

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JÉRÔME BRUN

ANDRÉ HIRSCHOWITZ

**Le problème de Brill-Noether pour les idéaux de  $P^2$**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 20, n° 2 (1987), p. 171-200

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1987\\_4\\_20\\_2\\_171\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_2_171_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LE PROBLÈME DE BRILL-NOETHER POUR LES IDÉAUX DE $\mathbb{P}^2$

PAR JÉRÔME BRUN ET ANDRÉ HIRSCHOWITZ

---

## PLAN

0. Introduction
1. Stratifications par la postulation : généralités.
2. Autres stratifications.
3. Irréductibilité et critère de lissité pour  $G^0$ .
4. Composante principale et dominations dans  $G^1$ .
5. Critères de non-spécialité.
6. Dimensions.
7. Parties suspectes et le cas  $\chi \leq 0$ .
8. Liaison et postulation.
9. Le cas  $\chi \geq 1$ .
10. Conclusions.

## 0. Introduction

0.1. L'OBJET. — Dans ce travail, on aborde l'étude des stratifications du schéma de Hilbert de  $\mathbb{P}^2$  par la postulation. Ici, et dans toute la suite, on emploie le mot stratification au sens faible de partition, en général indexée par  $\mathbb{N}$ , en sous-schémas ou même en parties constructibles, qui sont les strates de la stratification.

Dans tout le travail,  $k$  désigne un corps algébriquement clos et  $N$  un entier naturel. On note

$$H := H_N := \text{Hilb}^N \mathbb{P}_k^2$$

le schéma de Hilbert des idéaux de  $\mathbb{P}_k^2$  de colongueur  $N$ . On se donne aussi un degré  $d$ , auquel on associe l'entier

$$\chi := \chi(N, d) := (d+1)(d+2)/2 - N$$

dont on note  $\chi^+$  et  $\chi^-$  les parties positive et négative. Si  $I$  est l'idéal paramétré par le point générique de  $H$ , on a

$$h^0(I(d)) = \chi^+$$

et la stratification de  $H$  par la postulation (plus précisément par la  $d$ -postulation) est la suite  $W$  des sous-ensembles  $W^i - W^{i+1}$ , avec

$$W^i = W_N^i = W_N^i[d] = \{ J \in H \mid h^0(J(d)) \geq \chi^+ + i + 1 \}.$$

Ici, et souvent dans la suite, on n'a pas distingué le point de  $H$  de l'idéal qu'il représente.

En fait, dès qu'on veut utiliser des techniques infinitésimales, ou résoudre des problèmes quantitatifs, il est nécessaire de munir ces  $W^i$  de leur structure naturelle de sous-schéma (cf. 1. 1). C'est donc à cette suite de sous-schémas qu'est consacré le présent travail.

0.2. LES MOTIVATIONS. — Notre objectif initial était de décrire, dans l'esprit de nos travaux antérieurs (BH1, BH2), la variété des plans « sauteurs » du fibré instanton général et, au passage, la stratification cohomologique des modules de fibrés (semi-) stables de rang 2 sur  $\mathbb{P}^2$ . Pour l'application du présent travail à ces deux questions, voir BH5 et BH4.

Depuis on s'est aperçu que la présente étude était aussi un passage obligé pour la description de la famille des section planes des courbes gauches génériques (cf. aH2).

Enfin la motivation la plus féconde est sans doute celle qu'on entrevoit à la classification des surfaces rationnelles dans les espaces projectifs. En effet, de même que le problème de Brill-Noether classique, qui consiste à décrire la stratification analogue des modules de faisceaux de rang un sans torsion sur les courbes projectives lisses (génériques), est intimement lié (cf. e. g. jH1, E, AC) à l'étude des schémas de Hilbert de courbes projectives, de même le problème abordé ici est lié à l'étude des schémas de Hilbert de surfaces rationnelles dans les espaces projectifs (cf. A, aH3).

0.3. LES PROBLÈMES. — Ils concernent la stratification  $W$ . C'est ce qu'on appelle dans [aH1] une stratification par le rang parce que les strates sont définies par le rang d'un morphisme de fibrés sur  $H$  (cf. 1. 1).

Le préjugé favorable envers une stratification par le rang, c'est que ses strates sont lisses connexes de la « bonne » dimension, ce qui implique qu'elles sont incidentes, en ce sens que chacune contient la suivante dans son adhérence. Pour exprimer combien la stratification étudiée s'écarte du cas de figure idéal, on cherche donc à :

0.3.1. Décrire (ou à défaut estimer) le complémentaire  $W^-$  de l'ouvert maximal dans lequel les strates sont lisses de la bonne codimension (dans cet ouvert,  $W$  est comme  $R_{|X|}$  au sens de [aH1], voir aussi [aH2]).

0.3.2. Énumérer les composantes irréductibles des strates. — Ces questions sont intimement liées à des questions analogues concernant les « grassmanniennes »  $G$  de la stratification par le rang donnée (cf. § 1). Ce sont d'ailleurs plus précisément ces grassmanniennes qui sont adaptées à l'étude des schémas de Hilbert de surfaces rationnelles.

Signalons enfin une dernière question très naturelle que nous n'abordons pas ici.

0.3.3. Calculer les classes d'équivalence rationnelle des  $W^i$ . — Lorsque  $W^i$  a la bonne dimension, cette question est résolue en principe par la formule de Porteous (iP, KL), appliquée au morphisme  $u$  de 1. 1. Encore faudrait-il, pour espérer pousser les calculs à

leur terme, disposer d'une présentation maniable de l'anneau de Chow de  $H$ , ce qui n'est pas le cas à l'heure actuelle (voir à ce sujet aH4, ES1, ES2, EL).

0.4. LES RÉSULTATS. — Notre étude concerne seulement les deux premières strates, soit  $W^0$  et  $W^1$ , et évidemment l'originalité  $W^-$ . Au passage nous obtenons des résultats sur les grassmanniennes correspondantes, résultats que nous ne présentons pas dans ce paragraphe.

Sur  $W^-$ , on montre que sa codimension  $w^-$  est encadrée par des fonctions  $m$  et  $M$  de  $d$  et  $N$  (ou de  $d$  et  $\chi$ ) qui sont

$$M(d, \chi) = d + \chi^- + \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est le plus petit entier vérifiant :

$$(\varepsilon + 1)(|\chi| + \varepsilon + 1) > d + \chi^- + \varepsilon$$

et

$$m(d, \chi) = \min(d, 2\chi + 5) \quad \text{pour } \chi > 0$$

$$m(d, \chi) = \min(d + |\chi| + 1, 2|\chi| + 5, \max(2d + |\chi|/3, |\chi| + 5)) \quad \text{pour } \chi \leq 1.$$

Ces estimations sont visualisées sur la figure 1.

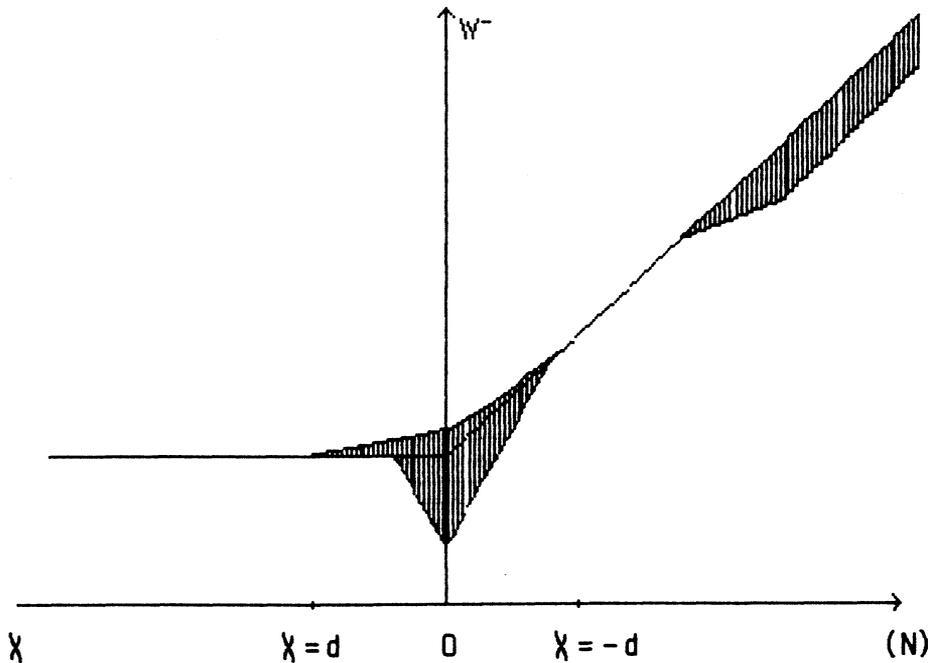


Fig. 1. — Encadrement de  $w^-$ .

Sur  $W^0$  et  $W^1$ , on montre plus précisément qu'en dehors de la codimension  $m(d, \chi)$ ,  $W^0 - W^1$  et  $W^1$  sont lisses connexes de la bonne codimension (i. e.  $|\chi| + 1$  resp.  $2|\chi| + 4$ ). Encore plus précisément, on montre que pour  $\chi \leq d - 2$ ,  $W^0$  est irréductible génériquement

lisse de codimension  $|\chi| + 1$  (tandis que pour  $\chi \geq d-1$  et  $d \geq 3$ ,  $W^0$  est réductible de codimension  $d$ ), et que pour  $4-d \leq \chi \leq (d-5)/2$ ,  $W^1$  est irréductible génériquement lisse de codimension  $2|\chi| + 4$ .

Ces résultats sont commentés au paragraphe 10.

#### 0. 5. LES MÉTHODES.

0. 5. 1. Pour les majorations de la codimension  $w^-$  de  $W^-$ , on exhibe des parties de  $W^-$  (§ 6). Il s'agit dans chaque cas, pour un  $r \geq d+2$  convenable, de l'ensemble  $A^r$  des  $N$ -uplets contenant un  $r$ -uplet aligné,  $r$  étant choisi de façon que  $A^r$  soit dans  $W^\varepsilon$  avec  $\text{codim } A^r < (\varepsilon + 1)(\varepsilon + |\chi| + 1)$ .

0. 5. 2. Pour le reste, dans le cas  $\chi \leq 0$  (voir  $\chi = 1$ ), on étudie les grassmanniennes  $G^0$  et  $G^1$  ( $G^0$  est le schéma de Hilbert relatif de la courbe universelle et  $G^1$  celui de la base du pinceau de courbes universel), pour lesquelles on démontre des critères de lissité (§ 3) ou irréductibilité (§ 4). Ces critères s'appliquent sous une hypothèse de non spécialité ( $H^0(I(d))=0$ ), c'est pourquoi on établit au paragraphe 5 des critères de non-spécialité. En combinant ces critères on montre essentiellement la lissité de  $G^0$  et l'irréductibilité de  $G^1$  en dehors de ce qu'on appelle les parties suspectes  $S^0$  et  $S^1$ . Il reste à majorer les dimensions de  $S^0$  et  $S^1$ . Pour ce faire, on stratifie par les singularités (i. e. par le cardinal du support pour les schémas finis, et par la colongueur de l'idéal jacobien pour les courbes). En effet, les difficultés d'analyse s'accroissent avec les singularités, mais les dimensions des strates diminuent. Chemin faisant, on est donc conduit à utiliser des résultats de la théorie des singularités, en particulier le théorème d'irréductibilité de Briançon (jB, I).

0. 5. 3. Pour passer du cas  $\chi \leq 0$  au cas  $\chi > 0$ , on utilise la liaison. On sait depuis longtemps (cf. [C] ou [K] pour une formulation plus moderne) que la liaison, vue comme isomorphisme de schémas de Hilbert relatifs (ou drapeaux) respecte en un certain sens la postulation, du moins ensemblistement. Compte tenu de notre objectif, il nous a fallu prouver une version schématique de ce résultat (cf. § 8).

0. 5. 4. On peut s'étonner que les méthodes infinitésimales, qui jouent un rôle prépondérant dans certaines solutions du problème de Brill-Noether classique, n'aient pas contribué au présent travail, bien qu'il existe, ici aussi, un (co)morphisme de Petri (GL, Remark in § 2). Voici deux raisons, liées au fait que ces méthodes sont en général combinées à des spécialisations judicieuses (G, EH, S, rL) : la première est que nous ne savons presque rien sur les spécialisations singulières des surfaces rationnelles ; la seconde est que cette technique de spécialisation n'est pas adaptée à notre problème mais plutôt au problème voisin : étudier la stratification par la postulation du schéma des sous-schémas contenant  $N'$  points donnés (généraux).

### 1. Stratification par la postulation : généralités

1. 0. Dans ce paragraphe, on introduit les stratifications à étudier et les objets qui leur sont associés. Puis on rappelle à leur sujet quelques généralités sur les stratifications par le rang.

1. 1. NOTATIONS. — Dans tout le travail, on fixe évidemment un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique quelconque, et aussi des entiers  $N$ ,  $d$ ,  $\chi$  comme en 0. 1. Les objets qu'on considère dépendent éventuellement de  $N$  et/ou de  $d$  même si les notations ne le laissent pas prévoir. Par exemple, on pose  $H = \text{Hilb}^N \mathbb{P}^2$ .

Soit  $U$  le sous-schéma tautologique de  $H \times \mathbb{P}^2$  et  $I_U$  son faisceau d'idéaux. La suite exacte :

$$0 \rightarrow I_U \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow 0$$

donne, après tensorisation par  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$  et image directe par la projection  $\pi: H \times \mathbb{P}^2 \rightarrow H$ , la suite exacte :

$$0 \rightarrow \pi_*(I_U(d)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)) \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{u} \pi_*(\mathcal{O}_U(d)) \rightarrow R^1 \pi_*(I_U(d)) \rightarrow 0.$$

D'après le théorème de changement de base,  $\pi_*(\mathcal{O}_U(d))$  est un fibré de rang  $N$ . Et, par définition,  $W^0$  est la stratification par le rang associée (cf. aH1, 1. 1) au morphisme  $u: E \rightarrow F$ , où on a posé :

$$E := H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)) \otimes \mathcal{O} \quad \text{et} \quad F := \pi_*(\mathcal{O}_U(d)).$$

On note, pour  $i \geq 0$ ,  $Z^i := Z^i[d]$  la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension  $i+1$  de  $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d))$ . Introduisons maintenant la sous-variété  $B^i$  de  $Z^i \times \mathbb{P}^2$  des couples  $(z, x)$  tels que  $x$  soit dans la base du système linéaire  $z$ . On remarque que la projection  $B^i \rightarrow \mathbb{P}^2$  est une fibration localement triviale en espaces projectifs, tandis que la projection  $B^i \rightarrow Z^i$  est évidemment projective mais n'est pas plate en général.

