

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

FOUAD EL ZEIN

Théorie de Hodge des cycles évanescents

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 19, n° 1 (1986), p. 107-184

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1986_4_19_1_107_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DE HODGE DES CYCLES ÉVANESCENTS

PAR FOUAD EL ZEIN

à P. Deligne, P. Griffiths, J. L. Verdier

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----|
| <i>Introduction</i> | 107 |
| I. <i>Première partie</i> | 109 |
| 1. Énoncé du théorème | 109 |
| 2. Complexe de Hodge mixte filtré (CHMF) | 113 |
| 3. SHM limite d'une famille de DCN ouverts | 120 |
| 4. Cas général | 136 |
| II. <i>Deuxième partie</i> | 141 |
| 1. Complexes logarithmiques | 141 |
| 2. Construction de CHMF cohomologiques : Ψ mixte | 156 |
| 3. Compléments au paragraphe 3 de la première partie | 169 |
| <i>Abstract</i> | 183 |

Introduction

Soit $f : X \rightarrow D$ un morphisme d'une variété analytique X sur un disque de centre zéro

C.N.R.S.-E.R.A. n° 589.

Code matière A.M.S. : 14 C 30, 14 F 99, 14 D 05, 32 G 20.

Mots clés : Structure de Hodge mixte (SHM), cohomologie évanescence, complexe de Hodge mixte filtré (CHMF).

dans \mathbb{C} . Lorsque f est lisse et propre sur $D^* = D - (0)$, et si nous identifions continûment la cohomologie $H^n(X_t, \mathbb{C})$ d'une fibre en un point $t \in D^*$ à un \mathbb{C} -espace vectoriel V , la théorie de Hodge permet d'associer à chaque point t , une décomposition de Hodge $V = \bigoplus_{p+q=n} V_t^{pq}$.

Le travail de Griffiths ([G], [5]), qui a appelé cette donnée sur V , munie de l'action de la monodromie, une variation de structure de Hodge (SH) d'origine géométrique, montre que des propriétés de la famille $X \rightarrow D$ se reflètent dans l'étude de la variation de SH associée, ce qui donne « un aspect linéaire » au problème. Deligne a introduit les structures de Hodge mixtes (SHM) dans [H II] et [H III]. La monodromie définit sur V une filtration W par le poids [S]. W. Schmid a obtenu de puissants résultats concernant l'étude asymptotique des variations de SH [S], et en particulier, il a démontré qu'une variation de SH sur D^* « dégénère », dans un sens convenable, vers une SHM « limite » dont la filtration par le poids est W . L'intérêt de cette notion est par exemple de consigner dans un résultat numérique (les invariants de la SHM), des propriétés de la variation de SH.

Récemment Deligne souleva la question de construire une SHM « limite d'une bonne variation de SHM » qui reste à définir axiomatiquement [W II], (I. 8. 15), même la construction de la filtration par le poids de la monodromie fait défaut, mais Deligne en énonça la propriété caractéristique [W II], (I. 9. 1). Dans cet article, nous construisons, pour une variation de SHM d'origine géométrique, une SHM limite dont la filtration par le poids W vérifie la propriété requise. Les composantes de son gradué par le poids fini sont les SHM limites des variations de SH, composantes du gradué par le poids de la variation de SHM donnée. Nous l'obtenons par un passage à la filtration diagonale dans un complexe trifiltré convenable. Pour justifier cette dernière construction, il nous a fallu introduire la catégorie dérivée trifiltrée, dont la conception ne pouvait être une généralisation formelle du cas de deux filtrations qui ont un rôle symétrique grâce au « lemme de Zassenhaus », ce qui n'est plus le cas de trois filtrations. Dans ce cadre, nous définissons les complexes de Hodge mixte filtrés (CHMF) qui permettent d'obtenir des suites spectrales de SHM.

Appliquant cette technique, le résultat principal (théorème 1. 10) est obtenu dans le cas général, à partir (ou de manière analogue) du cas d'un diviseur à croisements normaux (DCN).

Ceci dit, nous avons décrit le contenu du paragraphe 1 (énoncé du théorème) et du paragraphe 2 (CHMF).

Au paragraphe 3 nous donnons brièvement les CHMCL (CL = cohomologique limite) qui servent dans le cas d'une famille de DCN ouverts.

Pour simplifier, les complexes sous-jacents à coefficients dans \mathbb{Q} aussi bien que les motivations sont reproduits dans la deuxième partie, ce qui permet de concentrer l'attention sur la démonstration proprement dite.

Nous revenons aussi sur le cas propre et lisse étudié par Schmid [S], Steenbrink [St] et Clemens [C]. Notre technique s'appuie sur celle de Steenbrink dans ce cas, mais nous revenons sur ce sujet en détail pour compléter la démonstration en obtenant l'équivalence

de la propriété (1. 10. 1) avec le théorème du cycle local invariant. Le cas lisse non propre est essentiellement dual au cas d'un DCN propre.

Le cas général au paragraphe 4 est sans surprise. Dans la deuxième partie nous donnons les motivations de la construction d'une structure mixte sur le complexe de faisceaux de cycles évanescents (Ψ mixte) et nous montrons par ailleurs que l'on n'a pas besoin d'effectuer une réduction semi-stable sur la famille. On y trouve aussi les vérifications fastidieuses de certaines assertions du texte et des compléments à la littérature.

En même temps et indépendamment, plusieurs mathématiciens se sont intéressés à ce problème. Steenbrink et Zucker ont étudié le cas d'une famille de variétés lisses (Preprint : Variation of mixed Hodge structure I). Guillèn, Navarro Aznar et Puerta (Preprint : Schémas cubiques) ont étudié le cas propre.

Voir aussi Dubois (Preprint : SHM sur la cohomologie évanescence).

Dans cet article, nous avons porté notre attention sur la construction même de la SHM limite. Nous n'avons pas, ou peu, décrit la SHM elle-même. Une description du comportement asymptotique de la filtration de Hodge dans une variation de SHM, à la manière de Schmid, est le minimum qui reste à faire. Les invariants de cette SHM elle-même doivent recéler de précieuses informations sur la famille en question. Par ailleurs, la technique utilisée montre que l'étude de divers problèmes cohomologiques sur les espaces singuliers se ramène, ou ressemble, au cas d'un DCN ouvert.

Cet article, annoncé dans trois notes [EI] et [EII], généralise la version élémentaire rédigée en avril 1982 et remise à Deligne, et qui a été exposée au séminaire de géométrie analytique à Oberwolfach la même année. La version simplifiée du cas du DCN est parue dans [EIII].

I. PREMIÈRE PARTIE

1. Variation de SHM géométrique et énoncé du théorème

1. 1. — Soient X un espace analytique, D un disque de centre 0 dans \mathbb{C} , $D^* = D - (0)$ et $f: X \rightarrow D$ un morphisme analytique propre.

D'après le théorème d'isotopie de Thom ([SGA 7], 2, Exp. 14 (1. 3. 5)), pour D assez petit i. e. si on remplace D par un disque de rayon plus petit qu'une certaine constante positive, l'espace $f^{-1}(D^*)$ est un fibré topologique sur D^* .

DÉFINITION 1. 2. — Soient $t \in D^*$ et $\varphi: [0, 1] \rightarrow D^*$ le lacet défini par $\varphi(x) = [\exp(2i\pi x)]. t$.

Une trivialisation du fibré $\varphi^* X$ (1. 1) définit un homéomorphisme appelé monodromie

$$(1. 2. 1) \quad T: X_t \xrightarrow{\sim} (\varphi^* X)_0 \xrightarrow{\sim} (\varphi^* X)_1 \xrightarrow{\sim} X_t,$$

indépendant du choix de la trivialisaton à homotopie près.

1.3. Soit \tilde{D}^* un revêtement universel de D^* . On peut représenter \tilde{D}^* par le demi-plan de Poincaré ($u \in \mathbb{C} : \text{Im. } u > 0$) muni de la projection $\pi(u) = \exp u$ sur le disque unité moins 0.

