module de $C^\alpha_{\text{loc}}(\Omega, T\Omega)$, le module des champs Z, définis sur Ω (ouvert de $\mathbb{R}^n$), à coefficients $C^\alpha_{\text{loc}}(\Omega)$.

Posons $\tilde{C}^{\varepsilon,0}_{\text{loc}}(\mathscr{V})=\tilde{C}^{\varepsilon,0}_{\text{loc}}=C^\varepsilon_{\text{loc}}(\Omega)$, et supposons définis les espaces $\tilde{C}^{\varepsilon,l}_{\text{loc}}(\mathscr{V})$ pour $l\leqq k-1$; pour définir $\tilde{C}^{\varepsilon,k}_{\text{loc}}(\mathscr{V})$, on fait sur $\mathscr{V}$ l'hypothèse supplémentaire (pour un certain $k\geqq 1$, fixé) : $(P_{\alpha,k-1})$ *les coefficients des champs de* $\mathscr{V}$ *appartiennent à* $\tilde{C}^{\alpha,k-1}_{\text{loc}}(\mathscr{V})$.

Définition 2.1.1. — *Pour* $1-\alpha<\varepsilon\leqq\alpha$, *on pose*

$$\tilde{C}^{\varepsilon,k}_{\text{loc}}(\mathscr{V})=\{u\in\tilde{C}^{\varepsilon,k-1}_{\text{loc}}(\mathscr{V}),\ \forall Z\in\mathscr{V},\ Zu\in\tilde{C}^{\varepsilon,k-1}_{\text{loc}}(\mathscr{V})\}.$$

On note que Zu *est bien défini dans* $\mathscr{D}'(\Omega)$, *et que* $\tilde{C}^{\varepsilon,k}_{\text{loc}}(\mathscr{V})$ *est une algèbre pour* $0\leqq\varepsilon\leqq\alpha$.

On suppose de plus, dans toute la suite, que $\mathscr{V}$ est de type fini au sens suivant :

(TF) *Il existe une famille finie $Z_j (1 \leqq j \leqq N)$, $Z_j \in \mathscr{V}$, telle que pour tout $Z \in \mathscr{V}$, il existe des $\alpha_j \in \tilde{C}_{\text{loc}}^{\alpha-1, k-1}(\mathscr{V})$ avec $\alpha_j Z_j \in \mathscr{V}$ et $Z = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j Z_j$.*

2.1.2. *Les résultats.* — Dans ce chapitre, on va construire, pour une collection $\mathscr{V}$ donnée satisfaisant, pour un $k \geqq 1$ et $\alpha > 1$, les conditions $P_{\alpha,\, k-1}$ et (TF), des espaces $H_{\text{loc}}^{s, l}(\mathscr{V})$ et $C_{\text{loc}}^{\sigma, l}(\mathscr{V})$ $(0 \leqq l \leqq k,\ s \in \mathbb{R},\ \sigma \in \mathbb{R},\ \sigma \neq 0)$, qui jouissent des propriétés suivantes :

(i) Pour $l = 0$, $H_{\text{loc}}^{s, 0}(\mathscr{V}) = H_{\text{loc}}^{s}(\Omega)$, $C_{\text{loc}}^{\sigma, 0}(\mathscr{V}) = C_{\text{loc}}^{\sigma}(\Omega)$.

(ii) Pour $a \in C_{\text{loc}}^{\varepsilon, l}(\mathscr{V})$, $\varepsilon > 0$, et $u \in H_{\text{loc}}^{s, l}(\mathscr{V})$, le paraproduit $T_a u$ (*voir* Bony [8]) est « bien défini » modulo $H_{\text{loc}}^{s+\varepsilon, l}(\mathscr{V})$, et $T_a u \in H_{\text{loc}}^{s, l}(\mathscr{V})$. De même si $u \in C_{\text{loc}}^{\sigma, l}(\mathscr{V})$.

(iii) Pour $1 - \alpha < \varepsilon \leqq \alpha$, $\varepsilon \neq 0$, $\tilde{C}_{\text{loc}}^{\varepsilon, l}(\mathscr{V}) = C_{\text{loc}}^{\varepsilon, l}(\mathscr{V})$.

(iv) Notons $\Sigma^m(C_{\text{loc}}^{\varepsilon, l}(\mathscr{V}))$ $(\varepsilon > 0,\ \varepsilon \notin \mathbb{N})$ l'ensemble des symboles $l(x, \xi)$ qui s'écrivent

$$l(x, \xi) = l_m(x, \xi) + l_{m-1}(x, \xi) + \ldots + l_{m-[\varepsilon]}(x, \xi),$$

où $l_{m-q}(x, \xi)$ est homogène en ξ de degré $m - q$, C^∞ en ξ (hors de 0) et de classe $C_{\text{loc}}^{\varepsilon - q, l}(\mathscr{V})$ en x (*voir* Bony [8]).

On peut définir des opérateurs paradifférentiels de symbole l, et si L est un tel opérateur, (qu'on notera par abus T_l), L applique $H_{\text{loc}}^{s, l}(\mathscr{V})$ dans $H_{\text{loc}}^{s-m, l}(\mathscr{V})$ et $C_{\text{loc}}^{\sigma, l}(\mathscr{V})$ dans $C_{\text{loc}}^{\sigma-m, l}(\mathscr{V})$ $(\sigma \neq m)$.

(v) Enfin, si $a \in \Sigma^{m_1}(C_{\text{loc}}^{\varepsilon, l}(\mathscr{V}))$, $b \in \Sigma^{m_2}(C_{\text{loc}}^{\varepsilon, l}(\mathscr{V}))$, $0 < \varepsilon \leqq \alpha$, $T_a T_b - T_{a \# b}$ applique $H_{\text{loc}}^{s, l}(\mathscr{V})$ dans $H_{\text{loc}}^{s - m_1 - m_2 + \varepsilon, l}(\mathscr{V})$, et $C_{\text{loc}}^{\sigma, l}(\mathscr{V})$ dans $C_{\text{loc}}^{\sigma - m_1 - m_2 + \varepsilon, l}(\mathscr{V})$ (si $\sigma - m_1 - m_2 + \varepsilon \neq 0$).

Ici, $a \# b = \sum_{0 \leqq |\alpha| \leqq [\varepsilon]} \dfrac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a\, D_x^\alpha b$.

D'autres propriétés seront établies ultérieurement : invariance par paracomposition (2.4.3); caractère d'algèbre de ces espaces pour $s > n/2$ et $\sigma > 0$ (2.4.4).

Il est commode d'admettre la valeur $\sigma = 0$ dans la notation $C^{\sigma, l}$, C^0 désignant alors L^∞ : ceci entraîne les difficultés habituelles, car $\|u_p\|_0 \leqq C$ ne caractérise pas L^∞; les énoncés concernant les espaces $C^{\sigma, l}$ sont à modifier légèrement dans ce cas : par exemple, dans (ii) ci-dessus, si $u \in C_{\text{loc}}^{0, l}(\mathscr{V})$, on a seulement $T_a u \in C_{\text{loc}}^{-\eta, l}(\mathscr{V})$ (pour tout $\eta > 0$), mais $T_a u$ est bien défini modulo $C_{\text{loc}}^{\varepsilon, l}(\mathscr{V})$, etc.

2.2. LES ESPACES $\tilde{C}_\varphi^{\varepsilon, l}(\mathscr{V})$. — Dans toute la suite, φ désignera une fonction fixe, à support compact dans Ω, $\varphi \in \tilde{C}_{\text{loc}}^{\alpha, k-1}(\mathscr{V})$. Cette fonction servira à tronquer les coefficients des champs Z de $\mathscr{V}$ hors de Ω.

Tous les espaces indexés par φ seront donc des espaces normés de distributions définies sur $\mathbb{R}^n$ tout entier, tandis que les espaces indexés par « loc » seront des espaces locaux de distributions sur Ω.

2.2.1. *Définition des espaces.*

DÉFINITION 2.2.1. — On pose $\tilde{C}_\varphi^{\varepsilon, 0}(\mathscr{V}) = C^\varepsilon$, *et, pour* $1 - \alpha < \varepsilon \leqq \alpha$,

$$\tilde{C}_\varphi^{\varepsilon, l}(\mathscr{V}) = \{u \in \tilde{C}_\varphi^{\varepsilon, l-1}(\mathscr{V}),\ \forall Z \in \mathscr{V},\ \varphi Z u \in \tilde{C}_\varphi^{\varepsilon, l-1}(\mathscr{V})\}.$$

Le lemme suivant permet de définir la norme $\|\,.\,\|'_{\varepsilon,l}$ sur $\tilde{C}_{\varphi}^{\varepsilon,l}(\mathscr{V})$.

LEMME 2.2.1. — *Supposons que* $\mathscr{V}$ *satisfasse* $P_{\alpha,k-1}$ *et* (TF).

(i) *Pour* $1-\alpha<\varepsilon\leqq\alpha-1$, $l\leqq k$, *et* $Z_j (1\leqq j\leqq N)$ *des générateurs de* $\mathscr{V}$,

$$\tilde{C}_{\varphi}^{\varepsilon,l}(\mathscr{V})=\{u\in\tilde{C}_{\varphi}^{\varepsilon,l-1}(\mathscr{V}),\ \varphi Z_j u\in\tilde{C}_{\varphi}^{\varepsilon,l-1}(\mathscr{V})\}.$$

(ii) *Si l'on définit, par récurrence,*

$$\|u\|'_{\varepsilon,l}=\|u\|'_{\varepsilon,l-1}+\sum_{j=1}^{N}\|\varphi Z_j u\|'_{\varepsilon,l-1},\qquad \|u\|'_{\varepsilon,0}=\|u\|_{\varepsilon},$$

on obtient sur $\tilde{C}_{\varphi}^{\varepsilon,l}(\mathscr{V})$ *une norme qui ne dépend pas (à équivalence près) de la famille des* Z_j *choisie.*

Preuve. — C'est immédiat, compte tenu du fait que si $a\in C^{\alpha-1}$, a à support compact, la multiplication par a applique continuement C^{ε} dans lui-même, pour $1-\alpha<\varepsilon\leqq\alpha-1$. ■

Nous aurons également besoin des espaces $\tilde{H}_{\varphi}^{0,l}(\mathscr{V})$, définis de façon analogue à partir de $\tilde{H}_{\varphi}^{0,0}(\mathscr{V})=L^2$, dont la norme sera notée $|\ \ |'_{0,l}$. Sauf exception, et pour ne pas alourdir, nous n'indiquons pas explicitement que les normes ainsi définies dépendent de φ.

2.2.2. *Décomposition de Littlewood-Paley pour* $\tilde{C}_{\varphi}^{\varepsilon,l}(\mathscr{V})$.

LEMME 2.2.2. — *Soit* $\psi(\xi)\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, *et* $\check{\psi}$ *sa transformée de Fourier inverse. Pour* $a^j\in\tilde{C}_{\varphi}^{\varepsilon,l}$, $b\in\tilde{C}_{\varphi}^{\varepsilon',l}$ $(1<\varepsilon\leqq\alpha,\ 0\leqq\varepsilon'\leqq\alpha-1)$, $r\geqq 0$, *posons*

$$B_p u(x)=\int(a^1(x)-a^1(y))\ldots(a^r(x)-a^r(y))\,2^{pr}\,2^{pn}\,\check{\psi}\,(2^p(x-y))\,b(y)\,u(y)\,dy.$$

(i) *Si* $u\in\tilde{C}_{\varphi}^{0,l}$, $\|B_p u\|'_{0,l}\leqq C\|u\|'_{0,l}$.

(ii) *Si* $r\geqq 1$ *et* $\nabla\psi=0$ *près de* $\xi=0$, *ou si* $\psi=0$ *près de* $\xi=0$, *et si* $u\in\tilde{C}_{\varphi}^{\varepsilon',l}$,

$$\|B_p u\|'_{0,l}\leqq C\,2^{-p\varepsilon'}\|u\|'_{\varepsilon',l}+C\,2^{-p(\varepsilon-1)}\|u\|'_{0,l}.$$

Preuve. — (*a*) Pour $l=0$, on a

$$|B_p u(x)|\leqq C\int|2^p(x-y)|^r\,2^{pn}\,|\check{\psi}\,(2^p(x-y))|\,|(bu)(y)|\,dy,$$

d'où (i) dans ce cas, car l'intégrale est le produit de convolution de la fonction $2^{pn}(|z|^r|\check{\psi}|)(2^p\cdot)$, dont la norme L^1 est constante, avec bu.

(*b*) Soit $Z\in\mathscr{V}$, $\varphi Z=\Sigma a_j\partial_j$. Par un calcul direct, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi ZB_p u(x)&=B_p\varphi Z(bu)\\&+\int(a^1(x)-a^1(y))\dots(a^r(x)-a^r(y))2^{pr}2^{pn}\check{\psi}(2^p(x-y))(\Sigma\partial_j a_j(y))b(y)u(y)dy\\&+\sum_{q=1}^{r}\int(a^1(x)-a^1(y))\dots\widehat{(a^q(x)-a^q(y))}\dots(a^r(x)-a^r(y))(\varphi Z a^q(x)\\&\qquad-\varphi Z a^q(y))2^{pr}2^{pn}\check{\psi}(2^p(x-y))b(y)u(y)dy\\&\qquad+\sum_{j=1}^{n}\int(a_j(x)-a_j(y))(a^1(x)-a^1(y))\dots\\&\qquad\qquad\times(a^r(x)-a^r(y))2^{p(r+1)}2^{pn}\partial_j(\check{\psi})(2^p(x-y))b(y)u(y)dy,\end{aligned}$$

où le signe $\wedge$ dans le troisième terme indique l'absence du terme coiffé. Comme $\partial_j a_j\in\tilde{C}_\varphi^{\alpha-1,k-1}$, on trouve, en estimant par récurrence la norme $\|\varphi Z B_p u\|'_{0,l-1}$, l'inégalité (i).

(*c*) Supposons l'hypothèse de (ii) : en itérant l fois le calcul de (*b*), on obtient une expression de $(\varphi Z)^I B_p u\,(|I|=l)$ comme somme de termes analogues à $B_p u$.

Pour chacun de ces termes et chaque facteur tel que $a^q(x)-a^q(y)$ qui s'y présente, on applique la formule de Taylor :

$$a^q(y)=a^q(x)+\sum_{|\beta|=1}^{[\varepsilon]}\frac{1}{\beta!}\partial^\beta a^q(x)(y-x)^\beta+r^q(x,y),$$

où $|r^q(x,y)|\leqq C|x-y|^\varepsilon$. En développant les expressions obtenues par le remplacement des $a^q(x)-a^q(y)$ par leurs sommes de Taylor, on obtient deux types de termes : les termes où aucun r^q n'apparaît (type 1), et les autres (type 2).

Un terme typique de type 1 s'écrit, en abrégé pour un certain $N\geqq r$,

$$C\,\partial_x^{i_1}a^1\dots\partial_x^{i_N}a^N(x)\int(y-x)^{i_1+\dots+i_N}2^{pN}\tilde{\psi}(2^p(x-y))\tilde{b}(y)(\varphi Z)^J u(y)dy,$$

où $\tilde{\psi}$ désigne une dérivée ∂^γ de $\check{\psi}$ $(|\gamma|=N-r)$, $|J|\leqq l$, et $\tilde{b}\in C^{\varepsilon'}$. La transformée de Fourier de $z^i\partial_z^\gamma\check{\psi}$ $(i=i_1+\dots+i_N)$ est Cte $\partial_\xi^i(\xi^\gamma\psi)$: comme $|i|\geqq N=|\gamma|+r$, cette fonction est nulle près de $\xi=0$ sous les hypothèses de (ii); l'intégrale ci-dessus est donc un « bloc dyadique » de $\tilde{b}(\varphi Z)^J u$, au facteur $2^{p(N-|i|)}$ près : sa norme uniforme est bornée par Cte $2^{-p\varepsilon'}\|u\|'_{\varepsilon',l}$.

Un terme typique de type 2 est de norme uniforme bornée par $C\,2^p 2^{-p\varepsilon}\|u\|'_{0,l}$, ce qui achève la preuve de (ii). ■

2.3. Les espaces $H_\varphi^{s,l}(\mathscr{V})$ et $C_\varphi^{\sigma,l}(\mathscr{V})$. — On se propose de définir des espaces $H_\varphi^{s,l}$ et $C_\varphi^{\sigma,l}$ pour lesquels la régularité additionnelle indiquée par l'indice l se définit par l'action de parachamps, au lieu des « vrais » champs utilisés jusqu'ici pour définir les espaces $\tilde{C}_\varphi^{\sigma,l}(\mathscr{V})$ (c'est ce fait qu'indique le $\tilde{}$).

Par « parachamp », on entend un opérateur paradifférentiel dont le symbole est celui d'un champ de vecteur : si $Z \in \mathscr{V}$, on notera z son symbole, et l'on écrira par abus $z \in \mathscr{V}$.

2.3.1. *Principe de la construction.* — La difficulté ici est que T_z n'est pas *a priori* assez bien défini pour qu'une définition telle que 2.2.1 ait un sens. Cela nous conduit à procéder par récurrence sur un ensemble de propriétés : on définit

$$H_\varphi^{s,0}(\mathscr{V}) = H^s,\ C_\varphi^{\sigma,0}(\mathscr{V}) = C^\sigma;$$

on suppose que, pour $0 \leqq q \leqq l-1 \leqq k-1$, les espaces $H_\varphi^{s,q}$ et $C_\varphi^{\sigma,q}$, munis des normes $|\ |_{s,q}$ et $\|\ \|_{\sigma,q}$, ont été définis, et jouissent des propriétés suivantes :

$(BD)_{l-1}$. Si $u \in H_\varphi^{s,q}$ et $a \in C_\varphi^{\varepsilon,q}$ $(\varepsilon > 0)$, $T_a u$ est bien défini modulo $H_\varphi^{s+\varepsilon,q}$. et $T_a u \in H_\varphi^{s,q}$. De même si $u \in C_\varphi^{\sigma,q}$, avec la modification habituelle si $\sigma = 0$.

$(LP)_{l-1}$.

$$u \in H_\varphi^{s,q}, \quad \Leftrightarrow \quad |u_p|_{0,q} \leqq C |u|_{s,q} d_p 2^{-ps}, \qquad \text{avec} \quad \Sigma d_p^2 \leqq 1.$$
$$u \in C_\varphi^{\sigma,q} \quad \Leftrightarrow \quad \|u_p\|_{0,q} \leqq C \|u\|_{\sigma,q} 2^{-p\sigma}, \qquad \text{si} \quad \sigma \neq 0.$$
$$u \in C_\varphi^{0,q} \quad \Rightarrow \quad \|u_p\|_{0,q} \leqq C \|u\|_{0,q}.$$

$(I)_{l-1}$. Pour $1 - \alpha < \varepsilon \leqq \alpha$,

$$C_\varphi^{\varepsilon,q} = \tilde{C}_\varphi^{\varepsilon,q} \qquad \text{et} \qquad H_\varphi^{0,q} = \tilde{H}_\varphi^{0,q}.$$

$(Op)_{l-1}$. Si a est un symbole de la classe $\Sigma^m(C_\varphi^{\varepsilon,q})$, T_a applique $H_\varphi^{s,q}$ dans $H_\varphi^{s-m,q}$ et $C_\varphi^{\sigma,q}$ dans $C_\varphi^{\sigma-m,q}$ $(\sigma \neq m)$.

$(CS)_{l-1}$. Si $a \in \Sigma^{m_1}(C_\varphi^{\varepsilon,q})$ et $b \in \Sigma^{m_2}(C_\varphi^{\varepsilon,q})$, $0 < \varepsilon \leqq \alpha$, $T_a T_b - T_{a \# b}$ applique $H_\varphi^{s,q}$ dans $H_\varphi^{s-m_1-m_2+\varepsilon,q}$, et $C_\varphi^{\sigma,q}$ dans $C_\varphi^{\sigma-m_1-m_2+\varepsilon,q}$ $(\sigma - m_1 - m_2 + \varepsilon \neq 0)$.

On se propose alors de définir $H_\varphi^{s,l}$ et $C_\varphi^{\sigma,l}$, et de montrer les cinq propriétés ci-dessus pour l'indice l.

Notons que pour $l = 1$, les propriétés $(BD)_0 \ldots (CS)_0$ supposées sont vraies, d'après Bony [8].

2.3.2. *Définition des espaces et choix de normes.* — Remarquons que pour $z \in \mathscr{V}$, $u \in H_\varphi^{s,l-1}$, $T_{\varphi z} u$ est bien défini modulo $H_\varphi^{s+\alpha-1,l-1}$, grâce à $(I)_{l-1}$, $(BD)_{l-1}$ et $(Op)_{l-1}$. Cela autorise la définition suivante.

DÉFINITION 2.3.2. — *$u \in H_\varphi^{s,l}$ si $u \in H_\varphi^{s,l-1}$ et si, pour tout $z \in \mathscr{V}$, $T_{\varphi z} u \in H_\varphi^{s,l-1}$. Pour $C_\varphi^{\sigma,l}$, la définition est analogue (y compris pour $\sigma = 0$).*

Prouvons dès maintenant que $(I)_l$ est vraie.

LEMME 2.3.2.1. — *La propriété $(I)_l$ est vraie.*

Preuve. — Soient $u \in C_\varphi^{\varepsilon,l-1} = \tilde{C}_\varphi^{\varepsilon,l-1}$, et $z \in \mathscr{V}$, $\varphi Z = \Sigma a_j \partial_j$: on écrit

$$\varphi Z u = \Sigma a_j \partial_j u = \Sigma S_{p-N}(a_j)(\partial_j u)_p + \Sigma S_{p-N}(\partial_j u)(a_j)_p + r,$$

où $r = \sum_{|p-q|<N} (a_j)_q (\partial_j u)_p$. Comme $\|(a_j)_q\|_{0,l-1} \leqq C 2^{-q\alpha}$, grâce à $(I)_{l-1}$ et $(LP)_{l-1}$, *et*

$\|(\partial_j u)_p\|_{0, l-1} \leqq C\, 2^{-p(\varepsilon-1)}$, on a $r \in C_\varphi^{\alpha+\varepsilon-1, l-1}$ si $\alpha+\varepsilon-1>0$, par une extension immédiate de l'argument classique.