On note maintenant  $G^i := G_N^i := G_N^i[d]$  le schéma de Hilbert relatif des sous-schémas de colongueur  $N$  des fibres de  $B^i \rightarrow Z^i$ . Ce schéma de Hilbert  $G^i = \text{Hilb}^N B^i / Z^i$  se plonge dans  $\text{Hilb}^N(Z^i \times \mathbb{P}^2) / Z^i$  qui s'identifie à  $Z^i \times H$ . Par suite,  $G^i$  est un sous-schéma de  $Z^i \times H$ . Ses points fermés sont les couples  $(z, h)$  où  $h$  est un sous-schéma de la base du système  $z$ , autrement dit où  $z$  est un système de courbes contenant  $h$ .

1. 2. INDICE, DIMENSION DES STRATES. — Soient  $e$  et  $f$  les rangs de  $E$  et  $F$ . On dira dans ce cas que la stratification par le rang associée à  $u$  est d'indice  $|e-f|$ . La stratification par la postulation est donc d'indice  $|\chi|$ . Pour une stratification par le rang  $S^i$  d'indice  $\delta$ , on a, en tout point, l'inégalité :

$$\text{codim } S^i \leq (i+1)(\delta+i+1).$$

1. 2. 1. PROPOSITION. — On a, en tout point de  $W^i$  :

$$\dim W^i \geq 2N - (i+1)(|\chi| + i + 1)$$

et en tout point de  $G^i$  :

$$\dim G^i \geq 2N - (i+1)(i+1-\chi).$$

d'un morphisme  $\varphi: T \rightarrow F$  où  $T$  provient du sous-fibré tautologique de  $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) \otimes \mathcal{O}$  sur  $Z^i$ , où  $F$  provient du fibré  $\pi_* \mathcal{O}_U(d)$  sur  $H$  et où  $\varphi$  se compose de l'injection canonique de  $T$  dans  $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) \otimes \mathcal{O}$  avec le morphisme associé à la restriction de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$  vers  $\mathcal{O}_U(d)$ . Donc  $T$  est de rang  $i+1$ ,  $F$  de rang  $N$  et  $G^i$  est de codimension au plus  $N \cdot (i+1)$ , donc de dimension au moins

$$2N + (i+1) [(d+1)(d+2)/2 - (i+1)] - N(i+1). \blacksquare$$

1.3. LISSITÉ. — La lissité de  $W^i$ , du moins hors de  $W^{i+1}$ , s'étudie dans  $G^{x+i}$  :

1.3.1. PROPOSITION. — *La projection naturelle de  $G^{x+i}$  vers  $H$  se factorise schématiquement à travers  $W^i$  et le morphisme induit  $G^{x+i} \rightarrow W^i$  induit à son tour un isomorphisme au-dessus de  $W^i - W^{i+1}$ .*

*Preuve.* — Pour prouver cet énoncé, il suffit de prouver l'énoncé analogue pour les stratifications par le rang universelles; en effet, notre stratification se déduit d'une stratification universelle par changement de base et la formation des grassmanniennes de la stratification commute au changement de base. Dans le cas universel, les grassmanniennes et les strates sont lisses et le morphisme des unes dans les autres est projectif et a pour fibres des espaces projectifs de dimension zéro (cp [aH1], 2.2). ■

1.4. ORIGINALITÉ.

1.4.1. DÉFINITION. — On appellera originalité de  $W$  l'ensemble noté  $W^-$  des points où  $W$  n'est pas comme  $R_{|\chi|}$  (cf. [aH1]). On notera  $w^-$  la codimension de  $W^-$  dans  $H$ .

1.4.2. PROPOSITION. —  *$W^-$  est fermé et  $W^- \cap (W^i - W^{i+1})$  est la réunion de l'ensemble des points de  $W^i - W^{i+1}$  où  $W^i$  n'est pas lisse avec celui des points où  $W^i$  n'est pas de codimension  $(i+1)(|\chi| + i + 1)$ .*

*Preuve.* —  $W^-$  est fermé parce que, par définition, être comme  $R_{|\chi|}$  est une propriété ouverte. D'après ([aH1], §3.4),  $W$  est comme  $R_{|\chi|}$  là où  $RKS(u, \cdot)$  est surjective et d'après ([aH1], §3.5), au-dessus de  $W^i - W^{i+1}$ ,  $G^i$  est lisse de codimension  $(i+1)(|\chi| + i + 1)$  exactement là où  $RKS(u, \cdot)$  est surjective. On conclut par 1.1.3 pour  $\chi \leq 0$ . Le même argument vaut pour  $\chi \geq 0$  en considérant  $W$  comme associée au transposé de  $u$ . ■

## 2. Autres stratifications

2.0. On introduit ici les stratifications par les singularités et par l'alignement qui nous serviront par la suite. Les calculs de dimension seront faits au paragraphe 6.

2.1. GÉNÉRALITÉS. — Les stratifications qu'on va considérer sont définies à l'aide de certaines fonctions. On veut voir ici que ces fonctions sont constructibles voire semi-continues.

2.1.1. DÉFINITIONS. — Pour un schéma fini  $F$ , on définit sa longueur  $l$ , son cardinal  $c$  et plus généralement le nombre  $c_i$  de ses points où sa dimension de plongement est au moins  $i$  (on a donc  $c=c_0$ ).

2.1.2. PROPOSITION. — Soit  $X \subset S \times \mathbb{P}^2$  un sous-schéma  $S$ -fini avec  $S$  intègre. On pose  $l(s)=l(X(s))$  et  $c_i(s)=c_i(X(s))$ . Alors  $l$  est semi-continu supérieurement et les  $c_i$  sont constructibles. Si de plus  $X$  est  $S$ -plat, alors  $l$  est constant et  $c_0$  est semi-continu inférieurement.

*Preuve.* — On sait que  $X$  est le Spec d'une  $\mathcal{O}_S$ -algèbre cohérente et  $l$  est le rang des fibres de cette algèbre. C'est donc une fonction semi-continue supérieurement et on sait que  $X$  est  $S$ -plat si et seulement si cette fonction est constante ([r Ha], III.9.9). Pour le reste, en stratifiant, on peut supposer que  $X$  est  $S$ -plat (cf. EGA IV, 6.9.1). Alors on sait que  $c_0$  est semi-continu inférieurement (EGA IV, 15.5.9). Pour montrer que  $c_i$  ( $i=1,2$ ) est constructible, on traite le cas du schéma de Hilbert  $S=H_N$ . Par exemple pour  $c_1$ , on considère le schéma  $T_n$  des réunions disjointes de  $n$  points doubles de  $\mathbb{P}^2$  et  $D_{n,N} \rightarrow T_n \times H_N$  le schéma des couples  $(X, Y)$  avec  $X$  dans  $T_n$ ,  $Y$  dans  $H_N$  et  $X \subset Y$  (cf. [K]). Alors  $c_1^{-1}(n)$  est la différence  $\text{pr}_2(D_{n,N}) - \text{pr}_2(D_{n+1,N})$ , c'est donc une partie constructible. Pour  $c_2$ , on raisonne de même avec  $T'_n$ , le schéma des sous-schémas dont l'idéal est intersection de  $n$  carrés d'idéaux maximaux. ■

## 2.2. STRATIFICATION DE $H$ PAR LES SINGULARITÉS.

2.2.1. DÉFINITION. — Soit  $m: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$  une suite à support fini avec  $\sum im(i)=N$ . On définit  $H^m$  comme le sous-ensemble de  $H$  formés des sous-schémas de  $\mathbb{P}^2$  réunion de  $m(1)$  points simples,  $m(2)$  points doubles...,  $m(i)$  points de longueur  $i$ , etc.

2.2.2. PROPOSITION. —  $H^m$  est un sous-schéma localement fermé irréductible de dimension  $\sum (i+1)m(i)$  dans  $H$ . Son point générique représente un sous-schéma curviligne (i. e. de dimension de plongement au plus un).

*Preuve.* — C'est une conséquence immédiate du théorème d'irréductibilité de Briançon (jB, I). ■

2.2.3. DÉFINITION. — On définit pour  $s \geq 0$ ,  $H^s$  comme la réunion des  $H^m$  avec  $\sum m(i)=N-s$ . On peut montrer, mais nous n'en aurons pas besoin, que les  $H^s$  vérifient la relation d'incidence  $\bar{H}^s \supset H^{s+1}$ .

2.3. STRATIFICATION DE  $Z^0$  PAR LES SINGULARITÉS. — On va stratifier  $Z^0$  par le cardinal du lieu singulier; cette stratification est choisie en fonction de (3.6.3).

2.3.1. DÉFINITION. — On définit le lieu singulier  $S^0 \subset B^0$  de la courbe tautologique par l'idéal jacobien relatif: si  $I$  est l'idéal de  $B^0$  dans  $Z^0 \times \mathbb{P}^2$ , son idéal jacobien relatif est l'idéal  $(I, dI)$  engendré par  $I$  et les dérivées de ses sections. On voit que  $S^0$  est  $Z^0$ -propre et que sa fibre  $S^0(c)$  est définie par l'idéal jacobien (usuel).

2.3.2. DÉFINITIONS. — On note  $Z^{0,\infty}$  le sous-ensemble de  $Z^0$  des courbes non réduites. En dehors de  $Z^{0,\infty}$ ,  $S^0 \rightarrow Z^0$  est fini et on définit, pour  $l \geq 0$ ,  $Z^{0,l}$  comme l'ensemble des courbes dont le lieu singulier a pour cardinal  $l$ . On dira que les courbes de  $Z^{0,\infty}$  sont parasites et que les autres sont utiles.

2.3.3. PROPOSITION. —  $Z^{0,\infty}$  est fermé et les  $Z^{0,l}$  sont constructibles.

*Preuve.* — Soit  $p$  et  $q$  vérifiant  $2p+q=d$  et  $p>0, q\geq 0$ . Alors  $Z^{0,\infty}$  est l'image de la réunion des  $Z^0[p]\times Z^0[q]$  par le morphisme  $(I, J)\mapsto I^2J$ . C'est donc un fermé. Quant aux  $Z^{0,l}$ , ils sont constructibles d'après (2.1.2). ■

2.4. STRATIFICATION DE  $Z^1$  PAR LES SINGULARITÉS. — Cette stratification est choisie en fonction de (4.7).

2.4.1. DÉFINITIONS. — On note  $Z^{1,\infty}$  l'ensemble des pinceaux de courbes (de degré  $d$ ) dont la base contient une courbe. On appelle parasites les pinceaux de  $Z^{1,\infty}$  et utiles les autres. On note  $Z^{1,l}$  l'ensemble des pinceaux utiles dont la base comporte exactement  $l$  points singuliers de dimension de plongement deux.

2.4.2. PROPOSITION. —  $Z^{1,\infty}$  est fermé et les  $Z^{1,l}$  sont constructibles.

*Preuve.* —  $Z^{1,\infty}[d]$  est la réunion, pour  $1\leq d', d''<d$  et  $d'+d''=d$ , des images des  $Z^0[d']\times Z^1[d'']$ , qui sont des schémas projectifs de sorte que  $Z^{1,\infty}[d]$  est bien fermé. Hors de  $Z^{1,\infty}$ , le morphisme  $B^1\rightarrow Z^1$  est fini (et même plat) de sorte que (2.1.2) s'applique :  $Z^{1,l}$  est le lieu où  $c_2$  vaut  $l$ . ■

2.5 STRATIFICATIONS DE H PAR L'ALIGNEMENT.

2.5.1. DÉFINITIONS. — On note  $A^r$  le sous-ensemble de H des sous-schémas contenant un sous-schéma de colongueur  $r$  contenu dans une droite. Plus généralement on note  $A^{l,r}$  le sous-ensemble de H des sous-schémas contenant un sous-schéma de colongueur  $r$  contenu dans une courbe de degré  $l$ . On a donc  $A^r=A^{1,r}$ .

2.5.2. PROPOSITION. —  $A^{l,r}$  est un sous-schéma fermé de H.

*Preuve.* — Il faut considérer le sous-schéma fermé de  $Z^0[l]\times H_r\times H_N$  des triplets  $(C, h, z)$  vérifiant  $h\subset C$  et  $h\subset z: A^{l,r}$  en est la projection sur  $H_N$ . ■

2.6. TRANSFERT.

2.6.1. CONVENTION. — Les stratifications sur  $Z^i$  et sur H se transportent, par produit fibré, sur  $G^i$ . Nous convenons d'omettre le produit fibré dans la notation. Ainsi par exemple  $G^1A^r$  désigne  $G^1\times_{\mathbb{H}}A^r$ . De plus on posera  $G^{0,\infty}=G^0Z^{0,\infty}$  et  $G^{1,\infty}=G^1Z^{1,\infty}$ .

2.6.2. NOTATIONS. — D'autre part nous considérons les sous-schémas suivants de H:  $W^{0,\infty}$  est l'ensemble des points dont l'image inverse dans  $G^0$  est dans  $G^{0,\infty}$ .  $W^{1,\infty}$  est l'ensemble des points dont l'image inverse dans  $G^1$  est dans  $G^{1,\infty}$ . Remarquons que pour  $\chi\leq 0$ ,  $W^{0,\infty}$  est dans  $W^0$  mais ce n'est pas nécessairement le cas pour  $\chi>0$ . De même pour  $\chi>0$ ,  $W^{1,\infty}$  n'est pas en général contenu dans  $W^0$ .

2.6.3. PROPOSITION. —  $W^{0,\infty}$  et  $W^{1,\infty}$  sont constructibles dans H.

*Preuve.* — On montre plus généralement que si  $X\rightarrow Y$  est propre, avec  $Y$  intègre et si  $X'\subset X$  est un sous-schéma fermé, l'ensemble des  $y$  où les fibres  $X(y)$  et  $X'(y)$  sont égales est constructible. Pour le voir, on stratifie  $Y$ , de façon que sur chaque strate  $X$  et  $X'$  soient  $Y$ -plats. Sur une telle strate, l'ensemble considéré est fermé et d'ailleurs aussi ouvert. ■

### 3. Irréductibilité et critère de lissité pour $G^0$

3.1. RAPPELS. — Le schéma de Hilbert des courbes planes a été étudié dans [AIK] et [BGS]. On rappelle ici les résultats dont on a besoin.

Soit  $X$  un germe de sous-schéma de dimension un dans une surface lisse  $S$ . Notons  $H_N^{\text{loc}}(X)$  le schéma de Hilbert de ses sous-schémas ponctuels (définis par des idéaux de l'anneau local) de colongueur  $N$ . Alors d'après le théorème de Briançon [jB],  $H_N^{\text{loc}}(X)$ , étant contenu dans  $H_N^{\text{loc}}(S)$ , est de dimension au plus  $N-1$ . Par suite si  $X$  est maintenant un sous-schéma de dimension un de  $\mathbb{P}^2$ , alors  $\text{Hilb}^N X$  est de dimension au plus  $N$ . Si de plus  $X$  est une courbe, définie par une équation, alors  $\text{Hilb}^N X$  est, dans  $\text{Hilb}^N \mathbb{P}^2$ , le schéma des zéros d'une section d'un fibré de rang  $N$ , donc  $\text{Hilb}^N X$  est de dimension pure  $N$ . Enfin rappelons que si  $X$  est intègre,  $\text{Hilb}^N X$  l'est aussi : si  $X$  est réduite, les sous-schémas génériques représentés par les composantes irréductibles de  $\text{Hilb}^N X$  sont lisses et contenus dans la partie lisse de  $X$ . Dans tous les cas, ces sous-schémas sont curvilignes (i. e. de dimension de plongement au plus un).