LEMME 1.3. — *L'image inverse $\tilde{X}^* = X \times_D \tilde{D}^*$ de X (1.1) sur le revêtement universel \tilde{D}^* de D^* est un fibré topologique trivial de fibre homéomorphe à une fibre « générale » X_t de X en un point $t \in D^*$.*

Remarque 1.4. — La construction suivante de X (1.1) est suggérée dans l'introduction de ([SGA 7], 2, Exp. 13). Il existe une rétraction $r_t : X_t \rightarrow X_0$ de la fibre « générale » X_t en $t \in D^*$ sur la fibre « spéciale » X_0 en 0, vérifiant $r_t \circ T = r_t$. On obtient à partir du système (X_t, X_0, T, r_t) :

(i) $f' : X' \rightarrow S^1$, en recollant dans $X_t \times [0, 1]$, les extrémités $X_t \times (0)$ et $X_t \times (1)$ à l'aide de T , et $r' : X' \rightarrow X_0$ à partir de r_t .

(ii) $f : X \rightarrow D$, en l'identifiant du point de vue topologique au cône de f' :

$$X \simeq X' \times [0, 1] / (X' \times (0) \xrightarrow{r'} X_0) \rightarrow S^1 \times [0, 1] / (S^1 \times (0) \rightarrow (0)) \simeq D.$$

PROPOSITION 1.5. — *Considérons le morphisme $f : X \rightarrow D$ (1.1), et supposons les fibres de f algébriques et D assez petit.*

(i) *Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, la restriction sur D^* de l'image directe supérieure $(R^i f^* Z_X) / D^*$ [resp. $(R^i f^* Z_X / \text{Torsion}) / D^*$] est un système local de \mathbb{Z}_{D^*} modules de type fini (resp. libres de type fini).*

(ii) *La filtration par le poids W , sur la cohomologie $H^i(X_t, \mathbb{Q})$ d'une fibre de X en $t \in D^*$, définit une filtration W de $(R^i f^* \mathbb{Q}_X) / D^*$ par des sous-systèmes locaux.*

(iii) *La filtration de Hodge F , sur la cohomologie $H^i(X_t, \mathbb{C})$, définit une filtration F de $(R^i f^* \mathbb{C}_X) / D^*$ par des sous-fibrés analytiques. Les faisceaux F des sections de F , localement libres sur D^* , vérifient la formule de transversalité pour la connexion ∇ de Gauss-Manin ([G], [G-S], [D], [K] admettant un point singulier régulier en 0.*

$$(1.5.1) \quad \nabla F^p \subset \Omega_{D^*}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{D^*}} F^{p-1}.$$

Enfin les variations de SH induites sur $\text{Gr}_m^W (R^i f^* \mathbb{Q}_X) / D^*$ sont polarisables.

L'assertion (i) découle du théorème de Thom cité ci-dessus (1.1). La technique que nous utiliserons plus tard pour étudier les variations de SHM, donne en particulier une démonstration simple de (ii) et (iii).

1.6. La proposition (1.5) suggère de poser

DÉFINITION 1.6. — Une variation de SHM sur un espace analytique S consiste en :

- (a) un système local V_Z de \mathbb{Z} modules libres de type fini;
- (b) une filtration finie croissante W de $V_{\mathbb{Q}} = V_{\mathbb{Q}} = V_Z \otimes \mathbb{Q}$ par des sous-systèmes locaux d'espaces vectoriels sur \mathbb{Q} ;

(c) une filtration finie décroissante \mathbb{F} de $\mathbb{V} = \mathbb{V}_Z \otimes \mathcal{O}$ par des sous-fibrés vectoriels (i. e. la filtration \mathbb{F} varie de façon holomorphe); on exige que le faisceau des sections \mathbb{F} de \mathbb{F} , localement libre sur S , vérifie l'axiome de transversalité :

$\nabla \mathbb{F}^i \subset \Omega_S^1 \otimes \mathbb{F}^{i-1}$ et que \mathbb{W} et \mathbb{F} définissent en chaque point de S une SHM.

La proposition (1.5) s'énonce alors : Le système

$$\begin{aligned} & (\mathbb{R}^i f^* \mathbb{Z}_X / \text{Torsion}) (1.5, (i)), \\ & (\mathbb{R}^i f^* \mathbb{Q}_X, \mathbb{W}) (1.5, (ii)) \quad \text{et} \quad (\mathbb{R}^i f^* \mathbb{Q}_X \otimes \mathcal{O}, \mathbb{W}, \mathbb{F}) (1.5, (iii)) \end{aligned}$$

forme une variation de SHM sur D^* .

(1.6.1). L'image inverse des sous-systèmes locaux \mathbb{W} sur $(\mathbb{R}^i f^* \mathbb{Q}_X) / D^*$ (1.5 (ii)) est triviale sur le revêtement universel $\pi : \tilde{D}^* \rightarrow D^*$. Elle définit une filtration $\mathbb{W}^f = H^0(\tilde{D}^*, \pi^* \mathbb{W})$ sur $H^i(\tilde{X}^*, \mathbb{Q}) \simeq H^0(\tilde{D}^*, \pi^* \mathbb{R}^i f^* \mathbb{Q}_X)$.

1.7. Soit V un espace vectoriel et N un endomorphisme nilpotent sur V . Il existe sur V une seule filtration finie croissante W telle que $NW_i \subset W_{i-2}$ et que N^k induise des isomorphismes

$$\text{Gr } N^k : \text{Gr}_k^W V \xrightarrow{\sim} \text{Gr}_{-k}^W V.$$

On appelle W la filtration par le poids de la monodromie de (V, N) [S].

Supposons V muni de plus d'une filtration croissante W^f et que N respecte W^f . La filtration W de (V, N) n'induit pas en général une filtration compatible avec celle de $(\text{Gr}_k^{W^f} V, \text{Gr } N)$.

Deligne a été amené à prouver dans [WII], 6.1.13.

PROPOSITION 1.8. — Soit V un objet d'une catégorie abélienne, muni d'une filtration finie croissante W^f , et d'un endomorphisme nilpotent N qui respecte W^f . Il existe alors sur V au plus une filtration finie croissante W telle que $NW_i \subset W_{i-2}$ et que N^k induise des isomorphismes $\text{Gr}_{i+k}^W \text{Gr}_i^{W^f} V \simeq \text{Gr}_{i-k}^W \text{Gr}_i^{W^f} V$.

Remarque. — Si la filtration W^f est triviale i. e. $W_m^f = 0$ pour $m < a$ et $W_m^f = V$ pour $m \geq a$, la filtration W dans (1.8) existe.

C'est la filtration par le poids de la monodromie, convenablement décalée.

1.9. — Ce qui précède a amené Deligne à poser dans [WII], 1.8.15 le problème suivant :

PROBLÈME 1.9. — Soit (V, W, F) une variation de SHM (1.6) sur un disque étoilé D^* . La fibre V de V en un point $t \in D^*$ est munie d'une filtration W^f (1.6) induite par W et d'une transformation de monodromie $T \in \text{End}(V, W^f)$. Supposons l'endomorphisme T unipotent et soit $N = \text{Log } T$ qui est nilpotent.

Le problème consiste à trouver une axiomatique qui permet de dégager une classe de « bonnes » variations de SHM (ou « convergentes ») sur D^* telle que, pour (V, W, F) bonne et unipotente, il existe sur V une filtration croissante W telle que $NW_a \subset W_{a-2}$ et

que N induise des isomorphismes

$$(1.9.1) \quad N^b : \text{Gr}_{a+b}^W \text{Gr}_a^{W^f} V \simeq \text{Gr}_{a-b}^W \text{Gr}_a^{W^f} V.$$

Quand on conçoit ce problème comme une généralisation de la SHM limite d'une variation de SH [S], on aimerait aussi que la variation V soit asymptotique, en un sens convenable, à une « orbite nilpotente ».

THÉORÈME 1.10. — Soit $f : X \rightarrow D$ un morphisme analytique propre sur un disque D dans \mathbb{C} (1.1) et Z un sous-espace analytique fermé, dans X . Supposons les fibres de X et de Z sur D algébriques, l'action de la monodromie T sur $H^n(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{Q})$ unipotente et soit $N = 1/2 i \pi \text{Log } T$, il existe alors sur $H^n(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{Z})$ une SHM de filtration par le poids W définie sur \mathbb{Q} et de filtration de Hodge F définie sur \mathbb{C} telle que :

(i) La filtration par le poids fini W^f définie sur \mathbb{Q} et correspondant à la trivialisations sur D^* des sous-systèmes locaux, filtration par le poids sur $H^n(X_t - Z_t, \mathbb{Q})$ pour $t \in D^*$, soit une filtration par des sous-SHM.