Si $\varepsilon>1$, $\|S_{p-N}(\partial_j u)\|_{0, l-1} \leqq C$, donc $\Sigma S_{p-N}(\partial_j u)(a_j)_p \in C_\varphi^{\alpha, l-1}$; si $\varepsilon<1$, $\|S_{p-N}(\partial_j u)\|_{0, l-1} \leqq C\, 2^{p(1-\varepsilon)}$, et $\Sigma S_{p-N}(\partial_j u)(a_j)_p \in C_\varphi^{\alpha+\varepsilon-1, l-1}$. Dans tous les cas, $\varphi Z u - T_{\varphi z} u \in C_\varphi^{\varepsilon, l-1}$, même si $\varepsilon=0$ (car alors, en fait, $\varphi Z u - T_{\varphi z} u \in C_\varphi^{\alpha-1, l-1}$) : cela achève la preuve. ■

Pour définir les normes des espaces $H_\varphi^{s, l}$ et $C_\varphi^{\sigma, l}$, nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 2.3.2.2. — *Soient* $z \in \mathscr{V}$, $a \in \tilde{C}_{\mathrm{loc}}^{\varepsilon, l-1}$ $(0<\varepsilon \leqq \alpha-1)$ *tels que* $az \in \mathscr{V}$. *Si* $u \in H_\varphi^{s, l-1}$ *et* $T_{\varphi z} u \in H_\varphi^{s, l-1}$, *on a alors, pour* $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)$, $\tilde{\varphi}=1$ *près de* supp φ

$$T_{\tilde{\varphi} a} T_{\varphi z} u - T_{\varphi a z} u \in H_\varphi^{s+\varepsilon, l-1}.$$

Preuve. — (*a*) Grâce à $(BD)_{l-1}$, on a, avec $\varphi Z = \Sigma a_j \partial_j$,

$$T_{\tilde{\varphi} a} T_{\varphi z} u = \Sigma S_{p-N}(\tilde{\varphi} a) S_{p-N}(a_j)(\partial_j u)_p + R_1,$$
$$T_{\varphi a z} u = \Sigma S_{p-N}(a a_j)(\partial_j u)_p + R_2,$$

et

$$R_1 \in H_\varphi^{s+\varepsilon, l-1}, \quad R_2 \in H_\varphi^{s+\alpha-1, l-1}.$$

(*b*) Soit $b \in C_\varphi^{\eta, l-1}$, $1<\eta \leqq \alpha$, et posons, pour $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $r_p = S_p(b) S_p(v) - S_p(S_p(b) v)$. On va montrer que, si N est assez grand,

$$\|r_p\|_{0, l-1} \leqq C\, 2^{-p\eta} \|S_{p+N} v\|_{\eta-1, l-1}.$$

En effet,

$$r_p = 2^{-p} \int (S_p b(x) - S_p b(y))\, 2^p\, 2^{pn}\, \psi^\vee (2^p(x-y))\, S_{p+N} v(y)\, dy,$$

et l'estimation résulte du lemme 2.2.2, (ii) avec $r=1$, $u=S_{p+N} v$, $\varepsilon=\eta$, $\varepsilon'=\eta-1$, car $(LP)_{l-1}$ implique $\|S_p b\|_{\eta, l-1} \leqq$ Cte.

(*c*) On pose ici

$$\begin{aligned} r_p &= S_{p-N}(a_j)\, S_{p-N}(\tilde{\varphi} a) - S_{p-N}(a a_j) \\ &= S_{p-N}(a_j) S_{p-N}(\tilde{\varphi} a) - S_{p-N}((S_{p-N}(a_j))\, \tilde{\varphi} a) \\ &\qquad - S_{p-N}((a_j - S_{p-N}(a_j))\, \tilde{\varphi} a) = r_p^1 + r_p^2. \end{aligned}$$

D'après (*b*), appliqué pour $\eta=\varepsilon+1$, on a $\|r_p^1\|_{0, l-1} \leqq C\, 2^{-p(\varepsilon+1)}$, et $\|r_p^2\|_{0, l-1} \leqq C\, 2^{-p\alpha}$ d'après le lemme 2.2.2 (i), $(LP)_{l-1}$ et le fait que $\|uv\|_{0, l-1} \leqq C \|u\|_{0, l-1} \|v\|_{0, l-1}$. En utilisant l'inégalité facile $|uv|_{0, l-1} \leqq C \|u\|_{0, l-1} |v|_{0, l-1}$, on trouve $|r_p(\partial_j u)_p|_{0, l-1} \leqq C\, d_p\, 2^{-p(s+\varepsilon)}$, *d'où le résultat*. ■

COROLLAIRE 2.3.2. — *Soit* Z_j $(1 \leqq j \leqq N)$ *un système de générateurs de* $\mathscr{V}$. *Alors*

(i) $H_\varphi^{s, l} = \{u \in H_\varphi^{s, l-1},\ T_{\varphi z_j} u \in H_\varphi^{s, l-1},\ j=1, \ldots, N\}$.

(ii) *Si l'on pose*

$$|u|_{s,l}=|u|_{s,l-1}+\sum_{j=1}^{N}|T_{\varphi z_j}u|_{s,l-1},$$

on obtient sur $H^{s,l}$ *une norme bien définie (à équivalence près), indépendamment du choix des* Z_j *ou de la définition des* $T_{\varphi z_j}$. *On définit de même une norme* $\|\ \|_{\sigma,l}$ *sur* $C^{\sigma,l}$ *(y compris pour* $\sigma=0$*), qui est équivalente à* $\|\ \|'_{\sigma,l}$ *lorsque* $1-\alpha<\sigma\leqq\alpha-1$.

Preuve. — Soit $u\in H_\varphi^{s,l-1}$, $z\in\mathscr{V}$, $z=\Sigma\alpha_j z_j$ selon (TF) : on a $\varphi z=\Sigma\varphi\alpha_j z_j$, et le lemme 2.3.2.2 montre que

$$T_{\tilde\varphi\alpha_j}T_{\tilde\varphi z_j}u-T_{\varphi\alpha_j z_j}u\in H_\varphi^{s+\alpha-1,l-1},$$

d'où (i) et (ii).

Dans le cas où $u\in C_\varphi^{\sigma,l-1}$, la preuve est la même, sauf pour $\sigma=0$: on utilise alors la preuve de (I_l) (lemme 2.3.2.1) qui montre que $T_{\varphi z_j}u-\varphi Z_j u\in C_\varphi^{\alpha-1,l-1}$, $T_{\varphi z}u-\varphi Zu\in C_\varphi^{\alpha-1,l-1}$; si $T_{\varphi z_j}\in C_\varphi^{0,l-1}$, $\varphi Z_j u$ aussi, donc φZu également, et $T_{\varphi z}u$; de plus,

$$\|T_{\varphi z}u\|_{0,l-1}\leqq C\Sigma\|T_{\varphi z_j}u\|_{0,l-1},$$

ce qui complète la preuve. ■

Il est utile de noter que la preuve du lemme 2.3.2.1 implique que le lemme 2.2.1 est vrai, en fait, pour $1-\alpha<\varepsilon\leqq\alpha$, les normes $\|\ \|'_{\varepsilon,l}$ obtenues pour les différentes familles de Z_j équivalant à $\|\ \|_{\varepsilon,l}$.

2.3.3. *Décomposition de Littlewood-Paley pour* $H_\varphi^{s,l}$.

LEMME 2.3.3. — *Soit* $\Phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(\xi)=0$ *près de* $\xi=0$, *et* $\Phi^\vee$ *sa transformée de Fourier inverse.*

Pour $a^j\in C_\varphi^{\varepsilon,l}(1<\varepsilon\leqq\alpha)$. $b^j\in C_\varphi^{0,l}$, $r\geqq 0$, *et* N *assez grand (eu égard à* Φ, *r et k), posons*

$$A_p u(x)=\int(S_{p-N}a^1(x)-S_{p-N}a^1(y))\dots(S_{p-N}a^r(x)-S_{p-N}a^r(y))$$
$$\times S_{p-N}b^1(x)S_{p-N}b^2(y)2^{pr}2^{pn}\Phi^\vee(2^p(x-y))u(y)\,dy$$

(i) *Si* $u\in H_\varphi^{s,l}$, *on a l'estimation*

$$|A_p u|_{0,l}\leqq C\pi\|a^j\|_{\varepsilon,l}\|b^1\|_{0,l}\|b^2\|_{0,l}d_p 2^{-ps}|u|_{s,l},\qquad \Sigma d_p^2\leqq 1.$$

(ii) *Si* $u\in C_\varphi^{\sigma,l}$ *(y compris* $\sigma=0$*), on a l'estimation*

$$\|A_p u\|_{0,l}\leqq C\pi\|a^j\|_{\varepsilon,l}\|b^1\|_{0,l}\|b^2\|_{0,l}2^{-p\sigma}\|u\|_{\sigma,l}.$$

Preuve : (*a*) On remarque d'abord que $A_p u$ a son spectre dans une couronne c_p, et ne change pas si l'on remplace u par $\sum_{|p-q|\leqq N_0}u_q$, pour N_0 assez grand. Comme

$|S_{p-N}a^j(x)-S_{p-N}a^j(y)|\leqq c\,\|a^j\|_\varepsilon|x-y|$, on trouve donc

$$|A_p u(x)|\leqq C\pi\,\|a^j\|_\varepsilon\,\|b^j\|_0\sum_q\int|x-y|^r\,2^{pr}\,2^{pn}\,|\Phi^\vee|(2^p(x-y))\,|u_q(y)|\,dy;$$

la dernière intégrale étant la convolution de $|u_q|$ avec $2^{pn}(|z|^r|\Phi^\vee|)(2^p z)$, dont la norme L^1 est constante, on obtient (i) et (ii) pour $l=0$.

(*b*) Soit $Z\in\mathscr{V}$, $\varphi Z=\Sigma\, a_j\,\partial_j$; Calculons $T_{\varphi z}A_p u$: comme $A_p u$ a son spectre dans une couronne c_p, on a, à cause de $(BD)_{l-1}$,

$$T_{\varphi z}A_p u=\sum_j S_{p-N}(a_j)\,\partial_j A_p u+R_p,$$

avec

$$|R_p|_{0,\,l-1}\leqq C\,|A_p u|_{0,\,l-1},\qquad \|R_p\|_{0,\,l-1}\leqq C\,\|A_p u\|_{0,\,l-1}.$$

En supposant les estimations (i) et (ii) vraies avec $l-1$ au lieu de l, il suffit donc, par récurrence, d'étudier la norme $|\ \ |_{0,\,l-1}$ (resp. $\|\ \ \|_{0,\,l-1}$) du terme $S_{p-N}(a_j)\,\partial_j A_p u$.

On trouve par un calcul direct

$$\begin{aligned}
(S_{p-N}a_j)\,\partial_j A_p u
&=\sum_{q=1}^{r}\int(S_{p-N}a^1(x)-S_{p-N}a^1(y))\ldots\widehat{(S_{p-N}a^q(x)-S_{p-N}a^q(y))}\ldots\\
&\qquad\times(S_{p-N}a^r(x)-S_{p-N}a^r(y))\\
&\qquad\times[S_{p-N}a_j(x)\,S_{p-N}\partial_j a^q(x)-S_{p-N}a_j(y)\,S_{p-N}\partial_j a^q(y)]\\
&\qquad\times S_{p-N}b^1(x)\,S_{p-N}b^2(y)\,2^{pr}\,2^{pn}\,\Phi^\vee(2^p(x-y))\,u(y)\,dy\\
&\quad+\int(S_{p-N}a^1(x)-S_{p-N}a^1(y))\ldots(S_{p-N}a^r(x)-S_{p-N}a^r(y))\\
&\qquad\times[S_{p-N}a_j(x)\,S_{p-N}\partial_j b^1(x)\,S_{p-N}b^2(y)\\
&\qquad+S_{p-N}b^1(x)\,S_{p-N}a_j(y)\,S_{p-N}\partial_j b^2(y)\\
&\qquad+S_{p-N}b^1(x)\,S_{p-N}b^2(y)\,S_{p-N}\partial_j a_j(y)]\\
&\qquad 2^{pr}\,2^{pn}\,\Phi^\vee(2^p(x-y))\,u(y)\,dy\\
&\quad+\int(S_{p-N}a_j(x)-S_{p-N}a_j(y))(S_{p-N}a^1(x)-S_{p-N}a^1(y))\ldots\\
&\qquad\times(S_{p-N}a^r(x)-S_{p-N}a^r(y))\\
&\qquad S_{p-N}b^1(x)\,S_{p-N}b^2(y)\,2^{p(r+1)}\,2^{pn}(\partial_j\Phi^\vee)(2^p(x-y))\,u(y)\,dy\\
&\qquad\qquad+A_p((S_{p-N}a_j)\,\partial_j u)=(1)+\ldots+(4).
\end{aligned}$$

(*c*) Études

$$\delta_p = S_{p-N} a_j S_{p-N} \partial_j b^1 - S_{p-N}(a_j \partial_j b^1) = S_{p-N} a_j S_{p-N} \partial_j b^1 - S_{p-N}((S_{p-N} a_j) \partial_j b^1) + S_{p-N}((S_{p-N} a_j - a_j) \partial_j b^1) = r_p + \Delta_p.$$

On a, en intégrant par parties,

$$r_p = \int 2^{(p-N)(n+1)} (\partial_j \psi^\vee)(2^{p-N}(x-y))(S_{p-N} a_j(x) - S_{p-N} a_j(y)) b^1(y)\, dy + \int 2^{(p-N)n} \psi^\vee(2^{p-N}(x-y)) S_{p-N} \partial_j a_j(y) b^1(y)\, dy,$$

d'où $\| r_p \|_{0, l-1} \leqq C \| b^1 \|_{0, l-1}$, grâce au lemme 2.2.2.

D'autre part,

$$-\Delta_p = \partial_j S_{p-N}((a_j - S_{p-N} a_j) b^1) - S_{p-N}((\partial_j a_j - S_{p-N} \partial_j a_j) b^1),$$

d'où

$$\| \Delta_p \|_{0, l-1} \leqq C(2^p \| a_j - S_{p-N} a_j \|_{0, l-1} + \| (\partial_j a_j - S_{p-N} \partial_j a_j) \|_{0, l-1}) \| b^1 \|_{0, l-1};$$

Grâce à $(LP)_{l-1}$, on obtient $\| a_j - S_{p-N} a_j \|_{0, l-1} \leqq C 2^{-p\alpha}$, d'où

$$\| \Delta_p \|_{0, l-1} \leqq C \| b^1 \|_{0, l-1}.$$

Le « terme d'erreur » δ_p, dont le spectre est dans une « petite » boule B_p, satisfait donc à l'estimation $\| \delta_p \|_{0, l-1} \leqq C \| b^1 \|_{0, l-1}$.

(*d*) Pour estimer l'erreur $\delta'_p = S_{p-N} a_j S_{p-N} \partial_j a^q - S_{p-N}(a_j \partial_j a^q)$, on procède comme au lemme 2.3.2.2 (*b*) : avec

$$\delta'_p = S_{p-N} a_j S_{p-N} \partial_j a^q - S_{p-N}((S_{p-N} a_j) \partial_j a^q) + S_{p-N}((S_{p-N} - a_j) \partial_j a^q) = r'_p + \Delta'_p,$$

on a d'abord

$$\| r'_p \|_{0, l-1} \leqq C 2^{-p\varepsilon} \| a^q \|_{\varepsilon, l-1},$$

d'où

$$\| r'_p \|_{\varepsilon, l-1} \leqq C \| a^q \|_{\varepsilon, l-1}$$

grâce à $(LP)_{l-1}$. De plus, $\| \Delta'_p \|_{0, l-1} \leqq C 2^{-p\alpha} \| a^q \|_{\varepsilon, l-1}$, d'où

$$\| \delta'_p \|_{\varepsilon, l-1} \leqq C \| a^q \|_{\varepsilon, l-1}.$$

(*e*) En remplaçant, dans l'expression de $T_{\varphi z} A_p u$ obtenue en (*b*), les termes $\sum_j S_{p-N} a_j S_{p-N} \partial_j a^q$ par $\sum \delta'_p + S_{p-N}(\varphi Z a^q)$, $\sum_j S_{p-N} a_j S_{p-N} \partial_j b^1$ par $\sum \delta_p + S_{p-N}(\varphi Z b^1)$, etc., les termes (1), (2) et (3) s'écrivent comme des sommes de termes analogues à A_p, dont les coefficients possèdent la régularité voulue, avec $l-1$ en place de l : ces termes sont estimés par récurrence.

(f) Considérons (4) : à cause de la localisation des spectres,

$$(4)=\sum_{q=p-N_0}^{p+N_0} a_p((S_{p-N}a_j)\partial_j u_q),$$

et d'autre part

$$A_p(T_{\varphi z}u)=\sum_q A_p((S_{q-N}a_j)\partial_j u_q)=\sum_{q=p-N_0}^{p+N_0} A_p((S_{q-N}a_j)\partial_j u_q),$$

si N_0 est assez grand. Donc

$$(4)-A_p(T_{\varphi z}u)=\sum_{|p-q|\leqq N_0} A_p((S_{p-N}a_j-S_{q-N}a_j)\partial_j u_q),$$

et

$$\begin{aligned}|(4)-A_p(T_{\varphi z}u)|_{0,l-1} & \\ &\leqq C\,d_p\sum\|S_{p-N}a_j-S_{q-N}a_j\|_{0,l-1}|\partial_j u_q|_{0,l-1}\\ &\leqq C\,d_p\sum 2^{-p\alpha}d_q 2^{-q(s-1)}|u|_{s,l-1}\leqq C\,d_p|u|_{s,l-1}2^{-ps},\end{aligned}$$

et de même pour $\|\ \ \|_{0,l-1}$.

Enfin, $|A_p(T_z u)|_{0,l-1}\leqq C|T_z u|_{0,l-1}$, ce qui achève la preuve. ■

2.3.4. *Preuve des propriétés* $(LP)_l$, $(BD)_l$ *et* $(Op)_l$. — Ces propriétés sont des conséquences faciles du lemme 2.3.3.

(a) Preuve de $(LP)_l$: les propriétés de u_p sont une conséquence immédiate du lemme 2.3.3. Pour prouver les implication inverses, on note que $T_{\varphi z}u=\sum T_{\varphi z}u_p$, chaque $T_{\varphi z}u_p$ ayant son spectre dans une couronne c_p, et $|T_{\varphi z}u_p|_{0,l-1}\leqq C|u_p|_{0,l}$: d'après $(LP)_{l-1}$, on a $T_{\varphi z}u\in H_\varphi^{s,l-1}$,d'où le résultat.

(b) Preuve de $(BD)_l$: il suffit, pour prouver les différentes invariances souhaitées, de montrer que si $a\in C_\varphi^{\varepsilon,l}$ et si u_p a son spectre dans c_p, avec $|u_p|_{0,l}\leqq C_1 d_p 2^{-ps}$, $E=\sum_p a_{p-N}u_p$ appartient à $H_\varphi^{s+\varepsilon,l}$, avec $|E|_{s+\varepsilon,l}\leqq CC_1$. En effet, grâce à $(I)_l$, et

$$(LP)_l,\ |a_{p-N}u_p|_{0,l}\leqq C\|a_{p-N}\|_{0,l}|u_p|_{0,l}\leqq CC_1 2^{-p\varepsilon}d_p 2^{-ps},$$

d'où la conclusion par $(LP)_l$. On démontre de même que $T_a u\in H_\varphi^{s,l}$.

(c) Preuve de $(Op)_l$: Il suffit de considérer le cas où $a=a(\xi)$, symbole homogène d'ordre m. On a, pour $z\in\mathscr{V}$, $u\in H_\varphi^{s,l}$, $T_{\varphi z}T_a u=T_a T_{\varphi z}u+R\,u$, où $R\,u\in H_\varphi^{s-m,l-1}$, d'après $(CS)_{l-1}$ et $(Op)_{l-1}$. Par récurrence, on en déduit $T_a u\in H_\varphi^{s-m,l}$.

2.3.5. *Preuve de* $(CS)_l$. — La propriété $(CS)_l$ sera une conséquence facile du lemme suivant.

LEMME 2.3.5. — *Soit* $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(\xi)=0$ *près de* $\xi=0$, *et* $\Phi^\vee$ *sa transformée de Fourier inverse.*

Pour $a^j \in C_\varphi^{\varepsilon, l}$ $(1<\varepsilon \leqq \alpha)$, $b_j \in C_\varphi^{0, l}$, $a \in C_\varphi^{\eta, l}$ $(0<\eta \leqq \alpha)$, $r \geqq 0$ *et* N *assez grand, posons*

$$R_p u(x)=\int (S_{p-N} a^1(x)-S_{p-N} a^1(y)) \ldots (S_{p-N} a^r(x)-S_{p-N} a^r(y)) \times S_{p-N} b^1(x) S_{p-N} b^2(y) E_p 2^{pr} 2^{pn} \Phi^\vee(2^p(x-y)) u(y)\, dy,$$

avec

$$E_p=\left[S_{p-N} a(y)-\sum_{|\alpha| \leqq [\eta]} \frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha S_{p-N} \partial^\alpha a(x)\right].$$

(i) *Si* $u \in H_\varphi^{s, l}$, *on a l'estimation*

$$|R_p u|_{0, l} \leqq C \pi \|a^j\|_{\varepsilon, l} \|b^j\|_{0, l} \|a\|_{\eta, l} d_p 2^{-p(\eta+s))} |u|_{s, l}, \quad \sum d_p^2 \leqq 1.$$

(ii) *Si* $u \in C_\varphi^{\sigma, l}$, *on a l'estimation*

$$\|R_p u\|_{0, l} \leqq C \pi \|a^j\|_{\varepsilon, l} \|b^j\|_{0, l} \|a\|_{\eta, l} 2^{-p(\eta+\sigma)} \|u\|_{\sigma, l}.$$

Preuve. — Elle est analogue à celle du lemme 2.3.3, mais plus délicate.

(*a*) Pour $l=0$, en remarquant que $\|E_p\|_0 \leqq C\|a\|_\eta |x-y|^\eta$, on obtient (i) et (ii) comme au point (*a*) du lemme 2.3.3.