#### 3.2. IRRÉDUCTIBILITÉ, DIMENSION.

PROPOSITION. —  $G^0$  est irréductible génériquement lisse de dimension  $d(d+3)/2+N$ .

*Preuve.* — La formation du schéma de Hilbert commutant aux changements de base, les fibres de la projection  $G^0 \rightarrow Z^0$  sont de dimension  $N$ . Il s'ensuit, d'après (1.2) que toutes les composantes irréductibles de  $G^0$  dominent  $Z^0$  et sont de dimension pure  $d(d+3)/2+N$ . Il reste à observer qu'au-dessus de l'ouvert (lisse) des courbes lisses,  $G^0$  est lisse connexe. ■

3.3. *Remarque.* — Le point générique de  $G^0$  représente donc une courbe lisse  $C$ , munie d'un sous-schéma lisse. On peut calculer la cohomologie des faisceaux  $I_Y(d)$  à l'aide de la suite exacte (résiduelle) (cf. [a H6])

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-C) \rightarrow I_Y \rightarrow \mathcal{O}_C(-Y) \rightarrow 0.$$

En particulier, pour  $\chi \leq 0$ ,  $H^0(I_Y(d))$  est de dimension un, et  $G^0 \rightarrow W^0$  est birationnel d'après 1.3.1.

3.4. LIEU SINGULIER. — On montre que  $G^0$  n'est pas lisse en général.

3.4.1. PROPOSITION. — Pour  $N \geq d+2 \geq 4$  le lieu singulier de  $G^0$  est de codimension au plus  $2d-1$  dans  $G^0$ .

*Preuve.* — On va montrer que  $G^0$  est singulier en tout point fermé  $(Y, C)$  où  $C$  est la réunion d'une droite double  $D^{(2)}$  avec une courbe  $C'$  de degré  $d-2$ , tandis que  $Y$  est la réunion de  $d+2$  points de  $D$  avec  $N-d-2$  points de  $C'$ . On calcule l'espace tangent de Zariski  $T$  par la formule de Kleppe (cf. [K] ou [dP], Prop. 1.2) :

$$T = \{(t_1, t_2) \in \text{Hom}(I_Y, \mathcal{O}_Y) \times \text{Hom}(I_C, \mathcal{O}_C) \mid t_1 \cdot i = r \cdot t_2\}$$

où  $i$  et  $r$  sont les morphismes naturels du diagramme

$$\begin{array}{ccc} I_C & \xrightarrow{t_2} & \mathcal{O}_C \\ \downarrow i & & \downarrow r \\ I_Y & \xrightarrow{t_1} & \mathcal{O}_Y. \end{array}$$

Hors de  $C'$ , on a  $t_1 \cdot i = 0$  puisque  $I_C$  y est inclus dans  $I_Y^2$ . Aux points de  $Y \cap D$ , la condition  $r \cdot t_2 = t_1 \cdot i$  signifie donc  $r \cdot t_2 = 0$ . Comme  $I_C$  est isomorphe à  $\mathcal{O}(-d)$ ,  $t_2$  s'identifie à une section de  $\mathcal{O}_C(d)$  de sorte qu'il suffit de vérifier la condition  $r \cdot t_2 = 0$  en  $d+1$  des points de  $Y \cap D$ . Par suite l'espace tangent est de dimension au moins  $d(d+3)/2 + N + 1$ . ■

3.4.2. *Remarque.* — En utilisant d'autres courbes non réduites, ou en mettant plus de points sur  $D$ , on met en évidence d'autres points singuliers de  $G^0$ . Mais tous ces points sont dans  $G^0 W^1$ .

### 3.5. SÉPARATION POUR LA LISSITÉ.

3.5.1. PROPOSITION. — Soit  $(Y, C)$  un point de  $G_N^0$ . Soit  $Y'$  la partie de  $Y$  contenue dans la partie lisse de  $C$  et  $Y'' = Y - Y'$  son complémentaire. Si  $(Y'', C)$  est un point lisse de  $G_{N''}^0$ , alors  $(Y, C)$  est un point lisse de  $G_N^0$ .

*Preuve.* — Le morphisme de réunion de  $G_{N'}^0 \times_{Z^0} G_{N''}^0$  vers  $G_N^0$  étant étale (au voisinage de  $(Y', C; Y'', C)$ ), il suffit de montrer que le produit fibré est lisse en ce point. Or  $G_{N''}^0$  est lisse par hypothèse, tandis que  $G_{N'}^0 \rightarrow Z^0$  est lisse en  $(Y', C)$  parce que  $C$  est lisse au voisinage de  $Y'$ . ■

### 3.6. CRITÈRE DE LISSITÉ.

3.6.1. PROPOSITION. — Soit  $(Y, C)$  un point de  $G^0$  vérifiant  $H^1(I_Y(d)) = 0$ . Alors  $G^0$  est lisse en ce point.

*Preuve.* — On considère la projection  $G^0 \rightarrow H$ . Pour  $Y'$  voisin de  $Y$  dans  $H$ , on a encore  $H^1(I_{Y'}(d)) = 0$  et le faisceau  $R^1 \pi_* (I_U(d))$  est nul dans un voisinage de  $Y$ . Par suite, d'après le théorème de changement de base,  $\pi_* (I_U(d))$  est un fibré localement trivial dont  $G^0$  est une grassmannienne relative. Cela prouve que  $G^0$  est lisse au point considéré. ■

3.6.2. *Remarque.* — L'énoncé et sa démonstration s'étendent sans changement au cas de  $G^1$ .

3.6.3. COROLLAIRE (critère de lissité). — Soit  $(Y, C)$  un point de  $G^0$ . On décompose  $Y$  sous la forme  $Y = Y' \cup Y''$  où  $Y'$  est la partie de  $Y$  contenue dans la partie lisse de  $C$ . Alors pour que  $G^0$  soit lisse en  $(Y, C)$ , il suffit que  $H^1(I_{Y''}(d))$  soit nul.

*Preuve.* — Il suffit de combiner la proposition précédente avec (3.5.1). ■

#### 4. Composante principale et domination dans $G^1$

##### 4.1. LA COMPOSANTE PRINCIPALE.

4.1.1. PROPOSITION. — Pour  $0 \leq N \leq d^2$ ,  $G^1$  admet une seule composante irréductible dominant  $Z^1$ . Elle est génériquement lisse de dimension  $d^2 + 3d - 2$ .

*Preuve.* — Soit  $Z'$  l'ouvert de  $Z^1$  des pincesaux utiles à base lisse. Au-dessus de  $Z'$ ,  $G^1$  est étale et il nous faut prouver que l'ouvert correspondant est connexe (sa dimension est celle de  $Z^1$  soit  $d^2 + 3d - 2$ ). La connexité résulte du fait que le groupe de monodromie de  $Z'$  a pour image tout le groupe symétrique de la fibre générale : on peut en effet appliquer le principe de monodromie de Harris [J H3] à  $\mathbb{P}^2$  plongé dans  $\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$  par le système des courbes de degré  $d$ . Dans [J H3], ce principe n'est démontré qu'en caractéristique zéro, mais d'une part il a depuis été étendu à la caractéristique positive ([e BH], [HMS]) et d'autre part on peut facilement le démontrer dans le présent cas particulier [BH3, prop. 5.5]. ■

4.2. DOMINATION ET COMPOSANTES SECONDAIRES. — On appelle principale la composante mise en évidence en 4.1 si elle existe ( $N \leq d^2$ ). On appelle parasites les composantes irréductibles de  $G^1$  dont le pinceau générique est parasite et on appelle secondaires celles qui restent, en espérant d'ailleurs qu'il n'y en a pas. On dira qu'un point de  $G^1$  est dominateur s'il est dans la composante principale.

##### 4.3. UN CRITÈRE DE PLATITUDE POUR $G^1 \rightarrow Z^1$ .

4.3.1. PROPOSITION. — Soit  $X \rightarrow S$  fini et plat. Soit  $Y$  un point de  $\text{Hilb}^N X/S$ , se projetant en  $s$ . On suppose que là où  $Y$  est singulier,  $X$  est curviligne. Alors  $\text{Hilb}^N X/S \rightarrow S$  est plat en  $Y$ .

*Preuve.* — Le morphisme de réunion étant étale, on peut supposer  $Y$  ponctuel. Si  $Y$  est lisse, alors  $N$  vaut 1 et  $\text{Hilb}^N X/S$  s'identifie à  $X$  qui est plat par hypothèse. Traitons le cas contraire. On peut évidemment supposer que  $X(s)$  est ponctuel de dimension de plongement un. Comme la formation du schéma de Hilbert commute au changement de base, et que la platitude est préservée, il suffit de traiter le cas où  $X$  est une déformation verselle de  $X(s)$ , par exemple le sous-schéma tautologique de  $\text{Hilb}^N A^1 \times A^1$ . Ce cas est traité en [dP] (§ 5.13). ■

4.3.2. COROLLAIRE. — Soit  $(Y, p)$  un point de  $G^1$  avec  $p$  utile. On suppose que là où  $Y$  est singulier, la base de  $p$  est curviligne. Alors  $G^1$  est  $Z^1$ -plat en  $(Y, p)$ . En particulier  $(Y, p)$  est dominateur.

##### 4.4. LE CAS $N \leq (d^2 + 3d - 2)/2$ .

4.4.1. PROPOSITION. — Pour  $N \leq (d^2 + 3d - 2)/2$ , la composante principale de  $G^1$  est la seule dominante  $H$ .

*Preuve.* — Soit  $Y$  la partie générique à  $N$  éléments de  $\mathbb{P}^2$ . Alors les pincesaux dont la base contient  $Y$  constituent une grassmannienne [non vide car  $h^0(I_Y(d))$  majore 2] de sorte qu'il n'y a qu'une seule composante irréductible de  $G^1$  dominant  $H$ . Il s'agit donc de voir que c'est la composante principale.

4.4.2. LEMME. — *Le pinceau générique contenant Y est utile.*

*Preuve du lemme.* — L'utilité étant une propriété ouverte, il suffit de traiter le cas extrême  $N = (d^2 + 3d - 2)/2$  parce que pour  $N' \leq N$ ,  $\text{Hilb}^{N'} Y$  domine  $H_{N'}$ .

Dans ce cas Y est contenu dans un seul pinceau  $p$  de courbes de degré  $d$  et n'est contenu dans aucune courbe de degré inférieur. Écrivons  $Y = Y_0 \perp Y_1$  où  $Y_i$  est contenu dans la partie de dimension  $i$  de la base de  $p$  et soit  $d' \geq 0$  le degré de la partie de dimension un de cette base. Tout élément  $\sigma$  du groupe de Galois du corps résiduel transforme  $Y_1$  en  $Y'_1$  qui reste contenu dans une courbe de degré  $d'$  et  $Y_0$  en  $Y'_0$  qui reste contenu dans un pinceau de courbes de degré  $d - d'$ . Mais comme le pinceau contenant Y est unique, on a  $Y'_0 = Y_0$  et  $Y'_1 = Y_1$ . Par uniformité, il s'ensuit que  $Y_0$  ou  $Y_1$  est vide et comme Y n'est contenu dans aucune courbe de degré  $d' < d$ , c'est  $Y_1$  qui est vide. Par suite Y est contenu dans un pinceau de courbes de degré  $d - d'$  ce qui impose à  $d'$  d'être nul et à  $p$  d'être utile. ■

*Fin de la preuve de la proposition.* — Soit  $(Y, p)$  le point générique de la composante dominant H. Alors Y est lisse et on vient de voir que  $p$  est utile. Il résulte de (4.3) que  $(Y, p)$  est dominateur. ■

4.4.3. PROPOSITION. — *Soit  $(Y, p)$  dans  $G^1$  avec  $H^1(I_Y(d))$  nul. Alors  $(Y, p)$  est dominateur.*

*Preuve.* — Comme en (3.6), on montre que  $G^1 \rightarrow H$  est lisse en  $(Y, p)$ . Par suite  $(Y, p)$  est dans l'unique composante dominant H et d'après 4.4.1, c'est la principale. ■

4.5. POINT DOMINATEUR GÉNÉRIQUE.

4.5.1. PROPOSITION. — *Pour  $N \leq d^2$ , le point générique de la composante principale de  $G^1$  représente un couple  $(Y, p)$  où  $p$  est générique (donc à basse lisse) et où Y est lisse et uniforme. De plus, pour  $N' \leq (d^2 + 3d - 2)/2$  et  $N' \leq N$  toute partie à  $N'$  éléments de Y est générique dans  $\text{Hilb}^{N'} \mathbb{P}^2$ . Et pour  $N \geq (d^2 + 3d - 2)/2$  (i.e.  $\chi \leq 2$ ),  $p$  est le seul pinceau contenant Y dans sa base.*

*Preuve.* —  $p$  est générique par définition de la composante principale. De ce fait la base de  $p$ , ainsi que Y, est lisse. L'uniformité découle du principe de monodromie comme en 4.1. De plus la partie (générique) à  $N'$  éléments de Y, autrement dit  $\text{Hilb}^{N'} Y$ , domine la partie (générique) à  $N'$  éléments de la base de  $p$ , qui d'après (4.4.1), domine  $H_{N'}$ . Enfin pour  $\chi \leq 2$ , la partie à  $(d^2 + 3d - 2)/2$  éléments de Y étant, d'après ce qu'on vient de voir, générique dans  $\mathbb{P}^2$ , est contenue dans la base d'un seul pinceau. *A fortiori*, Y ne peut être contenu dans la base d'un autre pinceau que  $p$ . ■

4.5.2. Remarque. — La proposition précédente permet de calculer la cohomologie des  $I_{Y'}(l)$  où  $Y'$  est la partie générique à  $N'$  éléments de Y pour  $N' \leq (d^2 + 3d - 2)/2$  et, par liaison (cf. infra § 8), pour tout  $N'$  avec  $0 \leq N' \leq N$ .

4.6. SÉPARATION ET DOMINATION.

PROPOSITION. — *Soit  $(Y, p)$  un point de  $G^1$  avec  $p$  utile et  $Y = Y' \perp Y''$  où  $Y'$  et  $Y''$  sont de colongueurs  $N'$  et  $N''$ . Si  $G_{N''}^1$  est  $Z^1$ -plat en  $(Y', p)$  et  $(Y'', p)$  est dominateur dans  $G_{N'}^1$ , alors  $(Y, p)$  est dominateur.*

*Preuve.* — On utilise comme précédemment le morphisme de réunion, grâce auquel il suffit de montrer que le produit fibré  $G_{N'}^1 \times_{Z^1} G_{N''}^1$  domine  $Z^1$  au voisinage de  $(Y', p; Y'', p)$ . C'est vrai parce que quand  $A$  est plat sur  $B$  et  $B$  domine  $C$  au voisinage de  $b$ , alors  $A$  domine  $C$  au voisinage de tout point de la fibre  $A(b)$ . ■

#### 4.7. CRITÈRE DE DOMINATION.

**COROLLAIRE.** — Soit  $(Y, p)$  un point de  $G^1$  avec  $p$  utile. On décompose  $Y$  sous forme  $Y' \perp Y''$  où  $Y'$  est la réunion des composantes lisses de  $Y$  avec celles où la base de  $p$  est curviligne. Si  $H^1(I_{Y''}(d))$  est nul alors  $(Y, p)$  est dominateur.