(ii) La SHM induite sur $\text{Gr}_i^{W^f} H^n(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{Q})$ soit isomorphe à la SHM limite des variations de SH sur $\text{Gr}_i^W H^n(X_t - Z_t, \mathbb{Q})$ pour $t \in D^*$.

(iii) Supposons de plus f quasi-projectif, alors pour tous entiers a et b , l'endomorphisme N induit un isomorphisme :

$$(1.10.1) \quad \text{Gr } N^b : \text{Gr}_{a+b}^W \text{Gr}_a^{W^f} H^n(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{Q}) \simeq \text{Gr}_{a-b}^W \text{Gr}_a^{W^f} H^n(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{Q}) \quad \blacksquare$$

La démonstration de ce théorème va occuper le reste de cet article. Il s'agit d'abord d'introduire les suites spectrales de SHM, qui est en fait le cadre naturel pour obtenir (i) et (ii), si l'on travaille avec des complexes de Hodge mixtes comme on le fait; puis de déduire (iii) à partir du cas d'une variation de SH. Nous prouvons le théorème d'abord dans le cas d'une famille lisse, qui est dual au cas d'un diviseur à croisement normaux (DCN) [E III] où la technique de diagonalisation est plus transparente, puis successivement le cas d'un DCN ouvert et le cas général.

Remarque 1.11. — (i) Le théorème (1.10) se réduit dans le cas propre et lisse aux théorèmes déjà étudiés dans [S], [St] et [C]. Réciproquement, nos résultats sur les complexes de Hodge mixte filtrés permettent de dévisser la situation générale pour la ramener à ce cas. Nous adoptons une technique qui généralise celle qui a été adoptée par Steenbrink [St]. Cependant nous démontrons qu'il n'est pas nécessaire de se ramener au cas d'une fibre centrale réduite. La SHM limite que l'on obtient dépend du choix du paramètre t sur le disque.

(ii) Avec les notations de (1.1), il existe un changement de base sur un disque convenable $D_m \xrightarrow{\times t^m} D$, tel que la monodromie pour la famille $X \times_{D_m} \rightarrow D_m$ soit unipotente.

Si l'on ne désire pas faire un tel changement de base, la SHM limite est obtenue sur la cohomologie unipotente $H^i(\tilde{H}^*, \mathbb{C})^u$ sous l'action de T .

2. Complexe de Hodge mixte filtré (CHMF)

Dans ce paragraphe, nous introduisons le langage et les résultats sur les suites spectrales nécessaires pour obtenir (1. 10).

Dans la définition de la catégorie dérivée bifiltrée ([H II], [H III]), les deux filtrations jouent un rôle symétrique grâce au lemme de Zassenhaus ([H II], 12. 1). Cela n'est pas possible pour trois filtrations. Nous obtenons cependant une notion satisfaisante de CHMF, sans avoir besoin d'introduire la filtration décalée $\text{Dec } W$, comme ce fut le cas dans [EI].

2. 0. Nous désignons l'extension d'un foncteur T aux catégories dérivées, par \mathbf{T} au lieu de $\mathbb{R}T$.

2. 1. — Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne, $F_3 \mathcal{A}$ la catégorie des objets trifiltrés de filtrations finies de \mathcal{A} , et $K^+ F_3 \mathcal{A}$ la catégorie des complexes trifiltrés bornés inférieurement d'objets de \mathcal{A} , à homotopie respectant les filtrations près.

DÉFINITION 2. 1. — (i) Un morphisme dans $K^+ F_3 \mathcal{A}$

$$f: (K, F_1, F_2, F_3) \rightarrow (K', F'_1, F'_2, F'_3)$$

est appelé un quasi-isomorphisme s'il vérifie la propriété suivante :

(2. 1. 1). Pour tous entiers $i \leq j$ les morphismes

$$f_j^i: (F_1^i K / F_1^j K, F_2, F_3) \rightarrow (F_1^i K' / F_1^j K', F'_2, F'_3),$$

sont des quasi-isomorphismes bifiltrés.

(ii) La catégorie obtenue en inversant les quasi-isomorphismes ci-dessus dans $K^+ F_3 \mathcal{A}$, est la catégorie dérivée trifiltrée $D^+ F_3 \mathcal{A}$.

Remarque 2. 2. — (i) La propriété (2. 1. 1) implique en particulier que le morphisme $f: (K, F_2, F_3) \rightarrow (K', F'_2, F'_3)$ est un quasi-isomorphisme bifiltré, car les filtrations considérées sont finies sur tout objet de \mathcal{A} .

2. 3. — Soit T un foncteur exact à gauche d'une catégorie abélienne \mathcal{A} dans une catégorie abélienne \mathcal{B} .

Un objet (A, F_1, F_2, F_3) dans $D^+ F_3 \mathcal{A}$ est acyclique si $\text{Gr}_{F_3} \text{Gr}_{F_2} (F_1^i A / F_1^j A)$ est T -acyclique pour tout $i \leq j$.

Si $D^+ F_3 \mathcal{A}$ admet assez d'objets T -acycliques, on vérifie que le foncteur dérivé $\mathbf{T}: D^+ F_3 \mathcal{A} \rightarrow D^+ F_3 \mathcal{B}$ est bien défini (i. e. ne dépend pas des résolutions choisies, à isomorphisme près).

Dans les applications, nous pouvons utiliser, pour un faisceau trifiltré de groupes abéliens $(\mathfrak{F}, F_1, F_2, F_3)$ sur un espace X , les résolutions de Godement $(G \mathfrak{F}, GF_i)[Go]$. Ces résolutions constituant un foncteur exact, nous avons :

$$\text{Gr}_{GF_3} \text{Gr}_{GF_2} (GF_1^i / GF_1^j) \simeq G(\text{Gr}_{F_3} \text{Gr}_{F_2} (F_1^i / F_1^j)).$$

Nous en déduisons que les résolutions de Godement sont T -acycliques dans $D^+ F_3(X, \mathbb{Z})$ chaque fois qu'elles le sont dans $D^+(X, \mathbb{Z})$.

DÉFINITION 2.4. — Un complexe de Hodge mixte filtré (CHMF) consiste en :

(α) Un complexe $K_Z \in \text{Ob } D^+(\mathbb{Z})$ tel que $H^k(K_Z)$ soit un \mathbb{Z} -module de type fini pour tout k .

(β) Un complexe bifiltré $(K_{\mathbb{Q}}, W^f, W) \in \text{Ob } D^+ F_2(\mathbb{Q})$ et un isomorphisme $K_{\mathbb{Q}} \simeq K_Z \otimes \mathbb{Q}$ dans $D^+ \mathbb{Q}$ (W est une filtration croissante par le poids et W^f est une filtration croissante par le « poids fini »).

(γ) Un complexe trifiltré $(K_{\mathbb{C}}, W^f, W, F) \in \text{Ob } D^+ F_3(\mathbb{C})$ et un isomorphisme $\alpha : (K_{\mathbb{C}}, W^f, W) \simeq (K_{\mathbb{Q}}, W^f, W) \otimes \mathbb{C}$ dans $D^+ F_2(\mathbb{C})$ (F est une filtration décroissante de « Hodge »).

L'axiome suivant devant être vérifié :

(2.4.1) Pour tous entiers $j \leq i$, le système suivant est un CHM

$$\begin{aligned} (W_i^f K_{\mathbb{Q}} / W_j^f K_{\mathbb{Q}}, W), & \quad (W_i^f K_{\mathbb{C}} / W_j^f K_{\mathbb{C}}, W, F), \\ (W_i^f K_{\mathbb{Q}} / W_j^f K_{\mathbb{Q}}, W) \otimes \mathbb{C} & \simeq (W_i^f K_{\mathbb{C}} / W_j^f K_{\mathbb{C}}, W). \end{aligned}$$

2.5. — De même on définit un CHMCF (cohomologique filtré) sur un espace topologique X . Avec les notations de (2.4), c'est un système

$$K_Z \in \text{Ob } D^+(X, \mathbb{Z}), (K_{\mathbb{Q}}, W^f, W) \in \text{Ob } D^+ F_2$$

et

$$(K_{\mathbb{C}}, W^f, W, F) \in \text{Ob } D^+ F_3(X, \mathbb{C})$$

muni d'isomorphismes de compatibilité et tel que le quotient W_i^f / W_j^f soit un CHMC sur X .