(*b*) Soit $Z \in \mathscr{V}$, $\varphi Z=\sum a_j \partial_j$: par un calcul direct, on obtient

$$\begin{aligned}
S_{p-N}(a_j) \partial_j R_p u & \\
=\sum_{q=1}^r \int & (S_{p-N} a^1(x)-S_{p-N} a^1(y)) \ldots \widehat{(S_{p-N} a^q(x)-S_{p-N} a^q(y))} \ldots \\
& (S_{p-N} a^r(x)-S_{p-N} a^r(y))(S_{p-N} a_j(x) S_{p-N} \partial_j a^q(x) \\
& \quad -S_{p-N} a_j(y) S_{p-N} \partial_j a^q(y)) \\
& S_{p-N} b^1(x) S_{p-N} b^2(y) E_p 2^{pr} 2^{pn} \Phi^\vee(2^p(x-y)) u(y)\, dy \\
+\int & (S_{p-N} a^1(x)-S_{p-N} a^1(y)) \ldots (S_{p-N} a^r(x)-S_{p-N} a^r(y)) \\
& \times(S_{p-N} a_j(x) S_{p-N} \partial_j b^1(x) S_{p-N} b^2(y) \\
& +S_{p-N} b^1(x) S_{p-N} a_j(y) S_{p-N} \partial_j b^2(y) \\
& +S_{p-N} b^1(x) S_{p-N} b^2(y) S_{p-N} \partial_j a_j(y)) \\
& \times E_p 2^{pr} 2^{pn} \Phi^\vee(2^p(x-y)) u(y)\, dy \\
+\int & (S_{p-N} a_j(x)-S_{p-N} a_j(y))(S_{p-N} a^1(x)-S_{p-N} a^1(y)) \ldots \\
& \times(S_{p-N} a^r(x)-S_{p-N} a^r(y))
\end{aligned}$$

$$S_{p-N} b^1(x) S_{p-N} b^2(y) E_p 2^{p(r+1)} 2^{pn} (\partial_j \Phi^\vee)(2^p(x-y)) u(y)\, dy$$

$$+\int (S_{p-N} a^1(x) - S_{p-N} a^1(y)) \dots (S_{p-N} a^r(x) - S_{p-N} a^r(y))$$

$$\times S_{p-N} b^1(x) S_{p-N} b^2(y) F_p 2^{pr} 2^{pn} \Phi^\vee (2^p(x-y)) u(y)\, dy$$

$$+ R_p((S_{p-N} a_j) \partial_j u) = (1) + \dots + (5),$$

avec

$$F_p = S_{p-N} a_j(y) S_{p-N} \partial_j a(y) - \sum_{|\alpha| \leqq [\eta]} \frac{1}{\alpha!} (y-x)^\alpha \partial^\alpha (S_{p-N} a_j S_{p-N} \partial_j a)(x) - \sum_{|\beta| \leqq [\eta]-1} \frac{(y-x)^\beta}{\beta!} (S_{p-N} \partial^{\beta+1_j} a(x)) \left[S_{p-N} a_j(y) - \sum_{|\alpha'| \leqq [\eta]-|\beta|} \frac{(y-x)^{\alpha'}}{\alpha'!} S_{p-N} \partial^{\alpha'} a_j(x) \right].$$

On remarque que les termes (1), (2), (3) et (5) sont analogues aux termes (1), (2), (3) et (4) du lemme 2.3.3 : les procédures décrites en (*c*), (*d*), (*e*), (*f*) au lemme 2.3.3 s'appliquent ici sans changement pour étudier les termes (1), (2), (3) et (5).

(*c*) Le traitement du terme F_p dans (4) est plus délicat; montrons que $\| S_{p-N} a_j S_{p-N} \partial_j a - S_{p-N}(a_j \partial_j a) \|_{0,\, l-1} \leqq C 2^{-p\eta} \| a \|_{\eta,\, l-1}$: si $\eta > 1$, la preuve du point (*d*), du lemme 2.3.3, donne le résultat; si $\eta \leqq \alpha - 1$, on écrit la quantité à estimer

$$\partial_j (S_{p-N} a_j S_{p-N} a - S_{p-N} a_j a) - (S_{p-N} \partial_j a_j S_{p-N} a - S_{p-N}((\partial_j a_j) a)) = A + B;$$

on a $\| B \|_{0,\, l-1} \leqq C 2^{-p\eta}$, et, en procédant comme au lemme 2.3.2.2 (*b*) (avec $\eta + 1$ pour η), on trouve $\| A \|_{0,\, l-1} \leqq C 2^{-p\eta}$.

Par interpolation, on obtient l'estimation pour tout $\eta > 0$. L'erreur commise en remplaçant $S_{p-N}(a_j) S_{p-N} \partial_j a$ par $S_{p-N} a_j \partial_j a$ dans le terme $(1/\alpha!)(y-x)^\alpha \partial^\alpha (S_{p-N}(a_j) S_{p-N} \partial_j a)$ de F_p s'estime de façon analogue, le facteur $2^{p|\alpha|}$ provenant de la dérivation ∂^α étant compensé par la présence du terme $(y-x)^\alpha$.

(*d*) On obtient donc pour $T_{\varphi z} R_p u$ une somme de termes analogues à R_p ou à $2^{-p\eta} A_p$ (lemme 2.3.3), que l'on estime par récurrence. ■

COROLLAIRE 2.3.5. — *La propriété* $(CS)_l$ *est vraie.*

Preuve. — (a) Si $l(\xi)$ est homogène de degré m, et $a \in C_\varphi^{\eta,\, l}$, $0 < \eta \leqq \alpha$, $R = T_l T_a - T_{l \# a}$ applique $H_\varphi^{s,\, l}$ dans $H_\varphi^{s-m+\eta,\, l}$. En effet,

$$T_l T_a u = \sum l(D)((S_{p-N} a) u_p),$$

$$T_{l \# a} u = \sum_{|\alpha| \leqq [\eta]} \frac{S_{p-N}(D^\alpha a)}{\alpha!} l^{(\alpha)}(D) u_p;$$

comme $l^{(\alpha)}(\mathrm{D})$ s'applique à des termes dont les spectres sont dans des couronnes c_p, on a, pour une fonction $\Phi(\xi)$ nulle près de $\xi=0$,

$$l(\mathrm{D})((\mathrm{S}_{p-\mathrm{N}}\, a)\, u_p)=2^{pm}\, \Phi(2^{-p}\,\mathrm{D})((\mathrm{S}_{p-\mathrm{N}}\, a)\, u_p),$$

et

$$l^{(\alpha)}(\mathrm{D})\, u_p=2^{(m-|\alpha|)\,p}\, \Phi^{(\alpha)}(2^{-p}\,\mathrm{D})\, u_p.$$

Donc

$$\mathrm{R}\, u=\sum_p 2^{pm}\int 2^{pn}\, \Phi^{\vee}(2^p(x-y))\left[\mathrm{S}_{p-\mathrm{N}}\, a(y)-\sum_{|\alpha|\leqq[\eta]}\frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha\, \mathrm{S}_{p-\mathrm{N}}\, \partial^\alpha a(x)\right] u_p(y)\, dy,$$

et le lemme 2.3.5 montre que chaque terme de la somme est majoré, en norme $|\,.\,|_{0,\,l}$, par $\mathrm{C}\, d_p\, 2^{-(\eta+s)\,p}\, 2^{pm}$ (si $u\in \mathrm{H}_\varphi^{s,\,l}$), d'où le résultat par $(\mathrm{LP})_l$.

(*b*) Si a, $b\in \mathrm{C}_\varphi^{\varepsilon,\,l}$, $0<\varepsilon\leqq\alpha$, $\mathrm{R}=\mathrm{T}_a\,\mathrm{T}_b-\mathrm{T}_{ab}$ applique $\mathrm{H}_\varphi^{s,\,l}$ dans $\mathrm{H}_\varphi^{s+\varepsilon,\,l}$. En effet,

$$\mathrm{R}\, u=\sum_p(\mathrm{S}_{p-\mathrm{N}}\, a\, \mathrm{S}_{p-\mathrm{N}}\, b-\mathrm{S}_{p-\mathrm{N}}\, ab)\, u_p+\mathrm{R}'\, u,\qquad \text{où}\quad \mathrm{R}'\, u\in \mathrm{H}_\varphi^{s+\varepsilon,\,l}$$

grâce à $(\mathrm{BD})_l$. Comme $\|\mathrm{S}_{p-\mathrm{N}}\, a\, \mathrm{S}_{p-\mathrm{N}}\, b-\mathrm{S}_{p-\mathrm{N}}\, ab\|_{0,\,l}\leqq \mathrm{C}\, 2^{-p\varepsilon}$ à cause de $(\mathrm{I})_l$ et $(\mathrm{LP})_l$, $\mathrm{R}\, u\in \mathrm{H}_\varphi^{s+\varepsilon,\,l}$ grâce à $(\mathrm{LP})_l$.

(*c*) La preuve du cas général résulte de (*a*) et (*b*) en décomposant les symboles a et b comme dans Bony [8]. ■

2.4. Les espaces $\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,\,l}(\mathscr{V})$ et $\mathrm{C}_{\mathrm{loc}}^{\sigma,\,l}(\mathscr{V})$. — 2.4.1. *Définition*. — On suppose toujours $\mathscr{V}$ donné sur Ω, satisfaisant les conditions $\mathrm{P}_{\alpha,\,k-1}$ et TF. Au paragraphe 2.3, on a défini des espaces $\mathrm{H}_\varphi^{s,\,l}(\mathscr{V})$ et $\mathrm{C}_\varphi^{\sigma,\,l}(\mathscr{V})$ de distributions sur $\mathbb{R}^n$, liés à $\mathscr{V}$ et à une fonction de troncature donnée φ. On définit maintenant les espaces locaux correspondants.

Définition. — *Soit* $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$. *On dira que* $u\in \mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,\,l}(\mathscr{V})$ [*resp.* $\mathrm{C}_{\mathrm{loc}}^{\sigma,\,l}(\mathscr{V})$] *si, pour toutes* $\varphi_0\in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, $\varphi\in\tilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{loc}}^{\alpha,\,k-1}$ *à support compact*,

$$\varphi_0\, u\in \mathrm{H}_\varphi^{s,\,l}(\mathscr{V})\qquad [\textit{resp. } \mathrm{C}_\varphi^{\sigma,\,l}(\mathscr{V})].$$

Le lemme suivant précise les relations entre les espaces $\mathrm{H}_\varphi^{s,\,l}$ lorsque φ varie.

Lemme 2.4.1. — *Soit* $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$, *et* $\varphi\in\tilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{loc}}^{\alpha,\,k-1}(\mathscr{V})$, $\varphi=1$ *au voisinage de* supp u, φ *à support compact dans* Ω.

Si $u\in \mathrm{H}_\varphi^{s,\,l}(\mathscr{V})$, *alors* $u\in \mathrm{H}_{\varphi_1}^{s,\,l}(\mathscr{V})$ *pour tout* $\varphi_1\in\tilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{loc}}^{\alpha,\,k-1}$, φ_1 *à support compact dans* Ω.

Preuve. — On raisonne par récurrence; c'est évident pour $l=0$, et supposons le lemme vrai pour $l-1$ en place de l. Soit $\varphi_2\in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_2=1$ près de Supp u, $\varphi=1$, près de Supp φ_2 : il est clair que φ_2 appartient à tous les espaces $\mathrm{H}_\varphi^{s,\,l}$ et $\mathrm{C}_\varphi^{\sigma,\,l}$, ainsi que $\varphi_2\, u-\mathrm{T}_{\varphi_2}\, u$; donc, pour $z\in\mathscr{V}$, $u\in \mathrm{H}_\varphi^{s,\,l}$, on a

$$\mathrm{T}_{\varphi_1 z}\, u=\mathrm{T}_{\varphi_1 z}\, \varphi_2\, u=\mathrm{T}_{\varphi_1 z}\, \mathrm{T}_{\varphi_2}\, u+\mathrm{R}_1=\mathrm{T}_{\varphi_1\varphi_2 z}\, u+\mathrm{R}_2,\qquad \text{avec}\quad \mathrm{R}_2\in \mathrm{H}_{\varphi_1}^{s,\,l-1}.$$

D'autre part, $\varphi_1\, \varphi_2\, z=\varphi_1\, \varphi_2\, \varphi\, z$, donc $\mathrm{T}_{\varphi_1\varphi_2 z}\, u=\mathrm{T}_{\varphi_1\varphi_2}\, \mathrm{T}_{\varphi z}\, u+\mathrm{R}_3$, $\mathrm{R}_3\in \mathrm{H}_{\varphi_1}^{s+\alpha-1,\,l-1}$. Enfin, $\mathrm{T}_{\varphi z}\, u=\mathrm{T}_{\varphi z}\, \varphi_2\, u=\varphi_2\, \mathrm{T}_{\varphi z}\, u+\mathrm{R}_4$, $\mathrm{R}_4\in \mathrm{H}_{\varphi_1}^{s,\,l-1}$: comme $\mathrm{T}_{\varphi z}\, u\in \mathrm{H}_\varphi^{s,\,l-1}$, $\varphi_2\, \mathrm{T}_{\varphi z}\, u\in \mathrm{H}_\varphi^{s,\,l-1}$, donc

$\varphi_2 T_{\varphi z} u \in H_{\varphi_1}^{s, l-1}$ par récurrence, $T_{\varphi z} u \in H_{\varphi_1}^{s, l-1}$, et $T_{\varphi_1 z} u \in H_{\varphi_1}^{s, l-1}$, ce qui achève la preuve. ■

Le lemme 2.4.1 est valable également pour les espaces $C_\varphi^{\sigma, l}$, y compris $\sigma = 0$.

2.4.2. *Opérateurs paradifférentiels.* — On est maintenant en mesure de définir des opérateurs paradifférentiels à supports propres associés à un symbole $a \in \Sigma^m (C_{\text{loc}}^{\varepsilon, l}(\mathscr{V}))$: on procède exactement comme dans Bony [8], et les propriétés des espaces $H_\varphi^{s, l}$, combinées au lemme 2.4.1, assurent l'existence et les propriétés de tels opérateurs : ce sont ces propriétés qui sont énoncées au paragraphe 2.1.2.

Notons en particulier la caractérisation suivante des espaces $H_{\text{loc}}^{s, l}(\mathscr{V})$.

LEMME 2.4.2. — $H_{\text{loc}}^{s, l}(\mathscr{V}) = \{ u \in H_{\text{loc}}^{s, l-1}(\mathscr{V}),\ \forall z \in \mathscr{V},\ T_z u \in H_{\text{loc}}^{s, l-1}(\mathscr{V}) \}$.

Preuve. — (*a*) Soit $u \in H_{\text{loc}}^{s, l}$, $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$: on a $\varphi_0 T_z u = \varphi_0 T_z \varphi_1 u$ pour une certaine $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ (à cause de la condition de support propre); soit $\varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_2 = 1$ près de $\operatorname{Supp} \varphi_0$ et $\operatorname{Supp} \varphi_1$: $T_z \varphi_1 u = \varphi_2 T_{\varphi_2 z} \varphi_1 u + R$, $R \in H_{\varphi_2}^{s+\alpha-1, l}$ par définition de T_z, donc $\varphi_0 T_z u \in H_{\varphi_2}^{s, l-1}$, ce qui montre que $T_z u \in H_{\text{loc}}^{s, l-1}$, d'après le lemme 2.4.1.

(*b*) Soit $u \in H_{\text{loc}}^{s, l-1}$, et $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$: on a $\varphi_0 u \in H_\varphi^{s, l-1}$ pour tout φ, et, pour $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_1 = 1$ près de $\operatorname{Supp} \varphi_0$,

$$T_{\varphi_1 z} \varphi_0 u = \varphi_1 T_{\varphi_1 z} \varphi_0 u + R_1,$$

$$\varphi_1 T_{\varphi_1 z} \varphi_0 u - T_z \varphi_0 u = R_2, \qquad R_1, R_2 \in H_{\varphi_1}^{s, l-1}.$$

Comme $T_z \varphi_0 u - \varphi_0 T_z u \in H_{\text{loc}}^{s, l-1}$, on obtient $T_{\varphi_1 z} \varphi_0 u \in H_{\varphi_1}^{s, l-1}$, c'est-à-dire $\varphi_0 u \in H_{\varphi_1}^{s, l}$, et $u \in H_{\text{loc}}^{s, l}$ d'après le lemme 2.4.1. ■

2.4.3. *Paratransport des espaces* $H_{\text{loc}}^{s, l}(\mathscr{V})$.

LEMME 2.4.3. — *Soient $\mathscr{V}_j$ des familles de champs définies sur des ouverts Ω_j ($j = 1, 2$), satisfaisant chacune $P_{\alpha, k-1}$ et* (TF).

Soit $\chi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un difféomorphisme de classe $C_{\text{loc}}^{\alpha+1, k-1}(\mathscr{V}_1)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\chi_* \mathscr{V}_1 \subset \mathscr{V}_2$.

(ii) *Pour toute* $\varphi \in \tilde{C}_{\text{loc}}^{\alpha, k-1}(\mathscr{V}_1)$, $\varphi \circ \chi^{-1} \in \tilde{C}_{\text{loc}}^{\alpha, k-1}(\mathscr{V}_2)$.

Alors $\chi^* u$ est bien défini, pour $u \in H_{\text{loc}}^{s, l}(\mathscr{V}_2)$, modulo $H_{\text{loc}}^{s+\alpha-1, l}(\mathscr{V}_1)$, et $\chi^* u \in H_{\text{loc}}^{s, l}(\mathscr{V}_1)$ ($l \leqq k$).

Preuve. — (*a*) Exceptionnellement ici, nous noterons $|u|_{0, l, \varphi}$ la norme dans $H_\varphi^{0, l}$, etc.

Soit $\varphi \in \tilde{C}_{\text{loc}}^{\alpha, k-1}(\mathscr{V}_1)$, $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega_1)$, et $v \in C_{\varphi \circ \chi^{-1}}^{0, l}(\mathscr{V}_2)$: on a l'estimation

$$|\varphi_0 (v \circ \chi)|_{0, l, \varphi} \leqq C |v|_{0, l, \varphi \circ \chi^{-1}}.$$

En effet, si $z \in \mathscr{V}_1$,

$$\varphi Z(\varphi_0 (v \circ \chi)) = \varphi Z(\varphi_0)(v \circ \chi) + \varphi_0 [(\varphi \circ \chi^{-1}) \chi_* Z(v)] \circ \chi :$$

grâce à (i) et (ii), on obtient l'estimation par récurrence.

(*b*) Il faut maintenant établir des estimations de « recoupe » en norme $|\ |_{0, l, \varphi}$, analogues à celles du lemme 2.1.2 de [2] : si spectre $v \subset$ couronne c_q, $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega_1)$, $N_2 \geqq |p-q| \geqq N_1+1$, avec N_1 et N_2 grands, alors

$$|(\varphi_0(v \circ \chi))_p|_{0, l, \varphi} \leqq C\, 2^{-p(\alpha-1)} |v|_{0, l, \varphi \circ \chi^{-1}}.$$

Pour ce faire, on doit prouver une variante du lemme 2.3.3, qui s'écrit

$$|A_p(\varphi_0(v \circ \chi))|_{0, l, \varphi} \leqq C\, 2^{-p(\alpha-1)} |v|_{0, l, \varphi \circ \chi^{-1}}.$$

Pour $l=0$, l'estimation de [2] suffit. Pour $l \geqq 1$, on procède par récurrence comme au lemme 2.3.3 : les détails ne présentent pas de difficulté; seul le traitement du terme $A_p((S_{p-N} a_j)\, \partial_j(\varphi_0(v \circ \chi)))$ diffère : on écrit ici

$$(S_{p-N} a_j)\, \partial_j(\varphi_0(v \circ \chi)) = a_j \partial_j(\varphi_0(v \circ \chi)) - (a_j - S_{p-N} a_j)\, \partial_j(\varphi_0(v \circ \chi)) = \varphi Z(\varphi_0(v \circ \chi)) + r.$$

L'hypothèse $\chi' \in C_{\mathrm{loc}}^{\alpha, k-1}(\mathscr{V}_1)$ implique

$$|r|_{0, l-1, \varphi} \leqq C\, 2^{-p\alpha} 2^p |v|_{0, l-1, \varphi \circ \chi^{-1}}$$

et il suffit de considérer $\varphi Z(\varphi_0(v \circ \chi)) = \varphi Z(\varphi_0)(v \circ \chi) + \varphi_0 [(\varphi \circ \chi^{-1})(\chi_* Z)(v)] \circ \chi$: comme $\varphi Z(\varphi_0) \in \tilde{C}_{\mathrm{loc}}^{\alpha, k-1}(\mathscr{V}_1)$, on peut le remplacer par $S_{p-N}(\varphi Z(\varphi_0))$, en commettant une erreur majorée par $C\, 2^{-p\alpha} |v|_{0, l-1, \varphi \circ \chi^{-1}}$, et le terme résultant de cette substitution se traite par récurrence. Finalement, en notant $(\varphi \circ \chi^{-1}) \tilde{Z} = (\varphi \circ \chi^{-1})\, \chi_* Z = \sum b_j \partial_j$, on a

$$\sum b_j \partial_j v = \sum (b_j - S_{q-N} b_j)\, \partial_j v + \sum S_{q-N}(b_j)\, \partial_j v = (1) + (2);$$

comme plus haut, $|\varphi_0(1) \circ \chi|_{0, l-1, \varphi} \leqq C\, 2^{-p\alpha} 2^p |v|_{0, l-1, \varphi \circ \chi^{-1}}$ et (2) n'est autre que $T_{(\varphi \circ \chi^{-1})\tilde{Z}}\, v$: le terme correspondant se traite par récurrence, car (2) a son spectre dans une couronne c_q.

(*c*) La vérification de l'invariance de $\chi^* \varphi_1 u$ selon les différentes « recoupes » choisies ou les différentes décompositions dyadiques de $\varphi_1 u$ se fait alors de façon standard comme dans [2].

Ces propriétés d'invariance permettent de définir χ^* sur $\mathscr{D}'(\Omega_2)$, et les assertions « locales » du lemme résultent sans difficulté des assertions « globales » correspondantes. Nous laissons les détails au lecteur. ■

2.4.4. *Caractère d'algèbre des espaces* $H_\varphi^{s, l}(\mathscr{V})$, $H_{\mathrm{loc}}^{s, l}(\mathscr{V})$.

LEMME 2.4.4. — *Pour* $s > n/2$ (*resp.* $\sigma \geqq 0$), *les espaces* $H_\varphi^{s, l}(\mathscr{V})$ *et* $H_{\mathrm{loc}}^{s, l}(\mathscr{V})$ (*resp.* $C_\varphi^{\sigma, l}(\mathscr{V})$ *et* $C_{\mathrm{loc}}^{\sigma, l}(\mathscr{V})$) *sont des algèbres.*

Preuve. — Nous allons montrer que si $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, $F(0)=0$, $u \in H_\varphi^{s, l}$, alors $F(u) \in H_\varphi^{s, l}$. On adapte simplement la preuve de Meyer [23] pour le cas $l=0$, en étendant le théorème 2 de [23] au cas présent.

(*a*) Soit $m_p \in C^\infty$ telle que, pour tout α,

$$\|\partial^\alpha m_p\|_{0, l} \leqq C\, 2^{p|\alpha|}.$$

L'opérateur R : $u \to \sum_p m_p u_p$ applique alors $H_\varphi^{s,l}$ dans lui-même, $s>0$. En effet, posons $m_p^k = \varphi(D/C\,2^{p+k})\,m_p$, avec C assez grand : on a, pour tout σ,

$$\|m_p^k\|_{0,l} \leqq C_\sigma 2^{-(p+k)\sigma} \|m_p\|_{\sigma,l} \leqq C_\sigma 2^{-k\sigma},$$

et l'opérateur $R_k : u \to \sum m_p^k u_p$, considéré comme opérateur de $H_\varphi^{s,l}$ dans lui-même, a une norme majorée par $C_\sigma 2^{-k(\sigma-s)}$.

Nous appellerons dans la suite une telle famille m_p un « multiplicateur de Meyer ».