*Preuve.* — Elle s'obtient en combinant 4.6 avec 4.3.2 et 4.4.3. ■

### 5. Critères de non-spécialité

5.1. DÉFINITION. —  $N$  et  $d$  étant fixés comme précédemment, on dira que le point  $Y$  de  $H$  [ou par extension  $(Y, C)$  de  $G^0$  ou  $(Y, p)$  de  $G^1$ ] est non spécial si  $H^1(I_Y(d))$  est nul.

On va donner trois conditions suffisantes de non spécialité. Ces conditions suffisantes jouent un rôle décisif dans notre preuve puisqu'elles permettent d'une part d'appliquer les critères de lissité et domination des deux paragraphes précédents et de l'autre d'estimer les dimensions des strates dans les cas délicats. Ces résultats de non spécialité sont loin d'être optimaux et ce sont sans doute eux qui limitent la précision de notre théorème.

5.2. PROPOSITION. — Pour  $d \geq 1$  et  $N \leq 3d - 1$ ,  $W^0$  est égal à la réunion de  $A^{d+2}$  et  $A^{2,2,d+2}$  (cp. [d'A], 4.1; le cas de  $N$  points distincts est dû à B. Gambier, cf. [C]).

*Preuve.* — Les hypothèses sur  $N$  et  $d$  font que  $\chi$  est non négatif. Montrons que  $W^0$  contient la réunion indiquée. Soit  $Y$  un sous-schéma de colongueur  $N$  rencontrant une droite (resp. une conique)  $C$  en  $d+2$  (resp.  $2d+2$ ) points au moins. Si on écrit la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte résiduelle (cf. [aH6]) de  $Y$  relativement à cette courbe  $C$ , on obtient que  $H^1(I_Y(d))$  admet pour quotient  $H^1(I_{Y'', C}(d))$ , où  $I_{Y'', C}$  désigne l'idéal dans  $C$  de l'intersection  $Y'' = Y \cap C$ . Il reste à observer que ce quotient est non nul parce que  $I_{Y'', C}(d)$  est un fibré de degré au plus  $-2$  sur  $C$ . Il reste à traiter le cas d'une conique singulière  $C$  et on peut supposer que  $C$  contient une droite  $D$  avec  $Y \cap C$  de colongueur  $d+1$ . En exploitant cette droite  $D$ , il vient  $H^1(I_Y(d)) = H^1(I_{Y'}(d-1))$  où  $Y'$  est le schéma résiduel et on est ramené au cas précédent car  $Y'$  a  $d+1$  points alignés.

Pour montrer l'inclusion inverse, on raisonne par récurrence. Notons qu'il suffit pour chaque  $d$ , de traiter le cas limite  $N = 3d - 1$ . Pour  $d = 1$ ,  $W^0$  est vide. Pour  $d = 2$ ,  $W^0$  est bien égal à  $A^4$ . Pour  $d = 3$ , on a déjà besoin du :

5.2.1. LEMME. — Soit  $C$  une courbe intègre de degré  $r$  dans  $\mathbb{P}^2$  et  $Y$  un sous-schéma de  $C$  de colongueur  $N$ . Si  $rd - N \geq (r-1)(r-2) - 1$  alors  $H^1(I_{Y, C}(d))$  est nul.

*Preuve.* — Par dualité de Serre sur  $C$ ,  $H^1(I_{Y, C}(d))$  est dual de  $\text{Hom}(I_{Y, C}, \mathcal{O}_C(r-d-3))$  qui est nul pour raison de degré. ■

Soit  $Y$  de colongueur 8 et  $C$  une cubique contenant  $Y$ . Si  $C$  est intègre, d'après le lemme,  $H^1(I_{Y, C}(3))$  est nul et la suite exacte résiduelle permet de conclure. On doit donc traiter le cas où  $Y$  est dans la base d'un système de dimension deux (réseau) de cubiques dégénérées. Si la base du système contient une conique  $C$  alors le réseau ne peut être que le réseau des cubiques contenant  $C$  et  $C$  doit contenir  $Y$ . Si la base est une droite, le résiduel  $Y'$  de  $Y$  vis-à-vis de cette droite est de colongueur au plus trois puisqu'il est contenu dans un réseau de coniques lisses. Donc  $Y$  est dans  $A^5$ .

On raisonne maintenant par récurrence en supposant  $d \geq 4$ . A  $Y$  on associe les nombres  $m_1$  et  $m_2$  définis comme les plus petits tels que  $Y$  soit dans  $A^{m_1}$  et dans  $A^{2, m_2}$ . On suppose donc  $m_1 \leq d+1$  et  $m_2 \leq 2d+1$  et on veut montrer que  $Y$  est non spécial.

Supposons  $m_1 \geq d$ . Alors on exploite la droite correspondante. Le résiduel est de colongueur au plus  $2d-1$ . Il n'est donc pas dans  $A^{2, 2d}$ . Il n'est pas non plus dans  $A^{d+1}$  puisque  $Y$  n'est pas dans  $A^{2, 2d+2}$ . Il vérifie donc l'hypothèse de récurrence.

Supposons  $m_1 = d-1$ . On considère la droite  $D$  correspondante. Si la résiduel de  $Y$  vis-à-vis de  $D$  est sur une conique, cette conique est lisse et on l'exploite. Dans le cas contraire on exploite  $D$ . Dans les deux cas, les hypothèses de récurrence sont vérifiées.

Supposons  $m_1 \leq d-2$ . Si  $m_2 \geq 2d-3$  alors la conique correspondante est lisse (puisque  $m_2 > 2m_1$ ). On conclut en l'exploitant si  $d \geq 5$ , ou si  $d=4$  et  $m_2 \geq 6$ . Si  $d=4$ ,  $m_1=2$ ,  $m_2=5$  alors toute cubique passant par neuf points de  $Y$  est intègre et le lemme permet de conclure.

Si  $m_2 \leq 2d-4$  et  $m_1 \leq d-2$  alors  $d$  vaut au moins 5. Si  $m_1$  vaut 3 on exploite la droite correspondante. Si  $m_1$  vaut 2 et  $m_2$  vaut au moins 6, alors la conique correspondante est lisse et on l'exploite. Sinon toute cubique contenant neuf points de  $Y$  est intègre; on exploite une telle cubique et le lemme permet de conclure. ■

5.3. *Remarque.* — Le lecteur averti aura observé l'analogie de l'énoncé précédent avec le théorème de Castelnuovo (GLP)].

5.4. *VARIANTE.* — Soit  $l \leq d$  et soit  $I$  l'idéal de  $l$  points distincts dont au plus  $(d+1)/2$  sont alignés. Alors  $H^1(I^2(d))$  est nul.

*Preuve.* — Pour  $d=1, 2, 3$  la vérification est facile. Supposons donc  $d \geq 4$  et raisonnons par récurrence. Il suffit de traiter le cas  $l=d$ . Soit  $D$  une droite contenant un maximum, soit  $m_1$ , des points donnés.

Traisons d'abord le cas particulier où  $d$  est pair,  $m_1 = d/2$  et les  $d/2$  autres points sont sur une autre droite. Pour ce cas, on exploite deux fois chaque droite en alternance. Pour le cas général, on exploite deux fois  $D$ . Le résiduel consiste en  $d-m_1$  points triples dont au plus  $(d-1)/2$  sont alignés et l'hypothèse de récurrence s'applique. ■

5.5. *TRANSVERSALITÉ POSTULATION-SINGULARITÉS.*

5.5.1. *PROPOSITION.* — Soit  $m : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$  comme en (2.2.1), avec

$$N = \sum im(i) \leq (d+1)(d+2)/2.$$

Alors le point générique de  $H^m$  représente un sous-schéma curviligne non spécial.

*Preuve.* — Soit  $m_0$  la suite qui vaut 1 en  $N$  et zéro ailleurs. Alors  $H^{m_0}$  est la strate des sous-schémas ponctuels. Son point générique représente un sous-schéma curviligne  $[jB, I]$ , ce qui prouve qu'il est spécialisation des points génériques de tous les  $H^m$  avec  $\sum im(i) = N$ . Par ouverture du rang maximal, il nous suffit donc de trouver un idéal ponctuel de rang maximal : tout idéal emboîté entre deux puissances consécutives d'un idéal maximal convient, il en existe de monomiaux (cf. [a H6], 3.3.1). ■

5.5.2. *Remarque.* — On peut considérer 5.5.1 comme un principe très faible de transversalité singularité-postulation. Un principe fort pourrait dire que  $W'_N$  possède les propriétés stables (cf. [BH 2]) de sa restriction au schéma de Hilbert ponctuel  $H^{m_0}$ .

5.6. APPLICATIONS A LA LISSITÉ. — En combinant 5.2 avec 3.6.1, on obtient :

5.6.1. COROLLAIRE. — Pour  $N \leq 3d-1$ , le lieu singulier de  $G^0$  est contenu dans la réunion de  $G^0 A^{d+2}$  et  $G^0 A^{2, 2d+2}$ . En particulier pour  $N \leq d+1$ ,  $G^0$  est lisse (connexe, cf. 3.2).

En combinant de même avec 3.6.2, on obtient :

5.6.2. COROLLAIRE. — Pour  $N \leq 3d-1$ , le lieu singulier de  $G^1$  est contenu dans la réunion de  $G^1 A^{d+2}$  et  $G^1 A^{2, 2d+2}$  donc dans  $G^1 W^{1, \infty}$ . En particulier pour  $N \leq d+1$ ,  $G^1$  est lisse (connexe).

Enfin en combinant avec 4.7, on obtient :

5.6.3. COROLLAIRE. — pour  $N \leq 3d-1$ ,  $G^1$  n'a pas de composante secondaire (cf. 4.2).

## 6. Dimensions

6.0. On passe en revue tous les sous-schémas introduits précédemment et on calcule ou on majore leur dimension. On en déduit notre minoration de l'originalité de  $W$ .

6.1.1. PROPOSITION (cf. 2.2.2). — Pour  $s \geq 0$ ,  $H^s$  est de codimension  $s$  dans  $H$ .

Pour les estimations de dimension liées aux conditions d'alignement, le résultat de base est :

6.1.2. THÉORÈME [Y]. — Dans le schéma de Hilbert ponctuel  $H_N^{loc}$ , le sous-schéma des sous-schémas contenant un  $p$ -uplet ponctuel curviligne donné est de dimension  $N-p$ .

On en déduit immédiatement :

6.1.3. COROLLAIRE. — Dans le schéma de Hilbert  $H_N$ , le sous-schéma  $H_N[S]$  des sous-schémas contenant un  $p$ -uplet curviligne (non nécessairement ponctuel)  $S$  donné est de dimension  $2N-2p$ .

*Preuve.* — Écrivons  $S = S_1 \cup \dots \cup S_a$  où les  $S_i$  sont ponctuels et pour tout point  $Y$  de  $H_N[S]$  écrivons  $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_a \cup Y'$  où  $Y_i$  est ponctuel et contient  $S_i$ , tandis que  $Y'$  est disjoint de  $S$ . On peut stratifier  $H_N[S]$  par la colongueur  $s$  de  $Y'$ , soit  $H_N[S] = \cup H_N^s[S]$ ; et d'après 6.1.2,  $H_N^s[S]$  est de dimension  $2s + N - s - p = s + N - p$  avec  $s \leq N - p$ . ■

On déduit du corollaire les deux énoncés suivants.

6.1.4 PROPOSITION. —  $A^r$  est de codimension  $r-2$  dans  $H$ .

*Preuve.* — Pour  $r=2$ , il n'y a rien à démontrer. Supposons  $r \geq 3$  et dominons  $A^r$  par le schéma  $B^r$  des couples d'un  $N$ -uplet et d'une droite rencontrant ce  $N$ -uplet en un  $s$ -uplet, avec  $s \geq r$ . On peut raisonner par récurrence descendante sur  $s$ , le cas  $s=N+1$  étant trivial, pour prouver que  $B^s$  est de dimension  $2N-s+2$ . Ainsi suffit-il de traiter l'ouvert  $B_0^r$  de  $B^r$  des couples avec  $r=s$ . Dans ce cas, on projette  $B_0^r$  sur la variété  $A_r^r$  des  $r$ -uplets alignés qui est de dimension  $r+2$  : d'après 6.1.3, les fibres de cette projection sont de dimension  $2N-2r$ , ce qui permet de conclure. ■

6.1.5. PROPOSITION. — Soit  $C$  une courbe plane,  $S$  un sous-schéma curviligne de longueur  $p$  de  $C$ . Alors le sous-schéma de  $H_N$  des sous-schémas emboîtés entre  $S$  et  $C$  est de dimension  $N-p$ .

*Preuve.* — On reprend les notations de la preuve du corollaire et on pose  $H_N^s[S, C] = H_N^s[S] \cap \text{Hilb}^N C$ . Alors d'après le théorème et (3.1),  $H_N^s[S, C]$  est de dimension au plus  $s+N-s-p=N-p$ . ■

6.1.6 COROLLAIRE. — Pour  $d \geq 3$ ,  $A^{2,2d+2}$  est de codimension au moins  $d$  dans  $H$ .

*Preuve.* — Compte tenu de 6.1.4 et 6.1.5, il suffit de traiter le schéma des  $N$ -uplets ayant exactement  $d+1$  points sur une droite  $L$  et  $2d+2$  points sur une conique  $C$  contenant cette droite. Si la conique est réduite, le  $N$ -uplet contient deux  $(d+1)$ -uplets alignés et on montre facilement comme précédemment que de tels  $N$ -uplets n'apparaissent qu'en codimension  $2(d-1) \geq d$ . Si la conique est une droite double, alors le  $N$ -uplet a longueur au moins  $2d+2$  sur  $L$  et cardinal au plus  $d+1$ . Il est donc dans  $H^l$  avec  $l \geq d+1$  et on conclut avec (6.1.1). ■

6.2. DANS  $Z^0$ .

6.2.1. PROPOSITION. —  $Z^{0,\infty}$  est de dimension maximale  $(d^2-d+2)/2$ ,  $G^{0,\infty}$  est de dimension maximale  $(d^2-d+2)/2+N$  et  $W^{0,\infty}$  est de codimension minimale  $(1-\chi)^+ + 2d-1$  dans  $H$ .

*Preuve* (cf. 2.3.3). — La composante irréductible de  $Z^{0,\infty}$  image de  $Z^0[p] \times Z^0[q]$  avec  $2p+q=d$  est de dimension  $p(p+3)/2+q(q+3)/2$ . Cette fonction de  $p$  admet son maximum sur  $[1, (d-1)/2]$  pour  $p=1$ , et c'est  $(d^2-d+2)/2$ . D'après 3.1, il s'ensuit que  $G^{0,\infty}$  est de dimension maximale  $(d^2-d+2)/2+N$ .