Dans un \mathbb{Q} -CHMF (resp. \mathbb{Q} -CHMCF) on se contente du complexe $K_{\mathbb{Q}}$, sans exiger qu'il se relève dans $D^+(\mathbb{Z})$ [resp. $D^+(X, \mathbb{Z})$].

LEMME 2.6. — *Le foncteur dérivé Γ des sections globales sur X fait correspondre à un CHMCF un CHMF.*

En effet, d'après (2.3.3) et pour $j \leq i$

$$\text{Gr}_{\Gamma F}^{\Gamma W} (\Gamma W_i^f A / \Gamma W_j^f A) \simeq \text{Gr}_{\Gamma F}^{\Gamma W} (\Gamma (W_i^f A / W_j^f A)) \simeq \Gamma \text{Gr}_F^W (W_i^f A / W_j^f A)$$

LEMME 2.7. — *Soit (K, W^f, W, F) un CHMF.*

(i) *Pour tous entiers n, i et $j \leq i$, les filtrations $W[n]$ et F sur $H^n(K)$ [resp. sur $H^n(W_i^f K)$ et $H^n(W_i^f K / W_j^f K)$] définissent une SHM.*

(ii) *La suite exacte courte :*

$$0 \rightarrow W_j^f K \rightarrow W_i^f K \rightarrow W_i^f K / W_j^f K \rightarrow 0,$$

engendre une suite exacte longue de SHM.

$$(2.7.1) \quad \dots \rightarrow H^n(W_j^f K) \rightarrow H^n(W_i^f K) \rightarrow H^n(W_i^f K / W_j^f K) \rightarrow H^{n+1}(W_j^f K) \rightarrow$$

Preuve. — Pour tous entiers n et i , il existe j assez petit tel que $W_j^f K^r = 0$ en degré $r \in [n-1, n+1]$, alors le morphisme canonique $H^n(W_i^f K) \xrightarrow{\sim} H^n(W_i^f K/W_j^f K)$ est un isomorphisme bifiltré. Le terme de droite étant la cohomologie d'un CHM (2.4.1), les filtrations $W[n]$ et F définissent une SHM qui se transporte sur le terme de gauche. En particulier, pour i assez grand, $H^n(K)$ est aussi muni d'une SHM.

Pour démontrer (2.7.1) on considère le cône $C(i^f)$ de l'injection $i^f = W_j^f K \rightarrow W_i^f K$ et on vérifie par un calcul simple que la projection

$$\pi : (C(i^f) = TW_j^f K \oplus W_i^f K) \rightarrow W_i^f K/W_j^f K \quad (T = \text{translation à gauche}),$$

bien que n'étant peut-être pas un quasi-isomorphisme bifiltré pour W et F , est toutefois un quasi-isomorphisme filtré pour W et F séparément. Les filtrations W et F sur $C(i^f)$ sont naturelles.

L'isomorphisme sur la cohomologie, induit par π , est alors nécessairement bifiltré.

Considérons le morphisme canonique $\gamma : C_M(i^f) \rightarrow C(i^f)$ qui respecte W et F :

$$W_k C_M(i^f) = W_{k-1} TW_j^f \oplus W_k \cap W_i^f \rightarrow W_k C(i^f) = W_k \cap TW_j^f \oplus W_k \cap W_i^f.$$

Le morphisme composé $\pi \circ \gamma$ induit un isomorphisme respectant les filtrations, et par conséquent un isomorphisme de SHM

$$H^n(C_M(i^f)) \xrightarrow{\sim} H^n(W_i^f K/W_j^f K).$$

La suite exacte (2.7.1) se déduit alors de celle associée au cône mixte $C_M(i^f)$ [EIV], § 0, 3.4. On a donc un isomorphisme de SHM

$$(2.7.2) \quad H^n(C_M(i^f), W, F) \simeq H^n(C(i^f), W, F)$$

2.8. Il est classique de construire à partir d'un complexe filtré (K, W) une suite spectrale. Avec les notations de [H II] adaptées à la filtration croissante W

$$\begin{aligned} E_r^{pq}(K, W) &= Z_r^{pq}/B_r^{pq} \cap Z_r^{pq} \\ &= \text{Ker}(d : W_{-p} K^{p+q} \rightarrow K^{p+q+1}/W_{-p-r} K^{p+q+1}) / (W_{-p-1} K^{p+q} \\ &\quad + dW_{-p+r-1} K^{p+q-1}) \cap Z_r^{pq} \end{aligned}$$

et on vérifie que c'est égal à

$$\begin{aligned} &\frac{\text{Ker}(d : W_{-p} K^{p+q}/W_{-p-r} K^{p+q} \rightarrow W_{-p+r-1} K^{p+q+1}/W_{-p-r} K^{p+q+1})}{(W_{-p-1} K^{p+q} + dW_{-p+r-1} K^{p+q-1})/W_{-p-r} K^{p+q}} \cap Z_\infty^{pq} = B_\infty^{pq} \cap Z_\infty^{pq} \\ &= E_\infty^{pq}(W_{-p+r-1} K/W_{-p-r} K) = \text{Gr}_{-p}^W H^{p+q}(W_{-p+r-1} K/W_{-p-r} K). \end{aligned}$$

THÉORÈME 2.8. — Soit (K, W^f, W, F) un CHMF. Alors la cohomologie $H^n(K)$ possède les propriétés suivantes :

- (i) les filtrations $W[n]$ et F définissent une SHM.
- (ii) Sur les termes de la suite spectrale définie par $(K_{\mathbb{Q}}, W^f)$.

$$(2.8.1) \quad E_r^{pq} = \text{Gr}_{-p}^{W^f} H^{p+q}(W_{-p+r-1}^f K / W_{-p-r}^f K),$$

la filtration récurrente W_{rec} et la filtration W induite par la formule (2.8.1) coïncident; de même, sur $E_r^{pq}(K_{\mathbb{C}}, W^f)$ la filtration récurrente F_{rec} et la filtration F induite par (2.8.1) coïncident. Alors pour $r \geq 1$, $(E_r^{pq}, W[p+q], F)$ forme une SHM et les différentielles d_r sont des morphismes de SHM.

- (iii) La filtration W^f est une filtration par des sous-SHM et l'on a

$$(2.8.2) \quad (\text{Gr}_{-p}^{W^f} H^{p+q}(K), W[p+q], F) \simeq (E_{\infty}^{pq}, W[p+q], F).$$

Preuve. — (i) On a vu dans (2.7.1 (i)) que les filtrations $W[n]$ et F définissent une SHM sur $H^n(K)$, $H^n(W_i^f K)$ et $H^n(W_i^f K / W_j^f K)$ pour tous entiers i et $j \leq i$.

De plus la filtration W_i^f sur $H^n(K)$, égale à l'image par un morphisme de SHM de $H^n(W_i^f K)$, est une filtration par des sous-SHM.

- (ii) On a vérifié (2.8.1) ci-dessus.

Les filtrations $W[p+q]$ et F , induites sur E_r^{pq} par (2.8.1), définissent une SHM, car la filtration W^f sur $H^{p+q}(W_{-p+r-1}^f K / W_{-p-r}^f K)$ est une filtration par des sous-SHM. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow W_{-p-r}^f K / W_{-p-2r}^f K \rightarrow W_{-p+r-1}^f K / W_{-p-2r}^f K \rightarrow W_{-p+r-1}^f K / W_{-p-r}^f K \rightarrow 0.$$

Le morphisme de connexion

$$H^{p+q}(W_{-p+r-1}^f K / W_{-p-r}^f K) \xrightarrow{\partial} H^{p+q+1}(W_{-p-r}^f K / W_{-p-2r}^f K)$$

est un morphisme de SHM (2.7.1) qui envoie le sous-espace W_{-p}^f dans W_{-p-r}^f , égal à l'espace d'arrivée.

La différentielle :

$$d_r: E_r^{pq} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1} = \text{Gr}_{-p-r}^{W^f} H^{p+q+1}(W_{-p-1}^f K / W_{-p-2r}^f K)$$

est induite par le morphisme de SHM composé :

$$W_{-p}^f H^{p+q}(W_{-p+r-1}^f / W_{-p-r}^f K) \xrightarrow{\partial} H^{p+q+1}(W_{-p-r}^f K / W_{-p-2r}^f K) \xrightarrow{\phi} E_r^{p+r, q-r+1},$$

où ϕ est induit par l'injection $W_{-p-r}^f K \rightarrow W_{-p-1}^f K$. La projection

$$H(E_r^{pq}, d_r) \rightarrow E_{r+1}^{pq} = \text{Gr}_{-p}^{W^f}(W_{-p+r}^f K / W_{-p-r-1}^f K)$$

est induite par l'injection $W_{-p+r-1}^f K \rightarrow W_{-p+r}^f K$, et respecte donc les filtrations W et F . D'où, les filtrations récurrentes sur E_{r+1}^{pq} , induites par W et F sur E_r^{pq} , coïncident avec W et F sur E_{r+1}^{pq} . Le raisonnement s'applique aussi pour E_{∞}^{pq} et donne (2.8.2).