(*b*) On écrit :

$$F(u) = \sum F(S_{p+1}u) - F(S_p u) = \sum m_p u_p, \qquad m_p = \int_0^1 F'(S_p u + s u_p)\,ds,$$

et il reste à montrer que m_p est un multiplicateur de Meyer. On a

$$\partial^\alpha G(v) = \sum_{1 \leqq q \leqq |\alpha|} * G^{(q)}(v)\,\partial^{\gamma_1} v \ldots \partial^{\gamma_q} v, \qquad \sum \gamma_i = \alpha,$$

et ici $G = F'$, $v = S_p u + s u_p$: comme $H_\varphi^{s,l} \subset C_\varphi^{0,l}$, qui est une algèbre, on a

$$\|S_p u + s u_p\|_{0,l} \leqq C, \qquad \text{et} \qquad \|F^{(q+1)}(S_p u + s u_p\|_{0,l} \leqq C;$$

d'autre part,

$$\|\partial^{\gamma_i}(S_p u + s u_p)\|_{0,l} \leqq C\,2^{p|\gamma_i|},$$

ce qui achève la preuve. ■

3. Des exemples utiles pour les applications : les espaces $H_{\mathrm{loc}}^{s,l}(\Sigma)$

Dans les applications que nous avons en vue, les familles $\mathscr{V}$ qui ont servi, aux paragraphes 2.1-2.3, à définir certains espaces de distributions, seront formées de champs tangents à une ou plusieurs sous-variétés peu régulières de $\mathbb{R}^n$. Ce sont des exemples de telles familles que nous étudions ici.

3.1. Espaces liés a une sous-variété Γ. — 3.1.1. Soit Ω un ouvert et Γ une sous-variété de codimension d, de classe $C_{\mathrm{loc}}^{\varepsilon}$ ($\varepsilon > 2$).

Lemme 3.1.1. — *Il existe une famille finie* Z_j ($j=1, \ldots, N$) *de champs à coefficients* $C_{\mathrm{loc}}^{\varepsilon-1}$, *tangents à* Γ, *telle que, pour tout champ* Z *à coefficients* $C_{\mathrm{loc}}^{\varepsilon'-1}$ ($2 < \varepsilon' \leqq \varepsilon$), *tangent à* Γ, *il existe des* $\alpha_j \in C_{\mathrm{loc}}^{\varepsilon'-2}$ *tels que*

$$Z = \sum \alpha_j Z_j \qquad \textit{et} \qquad \alpha_j Z_j \textit{ est à coefficients } C_{\mathrm{loc}}^{\varepsilon'-1}.$$

Preuve. — Par un difféomorphisme χ de classe $C_{\mathrm{loc}}^{\varepsilon}$, on peut redresser Γ en la sous-variété $\Gamma' = \{x_1 = \ldots = x_d = 0\}$. Soit $\tilde{Z}_j$ les champs $x_k(\partial/\partial x_l)$ ($1 \leqq k, l \leqq d$) et $\partial/\partial x_j$ ($j \geqq d+1$) : le champ $\tilde{Z}$ image de Z par χ s'écrit $\tilde{Z} = \sum a_j(\partial/\partial x_j)$, et $a_j = 0$ sur Γ' pour

$j \leqq d$. Donc $a_j = \sum_{k=1}^{d} \alpha_{jk} x_k$, avec $\alpha_{jk} \in C_{\text{loc}}^{\varepsilon'-2}$, $\alpha_{jk} x_k \in C_{\text{loc}}^{\varepsilon'-1}$, et le lemme est vrai en prenant pour Z_j les images des $\tilde{Z}_j$ par χ^{-1}. ■

Soient alors $\rho > 0$, $k \geqq 1$ ($k \in \mathbb{N}$) tels que $\varepsilon = \rho + 1 + k$, et notons $\mathscr{V}$ la famille des champs à coefficients $C_{\text{loc}}^{\rho+k}$, tangents à Γ : il est immédiat que $\mathscr{V}$ satisfait $P_{\rho+1, k-1}$, et, grâce au lemme 3.1.1, (TF) (ici, $\alpha = \rho + 1$). Ceci permet de définir les espaces $H_{\text{loc}}^{s,l}(\mathscr{V})$, $C_{\text{loc}}^{\sigma,l}(\mathscr{V})$, etc., pour $l \leqq k$. Montrons que, pour l fixé, ces espaces ne dépendent ni de ε ni de k. Soit, en effet, $\varepsilon' > \varepsilon$, $\varepsilon' = \rho' + 1 + k'$, k, $k' \geqq l$: D'après le lemme 3.1.1, il existe une famille Z_j de champs à coefficients $C_{\text{loc}}^{\varepsilon'-1}$ qui engendre $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ au sens de (TF) : comme les espaces $H_\varphi^{s,l}$, $C_\varphi^{\sigma,l}$ ($\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$) ne dépendent que des Z_j (corollaire 2.3.2), ce sont les mêmes pour $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$, ainsi que $H_{\text{loc}}^{s,l}$, $C_{\text{loc}}^{\sigma,l}$ (à cause du lemme 2.4.1).

Définition. — *On note* $H_\varphi^{s,l}(\Gamma)$, $C_\varphi^{\sigma,l}(\Gamma)$, $H_{\text{loc}}^{s,l}(\Gamma)$, $C_{\text{loc}}^{\sigma,l}(\Gamma)$ *les espaces définis ci-dessus.*

3.1.2. *Un lemme d'extension.*

Lemme 3.1.2. — *Soit* $\Gamma = \{x_1 = x_2 = 0\}$, *et* $a(x_2, x')$, $a \in C_{\text{loc}}^{\sigma,l}(\{x_2 = 0\})$, $\sigma > 0$.

(i) *Il existe une fonction* $\tilde{a}(x_1, x_2, x')$, $\tilde{a} \in C_{\text{loc}}^{\sigma,l}(\Gamma)$, $\tilde{a}(0, x_2, x') = a(x_2, x')$.

(ii) *Supposons de plus* $a(0, x') = 0$, $\sigma > 1$: *on peut choisir* $\tilde{a}$ *comme en* (i), *avec en plus* $\tilde{a}(x_1, 0, x') = 0$.

Preuve. — (i) Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\theta = 1$ près de l'origine.
Posons $\tilde{a}(x_1, x_2, x') = \sum_p \theta(2^p x_1) \varphi_p(x_1, x_2, x')$, avec $\varphi(x_1, x_2, x') = \theta(x_1) a(x_1, x')$.

Notons d'abord que $\tilde{a} \in C^\sigma$, car $m_p = \theta(2^p x_1)$ est un « multiplicateur de Meyer » (*cf.* Meyer [23]). Calculons l'action sur $\tilde{a}$ des champs tangents à Γ :

$$x_1 \partial_1 \tilde{a} = \sum 2^p x_1 \theta'(2^p x_1) \varphi_p + \sum \theta(2^p x_1) x_1 (\theta'(x_1) a)_p$$

$$x_1 \partial_2 \tilde{a} = \sum 2^p x_1 \theta(2^p x_1)(2^{-p}(\partial_2 \varphi)_p)$$

$$x_2 \partial_1 \tilde{a} = \sum 2^p \theta'(2^p x_1)((x_2 \varphi)_p + 2^{-p}(\varphi)'_p) + \sum \theta(2^p x_1) x_2 (\theta'(x_1) a)_p$$

$$x_2 \partial_2 \tilde{a} = \sum \theta(2^p x_1)((x_2 \partial_2 \varphi)_p + 2^{-p}(\partial_2 \varphi)'_p)$$

$$\partial_{x'_j} \tilde{a} = \sum \theta(2^p x_1)(\partial_{x'_j} \varphi)_p.$$

Ici, $(u)'_p$ désigne un « bloc dyadique modifié » de u, qui jouit des mêmes propriétés que le standard u_p (*voir* [3]). Comme $x_2 \partial_2 a \in C^{\sigma, l-1}$, $\partial_2 a \in C^{\sigma-1, l}$, $\partial_{x'_j} a \in C^{\sigma, l-1}$, $x_2 a \in C^{\sigma+1, l-1}$, on obtient par récurrence que $\tilde{a} \in C^{\sigma, l}$.

(ii) Si $a = 0$ pour $x_2 = 0$, on écrit $a = x_2 b$, où $b \in C^{\sigma-1, l}$, b vérifiant en outre $x_2 \partial_2 b \in C^{\sigma-1, l}$, $x_2 \partial_{x'} b \in C^{\sigma, l-1}$. On définit alors $\tilde{b}$ comme en (i), et $\tilde{a} = x_2 \tilde{b}$: on sait que $\tilde{b} \in C^{\sigma-1, l}$, et on vérifie comme en (i) que les propriétés additionnelles de b impliquent $x_2 \partial_2 \tilde{b}$, $x_2 \partial_{x'} \tilde{b}$, $x_2 \partial_1 \tilde{b} \in C^{\sigma-1, l}$, ce qui prouve $\tilde{a} \in C^{\sigma, l}$. ■

3.1.3. *Un lemme de division.*

LEMME 3.1.3. — *Soit* $\Gamma=\{x_1=\ldots=x_d=0\}$, $d\leqq 2$, *et* $a\in C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, $\sigma>1$, $a=0$ *sur* Γ. *Il existe alors des fonctions* $a_j\in C^{\sigma-1, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, *telles que*

$$a=\sum_{j=1}^{d} x_j a_j \qquad et \qquad x_j a_j\in C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma).$$

Preuve. — (i) Si $d=1$, c'est clair, car $a(x_1, x')=x_1\int_0^1 (\partial_1 a)(x_1 s, x')\,ds$. Montrons de plus que si $d=2$, et si $a(0, x')=0$, alors $a=x_1 a_1$, avec $a_1\in C^{\sigma-1, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$. On raisonne par récurrence, en supposant vraie la propriété pour $l-1$: on a alors

$$x_1\partial_1 a=a+x_1(x_1\partial_1 a_1),\qquad x_1\partial_2 a=a_1(x_1\partial_2 a_1),$$

$$x_2\partial_1 a=x_2 a_1+x_1(x_2\partial_1 a_1),\qquad x_2\partial_2 a=x_1(x_2\partial_2 a_1),\qquad \partial_{x'} a=x_1\partial_{x'} a_1;$$

comme $x_2 a\in C^{\sigma+1, l-1}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, on a $x_2 a_1\in C^{\sigma, l-1}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$ par récurrence, et les identités ci-dessus montrent que $a_1\in C^{\sigma-1, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$.

(ii) Si $d=2$, soit $\tilde a\in C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$ $\tilde a(0, x_2, x')=a(0, x_2, x')$, et $\tilde a(x_1, 0, x')=0$, donné par le lemme 3.1.2, (ii) [car $a(0, x_2, x')\in C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\{x_2=0\})$]. On écrit alors

$$a(x_1, x_2, x')=a(x_1, x_2, x')-\tilde a(x_1, x_2, x')+\tilde a(x_1, x_2, x')=x_1 a_1+x_2 a_2$$

avec les propriétés requises, d'après (i). ■

3.1.4. *Propriétés des espaces* $C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$.

LEMME 3.1.4. — *Soit* Γ *une sous-variété de codimension* d $(d\leqq 2)$, *de classe* $C^{\rho+1+k}$, $\rho>0$, $k\geqq 1$, *et* χ *un difféomorphisme de classe* $C^{\rho+1}$, *dont les composantes sont de classe* $C^{\rho+1, k}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$. *Posons* $\Gamma'=\chi(\Gamma)$.

(i) *Soit* $\mathscr{W}$ *la collection des champs à coefficients* $C^{\rho+1, k-1}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, *tangents à* Γ. *Alors* $\mathscr{W}$ *satisfait* $P_{\rho+1, k-1}$, (TF), *et les espaces* $C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\mathscr{W})$ *et* $C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$ *coïncident pour* $l\leqq k$.

(ii) Γ' *est de classe* $C^{\rho+1+k}$ *et si* $a\in C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma')$, $b\in C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, *alors* $a\circ\chi\in C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, $b\circ\chi^{-1}\in C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma')$ *pour* $\sigma\leqq\rho+1$, $l\leqq k$.

(iii) *Les composantes de* χ^{-1} *sont dans* $C^{\sigma+1, k}_{\mathrm{loc}}(\Gamma')$.

Preuve. — (*a*) On va montrer, par récurrence sur l, que $\mathscr{W}$ satisfait $P_{\rho+1, l}$ et la condition (TF) correspondante, et que les espaces $C^{\sigma, q}_{\mathrm{loc}}(\mathscr{W})$ et $C^{\sigma, q}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$ coïncident pour $q\leqq l$, pour $l\leqq k-1$. C'est clair lorsque $l=0$. Supposons cela vrai pour $l-1$; si $\Gamma=\{x_1=\ldots=x_d=0\}$, et $Z\in\mathscr{W}$, on a $Z=\Sigma\alpha_j\partial_j$, avec, pour $j\leqq d$, $\alpha_j=\sum_{q=1}^{d}\beta_{jq}x_q$, $\beta_{jq}\in C^{\sigma, k-1}(\Gamma)$ d'après le lemme 3.1.3 : les champs $x_q\partial_j (1\leqq q, j\leqq d)$ et $\partial_{x'}$ engendrent donc $\mathscr{W}$ au sens de (TF), avec des coefficients $C^{\rho, k-1}(\Gamma)\subset C^{\rho, l-1}(\mathscr{W})$ par hypothèse de récurrence [dans le cas général, on obtient la même assertion en redressant Γ par un difféomorphisme de classe $C^{\rho+1+k}$, qui préserve les espaces $C^{\sigma, l}(\Gamma)$ $(\sigma+l\leqq\rho+k)$]. On en déduit, comme au lemme 3.1.1, que les espaces $C^{\sigma, l}(\mathscr{W})$ et $C^{\sigma, l}(\Gamma)$ coïncident. Mais alors les coefficients des champs de $\mathscr{W}$, qui sont dans $C^{\rho+1, k-1}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)\subset C^{\rho+1, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, sont dans $C^{\rho+1,l}_{loc}(\mathscr{W})$, c'est-à-dire que $P_{\rho+1,l}$ et (TF) sont vérifiées, et cela achève la preuve de (i).

(*b*) Comme l'espace $C^{\rho+1,k}_{loc}(\Gamma)$ peut être défini à l'aide de « vrais » champs, on voit que $\chi|_\Gamma$ est de classe $C^{\rho+1+k}_{loc}$, ainsi donc que Γ'.

Montrons, par récurrence sur l, (ii) et l'assertion « les composantes de χ^{-1} sont dans $C^{\rho+1,l}_{loc}(\Gamma')$ ». C'est clair pour $l=0$, et supposons cela vrai pour $l-1$ $(l \leqq k)$; on peut toujours supposer Γ et Γ' redressées en $\{x_1=\ldots=x_d=0\}$. Comme $\chi(\chi^{-1}(x))=x$, $\chi'(\chi^{-1}(x))(\chi^{-1})'=id$. Pour $1 \leqq i, j \leqq d$, on en déduit $\chi'(\chi^{-1}(x))\,x_j(\partial\chi^{-1}/\partial x_i) \in C^\infty$; par un artifice (appelé « pivot ») dû à P. Gérard, on écrit

$$\partial_q\left(\chi'(\chi^{-1}(x))\,x_j\frac{\partial\chi^{-1}}{\partial x_i}\right)=\partial_q(x_j\chi'(\chi^{-1}))\frac{\partial\chi^{-1}}{\partial x_i}+\chi'(\chi^{-1})\,\partial_q\left(x_j\frac{\partial\chi^{-1}}{\partial x_i}\right)-\delta_{jq}\chi'(\chi^{-1})\frac{\partial\chi^{-1}}{\partial x_i};$$

analysons les différents termes :

$$x_j\chi'(\chi^{-1})=(\chi_j\chi')(\chi^{-1}) \qquad \text{et} \qquad \chi_j=\sum_{r=1}^{d}\alpha_{jr}x_r, \qquad \alpha_{jr}\in C^{\rho,k}(\Gamma);$$

en utilisant à nouveau l'artifice de pivot, on écrit

$$\partial_q(x_r\alpha_{jr}\chi')=\partial_q(x_r\chi')\,\alpha_{jr}+\chi'\,\partial_q(\alpha_{jr}x_r)-\delta_{qr}\alpha_{jr}\chi',$$

ce qui montre que $x_r\alpha_{jr}\chi' \in C^{\rho+1,k-1}(\Gamma)$, et, par récurrence, $\partial_q(x_j\chi'(\chi^{-1})) \in C^{\rho,l-1}(\Gamma')$. Comme $\partial\chi^{-1}/\partial x_i$, $\chi'(\chi^{-1}) \in C^{\rho,l-1}(\Gamma')$, et χ' est inversible, on obtient $\partial_q(x_j(\partial\chi^{-1}/\partial x_i) \in C^{\rho,l-1}$, soit $x_j(\partial\chi^{-1}/\partial x_i) \in C^{\rho+1,l-1}(\Gamma')$.

Pour obtenir la même information sur les dérivées $\partial\chi^{-1}/\partial x_j$, $j \geqq d+1$, on écrit, pour tout k, $\sum_q(\partial\chi_k^{-1}/\partial x_q)(\partial\chi_q/\partial x_j) \in C^\infty$; si $q \leqq d$, $\partial\chi_q/\partial x_j$ est nul sur Γ et appartient à $C^{\rho+1,k-1}$: le même argument de pivot que précédemment implique

$$\sum_{q=1}^{d}(\partial\chi_k^{-1}/\partial x_q)(\partial\chi_q/\partial x_j) \in C^{\rho+1,l-1}.$$

Comme la matrice $(\partial\chi_q/\partial x_j)$ $(j,\ q \geqq d+1)$ est inversible et dans $C^{\rho+1,k-1}$, on obtient $\partial\chi_k^{-1}/\partial x_q(\chi(x)) \in C^{\rho+1,l-1}$ pour $q \geqq d+1$, d'où le résultat par récurrence.

Soit alors $a \in C^{\sigma,l}_{loc}(\Gamma')$, et Z un champ de classe $C^{\rho+k}$ tangent à Γ : $Z(a\circ\chi)=[(\chi_* Z)(a)]\circ\chi$, avec $\chi_* Z=\Sigma((Z\chi_j)\circ\chi^{-1})\,\partial_j$; par récurrence, $\chi_* Z$ a ses coefficients dans $C^{\rho+1,l-1}(\Gamma')$, et, d'après (i), $Z(a\circ\chi) \in C^{\sigma,l-1}(\Gamma)$, soit $a\circ\chi \in C^{\sigma,l}(\Gamma)$. L'argument est le même pour montrer $b\circ\chi^{-1} \in C^{\sigma,l}(\Gamma')$. ■

COROLLAIRE 3.1.4. — *Soient Γ, Γ' et χ comme précédemment. Alors χ_* échange les champs tangents à Γ à coefficients $C^{\rho,k}_{loc}(\Gamma)$ [resp. $C^{\rho+1,k-1}_{loc}(\Gamma)$] avec les champs tangents à Γ' à coefficients $C^{\rho,k}_{loc}(\Gamma')$ [resp. $C^{\rho+1,k-1}_{loc}(\Gamma')$].*

3.2. ESPACE LIÉS A UN COUPLE (Σ, Γ) DE SOUS-VARIÉTÉS. — Nous considérons ici la configuration suivante : $\rho>1$, $k \geqq 0$; Γ est une sous-variété de codimension 2, de classe

$C^{\rho+1+k}$, et Σ est une hypersurface contenant Γ, de classe $C^{\rho+1,k}_{\text{loc}}(\Gamma)$ (ce qui signifie qu'on peut définir Σ par une équation $F=0$, $\nabla F \neq 0$, et $F \in C^{\rho+1,k}_{\text{loc}}(\Gamma)$).

Nous noterons $G(\rho, k)$ cette situation.

3.2.1. *Un lemme de division.*

LEMME 3.2.1. — *Soit* (Σ, Γ) *vérifiant* $G(\rho', k')$. *Il existe une famille finie* Z_j *de champs tangents à* Σ *et à* Γ, *à coefficients* $C^{\rho',k'}_{\text{loc}}(\Gamma)$, *telle que pour toute* $m(x, \xi)$, *homogène en* ξ *de degré* μ, C^∞ *en* ξ *hors de* $\xi=0$ *et* $C^{\rho,k}_{\text{loc}}(\Gamma)$ *en* x $(\rho+k \leqq \rho'+k',\ 1<\rho\leqq\rho')$, *m nulle sur les conormaux à* Σ *et à* Γ, *on ait* $m=\Sigma\,\alpha_j z_j$, α_j *homogène de degré* $\mu-1$ *à coefficients dans* $C^{\rho-1,k}_{\text{loc}}(\Gamma)$, $\alpha_j z_j$ *à coefficients* $C^{\rho,k}_{\text{loc}}(\Gamma)$.

Preuve. — Soit χ un difféomorphisme à composantes de classe $C^{\rho'+1,k'}_{\text{loc}}(\Gamma)$ qui applique Σ sur $\Sigma'=\{x_1=0\}$, Γ sur $\Gamma'=\{x_1=x_2=0\}$. Le symbole $\tilde m$ transformé de m par χ est à coefficients $C^{\rho,k}_{\text{loc}}(\Gamma')$, d'après le lemme 3.1.4. Soit $\tilde Z_j$ la collection des champs $x_1\partial_1$, $x_1\partial_2$, $x_2\partial_2$ et $\partial_{x'}$ $(x'=(x_3, \ldots, x_n))$: en tout point (x, ξ) n'appartenant ni à $N^*(\Sigma)$ ni à $N^*(\Gamma)$, l'un des $\tilde z_j$ est elliptique. Examinons la situation près de $N^*(\Sigma)\cup N^*(\Gamma)$: on peut écrire

$$\begin{aligned}\tilde m(x, \xi) &= \tilde m(x, \xi)-\tilde m(x, \xi_1, 0, 0)+\tilde m(x, \xi_1, 0, 0)\\ &=\xi_2 m_1(x, \xi)+\xi' m_2(x, \xi)+x_1 m_3(x, \xi),\end{aligned}$$

avec m_1, m_2 à coefficients $C^{\rho,k}_{\text{loc}}(\Gamma')$, m_3 à coefficients $C^{\rho-1,k}_{\text{loc}}(\Gamma')$. D'autre part,

$$\begin{aligned}m_1(x, \xi) &= m_1(x, \xi)-m_1(x, \xi_1, \xi_2, 0)+m_1(x, \xi_1, \xi_2, 0)\\ &=\xi' m_4(x, \xi)+x_1 m_5(x, \xi)+x_2 m_6(x, \xi),\end{aligned}$$

avec m_4 à coefficients $C^{\rho,k}$, m_5 et m_6 à coefficients $C^{\rho-1,k}$, d'après le lemme 3.1.3. Cela achève la preuve, les Z_j étant les images des $\tilde Z_j$ par χ^{-1}. ■

3.2.2. *Définition des espaces.* — Soit (Σ, Γ) vérifiant $G(\rho, k)$, $\rho>1$, $k\geqq 0$.