Pour  $W^{0,\infty}$ , on remarque que la projection de  $G^0$  vers  $H$  a les fibres de dimension au moins  $(\chi-1)^+$ . Il s'ensuit que la dimension de  $W^{0,\infty}$  est majorée par  $(d^2-d+2)/2+N-(\chi-1)^+$  c'est-à-dire que sa codimension minimale est minorée par  $2d-1+(1-\chi)^+$ . Il suffit pour conclure d'exhiber une composante de  $W^{0,\infty}$  ayant cette codimension. On prend pour ça la réunion générique de  $(d+1)$  points à supports alignés dont  $d$  doubles, avec  $N-(2d+1)$  points sur une courbe de degré  $d-2$ . ■

6.2.2. THÉORÈME (Zariski-Harris). — Pour  $0 \leq l \leq (d-1)(d-2)/2$ , en dehors de  $Z^{0,\infty}$ ,  $Z_{0,l}$  est irréductible de codimension  $l$ , et son point générique représente une courbe ayant  $l$  nœuds.

*Preuve* : on remarque d'abord que  $Z^{0,l}$  est de codimension au plus  $l$  en dehors de  $Z^{0,\infty}$ . Pour cela on considère dans  $H_l \times Z^0$  l'ensemble  $E$  des couples  $(p, C)$  où  $p$  est une partie à  $l$  éléments de  $\mathbb{P}^2$  et  $C$  est une courbe singulière en  $p$ . En dehors de  $Z^{0,\infty}$ , la projection  $E \rightarrow Z^0$  est finie. Il suffit donc de minorer la dimension de  $E$ . Or, sur  $H_l \times Z^0 \times \mathbb{P}^2$ , on dispose de l'idéal tautologique  $I$  (provenant de  $H_l \times \mathbb{P}^2$ ), de son carré  $I^2$ , et du faisceau structural correspondant  $\mathcal{O}/I^2$ . Par ailleurs on dispose, provenant de  $Z^0 \times \mathbb{P}^2$ , du sous-faisceau tautologique  $\mathcal{H}$  (de Hopf) de  $\mathcal{O}(d)$ . En composant avec la restriction, on obtient un morphisme  $m : \mathcal{H} \rightarrow (\mathcal{O}/I^2)(d)$ . Son image directe  $p_{12*} m$  sur  $H_l \times Z^0$  est un morphisme d'un fibré de rang un dans un fibré de rang  $3l$  qui s'annule précisément sur  $E$ , ce qui prouve que  $E$  est de codimension au plus  $3l$ . Comme  $H_l$  est de dimension  $2l$ ,  $Z^{0,l}$  est bien de codimension au plus  $l$ . Maintenant Zariski [Z] a prouvé que si  $\Sigma$  est un système algébrique de courbes réduites de degré  $d$ , de genre arithmétique  $p_a$  et de genre géométrique (genre arithmétique de la normalisée)  $\tilde{p}_a$ , alors la codimension de  $\Sigma$  dans  $Z^0$  majore  $p_a - \tilde{p}_a$  avec égalité seulement dans le cas des courbes nodales.

Or on remarque en utilisant la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow K \rightarrow 0$$

où  $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$  est la normalisation de la courbe  $C$ , que  $p_a - \tilde{p}_a$  est supérieur ou égal au nombre de points singuliers de  $C$  car  $K$  a pour support le lieu singulier. Par suite les composantes irréductibles de  $Z^{0,l} - Z^{0,\infty}$  étant de codimension au plus  $l$  d'après ce qu'on a vu, les courbes génériques correspondantes sont nodales. Mais Harris [j H2] a prouvé qu'il n'y a, pour  $l$  fixé, qu'une seule courbe nodale générique. ■

6.2.3. *Remarque.* — Nous avons signalé ce résultat surtout pour le plaisir; nous n'utiliserons pas l'irréductibilité et n'utiliserons le calcul de dimension que dans des cas faciles.

### 6.3. AUTRES SOUS-SCHÉMAS DE $Z^0$ .

6.3.1. NOTATIONS : désignons par  $V_0$  (resp.  $V_1, V_2, V_3$ ) le sous-ensemble de  $Z^0$  des courbes lisses (resp. ayant un nœud, deux nœuds, un cusp) et pas d'autre singularité, et par  $V_4$  ce qui reste c'est-à-dire  $V_4 = Z^0 - (V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3)$ .

6.3.2. PROPOSITION. —  $V_1, V_2, V_3, V_4$  sont des sous-schémas localement fermés de codimension respectivement 1, 2, 2, 3 et les trois premiers sont irréductibles.

*Preuve.* —  $V_1$  est un ouvert dense dans  $Z^{0,1}$  d'après 6.2.2. De même  $V_2$  est un ouvert dense dans  $Z^{0,2}$ . Pour voir que  $V_3$  est irréductible de codimension deux, on considère le schéma  $T$  des couples  $(z, C)$  où  $z$  est un point double et  $C$  est une courbe admettant un seul point singulier, le lieu singulier (cf. 2.3.1) de  $C$  contenant le point double  $z$ . En projetant  $T$  sur la variété des points doubles, on voit que  $T$  est irréductible de dimension  $3 + d(d+3)/2 - 5$ , et son point générique représente une courbe admettant un cusp pour unique singularité. On conclut sur  $V_3$  en remarquant que  $V_3$  est isomorphe à un ouvert non vide donc dense de  $T$ .

Que reste-t-il dans  $V_4$  : des courbes ayant au moins trois points singuliers, qui sont en codimension trois d'après Zariski-Harris; des courbes ayant deux points singuliers dont

un au moins n'est pas un nœud : elles sont aussi en codimension trois d'après Zariski-Harris; enfin des courbes avec un seul point singulier qui n'est ni un nœud ni un cusp : ces courbes sont dans la projection d'un fermé rare du schéma  $T$  considéré plus haut; elles n'apparaissent donc aussi qu'en codimension trois. ■

6.3.3. COROLLAIRE. — Pour  $d \geq 3$ , le lieu singulier de  $G^0$  est de codimension au moins quatre dans  $G^0$ .

*Preuve.* — La projection du lieu singulier  $\text{Sing } G^0$  ne rencontre pas  $V_0$ . Au-dessus de  $V_1$ , les couples  $(Y, C)$  de  $\text{Sing } G^0$ , doivent être tels que  $Y$  ait colongueur au moins  $d+2 \geq 5$  au nœud. Comme le schéma de Hilbert ponctuel d'un nœud est de dimension un, au-dessus de  $V_1$ ,  $\text{Sing } G^0$  est de codimension relative au moins  $d+1$ , donc de codimension  $d+2$  dans  $G^0$ . Au-dessus de  $V_2$ , de même, les couples  $(Y, C)$  de  $\text{Sing } G^0$  doivent être tels que  $Y$  ait colongueur au moins  $d+2$  aux nœuds et donc  $\text{Sing } G^0$  est de codimension relative au moins  $d$  au-dessus de  $V_2$ , donc de codimension au moins  $d+2$  dans  $G^0$ . Toujours de la même façon, au-dessus de  $V_3$ , les points  $(Y, C)$  de  $\text{Sing } G^0$  doivent être tels que  $Y$  ait colongueur au moins  $d+2$  au cusp de  $C$ . Si  $v$  est la colongueur de  $Y$  au cusp, et  $Y'$  la composante correspondante, alors  $Y'$  doit de plus être spécial de sorte que, pour  $C$  fixée et d'après (5.5),  $Y'$  varie dans un schéma de dimension au plus  $v-2$  (en fait le schéma de Hilbert du cusp est lui aussi de dimension un). Par suite  $\text{Sing } G^0$  est de codimension relative au moins deux au-dessus de  $V_3$  donc de codimension au moins quatre dans  $G^0$ . Reste  $V_4$  : au-dessus de  $V_4 - Z^{0, \infty}$ ,  $\text{Sing } G^0$  est de codimension relative au moins un puisque si  $(Y, C)$  est dedans,  $Y$  doit rencontrer le lieu singulier de  $C$ . Enfin pour  $d \geq 3$ ,  $Z^{0, \infty}$  est de codimension au moins 4. ■

6.3.4. Remarque. S'il est clair qu'on peut améliorer le résultat précédent pour  $d$  grand, en revanche pour  $d=2$  et  $N \geq 4$ ,  $\text{Sing } G^0$  est de codimension 3 dans  $G^0$  : Pour montrer  $\text{codim } \text{Sing } G^0 \geq 3$ , on raisonne comme ci-dessus mais  $V_2, V_3$  et  $V_4$  sont vides et  $Z^{0, \infty}$  est de codimension 3. Après quoi l'égalité résulte de (3.4.1).

#### 6.4. DANS $Z^1$ .

6.4.1. PROPOSITION. —  $Z^{1, \infty}$  est de dimension maximale  $d^2 + d - 2$ ,  $G^{1, \infty}$  est de dimension maximale  $d^2 + d - 2 + N$  et  $W^{1, \infty}$  est de codimension minimale  $d - 1 + (\chi - 2)^-$  dans  $H$ .

*Preuve.* — Les pinces de  $Z^{1, \infty}$  ont dans leur base une courbe de degré disons  $p$ . Pour  $p$  fixé on obtient une partie de  $Z^{1, \infty}$  dont on calcule facilement la dimension : c'est celle de  $Z^0[p] \times Z^1[d-p]$ . Cette fonction de  $p$  atteint son maximum sur  $[1, d-1]$  en 1 et y vaut  $d^2 + d - 2$ . Il s'ensuit que la dimension maximale de  $G^{1, \infty}$  est  $d^2 + d - 2 + N$ .

Pour étudier la dimension de  $W^{1, \infty}$ , considérons dans  $Z^0$  le sous-schéma  $R$  des courbes réductibles. Il est de dimension  $(d^2 + d + 2)/2$ . Son image réciproque  $G_R^0$  dans  $G^0$  est donc de dimension  $(d^2 + d + 2)/2 + N$ . Or l'image réciproque de  $W^{1, \infty}$  dans  $G^0$  est aussi contenue dans  $G_R^0$  et les fibres de la projection correspondante sur  $W^{1, \infty}$  sont de dimension au moins  $1 + (\chi - 2)^+$ . Donc  $W^{1, \infty}$  est de dimension au plus

$$\frac{d^2 + d}{2} + N - (\chi - 2)^+ = 2N - (d + 1) + \chi - (\chi - 2)^+ = 2N - d + 1 - (\chi - 2)^-.$$

Il nous suffit pour conclure d'exhiber une partie de  $W^{1,\infty}$  de cette dimension. C'est le cas de la famille  $A^r$  avec  $r = d + 1 + (\chi - 2)^-$ . En effet si  $Y$  est un sous-schéma paramétré par un point de  $A^r$  et si  $L$  est la droite correspondante, son résiduel vis-à-vis de cette droite est de longueur au plus  $d(d+1)/2 - 2 - (\chi - 2)^+$  ce qui fait que  $Y$  est dans la base d'un pinceau de courbes de degré  $d$ . Comme toute courbe de degré  $d$  contenant  $Y$  doit contenir  $L$ ,  $Y$  est bien dans  $W^{1,\infty}$ . ■

6.4.2. COROLLAIRE. —  $G_N^1$  est irréductible si et seulement si  $N \leq 2d - 1$ .

*Preuve.* — La condition est suffisante d'après (1.2.1) (6.4.1) et (5.6.3). Elle est nécessaire d'après (6.4.1) et (4.1.1). ■

6.4.3. PROPOSITION. — Pour  $l \geq 0$ ,  $Z^{1,l}$  est soit vide soit de codimension au moins  $\min(4l, 4d+1)$  dans  $Z^1$ .

*Preuve.* — Introduisons le schéma  $T_l$  des couples  $(z, p)$  où  $z$  est réunion de  $l$  points simples dans  $\mathbb{P}^2$  et  $p$  est un pinceau utile de courbes de degré  $d$  contenant  $z$  dans leur lieu singulier. On va prouver le :

LEMME. — Pour  $l \leq d$ ,  $3l \leq (d+1)(d+2)/2 - 2$ ,  $T_l$  est vide ou irréductible de dimension  $d^2 + 3d - 2 - 4l$ . De plus pour  $l \leq (d-1)(d-2)/2$ ,  $T_l$  est non vide et pour  $(z, p)$  générique dans  $T_l$ , la base de  $p$  est lisse hors de  $z$ .

*Preuve du lemme.* — Soit  $r$  la partie entière de  $(d+2)/2$ . On considère la première projection de  $T_l$  vers  $H_1$  : comme  $p$  est utile, l'image de cette projection est disjointe de  $A^r$ . Inversement pour  $z$  hors de  $A^r$ , d'après (5.4), le système des courbes singulières en  $z$  est de dimension  $d(d+3)/2 - 3l$  (ce nombre vaut au moins un par hypothèse). Par suite,  $T_l$  est un ouvert d'une grassmannienne de dimension relative  $d^2 + 3d - 2 - 6l$  au-dessus de  $H_1 - A^r$ . Il reste à voir que pour  $l \leq (d-1)(d-2)/2$  le point générique de cette grassmannienne paramètre un pinceau utile dont la base n'a que  $l$  points singuliers.

Pour cela, on choisit une courbe intègre  $C$  ayant exactement  $l$  nœuds : elle existe d'après Zariski-Harris puisque  $l$  est majoré par  $(d-1)(d-2)/2$ . Tout pinceau de courbes singulières contenant  $C$  a les propriétés requises.

*Fin de la preuve de la proposition.* — Pour  $d=1$ ,  $Z^{1,1}$  est vide, il n'y a rien à démontrer. Pour  $d=2$ ,  $Z^{1,2}$  est vide et  $Z^{1,1}$  est de codimension quatre. C'est la variété des pinceaux de coniques dégénérées. Pour  $d=3$ ,  $Z^{1,2}$  est encore vide et  $Z^{1,1}$  est de codimension quatre d'après le lemme. Pour  $d=4$ ,  $Z^{1,5}$  est vide et pour  $l \leq 4$ , le lemme permet de conclure (en fait  $Z^{1,4}$  est aussi vide du moins en caractéristique nulle). Pour  $d \geq 5$ , si on suppose  $l \leq d$ , alors on a  $3l \leq (d+1)(d+2)/2 - 2$  et  $l \leq (d-1)(d-2)/2$ , donc  $Z^{1,l}$  est irréductible non vide de codimension  $4l$ . En particulier pour  $l=d$ , la dernière assertion du lemme assure que  $Z^{1,l'}$ , pour  $l' > d$ , est rare dans l'adhérence de  $Z^{1,d}$ , donc de codimension au moins  $4d+1$ . ■

6.5. MINORATION DE L'ORIGINALITÉ.

6.5.1. Le nombre  $\varepsilon = \varepsilon(d, \chi)$ . C'est le plus petit entier non négatif  $\varepsilon$  vérifiant :

$$(\varepsilon + 1)(|\chi| + \varepsilon + 1) > d + \varepsilon + \chi^-.$$

A  $d$  fixé, la façon dont il dépend de  $\chi$  est visualisée sur la figure 2 :

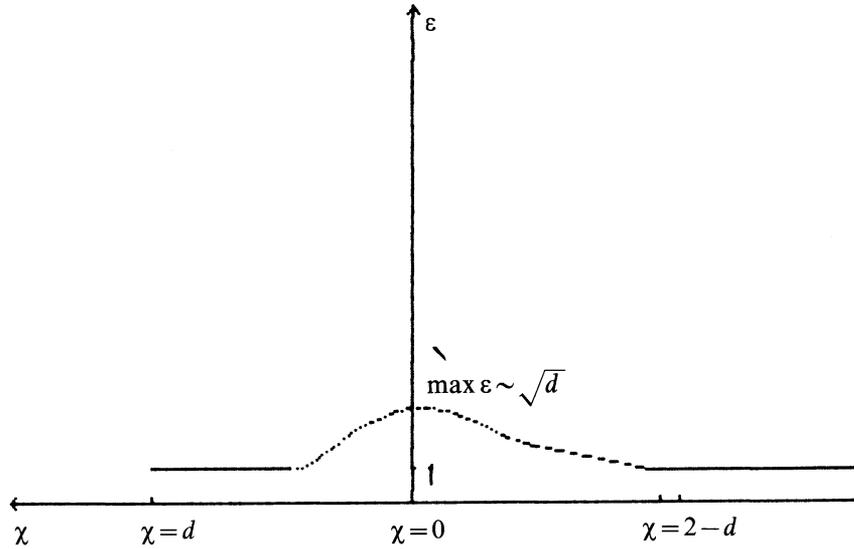


Fig. 2.