DÉFINITION 2.9. — Pour tout entier $m \geq 0$, le cône mixte C_M^m d'un morphisme $\varphi : (K, W^f, W, F) \rightarrow (K', W'^f, W', F')$ de CHMF (resp. CHMCF) est le cône de φ muni des filtrations

$$W_n^f C_M^m = C(W_{n-m}^f K \xrightarrow{\varphi} W_n'^f K'), \quad W_n C_M^m = C(W_{n-1} K \xrightarrow{\varphi} W_n K')$$

et :

$$F^n C_M^m = C(F^n K \xrightarrow{\varphi} F^n K').$$

PROPOSITION 2.10. — *Le cône mixte $C_M^m(2.9)$ d'un morphisme de CHMF (resp. CHMCF) est un CHMF (resp. CHMCF).*

Preuve. — Il suffit de vérifier l'axiome (2.4.1); or le quotient (2.9)

$$(W_i^f C_M^m / W_j^f C_M^m, W, F) \simeq C_M^m(((W_{i-m}^f / W_{j-m}^f) K, W, F) \xrightarrow{\varphi} ((W_i'^f / W_j'^f) K', W', F'))$$

est un cône mixte de CHM (resp. CHMC).

DÉFINITION 2.11. — (i) Un CHML (limite) (K, W^f, W, F) dans $D^+ F_3 \mathcal{A}$ consiste en la donnée (α) , (β) et (γ) de (2.4) vérifiant les axiomes suivants :

(2.11.1) Les sous-complexes $(W_i^f K, W, F)$ sont des CHM pour tout entier i .

(2.11.2) Pour tout entier n , le système suivant est un CHM

$$(Gr_n^{W^f} K_{\mathbb{Q}}, W), \quad (Gr_n^{W^f} K_{\mathbb{C}}, W, F), \quad (Gr_n^{W^f} K_{\mathbb{Q}}, W) \otimes \mathbb{C} \simeq^{Gr^{\alpha}} (Gr_n^{W^f} K_{\mathbb{C}}, W).$$

(2.11.3) La suite spectrale de $(K_{\mathbb{Q}}, W^f)$ dégénère en $E_2 : E_2(K_{\mathbb{Q}}, W^f) \simeq E_{\infty}$.

(ii) Un CHMCL (cohomologique) sur un espace topologique X consiste en une version cohomologique des données (α) , (β) , (γ) tel que $(\Gamma(X, (K, W^f, W, F)))$ soit un CHML i.e. vérifie (2.11.1 à 3).

Remarque 2.12. — (i) On aurait pu définir un CHML dans une catégorie dérivée de $K^+ F_3 \mathcal{A}$, où on inverse seulement les morphismes $f : (K, F_1, F_2, F_3) \rightarrow (K', F'_1, F'_2, F'_3)$ tel que pour tous entiers i et n $f : (F_1^i K, F_2, F_3) \rightarrow (F_1^i K', F_2, F_3)$ et $Gr^n f : (Gr_{F_1}^n K, F_2, F_3) \rightarrow (Gr_{F_1}^n K', F_2, F_3)$ soient des quasi-isomorphismes bifiltrés.

(ii) La définition (2.11) est un peu plus générale que celle qui exigerait (2.4.1) au lieu de (2.11.1) et (2.11.2).

(iii) De même on définirait alors un CHMCL (cohomologique limite) sur un espace topologique X . Avec les notations de (2.11), c'est un système $K_{\mathbb{Z}} \in \text{Ob } D^+(X, \mathbb{Z})$, $(K_{\mathbb{Q}}, W^f, W) \in \text{Ob } D^+ F_2(X, \mathbb{Q})$ et $(K_{\mathbb{C}}, W^f, W, F) \in \text{Ob } D^+ F_3(X, \mathbb{C})$ muni d'isomorphismes de compatibilité, tel que $(W_i^f K, W, F)$ et $(Gr_i^{W^f} K, W, F)$ soient des CHMC, et de plus la suite spectrale de $(\Gamma(X, K_{\mathbb{Q}}, W^f)$ dégénère en E_2 i.e. $E_2 \simeq E_{\infty}$. Le foncteur Γ sur X fait alors correspondre un CHML à un CHMCL.

THÉORÈME 2.13. — *Soit (K, W^f, W, F) un CHML.*

(i) *Les filtrations $W[n]$ et F définissent une SHM sur $H^n(K)$, et W^f induit une filtration par des sous-SHM.*

(ii) La SHM déduite de (i) sur $E_{\infty}^{pq}(\mathbb{K}, W^f) \simeq \text{Gr}_{-p}^{W^f} H^{p+q}(\mathbb{K})$ coïncide avec la SHM sur les termes de la suite spectrale $E_2^{pq}(\mathbb{K}, W^f)$ déduite de celle sur les termes $E_1^{pq} = H^{p+q}(\text{Gr}_{-p}^{W^f} \mathbb{K})$ (2. 11. 2).

La preuve, semblable à celle de (2. 8), est plus simple. Les filtrations $W[n]$ et F définissent une SHM sur la cohomologie $H^n(W_i^f \mathbb{K})$ du CHM $W_i^f \mathbb{K}$ (2. 11. 1) et en particulier sur $H^n(\mathbb{K})$. L'inclusion $W_i^f \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ induit un morphisme de SHM

$$(H^n(W_i^f \mathbb{K}), W[n], F) \rightarrow (H^n(\mathbb{K}), W[n], F)$$

qui est surjectif sur $W_i^f H^n(\mathbb{K})$, ce qui démontre (i) et fournit une SHM sur $\text{Gr}_i^{W^f} H^n(\mathbb{K})$.

(ii) Les termes ${}_{w^f}E_1^{-i, n+i} \simeq H^n(\text{Gr}_i^{W^f} \mathbb{K})$ sont munis d'une SHM.

Considérons la suite exacte longue de SHM du lemme (2. 7. 1).

$$H^n(W_{i-1}^f \mathbb{K}) \xrightarrow{\phi_i} H^n(W_i^f \mathbb{K}) \xrightarrow{\psi_i} H^n(\text{Gr}_i^{W^f} \mathbb{K}) \xrightarrow{\partial_i} H^{n+1}(W_{i-1}^f \mathbb{K}).$$

La différentielle ∂ de ${}_{w^f}E_1$ admet la factorisation suivante en morphismes de SHM

$$\partial : {}_{w^f}E_1^{-i-1, n+i} \simeq H^{n-1}(\text{Gr}_{i+1}^{W^f} \mathbb{K}) \xrightarrow{\partial_{i+1}} H^n(W_i^f \mathbb{K}) \xrightarrow{\psi_i} H^n(\text{Gr}_i^{W^f} \mathbb{K}) \simeq {}_{w^f}E_1^{-i, n+i}.$$

On en déduit une SHM sur ${}_{w^f}E_2^{-i, n+1}$.

Il s'agit de prouver que l'isomorphisme d'espaces ${}_{w^f}E_2^{-i, n+1} \simeq \text{Gr}_i^{W^f} H^n(\mathbb{K})$ est de SHM. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^n(W_i^f \mathbb{K}) & \xrightarrow{\mu} & \text{Im } \psi_i \simeq \ker \partial_i \subset \ker \partial \\ \eta \downarrow & & \downarrow \Gamma \\ W_i^f H^n(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\pi} & \text{Gr}_i^{W^f} H^n(\mathbb{K}) \end{array}$$

On a $\ker \Gamma \simeq \partial(E_1^{-i-1, n+1}) \subset \text{Im } \psi_i \simeq \ker \partial_i$ et $\text{Im}(\Gamma \circ \mu) = \text{Im}(\pi \circ \eta) = \text{Gr}_i^{W^f} H^n(\mathbb{K})$, d'où $\ker \partial_i / \partial(E_1^{-i-1, n+1}) \simeq \ker \partial / \partial(E_1^{-i-1, n+1})$, et finalement $\ker \partial_i = \ker \partial$.