On considère la collection $\mathscr{V}$ des champs Z à coefficients $C^{\rho,k}_{\text{loc}}(\Gamma)$, tangents à Σ et à Γ (le lemme 3.1.4 montre que v n'est pas vide) : les lemmes 3.1.4(i) et 3.2.1 montrent que $\mathscr{V}$ satisfait $P_{\rho,k}$ et (TF); on peut donc définir les espaces $H^{s,l}_{\text{loc}}(\mathscr{V})$, $C^{\sigma,l}_{\text{loc}}(\mathscr{V})$, etc.

D'autre part, le lemme de division 3.2.1 et le corollaire 2.3.2 permettent de montrer, comme en 3.1.1, que ces espaces ne dépendent que de (Σ, Γ), et non de ρ et k.

DÉFINITION. — *On note* $H^{s,l}_\varphi(\Sigma, \Gamma)$, $H^{s,l}_{\text{loc}}(\Sigma, \Gamma)$, $C^{\sigma,l}_\varphi(\Sigma, \Gamma)$, $C^{\sigma,l}_{\text{loc}}(\Sigma, \Gamma)$ *les espaces ainsi définis* $(l\leqq k+1)$.

3.3. ESPACES LIÉS A DEUX HYPERSURFACES Σ_1 ET Σ_2. — Nous considérons la situation géométrique suivante : $\rho>1$, $k\geqq 0$; Γ est une sous-variété de codimension 2, de classe $C^{\rho+1+k}$, et Σ_1 et Σ_2 sont deux hypersurfaces contenant Γ, de classe $C^{\rho+1,k}_{\text{loc}}(\Gamma)$, non tangentes le long de Γ.

Nous notons $G(\rho, k)$ cette situation.

3.3.1. *Un lemme de division.*

LEMME 3.3.1. — *Soit* (Σ_1, Σ_2) *vérifiant* $G(\rho', k')$.

Il existe une famille finie Z_j *de champs tangents à* Σ_1 *et* Σ_2, *à coefficients* $C^{\rho', k'}_{\text{loc}}(\Gamma)$, *telle que pour toute* $m(x, \xi)$, *homogène en* ξ *de degré* μ, C^∞ *en* ξ *hors de* $\xi=0$ *et* $C^{\rho, k}_{\text{loc}}(\Gamma)$ *en* x $(\rho+k \leqq \rho'+k',\ 1<\rho \leqq \rho')$, *m nulle sur les conormaux à* Σ_1, Σ_2 *et* Γ, *on ait* $m=\sum \alpha_j z_j$, α_j *homogène de degré* $\mu-1$ *à coefficients dans* $C^{\rho-1, k}_{\text{loc}}(\Gamma)$, $\alpha_j z_j$ *à coefficients* $C^{\rho, k}_{\text{loc}}(\Gamma)$.

Preuve. — Elle est analogue à celle du lemme 3.2.1, et laissée au lecteur. ■

3.3.2. *Définition des espaces.* — Soit (Σ_1, Σ_2) vérifiant $G(\rho, k)$, $\rho>1$, $k \geqq 0$.

On considère la collection $\mathscr{V}$ des champs Z à coefficients $C^{\rho, k}_{\text{loc}}(\Gamma)$, tangents à Σ_1 et à Σ_2 : les lemmes 3.1.4 (i) et 3.3.1 montrent que $\mathscr{V}$ satisfait $P_{\rho, k}$ et (TF); on peut donc définir les espaces $H^{s, l}_{\text{loc}}(\mathscr{V})$, etc.

D'autre part, le lemme de division 3.3.1 et le corollaire 2.3.2 permettent de montrer, comme en 3.1.1, que ces espaces ne dépendent que de (Σ_1, Σ_2), et non de ρ et k.

DÉFINITION. — *On note* $H^{s, l}_{\varphi}(\Sigma_1, \Sigma_2)$, $H^{s, l}_{\text{loc}}(\Sigma_1, \Sigma_2)$, $C^{\sigma, l}_{\varphi}(\Sigma_1, \Sigma_2)$, $C^{\sigma, l}_{\text{loc}}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ *les espaces ainsi définis* $(l \leqq k+1)$.

3.3.3. *Un lemme de structure de* $H^{s, l}_{\text{loc}}(\Sigma_1, \Sigma_2)$.

LEMME 3.3.3. — *Soient* (Σ_1, Σ_2) *vérifiant* $G(\rho, k)$, $\rho>2$, $k \geqq 0$.

(i) *Pour tout* $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$, $H^{s, l}_{\varphi}(\Sigma_1, \Sigma_2)=H^{s, l}_{\varphi}(\Sigma_1, \Gamma)+H^{s, l}_{\varphi}(\Sigma_2, \Gamma)$ *la norme sur* $H^{s, l}_{\varphi}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ *étant équivalente à la norme naturelle sur l'espace somme* (*à savoir l'infimum de la somme des normes sur toutes les décompositions possibles*).

(ii) $H^{s, l}_{\text{loc}}(\Sigma_1, \Sigma_2)=H^{s, l}_{\text{loc}}(\Sigma_1, \Gamma)+H^{s, l}_{\text{loc}}(\Sigma_2, \Gamma)$.

(iii) *Les points* (i) *et* (ii) *sont valables aussi pour les espaces* $C^{\sigma, l}$, $\sigma \neq 0$.

Preuve. — (*a*) Soit $\chi(x, D)$ un opérateur pseudo-différentiel de symbole χ, nul pour x hors d'un compact, homogène de degré 0 en ξ, nul au voisinage de $N^* \Sigma_2$. On va montrer sue l'application $u \to \chi(x, D) u=u_1$ est continue de $H^{s, l}_{\varphi}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ dans $H^{s, l}_{\varphi}(\Sigma_1, \Gamma)$. C'est clair pour $l=0$, et supposons cela vrai pour $l-1$ $(l \leqq k+1)$; soit Z tangent à Γ et Σ_1, à coefficients $C^{\rho, k}_{\text{loc}}(\Gamma)$, et $\tilde{\chi}$ nul au voisinage de $N^* \Sigma_2$, valant 1 près du support de χ : comme $u_1-\tilde{\chi} u_1$ est négligeable, on a

$$T_{\varphi z} u_1=T_{\varphi z} T_{\tilde{\chi}} u_1=T_{(\varphi z) \# \tilde{\chi}} u_1+R_1 \in H^{s-1+\rho, l-1}_{\varphi}(\Sigma_1, \Gamma);$$

d'autre part, $(\varphi z) \# \tilde{\chi}=\varphi z \tilde{\chi}+$symbole d'ordre 0, donc il suffit de prouver

$$T_{\varphi z \tilde{\chi}} u_1 \in H^{s, l-1}_{\varphi}(\Sigma_1, \Gamma).$$

D'après le lemme 3.3.1, on peut écrire

$$z \tilde{\chi}=\sum \alpha_j z_j;$$

d'où

$$T_{\varphi z \tilde{\chi}} u_1=\sum T_{\varphi \alpha_j z_j} u_1=\sum T_{\varphi' \alpha_j} T_{\varphi z_j} u_1+R_2,\ \varphi'=1$$

près de $\operatorname{supp} \varphi$, avec $R_2 \in H^{s, l-1}_{\varphi}(\Sigma_1, \Gamma)$ si $\rho>2$. Comme $u_1 \in H^{s, l}_{\varphi}(\Sigma_1, \Sigma_2)$,

$T_{\varphi z_j} u_1 \in H_\varphi^{s, l-1}(\Sigma_1, \Sigma_2)$; d'autre part

$$T_{\varphi z \tilde{\chi}} u_1 = T_{\tilde{\chi}} T_{\varphi z \tilde{\chi}} u_1 + R_3, \qquad R_3 \in H_\varphi^{s, l-1}(\Sigma_1, \Gamma),$$

donc, par récurrence, $T_{\varphi z \tilde{\chi}} u_1 \in H_\varphi^{s, l-1}(\Sigma_1, \Gamma)$.

(*b*) Soit alors $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\Phi = 1$ au voisinage de $\bar{\Omega}$: on écrit $u = (1-\Phi) u + \Phi u$, et $\Phi u = \chi_1(x, D)(\Phi u) + \chi_2(x, D)(\Phi u)$, avec χ_j comme en (*a*), $\chi_1 + \chi_2 = 1$, χ_j nul au voisinage de $N^* \Sigma_j$. Cela achève la preuve de (i).

(*c*) La preuve de (ii) résulte immédiatement de (i) et des définitions. ■

Bien entendu, les exemples développés ici sont seulement ceux dont on a besoin en vue des théorèmes 1, 2, 3. D'autres algèbres sont utiles dans différents contextes (par exemple si l'on s'intéresse aux solutions « striées » *voir* [14], [25], [26]).

4. Espaces associés à une configuration Σ

Nous considérons dans tout ce paragraphe la situation géométrique suivante, qui généralise celle du paragraphe 3.3 : $\rho > 1$, $k \geqq 0$; Γ est une sous-variété de codimension 2, de classe $C^{\rho+1+k}$, et les $\Sigma_j (j = 1, \ldots, m)$ sont des hypersurfaces contenant Γ, de classe $C_{\text{loc}}^{\rho+1, k}(\Gamma)$, non tangentes entre elles.

On notera $G(\rho, k)$ cette situation, et Σ désignera l'ensemble de la configuration $(\Gamma, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_m)$.

Pour chaque $j (1 \leqq j \leqq m)$, $H_{j, \varphi}^{s, l}$, $H_{j, \text{loc}}^{s, l}$, etc. désignera les espaces $H_\varphi^{s, l}(\Sigma_j, \Gamma)$, $H_{\text{loc}}^{s, l}(\Sigma_j, \Gamma)$, etc. définis au paragraphe 3.2.

4.1. Résumé des résultats. — Dans ce chapitre, nous allons construire, pour une configuration Σ donnée vérifiant $G(\rho, k) (\rho > 2, k \geqq 0)$, des espaces $H_{\text{loc}}^{s, l}(\Sigma)$ et $C_{\text{loc}}^{\sigma, l}(\Sigma)$ $(0 \leqq l \leqq k+1, s \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma \neq 0)$ qui jouissent des propriétés suivantes :

(i) Pour $l = 0$, $H_{\text{loc}}^{s, 0}(\Sigma) = H_{\text{loc}}^s(\Omega)$, $C_{\text{loc}}^{\sigma, 0}(\Sigma) = C_{\text{loc}}^\sigma(\Omega)$.

(ii) Pour $a \in C_{\text{loc}}^{\varepsilon, l}(\Sigma)$, $\varepsilon > 0$, et $u \in H_{\text{loc}}^{s, l}(\Sigma)$, le paraproduit $T_a u$ est bien défini modulo $H_{\text{loc}}^{s+\varepsilon, l}(\Sigma)$, et $T_a u \in H_{\text{loc}}^{s, l}(\Sigma)$. De même si $u \in C_{\text{loc}}^{\sigma, l}(\Sigma)$.

(iii) A un symbole $l \in \Sigma^m(C_{\text{loc}}^{\varepsilon, l}(\Sigma))$ on peut associer un opérateur paradifférentiel L, noté par abus T_l, qui applique $H_{\text{loc}}^{s, l}(\Sigma)$ dans $H_{\text{loc}}^{s-m, l}(\Sigma)$ et $C_{\text{loc}}^{\sigma, l}(\Sigma)$ dans $C_{\text{loc}}^{\sigma-m, l}(\Sigma) (\sigma \neq m)$.

(iv) Enfin, si $a \in \Sigma^{m_1}(C_{\text{loc}}^{\varepsilon, l}(\Sigma))$ et $b \in \Sigma^{m_2}(C_{\text{loc}}^{\varepsilon, l}(\Sigma))$, $0 < \varepsilon \leqq \rho$, $T_a T_b - T_{a \# b}$ applique $H_{\text{loc}}^{s, l}(\Sigma)$ dans $H_{\text{loc}}^{s-m_1-m_2+\varepsilon-0, l}(\Sigma)$, et $C_{\text{loc}}^{\sigma, l}(\Sigma)$ dans $C_{\text{loc}}^{\sigma-m_1-m_2+\varepsilon-0, l}(\Sigma)$. Ici, comme au paragraphe 2.1.1, $a \# b = \sum_{0 \leqq |\alpha| \leqq [\varepsilon]} (1/\alpha!) \partial_\xi^\alpha a D_x^\alpha b$, et $u \in H_{\text{loc}}^{s-0, l}(\Sigma)$ signifie que $\forall \eta > 0$, $u \in H_{\text{loc}}^{s-\eta, l}(\Sigma)$.

D'autres propriétés seront établies également : caractère d'algèbre de ces espaces pour $s > n/2$, $\sigma > 0$ (4.7); formules de (para) linéarisation (4.7); diverses formules pour les traces sur une hypersurface (4.6).

4.2. Définition des espaces. — (*a*) Pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, nous posons

$$H_\varphi^{s,l}(\Sigma)=\sum_j H_{j,\varphi}^{s,l},$$

la norme étant définie par $|u|_{s,l}=\inf_{u=\Sigma u_j}|u_j|_{H_{j,\varphi}^{s,l}}$. On définit de même $C_\varphi^{\sigma,l}(\Sigma)$, pour $\sigma\neq 0$.

(*b*) On pose également $H_{\text{loc}}^{s,l}(\Sigma)=\sum_j H_{j,\text{loc}}^{s,l}$, etc., et l'on vérifie facilement que

$$H_{\text{loc}}^{s,l}(\Sigma)=\{u\in H_{\text{loc}}^s(\Omega),\ \forall\varphi,\ \psi\in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi u\in H_\psi^{s,l}(\Sigma)\},$$

grâce au lemme 2.4.1, dont l'analogue dans le cas présent est vrai.

4.3. Propriétés des espaces $H_\varphi^{s,l}(\Sigma)$. — Elles se déduisent des propriétés des espaces $H_{j,\varphi}^{s,l}$, dont une liste figure au paragraphe 2.3.1.

4.3.1. *Invariance du paraproduit.*

Lemme 4.3.1. — *Si* $a\in C_\varphi^{\varepsilon,l}(\Sigma)$, $u\in H_\varphi^{s,l}(\Sigma)$, $T_a u$ *est bien défini modulo* $H_\varphi^{s+\varepsilon,l}(\Sigma)$, $T_a u\in H_\varphi^{s,l}(\Sigma)$. *De même si* $u\in C_\varphi^{\sigma,l}(\Sigma)$, *avec la modification habituelle si* $\sigma=0$.

Preuve. — Soit $a=\Sigma a_i$, $u=\Sigma u_j$: $T_a u=\Sigma T_{a_i} u_j$, et l'assertion $(BD)_l$ (§ 2.3.1) pour l'espace $H_\varphi^{s,l}(\Sigma_i, \Sigma_j)$ implique $T_{a_i} u_j\in H_{i,\varphi}^{s,l}+H_{j,\varphi}^{s,l}$, d'après le lemme de structure 3.3.3. L'invariance se prouve de la même façon. ■

4.3.2. *Opérance des pseudo-différentiels.*

Lemme 4.3.2. — *Si* A *est un opérateur paradifférentiel de symbole* $a\in\Sigma^m(C_\varphi^{\varepsilon,l}(\Sigma))$, A *applique* $H_\varphi^{s,l}(\Sigma)$ *dans* $H_\varphi^{s-m,l}(\Sigma)$.

Preuve. — Quitte à écrire a sous la forme

$$a(x,\xi)=\Sigma a_\nu(x)\, l_\nu(\xi) \qquad (\textit{cf.}\ \text{Bony [8]}),$$

il suffit, compte tenu du lemme 4.3.1, de considérer le cas $a=a(\xi)$, homogène de degré m. On a alors

$$A u=\Sigma A u_j\in\Sigma H_{j,\varphi}^{s-m,l}, \quad \text{d'après } (\mathrm{Op})_l,\ \S\ 2.3.1. \ \blacksquare$$

4.3.3. *Décomposition de Littlewood-Paley.*

Lemme 4.3.3. — (i) $u\in H_\varphi^{s,l}(\Sigma)\Leftrightarrow|u_p|_{0,l}\leqq C\, d_p 2^{-ps}|u|_{s,l}$, $\Sigma d_p^2\leqq 1$.

(ii) *Soit* $\sigma>0$. *Alors* $u\in C_\varphi^{\sigma,l}(\Sigma)\Rightarrow\forall\varepsilon$, $\sigma\geqq\varepsilon>0$,

$$\|u_p\|_{\varepsilon,l}\leqq C\,2^{-p(\sigma-\varepsilon)}\|u\|_{\sigma,l}.$$

Inversement, si, pour un ε, $\sigma\geqq\varepsilon>0$, $\|u_p\|_{\varepsilon,l}\leqq C\,2^{-p(\sigma-\varepsilon)}$, *alors* $u\in C_\varphi^{\sigma,l}(\Sigma)$, $\|u\|_{\sigma,l}\leqq \mathrm{Cte}\, C$.

Preuve. — (i) Soit $u=\Sigma u_j$: $(u)_p=\Sigma(u_j)_p$, et donc

$$|u_p|_{0,l}\leqq\Sigma|(u_j)_p|_{H_{j,\varphi}^{0,l}}\leqq C\, d_p 2^{-ps}\Big(\sum_j|u_j|_{H_{j,\varphi}^{s,l}}\Big)$$

d'après $(\mathrm{LP})_{l'}$ § 2.3.1.

Inversement, supposons $|u_p|_{0,l} \leqq C_1 d_p 2^{-ps}$: pour chaque p, il existe une décomposition $u_p = \sum_j (u_p)_j$ telle que

$$|(u_p)_j|_{\mathrm{H}^{0,l}_{j,\varphi}} \leqq 2\,C_1\, d_p\, 2^{-ps}.$$

Comme $u_p = \varphi(2^{-p}\mathrm{D})\, u_p$ pour une $\varphi(\xi)$ supportée dans une couronne,

$$u_p = \sum_j \varphi(2^{-p}\mathrm{D})\,(u_p)_j = \sum_j v_{p,j},$$

avec spectre

$$v_{p,j} \subset c_p \qquad \text{et} \qquad |v_{p,j}|_{\mathrm{H}^{0,l}_{j,\varphi}} \leqq 2\,C_1\, d_p\, 2^{-ps}.$$

Donc $\sum_p v_{p,j} \in \mathrm{H}^{s,l}_{j,\varphi}$, avec $|\sum_p v_{p,j}|_{\mathrm{H}^{s,l}_{j,\varphi}} \leqq 2\,\mathrm{CC}_1$, soit $u \in \mathrm{H}^{s,l}_\varphi(\Sigma)$, avec $|u|_{s,l} \leqq 2\,m\,\mathrm{CC}_1$.

(ii) La difficulté ici est qu'on ne peut utiliser les normes $\|\ \ \|_{0,l}$, qu'on n'a pas définies; par ailleurs la preuve est la même qu'en (i). ■

4.4. CALCUL SYMBOLIQUE. — 4.4.1. *Une inégalité de normes.*

LEMME 4.4.1. — *Soit* ε, $0 < \varepsilon \leqq \rho$.

(i) u, $v \in \mathrm{C}^{\varepsilon,l}_\varphi(\Sigma)$, *alors* $uv \in \mathrm{C}^{\varepsilon,l}_\varphi(\Sigma)$, *et* $\|uv\|_{\varepsilon,l} \leqq C\,\|u\|_{\varepsilon,l}\,\|v\|_{\varepsilon,l}$.

(ii) *Si* $u \in \mathrm{C}^{\varepsilon,l}_\varphi(\Sigma)$, $v \in \mathrm{H}^{0,l}_\varphi(\Sigma)$, *alors* $uv \in \mathrm{H}^{0,l}_\varphi(\Sigma)$, *et*

$$|uv|_{0,l} \leqq C\,\|u\|_{\varepsilon,l}\,|v|_{0,l}.$$

Preuve. — (i) On a $u = \Sigma u_i$, $v = \Sigma v_j$, donc $uv = \Sigma u_i v_j$: comme $\mathrm{C}^{\varepsilon,l}_\varphi(\Sigma_i, \Sigma_j)$ est une algèbre définie par des « vrais » champs, $u_i v_j \in \mathrm{C}^{\varepsilon,l}_\varphi(\Sigma_i, \Sigma_j)$, et

$$\|u_i v_j\|_{\mathrm{C}^{\varepsilon,l}_\varphi(\Sigma_i,\Sigma_j)} \leqq C\,\|u_i\|_{\mathrm{C}^{\varepsilon,l}_{i,\varphi}}\,\|v_j\|_{\mathrm{C}^{\varepsilon,l}_{j,\varphi}};$$

grâce au lemme 3.3.3, $u_i v_j \in \mathrm{C}^{\varepsilon,l}_\varphi(\Sigma)$, et

$$\|u_i v_j\|_{\varepsilon,l} \leqq C\,\|u_i v_j\|_{\mathrm{C}^{\varepsilon,l}_\varphi(\Sigma_i,\Sigma_j)},$$

ce qui achève la preuve de (i).

(ii) Dans l'hypothèse de (ii), pour chaque couple (i, j), on sait que $u_i v_j \in \mathrm{H}^{0,l}_\varphi(\Sigma_i, \Sigma_j)$, avec en fait

$$|u_i v_j|_{\mathrm{H}^{0,l}_\varphi(\Sigma_i,\Sigma_j)} \leqq C\,\|u_i\|_{\mathrm{C}^{0,l}_{i,\varphi}}\,|v_j|_{\mathrm{H}^{0,l}_{j,\varphi}},$$

car les espaces considérés sont définis à l'aide de « vrais » champs. ■

4.4.2. *Calcul symbolique global.*

LEMME 4.4.2. — *Soit* $a \in \Sigma^{m_1}(\mathrm{C}^{\varepsilon,l}_\varphi(\Sigma))$, $b \in \Sigma^{m_2}(\mathrm{C}^{\varepsilon,l}_\varphi(\Sigma))$, $0 < \varepsilon \leqq \rho$. *Alors* $\mathrm{T}_a \mathrm{T}_b - \mathrm{T}_{a\#b}$ *applique* $\mathrm{H}^{s,l}_\varphi(\Sigma)$ *dans* $\mathrm{H}^{s-m_1-m_2+\varepsilon-0,}_\varphi(\Sigma)$.

Preuve. — Comme au corollaire 2.3.5, la preuve s'effectue en deux étapes.

(*a*) Soit $l=l(\mathrm{D})$ un opérateur de symbole homogène de degré m : alors $l\mathrm{T}_b-\mathrm{T}_{l\# b}$ applique $\mathrm{H}_\varphi^{s,l}(\Sigma)$ dans $\mathrm{H}_\varphi^{s-m-m_2+\varepsilon,l}(\Sigma)$. En effet, $b=\Sigma b_i$, $u=\Sigma u_j$: $l\mathrm{T}_b u=\Sigma l\mathrm{T}_{b_i}u_j=\Sigma \mathrm{T}_{l\# b_i}u_j+\Sigma \mathrm{R}_{ij}$, où $\mathrm{R}_{ij}\in\mathrm{H}_\varphi^{s-m-m_2+\varepsilon,l}(\Sigma_i, \Sigma_j)$ d'après $(\mathrm{CS})_l$.