6.5.2. PROPOSITION. — Pour  $r = d + 2 + \chi^- + \varepsilon$ ,  $A^r$  est dans  $W^-$ .

Preuve. — Voyons d'abord que  $A^r$  est dans  $W^\varepsilon$  : Soit  $Y$  dans  $A^r$  et  $L$  une droite coupant  $Y$  en  $r + \alpha$  points. On écrit la suite exacte résiduelle correspondante :

$$0 \rightarrow I_Y(d-1) \rightarrow I_Y(d) \rightarrow \mathcal{O}_L(-2 - \chi^- - \varepsilon - \alpha) \rightarrow 0$$

d'où on déduit  $h^1(I_Y(d)) \geq 1 + \chi^- + \varepsilon$ , ce qui signifie bien que  $Y$  est dans  $W^\varepsilon$ .

Or  $A^r$  est de codimension  $d + \chi^- + \varepsilon$  (cf. 6.1.4), tandis que la codimension attendue pour  $W^\varepsilon$  est  $(\varepsilon + 1)(|\chi| + \varepsilon + 1)$ . Par définition de  $\varepsilon$ ,  $A^r$  est donc dans  $W^-$ . ■

6.5.3. COROLLAIRE. — On a l'inégalité  $w^- \leq d + \chi^- + \varepsilon$ .

### 7. Parties suspectes et le cas $\chi \leq 0$

7.0. Dans ce paragraphe, on traite le cas  $\chi \leq 0$ , en majorant la dimension des parties suspectes, c'est-à-dire celles pour lesquelles les critères élaborés précédemment ne permettent pas de conclure.

#### 7.1. PARTIES SUSPECTES DANS $G^0$ ET $W^0$ .

7.1.1. NOTATIONS. — On suppose dans tout le paragraphe 7.1 que  $d$  vaut au moins 3 et que  $\chi$  est non positif. On note  $SG^0$  le lieu singulier de  $G^0$ . En vue de stratifier  $SG^0 - G^{0,\infty}$ , on introduit le schéma  $S^0$  (S comme suspect) des triplets  $(Y', Y'', C)$  où  $C$  est une courbe utile de degré  $d$ ,  $Y''$  un sous-schéma de  $C$  à support dans le lieu singulier de  $C$  et spécial en ce sens que  $H^1(I_{Y''}(d))$  est non nul, et où enfin  $Y'$  est un sous-schéma

de la partie lisse de  $C$  avec longueur  $Y' + \text{longueur } Y'' = N$ . On note de plus  $S_l^0$  la composante de  $S^0$  où la longueur de  $Y''$  est  $l$ .

7.1.2. *Rappel.* — D'après (3.6.3), l'image de  $S^0$  par le morphisme de réunion  $(Y', Y'', C) \mapsto (Y' \cup Y'', C)$  contient  $SG^0 - G^{0,\infty}$ . Pour majorer la dimension de  $W^0 - W^1$ , il ne reste qu'à majorer celle de l'image de  $S^0$  dans  $H$ .

On traite les strates  $S_l^0$  séparément.

7.1.3. *Le cas  $l \leq 3d - 1$ .*

PROPOSITION. — Pour  $l \leq 3d - 1$ , l'image de  $S_l^0$  dans  $H$  est de codimension au moins  $|\chi| + 2d + 1$ .

*Preuve.* — D'après (5.2), la projection  $(Y', Y'', C) \mapsto Y''$  de  $S_l^0$  vers  $H_{N''}$  a son image dans  $A^{d+2} \cup A^{2,2d+2}$ . Soit  $T'$  l'image réciproque par cette projection de  $A^{d+1}$  et  $T''$  le complémentaire de  $T'$  dans  $S_l^0$ . Alors les triplets  $(Y', Y'', C)$  de  $T''$  sont tels que  $Y''$  ait  $2d + 2$  points sur une conique lisse, qui doit être contenue dans  $C$ . Dans les deux cas donc,  $C$  contient une courbe lisse  $L$  de degré un ou deux, et telle que si on écrit  $C = L \cup C'$ , avec  $C'$  de degré  $d - 1$  ou  $d - 2$ , alors  $C'$  ne contient pas  $L$  puisque  $C$  est utile. La projection  $S_l^0 \rightarrow Z^0$  a donc une image de dimension au plus  $(d - 1)(d + 2)/2 + 2$  (ici intervient  $d \geq 3$ ), et ses fibres sont de dimension au plus  $N - (d + 1)$  d'après (6.1.5) car  $Y''$  doit contenir l'un des  $(d + 1)$ -uplets contenus dans  $L$  et à support dans  $C' \cap L$ , qui sont en nombre fini. Il s'ensuit que  $S_l^0$  est de dimension au plus  $2N - |\chi| - 2d - 1$ . ■

7.1.4. *Le cas  $l \geq 3d$ .*

PROPOSITION. — Pour  $l \geq 3d$ , l'image de  $S_l^0$  dans  $H$  est de codimension au moins  $2d + |\chi|/3 + 1$ .

*Preuve.* — On stratifie  $S_l^0$  suivant le cardinal  $l'$  du support de  $Y''$ , soit  $S_l^0 = \bigcup_{l'} T_{l'}$ .

L'image de  $T_{l'}$  dans  $H$  est contenue dans  $H^{l-l'}$ . D'après (5.5.1) et (6.1.1) elle est de codimension au moins  $l - l' + 1$ . Par ailleurs, l'image de  $T_{l'}$  dans  $Z^0$  est dans  $Z^{0,l'}$  qui est de dimension  $d(d + 3)/2 - l'$  (cf. 6.2.2) et les fibres sont de dimension au plus  $N - l'$  par exemple d'après (6.1.5). Par suite l'image de  $T_{l'}$  dans  $H$  est de codimension au moins  $|\chi| + 1 + 2l'$ . On vérifie alors que pour  $l \geq 3d$ ,  $\max(l - l' + 1, |\chi| + 1 + 2l')$  majore  $2d + |\chi|/3 + 1$ . ■

7.1.5. CONCLUSION. — Pour  $d \geq 3$  et  $\chi \leq 0$ , le lieu singulier de  $W^0 - W^1$  est de codimension au moins  $\max(\min(|\chi| + 2d, 2d + |\chi|/3 + 1), |\chi| + 5)$ .

*Preuve.* — Ça résulte de (6.2.1), (1.3.1) et (6.3.3) (7.1.3) (7.1.4). ■

7.2. PARTIES SUSPECTES DANS  $G^1$ .

7.2.1. NOTATIONS. — Ici on suppose  $\chi \leq 1$  et  $N \leq d^2$ . Comme en 7.1, on note  $SG^1$  ce qu'on veut contrôler, à savoir le complémentaire dans  $G^1$  des composantes principales et parasites; et on introduit le schéma  $S^1$  des triplets  $(Y', Y'', p)$  où  $p$  est un pinceau utile de courbes de degré  $d$ ,  $Y''$  un sous-schéma partout singulier de la base de  $p$  à support là où cette base n'est pas curviligne et de plus spécial en ce sens que  $H^1(I_{Y''}(d))$

est non nul, et où enfin  $Y'$  est un sous-schéma dont le lieu singulier est à support dans la partie curviligne de la base de  $p$ , avec longueur  $Y' + \text{longueur } Y'' = N$ . On note de plus  $S_l^1$  la composante de  $S^1$  où la longueur de  $Y''$  est  $l$ .

7.2.2. *Rappel.* — D'après (4.7), l'image de  $S^1$  par le morphisme de réunion  $(Y', Y'', p) \mapsto (Y' \amalg Y'', p)$  contient  $SG^1$ . Pour majorer la dimension de l'image des composantes secondaires dans  $H$ , il suffit de le faire pour  $S^1$ . On traite les strates  $S_l^1$  séparément.

7.2.3. *Le cas  $l \leq 3d - 1$ .* — Si  $l \leq 3d - 1$  alors  $S_l^1$  est vide. En effet, si  $(Y', Y'', p)$  est dans  $S_l^1$ , d'après (5.2),  $Y''$  a  $d + 1$  points sur une droite ou  $2d + 2$  points sur une conique lisse, ce qui est incompatible avec le fait que  $p$  est utile.

7.2.4. *Le cas  $l \geq 3d$ .*

PROPOSITION. — Pour  $l \geq 3d$ , l'image de  $S_l^1$  dans  $H$  est de codimension au moins  $\max(5 - \chi, 2d - \chi/3 + 1)$ .

*Preuve.* — On stratifie  $S_l^1$  suivant le cardinal  $l'$  du support de  $Y''$ , soit  $S_l^1 = \bigcup_{l'} T_{l'}$ .

L'image de  $T_{l'}$  dans  $H$  est contenue dans  $H^{l-l'}$ . D'après (5.5.1) et (6.1.1), elle est de codimension au moins  $l - l' + 1$ . Par ailleurs l'image de  $T_{l'}$  dans  $Z^1$  est dans  $Z^{1, l'}$  qui est de dimension au plus  $d^2 + 3d - 2 - \min(4l', 4d + 1)$ . Quant aux fibres de  $T_{l'} \rightarrow Z^{1, l'}$  elles sont de dimension au plus  $l - l'$  : en effet, une fois  $p$  fixé,  $Y'$  ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, tandis que  $Y''$  peut décrire un schéma de dimension au plus  $l - l'$ . Donc  $T_{l'}$  est de dimension au plus  $2N + 2\chi - 4 + l - l' - \min(4l', 4d + 1)$ . Il reste à minorer le minimum  $m$  de

$$\max(l - l' + 1, -2\chi + 4 + \min(4l', 4d + 1) + l' - l)$$

pour  $1 \leq l' \leq l$  et  $l \geq 3d$ .

En minorant le max par la demi-somme, on obtient une minoration par  $3 - \chi + 2 \min(l', d)$  ce qui prouve  $m \geq 5 - \chi$  et permet de conclure pour  $l' \geq d$ . Pour  $l' \leq d$ , on minore le max des deux fonctions linéaires de  $l'$  par leur valeur là où elles sont égales, i.e. pour  $(2l + 2\chi - 3)/6$ . On obtient une minoration par  $2l/3 - \chi/3 + 3/2$  donc par  $2d - \chi/3 + 1$ . ■

7.2.5. CONCLUSION. — Pour  $d \geq 3$ ,  $\chi \leq 1$ , les composantes secondaires ont leur image de codimension au moins  $\max(5 - \chi, 2d - \chi/3 + 1)$  dans  $H$ .

7.3. LE CAS  $\chi \leq 0$ .

7.3.1. THÉORÈME. — Soit  $d \geq 1$  et  $N \geq 1$  avec  $\chi = (d + 1)(d + 2)/2 - N \leq 0$ . Alors :

- (i)  $W^0$  est irréductible génériquement lisse de codimension  $|\chi| + 1$ .
- (ii) Pour  $d \geq 3$ , le lieu singulier de  $W^0 - W^1$  est de codimension au moins  $\max(|\chi| + 5, \min(|\chi| + 2d, 2d + |\chi|/3 + 1))$ .
- (iii) Pour  $N \leq d^2$  (ce qui entraîne  $d \geq 4$ ), en dehors d'un fermé de codimension au moins  $\min(|\chi| + d + 1, \max(|\chi| + 5, 2d + |\chi|/3 + 1))$  dans  $H$ ,  $W^1$  est irréductible génériquement lisse de codimension  $2|\chi| + 4$ . En particulier pour  $0 \leq -\chi \leq d - 4$ ,  $W^1$  est irréductible génériquement lisse de codimension  $2|\chi| + 4$ .

(iv) Pour  $d \geq 1$  et  $(d + 1)(d + 2)/2 \leq N$ ,  $W^-$  est de codimension au moins  $\min(2|\chi| + 5, |\chi| + d + 1, \max(|\chi| + 5, 2d + |\chi|/3 + 1))$ .

*Preuve.* — (i) Résulte de (3.2), (3.3) et (1.3.1).

(ii) Est 7.1.5.

(iii) La dimension de  $W^{1,\infty}$  est majorée en 6.4.1 et celle des composantes secondaires en 7.2.5. (iii) résulte alors de (4.1.1) (4.5.1) et (1.3.1).

(iv) Pour  $d \geq 4$  et  $N \leq d^2$ , (iv) résulte de (i), (ii), (iii) et (1.4.2). Pour  $d \geq 3$  et  $N \geq d^2 + 1$ , (i) et (ii) restent valables et  $W^1$  se réduit à  $W^{1,\infty}$  qui est de codimension  $|\chi| + d + 1$  (cf. 6.4.1). Par suite  $W^-$  est même de codimension au moins  $\min(|\chi| + d + 1, \max(|\chi| + 5, 2d + |\chi|/3 + 1))$ . Pour  $d = 1$ ,  $W^1$  est vide et  $W^0$  est lisse de codimension  $|\chi| + 1$ , donc  $W^-$  est vide. Enfin pour  $d = 2$ ,  $W^1$  est égal à  $W^{1,\infty}$  donc de codimension  $|\chi| + d + 1$  et on conclut par 6.3.4. ■

## 8. Liaison et postulation

8.0. Il est facile de voir que la liaison des sous-schémas de codimension deux dans  $\mathbb{P}^2$  respecte la postulation au sens ensembliste (cf. proposition 8.2). Le point de vue schématique requiert un effort supplémentaire, dont rend compte le théorème 8.4. On ne traite ici que le cas de liaison par courbes de même degré bien que le cas général ne semble pas présenter de difficulté supplémentaire.