Alors Γ est un morphisme de SHM puisque μ , η et π le sont.

2. 14. — Image directe diagonale.

DÉFINITION 2. 15. — Un CHMFS (S pour cosimplicial) (resp. CHMDG, DG pour différentiel gradué) \mathbb{K} consiste en

(α) Un complexe $K_{\mathbb{Z}} \in \text{Ob } D^+(\mathbb{Z}\text{-mod. } S)$ de \mathbb{Z} modules cosimpliciaux (resp. $\text{Ob } D^+(\mathbb{Z}\text{-mod. } DG^+)$ de \mathbb{Z} -modules différentiels gradués de degré uniformément borné inférieurement).

(β) $(K_{\mathbb{Q}}, W^f, W) \in \text{Ob } D^+ F_2(\mathbb{Q}\text{-mod. } S)$ (resp. $\mathbb{Q}\text{-mod. } DG^+$).

(γ) $(K_{\mathbb{C}}, W^f, W, F) \in \text{Ob } D^+ F_3(\mathbb{C}\text{-mod. } S)$ (resp. $\mathbb{C}\text{-mod. } DG^+$) et des isomorphismes de compatibilité.

$K_{\mathbb{Q}} \simeq K_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ et $(K_{\mathbb{Q}}, W^f, W) \otimes \mathbb{C} \simeq (K_{\mathbb{C}}, W^f, W)$, tel que l'axiome suivant soit vérifié.

(2. 15. 1) La composante K_p^* , de degré simplicial (resp. DG) p , est un CHMF, pour tout p .

2.16. — On construit des foncteurs $d_i : \text{CHMFDG} \rightarrow \text{CHMF}$ pour $i \in [0, 2]$, qui associent à un complexe K^\bullet le complexe simple sK . Soit L la filtration de sK par le degré différentiel inférieur de K^\bullet :

$$\text{i. e. } L^n = s((K_p^\bullet)_{p \geq n}).$$

Les filtrations (W^f, L) et (W, L) diagonales sur sK sont définies par les formules

$$(2.16.1) \quad \delta(W^f, L)_n(sK) = \bigoplus_p W_{n+p}^f K_p^\bullet, \quad \delta(W, L)_n(sK) = \bigoplus_p W_{n+p} K_p^\bullet,$$

les filtrations W^f , W et F simples sur sK sont

$$(2.16.2) \quad W_n^f(sK) = \bigoplus_p W_n^f K_p, \quad W_n = \bigoplus_p W_n K_p \quad \text{et} \quad F^n(sK) = \bigoplus_p F^n K_p.$$

Le complexe $d_0 K$ désigne sK muni des filtrations simples W^f , W et F .

Le complexe $d_1 K$ est muni de la filtration diagonale $W = \delta(W, L)$ et des filtrations simples W^f et F , alors que $d_2 K$ est muni des filtrations diagonales $W^f = \delta(W^f, L)$ et $W = \delta(W, L)$ et de la filtration simple F . En composant d_i avec le foncteur classique qui associe un complexe DG à un complexe cosimplicial, on va vérifier que l'on obtient des foncteurs diagonaux

$$\delta_i : \text{CHMFS} \rightarrow \text{CHMF} \quad \text{pour } i \in \{1, 2\}.$$

PROPOSITION 2.17. — Soit K un CHMFS (resp. CHMFDG); alors ses images $\delta_1 K$ (2.16) (resp. $d_1 K$) diagonal en W et $\delta_2 K$ (resp. $d_2 K$) diagonal en W^f et W sont des CHMF.

Preuve. — Il s'agit de vérifier l'axiome (2.4.1) Pour tous entiers $j \leq i$, le quotient $((W_i^f/W_j^f) K_p, W, F)$ [resp. $((W_{i+p}^f/W_{j+p}^f) K_p, W, F)$] est un CHMFS, et on désigne son image diagonale en W par $\delta(W_i^f/W_j^f) K$ (resp. $\delta(\delta W_i^f/\delta W_j^f) K$). Alors on a

$$(2.17.1) \quad ((W_i^f/W_j^f) \delta_1 K, W, F) = (\delta(W_i^f/W_j^f) K, W, F),$$

$$(2.17.2) \quad ((W_i^f/W_j^f) \delta_2 K, W, F) = (\delta(\delta W_i^f/\delta W_j^f) K, W, F).$$

On trouve immédiatement

$$(2.17.3) \quad \text{Gr}_i^W(\delta_s K, F) = \bigoplus_p (\text{Gr}_{i+p}^W K_p[-p], F), \quad s = 1, 2.$$

C'est un complexe de Hodge de poids i . Appliquons (2.17.3) à $(W_i^f/W_j^f) K$ (resp. $(\delta W_i^f/\delta W_j^f) K$), on trouve

$$(2.17.4) \quad (\text{Gr}_h^W(W_i^f/W_j^f) \delta_1 K, F) = \bigoplus_p (\text{Gr}_{h+p}^W(W_i^f/W_j^f) K_p[-p], F),$$

$$(2.17.5) \quad (\text{Gr}_h^W(W_i^f/W_j^f) \delta_2 K, F) = \bigoplus_p (\text{Gr}_{h+p}^W(W_{i+p}^f/W_{j+p}^f) K_p[-p], F).$$

Ce sont des complexes de Hodge de poids i d'après la définition d'un CHMFS. La preuve est semblable pour $d_i K$.

2.18. — La définition d'un CHMCFDG sur un espace X et des CHMCF images diagonales par d_i pour $i = 1$ et 2 , est évidente.

DÉFINITION 2.19. — (i) Un CHMCFS (S pour cosimplicial) K sur un espace simplicial (resp. simplicial strict) X , consiste en un complexe K_Z sur X , un complexe bifiltré (K_Q, W^f, W) sur X , un complexe trifiltré (K_C, W^f, W, F) sur X , des isomorphismes $K_Q \simeq K_Z \otimes Q$ et $(K_Q, W^f, W) \otimes C \simeq (K_C, W^f, W)$, tel que l'axiome suivant soit vérifié.

(2.19.1) La restriction K_p de K à chacun des X_p est un CHMCF.

(ii) Supposons X au-dessus de X par un morphisme π , et munissons $(\pi)_* K$ de la structure de CHMCFDG sur X . Les images directes $\delta_1 K$ diagonale en W et $\delta_2 K$ diagonale en W^f et W sont égales à $d_1 (\pi)_* K$ et $d_2 (\pi)_* K$ respectivement i.e. si $\pi_* = s \circ (\pi)_*$

$$(2.19.2) \quad \begin{aligned} (\delta_1 K, W^f, W, F) &= (\pi_* K, W^f, \delta(W, L), F), \\ (\delta_2 K, W^f, W, F) &= (\pi_* K, \delta(W^f, L), \delta(W, L), F). \end{aligned}$$

2.20. — Avec les notations de 2.19, le calcul suivant des termes E_1 de la suite spectrale de $(\delta_i K, W)$ nous servira plus tard (3.13.2) et (3.30).

$$(2.20.1) \quad \begin{aligned} {}_w E_1^{p,q} &= H^{p+q}(X, Gr_{-p}^W \delta_i K) \\ &\simeq \bigoplus_m H^{p+q}(X_m, Gr_{m-p}^W K_m[-m]) \simeq \bigoplus_m H^{p+q-m}(X_m, Gr_{m-p}^W K_m). \end{aligned}$$

La filtration F induit une SH de poids j sur les termes ${}_w E_1^{j,j}$ et les différentielles d_1 sur ${}_w E_1^{j,j}$ sont celles du complexe simple associé au complexe double de SH de poids j

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\partial} H^{n-m}(X_{m+1}, Gr_{j+m-n}^W K_{m+1}) & \xrightarrow{\partial} & H^{n+1-m}(X_{m+1}, Gr_{j+m-n+1}^W K_{m+1}) \\ \swarrow & \uparrow d' & \swarrow \\ H^{n-m}(X_m, Gr_{j+m-n}^W K_m) & & H^{n+1-m}(X_m, Gr_{j+m-n-1}^W K_m) \\ \searrow & & \searrow \\ {}_w E_1^{n-j,j} & & {}_w E_1^{n+1-j,j} \end{array}$$

où ∂ est la différentielle de ${}_w E_1(K_m)$ pour m fixé, et d' est la différentielle provenant de la structure simpliciale.