(*b*) Soient a, b deux fonctions de $\mathrm{C}_\varphi^{\varepsilon,l}(\Sigma)$. Le lemme est vrai dans ce cas, et la preuve est exactement la même qu'au corollaire 2.3.5, compte tenu des lemmes 4.4.1 et 4.3.3.

(*c*) Le cas général suit de (*a*) et (*b*) de façon standard. ■

4.4.3. *Opérateurs paradifférentiels.* — Comme au paragraphe 2.4.2, on constate que les lemmes 4.4.2 et 2.4.1 nous permettent de définir, exactement comme Bony [8], des opérateurs paradifférentiels à supports propres associés à des symboles $a\in\Sigma^m(\mathrm{C}_{\mathrm{loc}}^{\varepsilon,l}(\Sigma))$. Les lemmes 4.3.1, 4.3.2 et 4.4.2 impliquent alors les propriétés (ii), (iii), (iv) du paragraphe 4.1.

4.5. UNE CARACTÉRISATION DES ESPACES $\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,l}(\Sigma)$. — C'est l'analogue du lemme 2.4.2.

LEMME 4.5. — *Soit $\mathscr{V}$ l'ensemble des symboles a, homogènes en ξ de degré* 1, *à coefficients $\mathrm{C}_{\mathrm{loc}}^{\rho,k}(\Gamma)$, tels que $a=0$ sur $\mathrm{N}^*\Gamma\cup\mathrm{N}^*\Sigma_1\cup\ldots\cup\mathrm{N}^*\Sigma_m$. Alors, pour $1\leqq l\leqq k+1$,*

$$\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,l}(\Sigma)=\{u\in\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,l-1}(\Sigma),\ \forall a\in\mathscr{V},\ \mathrm{T}_a u\in\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,l-1}(\Sigma)\}.$$

Preuve. — (i) Remarquons d'abord que si $u\in\mathrm{H}_{i,\mathrm{loc}}^{s,l}$, et χ est un pseudodifférentiel d'ordre 0, de symbole nul près de $\mathrm{N}^*\Sigma_i$, alors $u_1=\chi(x, \mathrm{D})u\in\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,l}(\Gamma)$. La preuve est totalement analogue à celle du lemme 3.3.3 (*a*), le lemme de division 3.2.1 remplaçant le lemme 3.3.1.

(ii) On déduit de (i) que si le symbole χ est nul près de $\bigcup_{j\neq i}\mathrm{N}^*\Sigma_j$, et si $u\in\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,l}(\Sigma)$, alors $\chi(x, \mathrm{D})u\in\mathrm{H}_{i,\mathrm{loc}}^{s,l}$.

(iii) Soit alors $\Sigma\chi_i=1$ une partition de l'unité où chaque symbole χ_i est nul près de $\sum_{j\neq i}\mathrm{N}^*\Sigma_j$. On pose $u_i=\chi_i u$, $u=\Sigma u_i$.

Si Z est tangent à Γ et Σ_i, on a, grâce à 4.4.3, si

$$u\in\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,l-1}(\Sigma) : \mathrm{T}_{z\#\chi_i}u=\mathrm{T}_{z\#\chi_i}u+\mathrm{R}_1=\mathrm{T}_{z\chi_i}u+\mathrm{R}_2,$$

avec

$$\mathrm{R}_1\in\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s-1+\rho-0,l-1}(\Sigma),\qquad \mathrm{R}_2\in\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,l-1}(\Sigma).$$

Or $z\chi_i\in\mathscr{V}$, donc $\mathrm{T}_{z\chi_i}u\in\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,l-1}(\Sigma)$.

D'autre part, $\mathrm{T}_z\chi_i u=\tilde{\chi}_i\mathrm{T}_z\chi_i u+\mathrm{R}_3$, $\mathrm{R}_3\in\mathrm{H}_{i,\mathrm{loc}}^{s,l-1}$: d'après (ii), on trouve $\mathrm{T}_z\chi_i u\in\mathrm{H}_{i,\mathrm{loc}}^{s,l-1}$, c'est-à-dire $\chi_i u\in\mathrm{H}_{i,\mathrm{loc}}^{s,l}$, et $u\in\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,l}(\Sigma)$.

(iv) Pour montrer l'inclusion inverse

$$\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,l}(\Sigma)\subset\{u\in\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,l-1}(\Sigma),\ \forall a\in\mathscr{V},\ \mathrm{T}_a u\in\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{s,l-1}(\Sigma)\},$$

on remarque que, pour tout i, un symbole $a\in\mathscr{V}$ s'écrit, d'après le lemme 3.2.1, $a=\Sigma a_q z_q^{(i)}$. On a alors, si $u=\Sigma u_i$, $T_a u_i = T_{a_q} T_{z_q^{(i)}} u_i + R$, avec $R\in H^{s,l}_{i,\,\mathrm{loc}}$: comme $T_{z_q^{(i)}} u_i \in H^{s,l-1}_{i,\,\mathrm{loc}}$, on en déduit $T_a u_i \in H^{s,l-1}_{i,\,\mathrm{loc}}$, soit $T_a u \in H^{s,l-1}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$. ■

4.6. Traces sur une hypersurface. — Dans ce paragraphe, nous considérons la situation géométrique suivante : Γ est une sous-variété de codimension 2, de classe $C^{\rho+1+k}_{\mathrm{loc}}$, contenue dans l'hypersurface $\Sigma_1=\{x_1=0\}$; et Σ et Σ' sont des hypersurfaces de classe $C^{\rho+1,k}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, contenant Γ; Σ et Σ_1 sont non tangentes, ou bien $\Sigma=\Sigma_1$, et de même pour Σ'.

Lemme 4.6.1. — *Soit* $u\in C^{\sigma,l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma,\Gamma)$, $\sigma>0$ [*resp.* $u\in H^{s,l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma,\Gamma)\, s>1/2$], $l\leqq k+1$. *Alors* $u|_{\Sigma_1}\in C^{\sigma,l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$ [*resp.* $u|_{\Sigma_1}\in H^{s-1/2,l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$].

Preuve. — Notons d'abord les deux inégalités, valables pour toute $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, et toute v :

$$\| v|_{\Sigma_1}\|_{C^{0,l}_{\varphi|\Sigma_1}(\Gamma)}\leqq C\| v\|_{C^{0,l}_\varphi(\Sigma,\Gamma)},$$

$$| v|_{\Sigma_1}|_{H^{\varepsilon,l}_{\varphi|\Sigma_1}(\Gamma)}\leqq C| v|_{H^{\varepsilon+1/2,l}_\varphi(\Sigma,\Gamma)},\qquad 0<\varepsilon<1/2.$$

Ces inégalités résultent du fait que les espaces considérés sont définis à l'aide de vrais champs, et qu'il existe une famille finie de champs, tangents à Σ, Σ_1 et Γ, dont la restriction à Σ_1 engendre les champs tangents à Γ.

Soit alors

$$\psi\in C_0^\infty(\Omega) : \psi u=\sum_p(\psi u)_p,\qquad \text{et}\qquad \|(\psi u)_p\|_{C^{0,l}_\varphi(\Sigma,\Gamma)}\leqq C\,2^{-p\sigma}$$

[resp. $|(\psi u)_p|_{H^{\varepsilon+1/2,l}_\varphi(\Sigma,\Gamma)}\leqq C\,d_p 2^{-p(s-\varepsilon-1/2)}$), $0<\varepsilon<s-(1/2)$]. Comme $(\psi u)_{p|\Sigma_1}$ a son spectre dans une boule B_p, les inégalités ci-dessus impliquent $\psi u|_{\Sigma_1}\in C^{\sigma,l}_{\varphi|\Sigma_1}(\Gamma)$ [resp. $\psi u|_{\Sigma_1}\in H^{s-1/2,l}_{\varphi|\Sigma_1}(\Gamma)$], d'où la conclusion. ■

Lemme 4.6.2. — *Soit* $a\in C^{\varepsilon,l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma,\Gamma)$, $u\in H^{s,l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma',\Gamma)$ (*resp.* $u\in C^{\sigma,l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma',\Gamma)$), $\varepsilon>0$, $s>1/2$ (*resp.* $\sigma>0$).

Alors $T_a u|_{\Sigma_1}=T_{a|_{\Sigma_1}} u|_{\Sigma_1}+R\,u$, *avec* $R\,u\in H^{s-1/2+\varepsilon-0,l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$ [*resp.* $C^{\sigma+\varepsilon,l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$].

Preuve. — On peut supposer a et u à supports compacts, et l'on note $\bar a=a|_{\Sigma_1}$, etc. On a alors $a-S_p a=\sum_{q\geqq p} a_q$,

$$r_p(a)=\overline{S_p a}-S_p(\bar a)=-\sum_{q\geqq p}(\overline{a_q})+\sum_{q\geqq p}(\bar a)_q.$$

D'après la preuve du lemme 4.6.1, on a

$$\| r_p(a)\|_{C^{0,l}_\varphi(\Gamma)}\leqq C\,2^{-p\varepsilon};\ \text{de même, pour } 0<\eta<s-\frac{1}{2},$$

$$| r_p(u)|_{H^{\eta,l}_\varphi(\Gamma)}\leqq C\,d_p 2^{-p(s-1/2-\eta)}.$$

On écrit alors $T_a u=\Sigma(S_{p-N}a)u_p$, d'où $\overline{T_a u}=\Sigma S_{p-N}\bar{a}(\overline{u_p})+\Sigma r_{p-N}(a)(\overline{u_p})$. Comme $r_{p-N}(a)(\overline{u_p})$ est à spectre dans une boule B_p, et

$$|r_{p-N}(a)(\overline{u_p})|_{H^{0,l}_{\varphi}(\Gamma)}\leqq C\|r_{p-N}(a)\|_{C^{0,l}_{\varphi}(\Gamma)}|(\overline{u_p})|_{H^{0,l}_{\varphi}(\Gamma)}\leqq C\,d_p\,2^{-p(s-(1/2)-\eta+l)}$$

le deuxième terme est dans $H^{s-1/2+\varepsilon-0,l}_{\text{loc}}(\Gamma)$ [resp. $C^{\sigma+\varepsilon,l}_{\text{loc}}(\Gamma)$]. Enfin,

$$u_p=S_{p+1}u-S_p u,\qquad (\overline{u_p})=(\bar{u})_p+r_{p+1}(u)-r_p(u),$$

et

$$\Sigma S_{p-N}\bar{a}(\overline{u_p})=T_{\bar{a}}\bar{u}+\Sigma(S_{p-N}\bar{a})(r_{p+1}(u)-r_p(u)):$$

le second terme s'écrit, en sommant par parties, $\Sigma(\bar{a})_{p-N}r_{p+1}(u)+f$, $f\in\mathscr{S}$, et il appartient à $H^{s-1/2+\varepsilon-0,l}_{\text{loc}}(\Gamma)$ [resp. $C^{\sigma+\varepsilon,l}_{\text{loc}}(\Gamma)$]. ■

LEMME 4.6.3. — *Soit* $\chi=(\chi_1,\ldots,\chi_n)$ *un difféomorphisme de classe* $C^{\rho+1}_{\text{loc}}$ $(\rho>0)$, *tel que* $\chi(\Sigma_1)\subset\Sigma_1$. *Alors, pour* $u\in C^{\sigma}_{\text{loc}}(\sigma>1)$, *en notant* $\bar{\chi}=\chi|_{\Sigma_1}$,

$$(\chi^* u)|_{\Sigma_1}=(\bar{\chi})^*(u|_{\Sigma_1})+R\,u,\qquad R\,u\in C^{\rho+1+\varepsilon}_{\text{loc}},\quad \varepsilon=\inf(\sigma-1,\ \rho+1).$$

Preuve. — Avec les notations de 4.6.2, on a, d'après la formule de linéarisation 3.1 de [2],

$$u\circ\chi=\chi^* u+T_{u'\circ\chi}\chi+R_1 u,\qquad R_1 u\in C^{\rho+1+\varepsilon}_{\text{loc}},$$

et

$$\bar{u}\circ\bar{\chi}=(\bar{\chi})^*\bar{u}+T_{(\bar{u})'\circ\bar{\chi}}\bar{\chi}+R_2\bar{u},\qquad R_2\bar{u}\in C^{\rho+1+\varepsilon}_{\text{loc}}.$$

Or $(\overline{u\circ\chi})=\bar{u}\circ\bar{\chi}$, et $\overline{T_{u'\circ\chi}\chi}=T_{\overline{u'\circ\chi}}\bar{\chi}+R_3 u$, $R_3 u\in C^{\rho+1+\varepsilon}_{\text{loc}}$ d'après le lemme 4.6.2. Comme $\chi_1=0$, et $\overline{u'_{x_j}}\circ\bar{\chi}=(\overline{u'_{x_j}})\circ\bar{\chi}=(\bar{u})'_{x_j}\circ\bar{\chi}$ $(j\geqq 2)$, on obtient le résultat en soustrayant membre à membre. ■

4.7. FORMULE DE PARALINÉARISATION.

LEMME 4.7. — *Soit* Σ *vérifiant* $G(\rho, k)(\rho>2)$, *et* $s>n/2$ (*resp.* $\sigma>0$).

(i) *L'espace* $H^{s,l}_{\text{loc}}(\Sigma)$ [*resp.* $C^{\sigma,l}_{\text{loc}}(\Sigma)$] *est une algèbre.*

(ii) *Si* $F\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $u\in H^{s,l}_{\text{loc}}(\Sigma)$ [*resp.* $C^{\sigma,l}_{\text{loc}}(\Sigma)$], *on a* $F(u)=T_{F'(u)}u+R(u)$, *avec* $R(u)\in H^{2s-n/2-0,l}_{\text{loc}}(\Sigma)$ [*resp.* $C^{2\sigma-0,l}_{\text{loc}}(\Sigma)$].

Preuve. — (*a*) Montrons d'abord que si $u\in C^{\eta,l}_{\varphi}(\Sigma)$, pour $\eta>0$, et $\varphi\in C^{\infty}_0(\Omega)$, et si $F\in C^{\infty}_0(\mathbb{R})$, alors $F(u)\in C^{\eta,l}_{\varphi}(\Sigma)$.

La preuve copie celle de Bony [9] : on écrit $u=\Sigma u_j$, $u_j\in C^{\eta,l}_{j,\varphi}$, et $F(u)=\int e^{iu\xi}\hat{F}(\xi)\,d\xi$.

Pour chaque j, d'après le lemme 2.4.4 et sa preuve, on a $e^{iu_j\xi}\in C^{\eta,l}_{j,\varphi}$, et $\|e^{iu_j\xi}\|_{C^{\eta,l}_{j,\varphi}}\leqq C(1+|\xi|)^N$ pour un N. Grâce au lemme 3.3.3, $e^{iu\xi}=\prod_j e^{iu_j\xi}\in C^{\eta,l}_{\varphi}(\Sigma)$, et $\|e^{iu\xi}\|_{\eta,l}\leqq C(1+|\xi|)^{N'}$: on en déduit $F(u)\in C^{\eta,l}_{\varphi}(\Sigma)$.

(*b*) Supposons maintenant $u \in H_{\varphi}^{s, l}(\Sigma)$, $F \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, et $\dot{F}(0)=0$. En reprenant la preuve de Meyer [23], on obtient la formule (ii) avec ici

$$R(u)=\Sigma m_p u_p, \qquad m_p=\int_0^1 F'(S_p u+s u_p)\, ds - S_{p-N} F'(u).$$

Posons $r=s-(n/2)$, et prenons η, $0<\eta<r$: on a $u \in C_{\varphi}^{r, l}(\Sigma)$, et d'après les lemmes 4.4.1 et 4.3.3, il suffit d'obtenir l'estimation

$$\|\partial^\alpha m_p\|_{\eta, l} \leqq C\, 2^{p(|\alpha|+\eta)}\, 2^{-pr} \quad \text{pour tout } |\alpha|=q \text{ grand.}$$

Or

$$\|\partial^\alpha S_{p-N} F'(u)\|_{\eta, l} \leqq C\, 2^{p(q-r+\eta)}, \quad \text{car } F'(u) \in C_{\varphi}^{r, l}(\Sigma).$$

D'autre part, en notant $v=S_p u+s u_p$, on a

$$\partial^\alpha F'(v)=\sum_{2 \leqq m \leqq q+1} * F^{(m)}(v)\, \partial^{\gamma_1} v \ldots \partial^{\gamma_{m-1}} v, \qquad \text{avec} \quad \Sigma \gamma_j=\alpha :$$

comme d'habitude [2] [23], on remarque que

$$\|\partial^\gamma(S_p u+s u_p)\|_{\eta, l} \leqq C\, 2^{|\gamma| p(1-((r-\eta)/q))}.$$

Il reste à montrer que

$$\|F^{(m)}(v)\|_{\eta, l} \leqq C,$$

pour conclure $\|\partial^\alpha F'(v)\|_{\eta, l} \leqq C\, 2^{p(q-r+\eta)}$: cela résulte du fait que $\|v\|_{\eta, l} \leqq C$, et d'une simple inspection de la preuve de *a*).

On obtient finalement $R(u) \in H_{\varphi}^{s+r-\eta, l}(\Sigma)$, et la preuve s'achève de façon standard, comme dans Bony [8]. ■

Bien entendu, la formule de paralinéarisation est vraie en général dans les algèbres $H_{\mathrm{loc}}^{s, l}(\mathscr{V})$, $C_{\mathrm{loc}}^{\sigma, l}(\mathscr{V})$, avec la régularité optimale du reste : pour ne pas alourdir le texte, nous n'avons donné que l'énoncé 4.7, qui nous servira par la suite.

5. Configurations caractéristiques pour un symbole

Nous considérons dans ce paragraphe une configuration de surfaces Σ_j satisfaisant $G(\rho, k)$ $(\rho>2)$ (*cf.* § 4), chaque surface étant caractéristique pour un certain opérateur différentiel.

LEMME 5.1. — *Soit $\Omega \ni 0$, t une coordonnée dans $\mathbb{R}^n$, et $\Omega_{\pm}=\Omega \cap \{\pm t>0\}$. Soit Σ une configuration de m surfaces $(m \geqq 2)$ dans Ω, satisfaisant $G(\rho, k)$, avec $\Gamma \subset \bar{\Omega}_{+}$. Soit $p=p(x, v(x), \xi)$ un symbole réel différentiel homogène d'ordre m sur Ω, dont les coefficients sont des fonctions C^{∞} de (x, v) avec $v=(v_1, \ldots, v_N)$ une fonction réelle donnée sur Ω, $v \in C_{\mathrm{loc}}^{\rho+1}(\Omega)$.*

On suppose que les surfaces $\Sigma_j\,(1 \leqq j \leqq m)$ *sont caractéristiques pour* p, *et que les courbes caractéristiques pour* p *issues des normales aux* Σ_j *en des points de* Γ *sont transverses à* Γ.

On suppose de plus $v \in C^{\rho+1,\,k+1}_{\text{loc}}(\Sigma)$, Ω_+ *domaine d'influence de* Ω_- *pour* p.

(i) *Si les* Σ_j *sont de classe* $C^{\rho+k+2}_{\text{loc}}$ *dans* Ω_-, *alors* Γ *est de classe* $C^{\rho+k+2}_{\text{loc}}$, *et* Σ *satisfait* $G(\rho, k+1)$.

(ii) *Si* Σ_{j_1} *et* $\Sigma_{j_2}\,(j_1 \neq j_2)$ *sont de classe* $C^{\rho+k+2}_{\text{loc}}$ *dans* Ω_-, *alors* Γ *est de classe* $C^{\rho+k+2}_{\text{loc}}$, *et les* Σ_j *sont de classe* $C^{\rho+1,\,k+1}_{\text{loc}}(\Gamma)$ *dans le domaine d'influence de* Γ *(pour les caractéristiques sur* Σ_j*).*

(iii) *Si* $\Gamma \subset \{t=0\}$, *si* $\Gamma \in C^{\rho+k+2}_{\text{loc}}$ *et si* $\Omega_\pm$ *est domaine d'influence de* $\Omega \cap \{t=0\}$, *alors* Σ *satisfait* $G(\rho, k+1)$.

Preuve. — La preuve s'appuie sur deux énoncés intermédiaires.

(*a*) LEMME 1. — *Soit* χ *un difféomorphisme de classe* $C^{\rho+1+k}_{\text{loc}}(\Gamma)$, *et* $\Sigma' = \chi(\Sigma)$. *Soit* $w \in C^{\sigma,\,l}_{\text{loc}}(\Sigma')$, $0 < \sigma \leqq \rho$, $l \leqq k+1$: *alors* $w \circ \chi \in C^{\sigma,\,l}_{\text{loc}}(\Sigma)$.

Preuve. — Notons que Σ' vérifie $G(\rho, k)$, d'après le lemme 3.1.4, et que les algèbres $C^{\sigma,\,l}_{j,\,\text{loc}}$ sont définies à l'aide de vrais champs.

La propriété est vraie pour $l=0$, et supposons la vraie pour $l-1\,(1 \leqq l \leqq k+1)$: si Z est un champ tangent à Σ_j et Γ à coefficients $C^{\rho,\,k}_{\text{loc}}(\Gamma)$, on a, avec $w = \Sigma\, w_j$, $Z(w_j \circ \chi) = [(\chi * Z)\, w_j] \circ \chi$; comme $\chi * Z$ est à coefficients $C^{\rho,\,k}_{\text{loc}}(\Gamma')$, $(\chi * Z)\, w_j \in C^{\sigma,\,l-1}_{j,\,\text{loc}}$, et $Z(w_j \circ \chi) \in C^{\sigma,\,l-1}_{j,\,\text{loc}}$, d'où $w \circ \chi \in C^{\sigma,\,l}_{\text{loc}}(\Sigma)$. ■

(*b*) LEMME 2. — *Soit* $\omega \ni 0$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-1}$, $x=(t, y)$, *et* Γ *une hypersurface de classe* C^{l+1+k}_{loc} *contenue dans* $\bar{\omega}_+$. *Soit* Y *un champ réel de symbole* y, *à coefficients* $C^{\rho,\,l}_{\text{loc}}(\Gamma)$, *transverse à* Γ, *et* $a \in C^{\rho-1,\,l}_{\text{loc}}(\Gamma)\,(\rho > 2,\ l \leqq k)$.

Soit $u \in C^{\rho-1,\,l}_{\text{loc}}(\Gamma)$ *satisfaisant l'équation*

$$T_{y+a}\, u = \psi, \qquad \textit{avec} \quad \psi \in C^{\rho-1,\,l+1}_{\text{loc}}(\Gamma).$$

(i) *Si* $u \in C^{\rho+l}_{\text{loc}}$ *de* ω_-, *et si* ω_+ *est dans l'influence de* ω_- *pour* Y, *alors* $u \in C^{\rho-1,\,l+1}_{\text{loc}}(\Gamma)$.