8.1. LA CONSTRUCTION DE FERRAND. — Soient  $Y'$  et  $Y''$  deux sous-schémas localement Cohen-Macaulay de codimension deux dans  $\mathbb{P}^n$ , liés dans l'intersection complète  $X$  de deux hypersurfaces de degré  $l$  de  $\mathbb{P}^n$  et d'équations  $f$  et  $g$ . On suppose que  $I_{Y'}$  admet la résolution localement libre

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} I_{Y'} \rightarrow 0$$

qui reçoit la résolution de Koszul de  $I_X$  :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O}(-2l) & \xrightarrow{\begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix}} & 2\mathcal{O}(-l) & \xrightarrow{(f, g)} & I_X \rightarrow 0 \\ & & \downarrow j_2 & & \downarrow j_1 & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & I_{Y'} \rightarrow 0 \end{array}$$

Alors  $I_{Y''}$  admet la résolution :

$$0 \rightarrow B^v(-2l) \xrightarrow{\begin{bmatrix} \alpha^v(-2l) \\ j_1^v(-2l) \end{bmatrix}} A^v(-2l) \oplus 2\mathcal{O}(-l) \rightarrow I_{Y''} \rightarrow 0.$$

*Preuve.* — L'énoncé correspondant pour les faisceaux structuraux se trouve dans [PS], § 2.5 (voir aussi [Bu] § 6.1.10). Il ne reste qu'à écarter les termes redondants (cf. [Ra], § 1.10) : la résolution donnée par [PS] est la suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-2l) \xrightarrow{u} B^v(-2l) \oplus \mathcal{O}(-2l) \xrightarrow{v} A^v(-2l) \oplus 2\mathcal{O}(-l) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{Y''} \rightarrow 0$$

avec

$$u = \begin{bmatrix} -\beta^v(-2l) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{bmatrix} -\alpha^v(-2l) & 0 \\ j_1^v(-2l) & \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Il reste à montrer qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 B^v(-2l) \oplus \mathcal{O}(-2l) & \xrightarrow{u} & A^v(-2l) \oplus 2\mathcal{O}(-l) \\
 \searrow \text{coker } u & & \nearrow \begin{bmatrix} -\alpha^v(-2l) \\ \beta^v(-2l) \end{bmatrix} \\
 & & B^v(-2l)
 \end{array}$$

Un morphisme qui fait de  $B^v(-2l)$  le conoyau de  $u$  est  $(1, \beta^v(-2l))$  et on peut vérifier que le diagramme correspondant est commutatif. ■

Le même résultat vaut évidemment avec paramètres pourvu que l'espace des paramètres soit réduit (et  $X, Y', Y''$  plats).

8.2. PROPOSITION. — Si  $Y'$  et  $Y''$  sont deux sous-schémas de colongueur  $N'$  et  $N''$  de  $\mathbb{P}^2$ , liés dans l'intersection complète  $X$  de deux courbes de degré  $l$ , alors pour tout  $d$  on a :

$$h^0(I_{Y'}(d)) = h^1(I_{Y''}(2l-d-3)) - h^0(\mathcal{O}(d-2l)) + 2h^0(\mathcal{O}(d-l))$$

*Preuve.* — On utilise les suites exactes de 8.1 en supposant de plus que  $B$  est une somme directe de fibrés en droites. Les suites longues de cohomologie donnent les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 h^0(I_{Y'}(d)) &= h^0(B(d)) + h^1(A(d)) - h^0(A(d)) \\
 h^1(I_{Y''}(2l-d-3)) &= h^1(A^v(-d-3)) + h^2(B^v(-d-3)) \\
 &\quad - h^2(A^v(-d-3)) - 2h^2(\mathcal{O}(2-d-3)) + h^2(\mathcal{O}(2l-d-3)).
 \end{aligned}$$

Par dualité de Serre, on en déduit la formule annoncée. ■

8.3. DIAGRAMME DE LIAISON RELATIVE. — Pour exprimer que la liaison respecte schématiquement la postulation, on va introduire la notion de diagramme de liaison relative (DLR) (cf. [Bu], § 6.3) : c'est un diagramme :

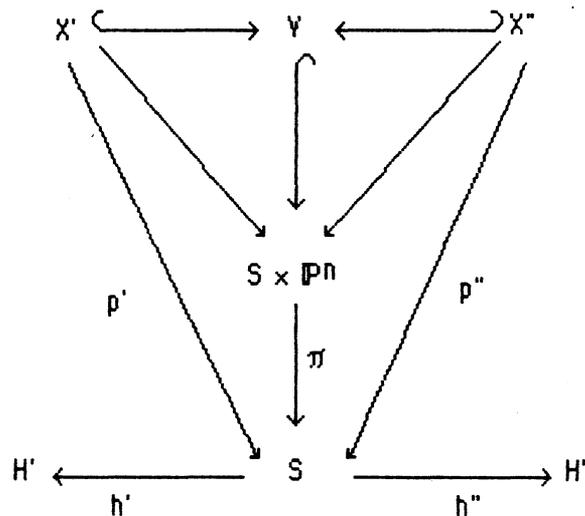


Fig. 3.

où  $X'$ ,  $V$ ,  $X''$  sont  $S$ -propres et  $S$ -plats,  $V$  est une intersection complète (relative) dans  $S \times \mathbb{P}^n$  (dans la suite, on ne considérera que le cas où  $n=2$ ,  $V$  est de codimension deux, intersection de deux courbes relatives de même degré  $l$ );  $X'$  et  $X''$  sont liés dans  $V$  (cf. [Bu], § 6. 3). Enfin  $h'$  et  $h''$  sont les morphismes de  $S$  dans les schémas de Hilbert associés à  $p'$  et  $p''$ .

Dans notre situation,  $p'$  et  $p''$  sont finis et si on suppose  $S$  connexe, on peut remplacer  $H'$  et  $H''$  par  $H_{N'}$  et  $H_{N''}$ , où  $N'$  et  $N''$  sont les degrés de  $p'$  et  $p''$ . On dira alors que le diagramme est de type  $(l, N', N'')$ .

8. 4. THÉORÈME DE LIAISON-POSTULATION. — On considère un DLR de type  $(l, N', N'')$  comme ci-dessus avec  $S$  intègre. Pour chaque entier  $d$  avec  $1 \leq d \leq 2l-4$ , on définit

$$m = \chi(N', d)^+ - \chi(N'', 2l-d-3)^- - 2h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-l)).$$

Pour  $i \geq 0$ , si  $i \leq -m-1$  alors  $h^*W_{N'}^i[d]$  égale  $S$ , sinon  $h^*W_{N'}^i[d]$  égale  $h''^*W_{N''}^{i+m}[2l-d-3]$ .

8. 5. Remarques. — (a) Comme cas particuliers remarquables, on obtient :

— si  $\chi(N', l-1) \geq 0$  alors  $h^*W_{N'}[l-1] = h''^*W_{N''}[l-2]$  car  $\chi(N', l-1) + \chi(N'', l-2) = 0$ ;

— si  $\chi(N', l) \geq 2$  alors  $h^*W_{N'}[l] = h''^*W_{N''}[l-3]$  car  $\chi(N', l) + \chi(N'', l-3) = 2$ .

(b) L'hypothèse selon laquelle  $S$  est intègre est vraisemblablement superflue.

(c) Lorsque  $d$  n'est pas dans l'intervalle  $[1, 2l-4]$ , les stratifications sont triviales.

8. 6. Preuve. — L'affirmation est locale dans  $S$ . On va adapter dans la mesure du possible la preuve de 8. 2. Pour cela, il nous faut d'abord étendre la construction de Ferrand et, pour commencer, il nous faut une présentation

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} I_{X'} \rightarrow 0$$

de  $I_{X'}$  avec  $B$  somme directe de fibrés en droites et  $A$  localement libre. Pour prouver l'existence d'une telle suite exacte, il suffit de traiter le cas de l'idéal universel sur  $H_{N'} \times \mathbb{P}^2$ . L'existence d'une surjection  $B \rightarrow I_{X'} \rightarrow 0$ , avec  $B$  de la forme  $\mathcal{O}^r(-n)$  résulte du théorème d'annulation de Serre, et le fait que le noyau correspondant soit localement libre du fait que  $X'$  est Cohen Macaulay ([EGA], IV 6. 8. 3. i), car  $S$  est ici lisse [F]. Quitte à modifier  $A$  et  $B$ , on peut supposer que la résolution ainsi construite reçoit la résolution de Koszul de  $I_V$ , comme en 8. 1. On obtient comme en 8. 1 un morphisme injectif :

$$0 \rightarrow B^v(-2l) \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\alpha^v(-2l) \\ j^v(-2l) \end{bmatrix}} A^v(-2l) \oplus 2\mathcal{O}(-l)$$

dont le conoyau  $K$  a pour fibre  $I_{X''(s)}$  au-dessus de tout point  $s$  de  $S$ . Il s'ensuit que  $K$  est  $S$ -plat puisque  $S$  est intègre ([rH1], preuve de III. 9. 9). Comme les idéaux sont stables et  $S$  est réduit, il s'ensuit que, localement dans  $S$ ,  $K$  est isomorphe à  $I_{X''}$ . On a donc la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbf{B}^v(-2l) \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\alpha^v(-2l) \\ j^v(-2l) \end{bmatrix}} \mathbf{A}^v(-2l) \oplus 2\mathcal{O}(-l) \rightarrow \mathbf{I}_{X''} \rightarrow 0.$$

Pour comparer les images directes supérieures de  $\mathbf{I}_{X''}(2l-d-3)$  et  $\mathbf{I}_{X'}(d)$ , on travaille dans les catégories dérivées en considérant les images directes totales. En raison des suites exactes ci-dessus, on sait que  $\mathbb{R}\pi_* \mathbf{I}_{X''}(2l-d-3)$  est le mapping cone du morphisme

$$\mathbb{R}\pi_*(\mathbf{B}^v(-d-3)) \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\mathbb{R}\pi_*(\alpha^v(-d-3)) \\ -\mathbb{R}\pi_*(j^v(-d-3)) \end{bmatrix}} \mathbb{R}\pi_* \mathbf{A}^v(-d-3) \oplus 2\mathbb{R}\pi_*(\mathcal{O}(l-d-3))$$

tandis que  $\mathbb{R}\pi_* \mathbf{I}_{X'}(d)$  est le mapping cone de

$$\mathbb{R}\pi_*(\mathbf{A}(d)) \xrightarrow{\mathbb{R}\pi_*(\alpha(d))} \mathbb{R}\pi_*(\mathbf{B}(d))$$

Comme A et B sont localement libres, le théorème de dualité projective (e.g. [rH2], III.5.1.) dit que  $\mathbb{R}\pi_*(\alpha^v(-d-3))$  s'obtient en transposant  $\mathbb{R}\pi_*(\alpha(d))$ , et  $\mathbb{R}\pi_*(j^v(-d-3))$  en transposant  $\mathbb{R}\pi_*(j_1(d))$ . Pour décrire la situation en termes de complexes, commençons par remarquer que tout morphisme de la catégorie dérivée de celle des complexes de faisceaux cohérents peut localement être représenté par un morphisme de la catégorie des complexes entre deux complexes « économiques » au sens suivant : L est économique si  $H^i(L) = 0 \Rightarrow L^i = 0$ . Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que tout complexe reçoit un quasi-isomorphisme dont la source est un complexe économique. Comme B est une somme directe de fibrés en droites, on peut donc représenter  $\mathbb{R}\pi_*(\alpha(d))$  et  $\mathbb{R}\pi_*(j_1(d))$  par les deux morphismes de complexes du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbf{A}^0 & \xrightarrow{a_0} & \mathbf{A}^1 & \xrightarrow{a_1} & \mathbf{A}^2 \rightarrow 0 \\ \mathbb{R}\pi_*(\alpha(d)) \downarrow \alpha_0 & & \downarrow 0 & & \downarrow \alpha_2 & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbf{B}^0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbf{B}^2 \rightarrow 0 \\ \mathbb{R}\pi_*(j_1(d)) \uparrow \iota_0 & & \uparrow 0 & & \uparrow \iota_2 & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbf{S}^0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbf{S}^2 \rightarrow 0 \end{array}$$

où d'ailleurs l'un de  $\mathbf{S}^0$  ou  $\mathbf{S}^2$  est nul. D'où, par mapping cone, un représentant de  $\mathbb{R}\pi_* \mathbf{I}_{X'}(d)$  :

$$0 \rightarrow \mathbf{A}^0 \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}} \mathbf{A}^1 \oplus \mathbf{B}^0 \xrightarrow{\begin{matrix} (a_1, 0) & \alpha_2 \end{matrix}} \mathbf{A}^2 \rightarrow \mathbf{B}^2 \rightarrow 0.$$

Par suite, la stratification  $h'^* \mathbf{W}_{N'}^*[d]$  est celle définie par les idéaux de Fitting de  $a_1$ , à un décalage près.

De même, par mapping cone, un représentant de  $\mathbb{R}\pi_* \mathbf{I}_{X''}(2l-d-3)$  est :

$$0 \rightarrow \mathbf{B}^{2v} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \alpha_2^v \\ \iota_2^v \end{bmatrix}} \mathbf{A}^{2v} \oplus \mathbf{S}^{2v} \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_1^v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \mathbf{A}^{1v} \oplus \mathbf{B}^{0v} \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_0^v & \alpha_0^v \\ 0 & \iota_0^v \end{bmatrix}} \mathbf{A}^{0v} \oplus \mathbf{S}^{0v} \rightarrow 0$$

et on voit de même que la stratification  $h''* \mathbf{W}_{N''}^*(2l-d-3)$  est définie par les idéaux de Fitting de  $a^v$  donc aussi de  $a_1$ , à un décalage près. Ainsi les stratifications  $h'^* \mathbf{W}_{N'}^*[d]$  et  $h''* \mathbf{W}_{N''}^*[2l-d-3]$  coïncident schématiquement modulo un décalage, qui est bien celui annoncé d'après 8.2. ■

### 9. Le cas $\chi \geq 1$

9.0. On achève ici la preuve de notre résultat principal. Les ingrédients sont le résultat pour  $\chi \leq 0$  (7.3.1) et la liaison.

#### 9.1. DIMENSION DE $W^0$ .

PROPOSITION. — Pour  $\chi \geq 1$ , on a :  $\text{codim } W^0 \geq \min(\chi + 1, d)$ .

Preuve. — Les cas avec  $d \leq 2$  ou  $d=3$ ,  $N \leq 8$  résultent de (5.2) (6.1.4) et (6.1.5). Voyons maintenant le cas  $\chi=1$  :  $W^0$  est alors l'image de  $G^1$ . Or  $W^{1, \infty}$  est de codimension  $d$  (cf. 6.4.1), et la codimension dans  $H$  des composantes secondaires est au moins 4 (cf. 7.2.5). D'après 1.3.1,  $W^0$  est irréductible de codimension 2.

On peut désormais supposer  $d \geq 4$  et  $\chi \geq 2$ .

Montrons maintenant qu'il suffit de traiter les cas avec  $\chi \leq d-1$ . En effet, en considérant la réunion du (ou d'un) point générique de  $W_{N-1}^0[d]$  avec le point générique de  $\mathbb{P}^2$ , on constate que  $\text{codim } W_N^0$  est une fonction non croissante de  $N$ .