3. SHM limite d'une famille de DCN ouverts

Pour démontrer le théorème (1.10) nous utilisons un CHML convenable au sens de (2.11). Nous en donnons ici une construction résumée mais nous renvoyons à la deuxième partie (II, 2 et 3) pour vérifier que l'on obtient bien des CHMCL. On trouve aussi la démonstration du théorème (1.10) dans le cas cité, qui est en fait le cas le plus simple où l'on rencontre les différents points de la démonstration générale.

Cas d'un morphisme lisse

3.1. Avec les notations de (1.10), supposons f lisse sur D^* de fibre Y en zéro, et de plus X une variété analytique sur C , Y et Z deux diviseurs à croisements normaux (DCN) dans X , tel que $Y \cup Z$ soit aussi un DCN. Le complexe logarithmique $\Omega_X^*[\text{Log}(Y \cup Z)]$

est muni de la filtration de Hodge F et de trois filtrations par le poids, le poids W (total) en $Y \cup Z$, le poids W^Y en dy_j/y_j pour des équations locales $(y_j)_{j \in J}$ de Y et le poids W^Z en dz_i/z_i pour des équations locales $(z_i)_{i \in I}$ de Z . Le cycle $[Y] = \sum n_i Y_i$ pour $i \in [1, P]$ admet en général des multiplicités n_i .

Pour mettre en évidence les poids W^Y et W^Z , nous écrivons aussi $\Omega_X^*(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)$ pour $\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z)$. Supposons Z et Y réunion de composantes irréductibles lisses et notons $Z^0 = X$ et $Z^r = \coprod_{i_1, \dots, i_r} Z_{i_1 \dots i_r}$ la somme disjointe des intersections de r composan-

tes distinctes, muni d'une projection $\pi : Z^r \rightarrow X$. L'image inverse $Z^r \cdot Y = \pi^{-1}(Y)$ de Y , est un DCN dans Z^r . Nous désignons par $Y_{\underline{r}}(0)$ le schéma simplicial strict où $Y_{\underline{r}}(0) = \coprod Y_{i_1 \dots i_r}$ au-dessus de $Y((0))$ égal à Y réduit, car dans le cas de Y nous envisageons une construction $Y_{\underline{r}}(m.)$ et $Y((m.))$ dans la deuxième partie (II, 1) faisant intervenir des multiplicités arbitraires de Y_i dans Y .

3.2. ψ mixte. Considérons le complexe image directe diagonale en W d'un complexe cosimplicial sur $Y_{\underline{r}}(0)$ (voir dans la deuxième partie (II, 2) les motivations et les détails) égal en degré r à

$$(3.2.1) \quad (\delta_1 \psi_{Y_{\underline{r}}(0)}(\text{Log } Z)^r = \bigoplus_{p+q+j=r, p \leq 0, j \geq 0} \psi_{Y_{\underline{r}}(0)}^{p,q}(\text{Log } Z)$$

où :

$$\psi_{Y_{\underline{r}}(0)}^{p,q}(\text{Log } Z) = \Omega_X^{p+q}(\text{Log } Y \cup Z) \otimes 0_{Y_{\underline{r}}(0)}$$

La différentielle cosimpliciale est déduite de la différentielle simple associée à celles du complexe double

$$\begin{aligned} d'' : \psi_{Y_{\underline{r}}(0)}^{p,q}(\text{Log } Z) &\rightarrow \psi_{Y_{\underline{r}}(0)}^{p,q+1}(\text{Log } Z) & \text{tel que } d'' w = dw, \\ d' : \psi_{Y_{\underline{r}}(0)}^{p,q}(\text{Log } Z) &\rightarrow \psi_{Y_{\underline{r}}(0)}^{p+1,q}(\text{Log } Z) & \text{tel que } d' w = f^*(dt/t) \wedge w, \end{aligned}$$

où t est un paramètre sur le disque. On munit le complexe (3.2.1) de filtrations par des sous-complexes W_i (resp. W_i^f , W_i^Y et F^i) égales à

$$\begin{aligned} W_i &= \bigoplus_{p \leq 0, j \geq 0} W_{i+j+2,p}(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes 0_{Y_{\underline{r}}(0)}), \\ \text{resp. } W_i^f &= \bigoplus_{p \leq 0, j \geq 0} W_i^f, \quad W_i^Y = \bigoplus_{p \leq 0, j \geq 0} W_{i+p}^Y \quad \text{et} \quad F^i = \bigoplus_{p \leq 0, j \geq 0} F^{p+i}. \end{aligned}$$

Les compléments suivants se trouvent dans (II, 2) :

– Les filtrations W^Y , W et F ne sont pas finies en chaque degré, par contre W et F induisent des filtrations finies sur les termes du sous-complexe W_i^Y pour tout entier i .

(3.2.2) Pour tout choix de multiplicités arbitraires $m_i + 1$ affectées aux composantes Y_i de Y pour $i \in [1, p]$, il est possible de construire des complexes $\delta_1 \psi_{Y_{\underline{r}}(m.)}(\text{Log } Z)$ (II, 2.21) qui sont tous quasi-isomorphes quel que soit $(m.) \in \mathbb{N}^p$.

– A l'aide des résidus le long de Z puis le long de Y, on trouve

$$(3.2.3) \quad \begin{aligned} & \text{Gr}_m^W(W_b^f/W_a^f) \delta_1 \psi_{Y_{\underline{(0)}}}(\text{Log } Z), F \xrightarrow{\approx} \bigoplus_{j \in [a, b]}^{R_Z} (\text{Gr}_{m-j}^W \delta_1 \psi_{Z^j, Y_{\underline{(0)}}}[-j], F[-j]) \\ & \xrightarrow{\approx} \bigoplus_{j \in [a, b], p \leq 0, h \geq 0}^{R_Y} (\Omega_{Z^j, Y}^{*j, 2p+m+h-j, Y_{\underline{(0)}}}[-2p-m-h], F[-p-m-h]), \end{aligned}$$

où le deuxième terme est associé à la famille Z^j sur D.

3.3 Le deuxième complexe que l'on définit $(A_{Y_{((0))}}(\text{Log } Z), W^Y, W^f, W, F)$ (II, 2.25) est égal en degré r à

$$(3.3.1) \quad A_{Y_{((0))}}^r(\text{Log } Z) = \bigoplus_{p \geq 0, q \geq 0, p+q=r} \Omega_X^{p+q+1}(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)/W_p^Y.$$

Il est muni en degré r , des filtrations

$$W_i A_{Y_{((0))}}^r(\text{Log } Z) = \bigoplus_{p+q=r} W_{i+2p+1} \Omega_X^{p+q+1}(\text{Log } YUZ)/W_p^Y$$

et respectivement en termes des filtrations sur $\Omega_X^{p+q+1}(\text{Log } Y \cup Z)/W_p^Y$.

$$W_i^f = \bigoplus_{p+q=r} W_i^Z, \quad W_i^Y = \bigoplus_{p+q=r} W_{i+p+1}^Y \quad \text{et} \quad F^i = \bigoplus_{p+q=r} F^{p+i+1}.$$

Les différentielles sont analogues à d' et d'' sur ψ . On a

$$(3.3.2) \quad \begin{aligned} & \text{Gr}_m^W(W_b^f/W_a^f) A_{Y_{((0))}}(\text{Log } Z), F \xrightarrow{\approx} \bigoplus_{j \in [a, b]}^{R_Z} \text{Gr}_{m-j}^W A_{Z^j, Y_{((0))}}[-j], F[-j] \\ & \xrightarrow{\approx} \bigoplus_{j \leq m+p, j \in [a, b], p \geq 0}^{R_Y} (\Omega_{Z^j, Y}^{*j, m-j+2p+1}[-m-2p], F[-m-p]). \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.4. — Il existe un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée (i. e. un complexe quasi-isomorphe à chacun des complexes considérés) :

$$\Lambda(df/f); \quad \delta_1 \psi_{Y_{\underline{(0)}}}(\text{Log } Z) \xrightarrow{\sim} A_{Y_{((0))}}(\text{Log } Z),$$

qui respecte les filtrations W^Y, W^f, W et F et qui induit un isomorphisme sur Gr^{W^Y} et Gr^{W^f} .

Preuve. — Voir (II, 2.21.3 et 2.25) dans la deuxième partie.

Nous vérifions dans la deuxième partie les résultats suivants.