(ii) *Si* $u|_\Gamma$ *est de classe* $C^{\rho+l}_{\text{loc}}$, $u \in C^{\rho-1,\,l+1}_{\text{loc}}(\Gamma)$ *dans l'ouvert d'influence de* Γ *pour* Y.

Preuve. — Nous montrons le résultat par récurrence sur l.

(i) Soit $l=0$, et z un symbole de champ tangent à Γ, à coefficients $C^{\rho+k}_{\text{loc}}$. On a

$$T_z\, T_{y+a}\, u = T_{y+a}\, T_z\, u + T_{z\,\#(y+a)-(y+a)\,\#z}\, u + R_1, \qquad \text{avec} \quad R_1 \in C^{2\rho-3}_{\text{loc}},$$

d'après le calcul symbolique de Bony.

D'autre part, $p_1 = z \# y - y \# z$ est à coefficients $C^{\rho-1}_{\text{loc}}$, et $p_1 = \lambda y + \Sigma\, \alpha_q z_q$ pour un système convenable de champs Z_q engendrant les champs tangents à Γ, avec λ, $\alpha_q \in C^{\rho-1}_{\text{loc}}$. Donc

$$T_{p_1}\, u = T_\lambda\, T_y\, u + \Sigma\, T_{\alpha_q}\, T_{z_q}\, u + R_2, \qquad R_2 \in C^{2\rho-3}_{\text{loc}}.$$

On en déduit, en prenant pour z l'un des z_q,

$$T_{y+a}\, T_z\, u + \Sigma\, T_{\alpha_q}\, T_{z_q}\, u \in C^{\rho-1}_{\text{loc}} \qquad \text{si} \quad 2\rho-3 \geqq \rho-1, \text{ i.e. } \rho \geqq 2.$$

Dans le cas (i), $T_{z_q} u \in C^{\rho-1}_{loc}$ de ω_-, et le résultat de propagation des singularités Höldériennes pour les équations du premier ordre de Bahouri et Dehman [6] implique $T_{z_q} u \in C^{\rho-1}_{loc}$, soit $u \in C^{\rho-1,1}_{loc}(\Gamma)$.

Dans le cas (ii), comme $T_{z_q} u - Z_q u \in C^{\rho+k}_{loc}$, $T_{z_q} u|_\Gamma \in C^{\rho-1}_{loc}$, et le résultat mentionné donne la conclusion.

(ii) Supposons le lemme vrai pour $l-1\,(1 \leqq l \leqq k)$, et montrons le pour l. Avec $z=z_q$, on a maintenant $R_1 \in C^{2\rho-3,l}_{loc}(\Gamma)$, d'après 2.1.2. D'autre part, p_1 est à coefficients $C^{\rho,l-1}_{loc}(\Gamma)$, et $p_1 = \lambda y + \Sigma \alpha_q z_q$, avec λ, $\alpha_q \in C^{\rho,l-1}_{loc}(\Gamma)$: on en déduit $R_2 \in C^{2\rho-3,l}_{loc}(\Gamma) \subset C^{\rho-1,l}_{loc}(\Gamma)$, et finalement $T_{y+a} T_z u + \sum T_{\alpha_q} T_{z_q} u \in C^{\rho-1,l}_{loc}(\Gamma)$.

Par récurrence, on en déduit $T_{z_q} u \in C^{\rho-1,l}_{loc}(\Gamma)$, d'où le résultat. ■

(*c*) Notons $x=(y_1, t, y')$, $z=(t, y')$. Fixons j, et supposons Σ_j transverse à l'axe des y_1 : F étant une équation de Σ_j de classe $C^{\rho+1,k}_{loc}(\Gamma)$, soit $\chi : (y_1, t, y') \to (F, t, y')$ un difféomorphisme de classe $C^{\rho+1,k}_{loc}(\Gamma)$ appliquant Σ_j sur $\{y_1=0\}$, Γ sur Γ', Σ sur Σ'. En prenant $\varphi(t, y') = (\chi^{-1})_1 (0, t, y')$, on obtient un paramétrage $y_1 = \varphi(z)$ ($z \in \omega$, projection de $\Sigma_j \cap \Omega$) de Σ_j, et $\varphi \in C^{\rho+1,k}_{loc}(\Gamma')$ à cause des lemmes 3.1.4 et 4.6.1. Comme Σ_j est caractéristique, on a

$$p(\varphi(z), z, v(\varphi(z), z), -1, \varphi_z) = 0.$$

En dérivant cette équation par rapport à z_j et à z_k, on trouve

$$p'_\zeta \varphi_{zz_jz_k} + p''_{\zeta\zeta} \varphi_{zz_k} \varphi_{zz_j} + \sum_{p,q} A_{p,q} \varphi_{z_pz_q} + R_1 = 0,$$

avec

$$\begin{aligned}\sum_{p,q} A_{p,q} \varphi_{z_pz_q} = {} & \varphi_{z_j} p_{y_1\zeta} \varphi_{zz_k} + p_{y_1} \varphi_{z_jz_k} + p_{z_j\zeta} \varphi_{zz_k} \\ & + p_{v\zeta} (v_{y_1} \varphi_{z_j} + v_z) \varphi_{zz_k} + p'_v v_{y_1} \varphi_{z_jz_k} \\ & + [p_{\zeta y_1} \varphi_{z_k} + p_{\zeta z_k} + p_{\zeta v} (v_{y_1} \varphi_{z_k} + v_{z_k})] \varphi_{zz_j}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}R_1 = {} & \varphi_{z_j} (p_{y_1y_1} \varphi_{z_k} + p_{y_1z_k} + p_{y_1v} (v_{y_1} \varphi_{z_k} + v_{z_k})) + p_{y_1z_j} \varphi_{z_k} + p_{z_jz_k} \\ & + p_{z_jv} (v_{y_1} \varphi_{z_k} + v_{z_k}) + (p_{vy_1} \varphi_{z_k} + p_{vz_k} \\ & + p_{vv} (v_{y_1} \varphi_{zk} + v_{z_k})) (v_{y_1} \varphi_{z_j} + v_{z_j}) + p'_v (\partial_{z_k} v_{y_1} \varphi_{z_j} + \partial_{z_k} v_{z_j}).\end{aligned}$$

Comme $\varphi \in C^{\rho+1,k}_{loc}(\Gamma')$, $\varphi_{z_j} \in C^{\rho,k}_{loc}(\Gamma')$, et $v(\varphi(z), z) \in C^{\rho,k+1}_{loc}(\Gamma')$ d'après (*a*) et le lemme 4.6.1, car $v(\varphi(z), z) = (v \circ \chi^{-1})|_{y_1=0}$; de plus,

$$(D^\alpha p)(\varphi(z), z, v(\varphi(z), z)), -1, \varphi_z) \in C^{\rho,k}_{loc}(\Gamma')$$

grâce au lemme 2.4.4. Comme $v \in C^{\rho+1,k+1}_{loc}(\Sigma)$, v_{y_1} ou $v_{z_j} \in C^{\rho,k+1}_{loc}(\Sigma)$, et $v_{y_1}(\varphi(z), z)$, $v_{z_j}(\varphi(z), z) \in C^{\rho,k+1}_{loc}(\Gamma')$: cela montre que $A_{p,q} \in C^{\rho,k}_{loc}(\Gamma')$ et $R_1 \in C^{\rho-1,k+1}_{loc}(\Gamma')$.

(*d*) Paralinéarisons l'équation obtenue en (*c*) : on obtient

$$T_{p'_\zeta} \varphi_{zz_jz_k} + T_{p_{\zeta\zeta}\varphi_{zz_k}} \varphi_{zz_j} + T_{p_{\zeta\zeta}\varphi_{zz_j}} \varphi_{zz_k} + \Sigma T_{A_{p,q}} \varphi_{z_pz_q} = R_2,$$

avec $R_2 \in C_{loc}^{\rho-1, k+1}(\Gamma')$, si $\rho \geqq 2$ (on utilise ici la variante suivante, facile, du lemme 4.7 (ii) : si $a \in C_{loc}^{\alpha, l}(\Gamma')$ et $b \in C_{loc}^{\beta, l}(\Gamma')$, $ab = T_a b + T_b a + R$ avec $R \in C_{loc}^{\alpha+\beta, l}(\Gamma')$).

Pour tout j dans le cas (i), et pour $j = j_1$ ou $j = j_2$ dans le cas (ii), on peut appliquer le lemme 2 de propagation du point (*b*), (i), Y étant le champ $p'_\zeta . \partial_z$ qui est la projection sur $x_1 = 0$ de la projection sur la base de H_p pris aux points de $N^* \Sigma_j$: les hypothèses de domaines d'influence et de transversalité sont des conséquences des hypothèses correspondantes sur H_p. On obtient

$$\varphi_{z_j z_k} \in C_{loc}^{\rho-1, k+1}(\Gamma'), \qquad \text{soit} \quad \varphi \in C_{loc}^{\rho+1, k+1}(\Gamma').$$

(*e*) Nous montrons que si $\varphi \in C_{loc}^{\rho+1, k+1}(\Gamma')$, Σ_j peut être définie par une équation $F = 0$, $F \in C_{loc}^{\rho+1, k+1}(\Gamma)$: il suffit de montrer qu'il existe $G \in C_{loc}^{\rho+1, k+1}(\Gamma')$, $G|_{y_1=0} = \varphi$, $G'_{y_1} \neq 0$. En effet :

(i) L'application $\chi_0 : (y_1, t, y') \to (G, t, y')$ est alors un difféomorphisme de classe $C_{loc}^{\rho+1, k+1}(\Gamma')$ qui applique $\{y_1 = 0\}$ sur Σ_j, Γ' sur Γ.

(ii) L'inverse χ_0^{-1} est de classe $C_{loc}^{\rho+1, k+1}(\Gamma)$: il suffit d'écrire $\chi_0(\chi_0^{-1}(x)) = x$, $\chi'_0(\chi_0^{-1}(x))(\chi_0^{-1})'(x) = id$, et le lemme 3.1.4 implique $\chi'_0(\chi_0^{-1}(x)) \in C_{loc}^{\rho, k+1}(\Gamma)$, d'où $(\chi_0^{-1})' \in C_{loc}^{\rho, k+1}(\Gamma)$.

(iii) On peut prendre $F = (\chi_0^{-1})_1$ comme équation de Σ_j.

Pour montrer l'existence de G, on peut se ramener au cas où $\Gamma' = \{t = 0\}$. En effet, soit $\chi_1 : (t, y') \to (T, Y')$ un difféomorphisme du plan $\{y_1 = 0\}$, de classe $C_{loc}^{\rho+1+k}$, appliquant Γ' sur $\{T = 0\} = \Gamma''$: $\varphi_1 = (\chi_1^{-1})^* \varphi \in C_{loc}^{\rho+1, k+1}(\Gamma'')$ d'après le lemme 2.4.3; grâce au lemme 3.1.2, il existe $G_1 \in C_{loc}^{\rho+1, k+1}(\Gamma'')$, $G_1|_{y_1=0} = \varphi_1$; considérons $G_2 = \tilde{\chi}_1^* G_1$, où $\tilde{\chi}_1 : (y_1, t, y') \to (y_1, \chi_1(t, y'))$: $G_2 \in C_{loc}^{\rho+1, k+1}(\Gamma')$, et, d'après le lemme 4.6.3, $G_2|_{y_1=0} = \chi_1^* \varphi_1 + R_1$, $R_1 \in C_{loc}^{2\rho+k+1}$; d'autre part, $\chi_1^* \varphi_1 = \varphi + R_2$, $R_2 \in C_{loc}^{2\rho+k+1}$, donc $G = G_2 - R_1 - R_2$ convient.

(*f*) Soient maintenant Σ_{j_1} et Σ_{j_2} définies par des équations F et G de classe $C_{loc}^{\rho+1, k+1}(\Gamma)$. Supposons par exemple (F'_{x_1}, F'_{x_2}) non colinéaire à (G'_{x_1}, G'_{x_2}) : le difféomorphisme $\chi : (x_1, x_2, x') \to (F, G, x')$ applique Γ sur $\Gamma' = \{x_1 = x_2 = 0\}$. Comme $\chi \in C_{loc}^{\rho+1, k+1}(\Gamma)$, $\chi^{-1} \in C_{loc}^{\rho+1, k+1}(\Gamma')$ d'après (*e*), (ii), et donc $\chi^{-1}|_{\Gamma'} \in C_{loc}^{\rho+k+2}$: c'est un paramétrage de Γ, donc $\Gamma \in C_{loc}^{\rho+k+2}$, et la preuve est complète dans le cas (i).

(*g*) Dans le cas (ii), soit j différent de j_1 et j_2, et φ le paramétrage de Σ_j. Comme Γ est de classe $C_{loc}^{\rho+k+2}$, Γ' aussi, et $\varphi|_{\Gamma'} \in C_{loc}^{\rho+k+2}$: l'équation vérifiée par φ, pour laquelle Γ' n'est pas caractéristique, implique alors que $\varphi'|_{\Gamma'} \in C_{loc}^{\rho+k+1}$, $\varphi''|_{\Gamma'} \in C_{loc}^{\rho+k}$. Le lemme 2, (ii) montre qu'alors $\varphi'' \in C_{loc}^{\rho-1, k+1}(\Gamma')$ dans le domaine d'influence de Γ', ce qui prouve (ii).

(*h*) Dans le cas (iii), on sait *a priori* que $\Gamma \in C_{loc}^{\rho+k+2}$, et le raisonnement est identique à celui de (*g*). ■

6. Propagation des singularités conormales

6.1. PROPAGATION DES SINGULARITÉS I (INFLUENCE DU PASSÉ). — On considère la situation suivante :

Soit $\Omega \ni 0$, t une coordonnée, $\Omega_\pm = \Omega \cap \{\pm t > 0\}$. Soit Σ une configuration de m surfaces satisfaisant $G(\rho, k)$ ($\rho > 2$, $k \geqq 0$), et p un symbole différentiel réel homogène d'ordre m, à coefficients $C^{\rho, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$, $l \leqq k$. On suppose que Ω_+ est un domaine d'influence de Ω_- pour p, et que les surfaces Σ_j sont caractéristiques pour p.

LEMME 6.1. — *Supposons* $\rho > 3$, *et soit* $u \in H^{s+m, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$ *un vecteur vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Localement dans* Ω_-, $u \in H^{s+m, l+1}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$.

(ii) $L u = T_{pid + p_{m-1}} u \in H^{s+1, l+1}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$, *avec* p_{m-1} *un symbole* (*matriciel*) *pseudo-différentiel homogène d'ordre* $m-1$, *à coefficients de classe* $C^{\rho-2, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$.

Alors $u \in H^{s+m, l+1}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$.

Preuve. — (*a*) Montrons le lemme suivant :

LEMME 1. — *Si a est un symbole homogène d'ordre* α, *à coefficients* $C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$ $(0 < \sigma \leqq \rho)$, *nul sur* $\bigcup_i N^* \Sigma_i$, *il existe un symbole* λ, *homogène de degré* $\alpha - m$, *à coefficients* $C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, *tel que* $\alpha - \lambda p$ *soit nul sur* $N^* \Gamma \cup N^* \Sigma_1 \cup \ldots \cup N^* \Sigma_m$.

Preuve. — Considérons a au voisinage d'un point de $N^* \Sigma_i \cap N^* \Gamma$, et redressons Σ_i et Γ par un difféomorphisme χ de classe $C^{\rho+1, k}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$ en $\Gamma' = \{ x_1 = x_2 = 0 \}$ et $\Sigma'_i = \{ x_1 = 0 \}$. Notons $\bar{a}$ et $\bar{p}$ les symboles transformés, à coefficients $C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma')$ et $C^{\rho, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma')$ respectivement [*cf.* lemme 5 (*a*)]. Comme la trace sur Γ' d'une fonction de $C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma')$ appartient à $C^{\sigma+l}_{\mathrm{loc}}$, les symboles $\bar{a}(0, 0, x', \xi_1, \xi_2, 0)$ et $\bar{p}(0, 0, x', \xi_1, \xi_2, 0)$, qui s'annulent pour $\xi_2 = 0$, s'écrivent

$$\bar{a}(0, 0, x', \xi_1, \xi_2, 0) = \tilde{a} \xi_2, \qquad \bar{p}(0, 0, x', \xi_1, \xi_2, 0) = \tilde{p} \xi_2,$$

avec $\tilde{a}$, $\tilde{p}$ à coefficients $C^{\sigma+l}_{\mathrm{loc}}$ et $C^{\rho+l}_{\mathrm{loc}}$ respectivement.

D'autre part, comme $\bar{p}(0, 0, x', \xi_1, \xi_2, 0)$ possède déjà m zéros réels distincts dans le plan des (ξ_1, ξ_2), $(1, 0)$ est un zéro simple et $\tilde{p} \neq 0$ près de $(1, 0)$. En choisissant $\tilde{\lambda} = \tilde{a} / \tilde{p}$, qui est bien défini au voisinage du point considéré, et en étendant $\tilde{\lambda}$ en $\bar{\lambda}$ pour $\xi' \neq 0$, on obtient que $\bar{a} - \bar{\lambda} \bar{p} = 0$ sur $N^* \Gamma$.

Au voisinage de points n'appartenant pas à $N^* \Sigma_i \cap N^* \Gamma$ pour un i, l'existence de λ est triviale.

(*b*) Nous aurons également besoin du lemme de division suivant, qui étend le lemme 3.2.1.

LEMME 2. — *Soit* Σ *vérifiant* $G(\rho, k)$. *Pour tout* j, *il existe une famille* $Z^{(j)}_q$ *de champs tangents à* Γ *et à* Σ_j, *à coefficients* $C^{\rho, k}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, *tels que pour tout symbole* m *homogène de* $\partial^0 \mu$, *à coefficients* $C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$, *nul sur* $N^* \Gamma \cup N^* \Sigma_j$, *on ait* $m = \Sigma \alpha_q z^{(j)}_q$, *avec* α_q *de degré* $\mu - 1$, *à coefficients dans* $C^{\sigma-1, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$ $(1 < \sigma \leqq \rho,\ l \leqq k+1)$.

Preuve. — Grâce au lemme 5 (*a*), on peut se ramener au cas $\Gamma = \{ x_1 = x_2 = 0 \}$, $\Sigma_j = \{ x_1 = 0 \}$, et les champs $Z^{(j)}_q$ que l'on considère sont alors $x_1 \partial_1$, $x_1 \partial_2$, $x_2 \partial_2$, $\partial_{x'}$. Il suffit de montrer ici, en suivant la preuve du lemme 3.2.1, les deux points suivants :

(i) si $a \in C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$, $a = 0$ sur $x_1 = 0$ (resp. $x_2 = 0$), alors $a = x_1 a_1$ avec $a_1 \in C^{\sigma-1, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$ [resp. $a = x_2 a_2$, $a_2 \in C^{\sigma-1, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$].

(ii) Si $a \in C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$, avec $a = 0$ sur Γ, il existe un $\tilde{a} \in C^{\sigma, l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$, $\tilde{a} = 0$ sur $x_2 = 0$, tel que $\tilde{a} = a$ sur $x_1 = 0$.

Soit $a=\Sigma a_j$, $a_j \in C^{\sigma,l}_{j,\,\mathrm{loc}}$: comme $a_j|_{x_1=0} \in C^{\sigma,l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$ (lemme 4.6.1), il existe, d'après le lemme 3.1.2, $\tilde{a}_j \in C^{\sigma,l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, avec $\tilde{a}_j - a_j = 0$ sur $x_1=0$. Donc $a=a_1-\tilde{a}_1+\ldots+a_{m-1}-\tilde{a}_{m-1}+a_m+(\tilde{a}_1+\ldots+\tilde{a}_{m-1})=\Sigma b_j$, avec $b_j \in C^{\sigma,l}_{j,\,\mathrm{loc}}$, et $b_j=0$ sur $x_1=0$.

Pour diviser b_j dans $C^{\sigma,l}_{j,\,\mathrm{loc}}$, on peut toujours supposer de plus $\Sigma_j=\{x_2=0\}$ (si $j \geqq 2$) : posons $b_j=x_1 c_j$; on a

$$x_1 \partial_1 b_j = b_j + x_1 (x_1 \partial_1 c_j), \qquad x_2 \partial_1 b_j = x_2 c_j + x_1 (x_2 \partial_1 c_j),$$
$$x_2 \partial_2 b_j = x_1 (x_2 \partial_2 c_j), \qquad \partial_{x'} b_j = x_1 \partial_{x'} c_j, \qquad \text{d'où} \quad c_j \in C^{\sigma-1,l}_{j,\,\mathrm{loc}}$$

comme au lemme 3.1.3 (i). Si $j=1$, on vérifie de même que $c_1 \in C^{\sigma-1,l}_{1,\,\mathrm{loc}}$, ce qui prouve (i).

Le point (ii) résulte des lemmes 4.6.1 et 3.1.2 (ii).

(*c*) Soient χ_i $(1 \leqq i \leqq m)$ des symboles classiques, homogènes de degré 0, tels que $\chi_i=0$ au voisinage des $N^*\Sigma_j$ $(j \neq i)$, et $\Sigma \chi_i = 1$.

Posons $m_{i,q}=\chi_i z^{(i)}_q$: c'est un symbole à coefficients $C^{\rho,k}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, nul sur $N^*\Gamma \cup N^*\Sigma_1 \cup \ldots \cup N^*\Sigma_m$, et tout symbole m de ce type s'écrit $m=\Sigma \alpha_{i,q} m_{i,q}$, $\alpha_{i,q}$ à coefficients $C^{\rho-1,k}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$.

Sous les hypothèses du lemme, avec $m=m_{i,q}$, on a

$$T_m T_p = T_p T_m + T_{m\# p - p\# m} + R_1, \qquad R_1 : \ H^{s',l'}_{\mathrm{loc}} \to H^{s'-m-1+\rho-0,\,l'}_{\mathrm{loc}},$$

et

$$T_m T_{p_{m-1}} - T_{p_{m-1}} T_m = T_{r_1} + R_2, \qquad R_2 : \ H^{s',l'}_{\mathrm{loc}} \to H^{s'-m+\rho-2-0,\,l'}_{\mathrm{loc}},$$

où

$$r_1 = m \# p_{m-1} - p_{m-1} \# m \in \Sigma^{m-1}(C^{\rho-3,l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)).$$

Comme

$$m \# p - p \# m = \frac{1}{i}\{m, p\} + r_2, \qquad r_2 \in \Sigma^{m-1}(C^{\rho-2,l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)),$$

et

$$\{m, p\} = \lambda p + \Sigma \alpha_{i,q} m_{i,q},$$
$$\lambda \in \Sigma^0(C^{\rho-1,l}_{\mathrm{loc}}(\Gamma)), \qquad \alpha_{i,q} \in \Sigma^{m-1}(C^{\rho-2,l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)),$$

d'après (*a*) et (*b*), on a

$$T_{\{m,p\}} = T_{\lambda p} + \Sigma T_{\alpha_{i,q} m_{i,q}} = T_\lambda T_p + \Sigma T_{\alpha_{i,q}} T_{m_{i,q}} + T_{r_3} + R_3,$$

avec $r_3 \in \Sigma^{m-1}(C^{\rho-2,l}_{\mathrm{loc}}(\Sigma))$, et $R_3 : H^{s',l'}_{\mathrm{loc}} \to H^{s'-m+\rho-2-0,\,l'}_{\mathrm{loc}}$.