On suppose donc maintenant  $\chi \leq d-1$ . D'après 6.2.1, on peut se placer en dehors de  $W^{0, \infty}$ , et d'après 7.3.1.i en dehors de  $W_N^0[d-3]$ .

Posons donc :  $V^l = W_N^l[d] - (W^{0, \infty} \cup W_N^0[d-3])$ . Il nous suffit de montrer que pour  $l \geq 0$ ,  $V^l$  est de codimension au moins  $\chi + 1$ . On utilise la  $(d, d)$  liaison. Soit le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G_{N'}^{1, l}[d] & \xleftarrow{q} & F^{1, l} \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ W_{N'}^l[d-3] & & V^l \end{array}$$

où  $F^{1, l}$  est l'image inverse de  $V^l$  dans  $G_N^1[d]$ , où  $q$  est la restriction de l'isomorphisme de liaison (Bu, 6.3.6) à  $F^{1, l}$ . D'après 8.2,  $q$  prend ses valeurs dans l'image réciproque, notée  $G_{N'}^{1, l}[d]$  de  $W_{N'}^l[d-3]$  dans  $G_N^1[d]$ . Il ne reste qu'à majorer les dimensions :

$$\dim W_{N'}^l[d-3] \leq N' + d(d-3)/2 \text{ d'après 7.3.1.i.}$$

La dimension des fibres de  $p'$  est  $(d+1)(d+2) - 2N' - 4$ , du moins sur l'image de  $q$  : en effet,  $V^l$  ne rencontrant pas  $W_N^0[d-3]$ ,  $p' \circ q(F^{1, l})$  ne rencontre pas  $W_N^0[d]$ . Enfin la dimension des fibres de  $p$  est au moins  $(d+1)(d+2) - 2N - 2$ . D'où :

$$\dim F^{1, l} \leq N' + d(d-3)/2 + (d+1)(d+2) - 2N' - 4$$

et

$$\dim V^l \leq 2N + 2 - N' - 4 + d(d-3)/2 = 2N - \chi - 1. \blacksquare$$

9.2. THÉORÈME. — On suppose ici  $d \geq 1$  et  $N \leq d(d+3)/2$  (i.e.  $\chi \geq 1$ ). Alors, en dehors d'un fermé de codimension  $\min(d, 2\chi + 5)$ ,  $W^0 - W^1$  et  $W^1$  sont lisses connexes de codimension  $\chi + 1$  et  $2\chi + 4$ .

Preuve. — Il suffit de prouver l'énoncé pour  $\chi \leq d-2$ , d'après 9.1, et sur l'ouvert  $V = H_N - W_N^0[d+1] - W_N^0[d-2] - W^{1, \infty}[d+1]$ . En effet  $W_N^0[d+1]$  est de codimension au

moins  $d+1$  d'après 9.1;  $W_N^0[d-2]$  est de codimension  $2d+2-\chi$  d'après 7.3.1.i;  $W^{1,\infty}[d+1]$  est de codimension  $d$  d'après 6.4.

On utilise alors la  $(d+1, d+1)$  liaison : on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{q} & G_{N'}^1[d+1] \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ V & & H_{N'} \end{array}$$

où  $F$  est l'ouvert des pinceaux utiles au-dessus de  $V$  dans  $G_N^1[d+1]$  et où  $q$  est l'isomorphisme de liaison. Par définition de  $V$ ,  $p$  est une submersion, et d'après 8.2,  $p'$  est une submersion sur l'image de  $q$ . On a donc, en utilisant 8.4 :

$p^{-1}(W_N^-[d]) = q^{-1}p'^{-1}(W_{N'}^-[d-1])$ . D'après 7.3.1.iv,  $p^{-1}(W_N^-[d])$  est donc de codimension au moins  $\min(2|\chi|+5, d)$ . Il en est donc de même pour  $W_N^-[d]$ . L'irréductibilité de  $W^0$  et  $W^1$  en dehors de la même codimension résulte de l'énoncé analogue 7.3.1 dans  $H_{N'}$ , et du fait que  $p'$  est une submersion sur l'image de  $F$ . ■

## 10. Conclusion

Les résultats obtenus sont évidemment incomplets. Il faudrait être plus téméraire que nous pour considérer qu'ils constituent une « évidence » en faveur de l'.

*Hypothèse.* — La majoration 6.5.3 est optimale, autrement dit on a :  $w^- = d + \chi^- + \varepsilon$ .

Cette hypothèse est démontrée pour  $\chi$  grand et aussi pour  $\chi$  négatif de l'ordre de  $d$ , et l'examen des preuves que nous avons données conduit à penser que la minoration

$$w^- \geq \min(2|\chi|+5, d + \chi^- + \varepsilon)$$

est très vraisemblable. Bien entendu, la borne  $2|\chi|+5$  est tout à fait artificielle puisqu'elle correspond au choix que nous avons fait de n'aborder l'étude ni de  $W^2$  ni des singularités de  $W^1$ . D'un autre côté, il faut observer que ce choix n'est pas tout à fait fortuit : les méthodes que nous avons utilisées pour étudier  $G^0$  et  $G^1$  ne s'adaptent pas sans mal à  $G^2$  dans la mesure où  $G^2 \rightarrow Z^2$  n'est plus dominant. Il semble alors nécessaire pour étudier  $W^2$  de recourir à la liaison, et la difficulté qu'on entrevoit est que les configurations parasites engendrent par liaison des configurations qui ne le sont plus et qu'il convient donc de maîtriser.

Rappelons aussi que la détermination de  $w^-$  ne constitue qu'un objectif intermédiaire; une description plus explicite de  $W^-$  nous semble tout autant digne d'intérêt, le prototype pour une telle description étant constitué par 5.2.

Pour terminer, rassemblons quelques-uns des problèmes que nous n'avons pas résolus :

10.1. Étude de la stratification de  $Z^0$  par la longueur du lieu singulier : dimension et composantes irréductibles des strates, incidence, propriétés stables.

10.2. Même chose pour  $Z^1$ ; pour  $Z^1$  compléter aussi l'étude de la stratification introduite en 2.4, en particulier améliorer 6.4.3.

- 10.3. Compléter l'étude de la stratification de  $H$  par l'alignement (2.5).
- 10.4. Calculer la dimension des schémas de Hilbert locaux des courbes planes (singulières), problème abordé dans [BGS]. Une bonne solution commune de 10.1 et 10.4 permettrait d'améliorer sensiblement nos résultats du paragraphe 6.3 et sans doute de calculer  $w^-$  pour  $\chi \leq -d$ .
- 10.5. Étudier les stratifications des schémas de Hilbert ponctuels par la postulation. En particulier améliorer 5.5.
- 10.6. Donner plus de généralité au théorème 8.4, en particulier traiter le cas où la base est non réduite.
- 10.7. Étendre nos résultats à  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 3$ ; en particulier calculer la codimension de  $W^0$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [A] J. ALEXANDER, *Surfaces rationnelles non spéciales dans  $\mathbb{P}^4$* , Preprint, Nice, 1986.
- [d'A] J. D'ALMEIDA, *Courbes de l'espace projectif : séries linéaires incomplètes et multisécantes* [*Journal für die reine und ang. Math.* (à paraître)].
- [AIK] A. B. ALTMAN, T. IARROBINO et S. L. KLEIMAN, *Irreducibility of the Compactified Jacobian* (*Proc. of the Nordic Summer School, N.A.V.F., Symp. in Math.*, Oslo, 1976).
- [AC] E. ARBARELLO et M. CORNALBA, *A few Remarks about the Variety of Irreducible Plane Curves of Given Degree and Genus* (*Ann. Scient. E.N.S.*, Paris, vol. 16, 1983, p. 467-488).
- [eBH] E. BALLICO et A. HEFEZ, *On the Galois Group Associated to Generically Etale Morphisms* (to appear).
- [jB] J. BRIANCON, *Description de  $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$*  (*Invent. Math.*, vol. 41, 1977, p. 45-89).
- [BGS] J. BRIANCON, M. GRANGER et J. P. SPEDER, *Sur le schéma de Hilbert d'une courbe plane* (*Ann. Scient. E.N.S.*, 4<sup>e</sup> série, 14, 1981, p. 1-25).
- [BH1] J. BRUN et A. HIRSCHOWITZ, *Droites de saut des fibrés stables de rang élevé sur  $\mathbb{P}^2$*  (*Math. Zeit.*, vol. 181, 1982, p. 171-178).
- [BH2] J. BRUN et A. HIRSCHOWITZ, *Variétés des droites sauteuses du fibré instanton général* (*Compos. Math.*, vol. 53, 1984, p. 325-336).
- [BH3] J. BRUN et A. HIRSCHOWITZ, *Sur la stratification par la postulation du schéma de Hilbert de  $\mathbb{P}^2$* , Preprint n° 51, Nice, 1984.
- [BH4] J. BRUN et A. HIRSCHOWITZ, *Le problème de Brill-Noether pour les fibrés semi-stables de rang deux sur  $\mathbb{P}^2$*  (en préparation).
- [BH5] J. BRUN et A. HIRSCHOWITZ, *Restrictions planes du fibré instanton général* (en préparation).
- [Bu] R. O. BUCHWEITZ, *Thèse*, Orsay, 1981, *Déformations de diagrammes. Déploiements et singularités très rigides. Liaison algébrique*.
- [C] COOLIDGE, *Algebraic Plane Curves*, Dover Publication. Inc., New York, 1959.
- [E] L. EIN : *Hilbert Scheme of Smooth Space Curves* (*Ann. E.N.S.*, Paris, vol. 19, 1986, p. 469-478).
- [EH] D. EISENBUD et J. HARRIS, *A Simpler Proof of the Gieseker-Petri Theorem on Special Divisors* (*Invent. Math.*, 74, 1983, p. 269-280).
- [ELB] G. ELENCAWAG et P. LE BARZ, *Détermination de l'Anneau de Chow de  $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$*  (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 301, 1985, p. 635-638).
- [ES1] G. ELLINGSRUD et S. A. STROMME, *On the Homology of the Hilbert Scheme of Points in the Plane* (*Invent. Math.*, 87, 1987, p. 343-352).
- [ES2] G. ELLINGSRUD et S. A. STROMME, *On the Chow Ring of  $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$* , Conférence de Rome, juin 1985.
- [F] J. FOGARTY, *Algebraic Families on an Algebraic Surface* (*Amer. J. Math.*, vol. 90, 1968, p. 511-521).

- [G] D. GIESEKER, *Special Divisors and Stables Curve* (*Invent. Math.*, vol. 66, 1982, p. 251-275).
- [GL] M. GREEN et R. LAZARFELD, *Deformation Theory, Generic Vanishing Theorems, and Some Conjectures of Enriques, Catanese and Beauville*, Preprint.
- [Gr] A. GROTHENDIECK, *Techniques de construction en géométrie algébrique (Les schémas de Hilbert. Sémin. Bourbaki, Exposé, 221, 1960-1961)*.
- [EGA] A. GROTHENDIECK et J. A. DIEUDONNÉ, *Éléments de Géométrie Algébrique*.
- [GLP] L. GRUSON, R. LAZARFELD et Ch. PESKINE, *On a Theorem of Castelnuovo and on the Equations Defining Space Curves* (*Invent. Math.*, vol. 72, 1983, p. 491-506).
- [jH1] J. HARRIS, *Curves in Projective Spaces* (*Sem. Math. Sup.*, 1982, Presses Univ., Montréal).
- [jH2] J. HARRIS, *On the Severi Problem* (*Invent. Math.*, vol. 84, 1986, p. 445-461).
- [jH3] J. HARRIS, *The Genus of Space Curves* (*Math. Ann.*, 249, 1980, p. 191-204).
- [rH1] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977)*.
- [rH2] R. HARTSHORNE, *Residues and Duality (Lecture Notes in Maths., 20, Springer-Verlag, Heidelberg, 1966)*.
- [HMS] R. HERNANDEZ, R. MALLAVIBARRENA et I. SOLS, *An Algebraic Proof of the Uniform Position Principle*, Preprint.
- [aH1] A. HIRSCHOWITZ, *Rank Techniques and Jump Stratifications*, Prépublication n° 50, Université de Nice, 1984 [*Proceedings du Colloque de Bombay (à paraître) 1984*].
- [aH2] A. HIRSCHOWITZ, *Sections planes et multiséchantes des courbes gauches génériques principales (Space Curves, Proceedings Rocca di Papa, 1985, Lect. Notes in Math. (à paraître))*.
- [aH3] A. HIRSCHOWITZ, *Quelques exemples de surfaces rationnelles dans  $\mathbb{P}^n$*  (en préparation).
- [aH4] A. HIRSCHOWITZ, *Le groupe de Chow équivariant* (*C.R. Acad. Sc., Paris, t. 298, série 1, n° 5, 1984, p. 87-89*).
- [aH6] A. HIRSCHOWITZ, *La méthode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables* (*Manus. Math.*, vol. 50, 1985, p. 337-388).
- [I] A. IARROBINO, *Punctual Hilbert Schemes A.M.S.*, memoirs n° 188, 1977.
- [KL] G. KEMPF et D. LAKSOV, *The Determinantal Formula of Schubert Calculus* (*Acta Math.*, vol. 132, 1973, p. 153-162).
- [K] J. O. KLEPPE, *Hilbert-flag Schemes*, Preprint, Oslo, 1981.
- [rL] R. LAZARFELD, *Brill-Noether-Petri without degeneration*, Preprint U.C.L.A. 1985.
- [LB] P. LE BARZ, *Platitude et non platitude de certains sous-schémas de  $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^n$*  (*Journal für die reine und angew. Math.*, 348, 1984, p. 116-134).
- [dP] D. PERRIN, *Courbes passant par  $m$  points généraux de  $\mathbb{P}^3$*  (Thèse, Orsay, 1986).
- [PS] Ch. PESKINE et L. SZPIRO, *Liaison des variétés algébriques I* (*Invent. Math.*, vol. 26, 1974, p. 271-302).
- [iP] I. R. PORTEOUS, *Simple singularities of Maps* (*Springer Lecture Notes in Math.*, vol. 192, 1971, p. 286-307).
- [R] A. PRABHAKAR RAO, *Liaison among curves in  $\mathbb{P}^3$*  (*Invent. Math.*, vol. 50, 1979, p. 205-217).
- [S] E. SERNESI, *On the existence of certain families of curves* (*Invent. Math.*, vol. 75, 1984, p. 25-57).
- [Y] J. YAMEOGO, *Thèse*, Nice (en préparation).
- [Z] O. ZARISKI, *Dimension-theoretic characterization of maximal irreducible algebraic systems of plane nodal curves of a given order  $n$  and with a given number  $d$  of nodes* (*Amer. J. Math.*, vol. 103, 1982, p. 411-435).

(Manuscrit reçu le 11 mars 1986,  
révisé le 6 février 1987).

Jérôme BRUN et André HIRSCHOWITZ,  
U.A. n° 168, Laboratoire de Mathématiques,  
Université de Nice,  
Parc Valrose, 06034 Nice Cedex.