Finalement,

$$T_m T_{pid+p_{m-1}} = T_{pid+p_{m-1}} T_m - i \Sigma T_{\alpha_{i,q} id} T_{m_{i,q}} - i T_\lambda T_{pid} + T_r + R,$$

avec $r \in \Sigma^{m-1}(C_{\text{loc}}^{\rho-3,l}(\Sigma))$, $R : H_{\text{loc}}^{s',l'} \to H_{\text{loc}}^{s'-m+\rho-2-0,l'}$.

(*d*) Sous les hypothèses du lemme, on déduit de (*c*) que

$$T_{pid+p_{m-1}} T_m u - i \sum T_{\alpha_{i,q}id} T_{m_{i,q}} u \in H_{\text{loc}}^{s+1,l}(\Sigma).$$

Si $l=0$, le théorème de propagation des singularités de Bony [8], appliqué au système ci-dessus (m décrivant les $m_{i,q}$), montre que $T_{m_{i,q}} u \in H_{\text{loc}}^{s+m}(\Omega)$, soit $u \in H_{\text{loc}}^{s+m,1}(\Sigma)$.

Si $l \geqq 1$, on conclut par récurrence, en supposant le lemme vrai pour $l-1$. ■

6.2. Propagation des singularités II (problème de Cauchy). — On considère la situation suivante :

Soit $\Omega \ni 0$, t une coordonnée, $\Omega_{\pm} = \Omega \cap \{\pm t > 0\}$. Soit Σ une configuration de m surfaces satisfaisant $G(\rho, k)$ ($\rho > 2$, $k \geqq 0$), pour laquelle Γ est C^∞, $\Gamma \subset \{t=0\}$, et p un symbole différentiel réel homogène d'ordre m, à coefficients $C_{\text{loc}}^{\rho,l}(\Sigma)$, $l \leqq k$. On suppose que Ω_+ et Ω_- sous domaines d'influence de $\Omega \cap \{t=0\}$ pour p, que p est strictement hyperbolique par rapport aux surfaces $t=\text{Cte}$, et que les Σ_j sont caractéristiques pour p.

Lemme 6.2. — *Supposons* $\rho > 4$, *et soit* $u \in H_{\text{loc}}^{s+m,l}(\Sigma)$ *un vecteur vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $D_t^j u|_{t=0} \in H_{\text{loc}}^{s+m-j,l+1}(\Gamma)$, $j=0, \ldots, m-1$.

(ii) $Lu \equiv T_{pid+p_{m-1}} u \in H_{\text{loc}}^{s+1,l+1}(\Sigma)$, $L^2 u \in H_{\text{loc}}^{s-m+2,l+1}(\Sigma)$, *où* p_{m-1} *est comme au lemme* 6.1.

Alors $u \in H_{\text{loc}}^{s+m,l+1}(\Sigma)$.

Preuve. — Elle suit l'argumentation de Bony [13].

(*a*) Montrons d'abord un lemme de traces.

Lemme 1. — *Soit* $v \in H_{\text{loc}}^{s+m,l}(\Sigma)$, $T_p v \in H_{\text{loc}}^{s+1,l}(\Sigma)$.
Alors $D_t^j v|_{t=0} \in H_{\text{loc}}^{s+m-j,l}(\Gamma)$, $j=0, \ldots, m-1$.

Preuve. — (i) Pour $l=0$, le résultat est classique (*cf.* par exemple [13], [28]).

(ii) Montrons le lemme par récurrence sur l : soit $m'(x, \xi)$ un symbole classique homogène d'ordre 1, nul sur $N^*\Gamma$: il existe une extension $m(t, x, \xi)$ à coefficients $C_{\text{loc}}^{\rho,k}(\Gamma)$, telle que $m=0$ sur $\bigcup_j N^*\Sigma_j \cup N^*\Gamma$.

D'autre part, si χ est un symbole classique homogène d'ordre 0, nul près de $\xi=0$, égal à 1 hors d'un voisinage de $\xi=0$, on a $(1-\chi)v \in H_{\text{loc}}^{s+m+1,l}(\Sigma)$, car p est elliptique dans les directions $(0, \pm 1)$: il suffit alors de prouver le lemme pour χv, en notant que $T_p \chi v \in H_{\text{loc}}^{s+1,l}(\Sigma)$. On écrit

$$T_p T_m \chi v = T_m T_p \chi v + \frac{1}{i} T_{\{p,m\}} \chi v + R_1, \qquad R_1 \in H_{\text{loc}}^{s+1,l}(\Sigma),$$

d'où, comme au lemme 6.1 (*c*), $T_p T_m \chi v \in H_{\text{loc}}^{s+1,l-1}(\Sigma)$.

Comme $D_t^j T_m \chi v = \sum_{0 \leq \nu \leq [\rho]} T_{m_\nu} D_t^{j-\nu} \chi v + R_2$, avec $R_2 \in H_{\text{loc}}^{s+m-j-1+\rho,l}(\Sigma)$, où $m_\nu = m_\nu(t, x, \xi)$ est homogène de degré 1 à coefficients $C_{\text{loc}}^{\rho-\nu,k}(\Gamma)$, $m_0 = m$, on a, grâce au lemme 4.6.2 et à l'hypothèse de récurrence,

$$D_t^j T_m \chi v|_{t=0} = T_{m'}(D_t^j \chi v)|_{t=0} + R_3, \qquad R_3 \in H_{\text{loc}}^{s+m-j,\, l-1}(\Gamma);$$

on en déduit $T_{m'}(D_t^j \chi v)|_{t=0} \in H_{\text{loc}}^{s+m-j,\, l-1}(\Gamma)$, soit $D_t^j v|_{t=0} \in H_{\text{loc}}^{s+m-j,\, l}(\Gamma)$. ■

(*b*) Nous aurons également besoin du lemme de division suivant.

LEMME 2. — *Soit a un symbole homogène d'ordre α, à coefficients $C_{\text{loc}}^{\rho,\, l}(\Sigma)$. Il existe b homogène d'ordre $\alpha - m$, et $a' = a'(t, x, \xi)$, à coefficients $C_{\text{loc}}^{\rho,\, l}(\Sigma)$, tels que $a = bp + a'$.*

Preuve. — En chaque point, soit p est elliptique, soit il s'écrit $p = (\tau - \lambda_j(t, x, \xi))\, q_j(t, x, \tau, \xi)$, $q_j \neq 0$, λ_j réel : on a alors

$$a = (\tau - \lambda_j)\, a^j + a(t, x, \lambda_j, \xi) = b^j p + a(t, x, \lambda_j, \xi). \quad ■$$

(*c*) Soit $m = m_{i,\, q}$, comme au lemme 6.1 (*c*) : il existe des symboles q, p'_0, p_{-1}, m', d'ordre $1-m$, 0, -1, 1, p'_0 et m' tangentiels, tels que

$$m\, id = q \# (p\, id) + q \# p_{m-1} + p'_0 + p_{-1} + m'\, id.$$

En effet, avec $q = a_0\, id + a_1$ (a_0 d'ordre $1-m$, a_1 d'ordre $-m$), il suffit d'avoir $m = a_0 p + m'$, $(\partial_\xi a_0 . D_x p)\, id + a_1 p + a_0 p_{m-1} = p'_0$: le lemme 2 de (*b*) fournit a_0 et m', puis a_1 et p'_0. On observe de plus que $(x, 0, \xi, \lambda_j(x, 0, \xi)) \in N^* \Sigma_j$ lorsque $(x, \xi) \in N^* \Gamma$, donc $m'(0, x, \xi)$ s'annule sur $N^* \Gamma$.

(*d*) Si χ est un symbole classique d'ordre 0 nul près de $\xi = 0$, égal à 1 hors d'un voisinage de $\xi = 0$, $(1-\chi)\, u \in H_{\text{loc}}^{s+m+2,\, l+1}(\Sigma)$, et

$$L \chi u \in H_{\text{loc}}^{s+1,\, l+1}(\Sigma), \qquad L^2 \chi u \in H_{\text{loc}}^{s+2-m,\, l+1}(\Sigma).$$

Avec $m = m_{i,\, q}$, on veut montrer $D_t^j T_m u|_{t=0} \in H_{\text{loc}}^{s+m-j,\, l}(\Gamma)$, et il suffit de le prouver pour χu : or

$$T_m \chi u = T_q T_{p + p_{m-1}} \chi u + T_{p'_0} \chi u + T_{p_{-1}} \chi u + T_{m'} \chi u + R_1,$$

avec $R_1 \in H_{\text{loc}}^{s+m+1,\, l}(\Sigma)$, donc

$$D_t^j T_m \chi u = D_t^j T_q L \chi u + T_{p'_0} D_t^j \chi u + [D_t^j, T_{p'_0}] \chi u + D_t^j T_{p_{-1}} \chi u$$
$$+ T_{m'} D_t^j \chi u + [D_t^j, T_{m'}] \chi u + D_t^j R_1.$$

Comme en (*a*), $[D_t^j, T_{p'_0}] = \sum_{1 \leq \rho - 2} T_{p'_{0,\nu}} D_t^{j-\nu} + R_2$, $p'_{0,\nu}$ tangentiel d'ordre 0, $[D_t^j, T_{m'}] = \sum_{1 \leq \nu \leq p} T_{m'_\nu} D_t^{j-\nu} + R_3$, m'_ν tangentiel d'ordre 1, R_2 et R_3 étant respectivement $-j + \rho - 2$ et $-j + \rho - 1$ régularisant. Grâce au lemme 4.6.2, on obtient

$$T_{p'_0} D_t^j \chi u|_{t=0} - T_{p'_0(0, x, \xi)} (D_t^j \chi u)|_{t=0} \in H_{\text{loc}}^{s+m-j-1/2+\rho-2-0,\, l}(\Gamma),$$
$$T_{p'_{0,\nu}} D_t^{j-\nu} \chi u|_{t=0} - T_{p'_{0,\nu}(0, x, \xi)} (D_t^{j-\nu} \chi u)|_{t=0} \in H_{\text{loc}}^{s+m-j-1/2+\rho-2-0,\, l}(\Gamma),$$
$$T_{m'} D_t^j \chi u|_{t=0} - T_{m'(0, x, \xi)} (D_t^j \chi u)|_{t=0} \in H_{\text{loc}}^{s+m-j-1/2+\rho-0,\, l}(\Gamma),$$
$$T_{m'_\nu} D_t^{j-\nu} \chi u|_{t=0} - T_{m'_\nu(0, x, \xi)} (D_t^{j-\nu} \chi u)|_{t=0} \in H_{\text{loc}}^{s+m-j-1/2+\rho-0,\, l}(\Gamma),$$

et, par ailleurs, $D_t^j R_1$ et $D_t^j T_{p-1} \chi u \in H_{loc}^{s+m+1-j,\,l}(\Sigma)$.

On trouve donc

$$D_t^j T_m \chi u|_{t=0} = D_t^j T_q L \chi u|_{t=0} + T_{m'(0,\,x,\,\xi)}(D_t^j \chi u)|_{t=0} + R_4,$$

avec $R_4 \in H_{loc}^{s+m-j,\,l}(\Gamma)$.

Comme $m'(0, x, \xi)$ est nul sur $N^*\Gamma$, $T_{m'(0,\,x,\,\xi)}(D_t^j \chi u)|_{t=0} \in H_{loc}^{s+m-j,\,l}(\Gamma)$. Enfin,

$$LT_q L \chi u = [L, T_q] L \chi u + T_q L^2 \chi u \in H_{loc}^{s+1,\,l+1}(\Sigma),$$

et le lemme 1 de (*a*) implique $D_t^j T_q L \chi u|_{t=0} \in H_{loc}^{s+m-j,\,l}(\Gamma)$, d'où l'assertion sur les traces de $T_m u$.

(*e*) Pour démontrer le lemme 6.2 par récurrence, il faut vérifier que $L' T_m u \in H_{loc}^{s+1,\,l}(\Sigma)$, $L'^2 T_m u \in H_{loc}^{s-m+2,\,l}(\Sigma)$, L' étant un opérateur (matriciel) de même structure que L, avec $l-1$ remplaçant l.

Or, d'après le lemme 6.1 (*c*),

$$T_m L = LT_m - i \Sigma T_{\alpha_{i,\,q} id} T_{m_{i,\,q}} + T_a L + T_r + R,$$

où

$$r \in \Sigma^{m-1}(C_{loc}^{\rho-3,\,l}(\Sigma)), \qquad a \in \Sigma^0(C_{loc}^{\rho-1,\,l}(\Sigma)), \qquad \alpha_{i,\,q} \in \Sigma^{m-1}(C_{loc}^{\rho-2,\,l}(\Sigma))$$

et

$$R : H_{loc}^{s',\,l'} \to H_{loc}^{s'-m+\rho-2-0,\,l'}.$$

Si l'on note simplement Tu le vecteur dont les composantes sont celles des $T_{m_{i,\,q}} u$ mises à la suite, on trouve ainsi

$$TL = L'T + T_a L + T_r + R,$$

où a, r et R sont des matrices (D, d) (d, D nombres de composantes de u, Tu), et $L' = T_{pid + \alpha_{m-1}}$. On en déduit

$$\begin{aligned} L'^2 T = TL^2 - T_a L^2 - T_r L - RL - T_{\alpha_{m-1}} T_a L - [T_p, T_a] L + T_a T_{p_{m-1}} L \\ - T_a L^2 - T_{\alpha_{m-1}} T_r - [T_p, T_r] - T_r L + T_r T_{p_{m-1}} - L'R, \end{aligned}$$

d'où $L' T u \in H_{loc}^{s+1,\,l}(\Sigma)$, $L'^2 T u \in H_{loc}^{s-m+2,\,l}(\Sigma)$, car l'hypothèse $\rho > 4$ implique que R est au moins $2-m$ régularisant, et que $[T_p, T_r]$ est d'ordre $2m-2$.

(*f*) Il reste à examiner le cas $l=0$: on a alors $Tu \in H_{loc}^{s+m-1}(\Omega)$, $D_t^j T u|_{t=0} \in H_{loc}^{s+m-j}$ et $L' T u \in H_{loc}^{s+1}(\Omega)$. La conclusion résulte alors des travaux d'Alabidi [1] et Sablé-Tougeron [28]. ■

7. Preuves des théorèmes

7.1. Théorème 1. — Posons $s = (n/2) + (\rho + 1)$.

(i) La configuration Σ dont on a supposé l'existence n'est déterminée en fait que dans le domaine d'influence de Γ : elle est alors de classe $C_{loc}^{\rho+1}$, car le symbole principal p de l'opérateur linéarisé est à coefficients $C^{\rho+1}_{\text{loc}}$. On la prolonge alors (le cas échéant) à tout Ω, en une configuration Σ de classe $C^{\rho+1}_{\text{loc}}$, caractéristique pour p.

(ii) Supposons que Σ satisfasse $G(\rho, k)$, $u \in H^{s+m,k}_{\text{loc}}(\Sigma)$, et $u \in H^{s+m+k}_{\text{loc}}$ hors de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_j^+$, où Σ_j^+ désigne la partie sortante de Γ de Σ_j (qui est uniquement déterminée).

D'après le lemme 4.7, u est solution d'une équation de la forme $T_{p+p_{m-1}} u = R(u)$, où p et p_{m-1} sont à coefficients $C^{\rho+1,k}_{\text{loc}}(\Sigma)$, et $R(u) \in H^{2s-n/2-0,k}_{\text{loc}}(\Sigma)$. Le lemme 6.1 montre qu'alors $u \in H^{s+m,k+1}_{\text{loc}}(\Sigma)$.

(iii) Le lemme 5, cas (ii), implique qu'alors les Σ_j sont de classe $C^{\rho+1,k+1}_{\text{loc}}(\Gamma)$ dans le domaine d'influence de Γ, qui est $C^{\rho+k+2}_{\text{loc}}$.

Hors de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_j^+$, $u \in H^{s+m+k+1}_{\text{loc}}$, sauf peut-être microlocalement sur les conormaux aux Σ_j^- $(j \neq 1, 2)$: le théorème 6.2 de Bony [8] montre alors qu'en fait $u \in H^{s+m+k+1}_{\text{loc}}$ partout hors de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_j^+$.

Il ne reste plus qu'à prolonger arbitrairement à Ω la configuration Σ hors du domaine d'influence de Γ en une configuration caractéristique satisfaisant $G(\rho, k+1)$ (ce qui est possible car, là où le prolongement a lieu, $u \in C^{m+\rho+k+2}_{\text{loc}}$): on est ramené à la situation de (ii), avec $k+1$ au lieu de k, d'où la conclusion. L'amélioration de la régularité sur les Σ_j^+ $(j \geqq 3)$ s'obtient de façon standard comme dans Bony [9].

7.2. Théorème 2 et théorème 3. — Les preuves sont presque les mêmes, et plus simples, que celle du théorème 1 : le théorème 2 utilise le lemme de propagation 6.1 et le point (i) du lemme 5 concernant la régularité de la configuration Σ, tandis que le théorème 3 utilise le lemme 6.2 et le point (iii) du lemme 5.

Les énoncés correspondant aux théorèmes 1, 2, 3 pour des hypothèses de « régularité limitée » (*cf.* § 1) sont en fait ceux que l'on prouve dans ce paragraphe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Alabidi, *Réflexion transverse des singularités pour un problème aux limites non linéaire d'ordre* 2 [*Thèse de* 3^e *cycle*, Rennes 1984, et *C. R. Acad. Sci. Paris* (à paraître)].

[2] S. Alinhac, *Paracomposition et opérateurs paradifférentiels* (*Comm. in P.D.E.*, vol. 11, (1), 1986, p. 87-121).

[3] S. Alinhac, *Evolution d'une onde simple pour des équations non-linéaires générales*, dans *Current Topics in P.D.E.*, Kinekuniya Co., 1985, Japon (à paraître).

[4] S. Alinhac, *Paracomposition et application aux équations non-linéaires* (*Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer*, n° 11, École Polytechnique, Paris, 1984-1985).

[5] S. Alinhac, *Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non-linéaires* (*Séminaire d'E.D.P.*, n° 8, École Polytechnique, Paris, 1985-1986).

[6] H. Bahouri et B. Dehman, *Propagation des singularités Höldériennes de solutions d'équations non-linéaires* à paraître au Journal Math. Pures et Appl. 1988.

[7] M. Beals, *Self-Spreading and Strength of Singularities for Solutions to Semi-Linear Wave Equations* (*Ann. of Math.*, vol. 118, 1983, p. 187-214).

[8] J.-M. BONY, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires* (*Ann. Sci. École Normale Supérieure*, 4^e série, 14, 1981, p. 209-246).

[9] J.-M. BONY, *Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires* (*Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz*, n° 22, 1979-1980 et n° 2, 1981-1982, École Polytechnique, Paris.

[10] J.-M. BONY, *Propagation et interaction des singularités pour les solutions des équations aux dérivées partielles non-linéaires* (*Proc. Intern. Congress of Mathematicians Warszawa*, 1983).

[11] J.-M. BONY, *Interaction des singularités pour les équations de Klein-Gordon non linéaires* (*Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz*, n° 10, École Polytechnique, Paris, 1983-1984).

[12] J.-M. BONY, *Second Microlocalization and Propagation of Singularities for Semi-Linear Hyperbolic Equations* (à paraître).

[13] J.-M. BONY, *Singularités des solutions de problèmes de Cauchy hyperboliques non-linéaires* (à paraître).

[14] J.-Y. CHEMIN, *Thèse de 3^e cycle*, Orsay, 1986 et article à paraître.

[15] P. GÉRARD, *Interaction de singularités analytiques pour des équations non-linéaires* (*Thèse de 3^e cycle*, Université de Paris-Sud, 1985) et article à Comm. in PDE 13(3) 1988, p. 345-375.

[16] P. GODIN, *Propagation of* C^∞ *Regularity for Fully Non-Linear Second Order Strictly Hyperbolic Equations in Two Variables* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 290, 1985, p. 825-830).

[17] P. GODIN, *Propagation of Analytic Regularity for Analytic Fully Non-Linear Second Order Strictly Hyp. Equations in Two Variables* [*Comm. in P.D.E.* (à paraître)].

[18] P. GODIN, *Subelliptic Non-Linear Oblique Derivative Problems* (*Amer. J. of Math.*, vol. 107, 1985, p. 591-615).

[19] B. LASCAR, *Singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non-linéaires* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, 287, série A, 1978, p. 527-529.

[20] E. LEICHTNAM, *Interaction de singularités pour une classe d'équations à caractéristiques doubles, Ann. Inst. Fourier*, 1985 (à paraître).

[21] R. MELROSE et N. RITTER, *Interaction of Non-Linear Progressing Waves I* (*Ann. of Math.*, vol. 121, 1985, p. 187-213) and *Interaction of Non-Linear Progressing Waves II* (à paraître).

[22] G. METIVIER, *The Cauchy Problem for Semi-Linear Hyperbolic Systems with Discontinuous Data* (à paraître).

[23] Y. MEYER, *Remarque sur un théorème de J.-M. Bony* (*Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo*, n° 1, 1981, p. 1-20).

[24] J. RAUCH et M. REED, *Classical, Conormal, Semilinear Waves* (*Séminaire d'équations aux dérivées partielles*, n° 5, École Polytechnique, Paris, 1985).

[25] J. RAUCH et M. REED, *Propagation of Singularities for Semi-Linear Hyperbolic Equations in One Space Variable* (*Ann. of Math.*, vol. 111, 1980, p. 531-552).

[26] J. RAUCH et M. REED, *Non Linear Microlocal Analysis of Semi-Linear Hyperbolic Systems in One Space Dimension* (*Duke Math. J.*, vol. 49, 1982, p. 397-475).

[27] J. RAUCH et M. REED, *Jump Discontinuities of Semi-Linear Strictly Hyperbolic systems in two variables : creation and propagation* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 81, 1984, p. 203-227).

[28] M. SABLE-TOUGERON, *Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non-linéaires* (*Annales de l'Institut Fourier*, t. XXXVI, fasc. 1, 1986).

(Manuscrit reçu le 23 janvier 1987,
révisé le 2 octobre 1987.)

S. ALINHAC,
Université de Paris-Sud,
Département de Mathématiques,
91405 Orsay Cedex.