PROPOSITION 3.5. — Soient $\tilde{j}^{\mathbb{Z}^*} : (\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*) \rightarrow \tilde{X}^*$, τ la filtration canonique [H II], 1.4.6 sur $\tilde{j}_*^{\mathbb{Z}^*} \mathbb{C}_{\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*}$ et $W^{\mathbb{Z}}$ la filtration par le poids induite par τ sur la cohomologie et par là sur le sous-espace $H^i(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C})^u$ où l'action de la monodromie est unipotente.

(i) Il existe un isomorphisme canonique :

$$(3.5.1) \quad H^i(Y, \delta_1 \psi_{Y_{(0)}}(\text{Log } Z), W^f) \simeq (H^i(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C})^u, W^{\mathbb{Z}}).$$

(ii) La suite spectrale de $\Gamma(Y, \delta_1 \psi_{Y_{(0)}}(\text{Log } Z), W^f)$ est isomorphe à la suite spectrale de $X_t - Z_t$, $t \in D^*$, par rapport à la filtration par le poids, et par conséquent dégénère en E_2 i. e. ${}_w^f E_2 \simeq {}_w^f E_\infty$.

(iii) Les assertions (i) et (ii) sont vraies aussi pour $A_{Y_{(0)}}(\text{Log } Z)$.

La preuve s'inspire des résultats de [SGA 7], II, exp. 14. Voir (II, 2.3, 2.7).

PROPOSITION 3.6. — Pour tout entier $k \geq n$ la dimension de Y , les immersions

$$i: W_k^Y \delta_1 \psi_{Y_{(0)}}(\text{Log } Z) \xrightarrow{\sim} \delta_1 \psi_{Y_{(0)}}(\text{Log } Z),$$

sont des quasi-isomorphismes qui respectent les filtrations W^f , W et F et induisent des quasi-isomorphismes sur Gr^{W^f} .

Preuve. — Voir (1, 2.23).

PROPOSITION 3.7. — Les complexes

$$(W_k^Y \delta_1 \psi_{Y_{(0)}}(\text{Log } Z), W^f, W, F) (k \geq n), \quad (A_{Y_{(0)}}(\text{Log } Z), W^f, W, F),$$

sont sous-jacents à des \mathbb{Q} -CHMCL sur Y réduit. Si de plus la monodromie est unipotente, ils munissent $H^*(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{Z})$ d'une même SHM dite limite.

Preuve. — On construit d'abord les complexes sous-jacents à coefficients dans \mathbb{Q} pour obtenir des \mathbb{Q} -CHMCF (voir II, 2). On obtient en fait des \mathbb{Q} -CHMCL d'après (3.5) et (3.6). La SHM que l'on obtient est unique car le morphisme $\Lambda(df/f)$ (3.4) induit un morphisme de SHM et un isomorphisme sur la cohomologie.

3.8. L'action de la monodromie sur les complexes (3.2.1) et (3.3.1) ci-dessus est donnée par l'endomorphisme v induit par le morphisme identique pour $p < 0$ ($v=0$ pour $p=0$)

$$v: \psi_{Y_{(0)}}^{p,q}(\text{Log } Z) \simeq \Omega_X^{p+q}(\text{Log } Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_{(0)}} \simeq \psi_{Y_{(0)}}^{p+1,q-1}(\text{Log } Z)$$

respectivement la projection canonique pour $p \geq 0$

$$v: A_{Y_{(0)}}^{pq}(\text{Log } Z) \simeq \Omega^{p+q+1}(\text{Log } Y \cup Z)/W_p^Y \rightarrow \Omega^{p+q+1}(\text{Log } Y \cup Z)/W_{p+1}^Y \simeq A_Y^{p+1,q-1}(\text{Log } Z).$$

PROPOSITION 3.8. — L'endomorphisme v défini sur les deux complexes ci-dessus vérifie :

$$v(W_j^f) \subset W_j^f, \quad v(W_j) \subset W_{j-2} \quad \text{et} \quad v(F^j) \subset F^{j-1}.$$

Il est de plus compatible au morphisme $\Lambda(df/f)$ (3.4) à homotopie près, et il induit via (3.5) le logarithme de la monodromie $N=1/2i\pi \text{Log } T$ sur la cohomologie unipotente $H^i(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C})^u$.

Preuve. — Voir (II, 3.3) et (II, 3.5).

LEMME 3.9. — Pour tout $k \geq n$, les suites spectrales $({}_{\text{wf}} E_1^{pq}, W, F)$ de $\Gamma(Y, (W_k^Y \delta_1 \psi_{Y_{\underline{z}}(0)})(\text{Log } Z), W, F, W^f)$ coïncident entre elles et avec celle de $\Gamma(Y, (A_{Y((0))})(\text{Log } Z), W, F, W^f)$ et l'on a

$$(3.9.1) \quad (\text{Gr}_{-p}^{W^f} W_k^Y \delta_1 \psi_{Y_{\underline{z}}(0)}(\text{Log } Z), W, F) \simeq (W_k^Y \delta_1 \psi_{Z^{-p}, Y_{\underline{z}}(0)}[p], W[-p], F[p]),$$

où le second terme correspond à la famille Z^{-p} sur D que nous supposons lisse sur D^* .

$$(3.9.2) \quad (\text{Gr}_{-p}^{W^f} A_{Y((0))}(\text{Log } Z), W, F) \simeq (A_{Z^{-p}, Y}[p], W[-p], F[p]),$$

$$(3.9.3) \quad ({}_{\text{wf}} E_1^{pq}, W, F) \simeq H^{p+q}(Z^{-p}, Y, K),$$

où K désigne l'un des complexes (3.9.1) ou (3.9.2).

$$(3.9.4) \quad (H^i((\tilde{Z}^{-p})^*, \mathbb{C}), W, F)^u \simeq H^i(Z^{-p}, Y, W_k^Y \delta_1 \psi_{Z^{-p}, Y_{\underline{z}}(0)}, W, F) \\ \simeq H^i(Z^{-p}, Y, A_{Z^{-p}, Y((0))}, W, F).$$

La preuve se déduit des propositions (3.5 à 7) ci-dessus.

Les isomorphismes (3.9.2) et (3.9.3) s'obtiennent par des résidus le long de Z (II, 1.2.1). L'isomorphisme (3.9.4) est un cas particulier de (3.5) d'après (3.6).

PROPOSITION 3.10. — Soit X une variété analytique, $f: X \rightarrow D$ un morphisme propre sur le disque D , Y et Z des DCN fermés dans X tel que YUZ le soit, et $Y=f^{-1}(0)$.

Supposons l'action de la monodromie T sur $H^n(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C})$ unipotente et soit $N=(1/2i\pi) \text{Log } T$. Si les composantes de la fibre centrale sont kähleriennes, ou si Y et $Y \cdot Z$ sont algébriques, pour tout entier $k \geq \dim Y$ les complexes

$$(W_k^Y \delta_1 \psi_{Y_{\underline{z}}(0)}(\text{Log } Z), W^f, W^f, W, F) \quad (3.5) \quad \text{et} \quad (A_{Y((0))}(\text{Log } Z), W^f, W, F) \quad (3.7),$$

sont sous-jacents à des CHMCL et munissent la cohomologie $H^n(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{Z})$ d'une SHM de filtration par le poids W , de Hodge F , et une filtration décalée de n , $W^f[n]$ définie sur \mathbb{Q} , tel que les assertions (i) et (ii) de (1.10) soient vérifiées. Si de plus X est kählerienne, l'assertion (iii) de (1.10) est alors vérifiée.

Preuve. — Nous pouvons appliquer (2.14) à (3.5) et (3.7) pour déduire (i) et (ii) de (1.10). Nous prouvons (iii) de (1.10).

Nous devons appliquer l'assertion

(3.10.1) Si (K, W, F) est un CHM, le système $(K', W', F') = (K[m], W[m-2h], F[h])$ est un CHM pour tous $m, h \in \mathbb{Z}$ et les SHM induites sur la cohomologie se correspondent par l'isomorphisme :

$$(H^{i+m}(K), W[-2h], F[h]) \simeq (H^i(K'), W', F').$$

En particulier si (K, F) est un CH de poids i , alors $(K[p], F[h])$ est un CH de poids $1+p-2h$.

Nous en déduisons avec les notations de (3.9.3) et (3.9.4)

$$(3.10.2) \quad ({}_{\mathcal{W}}E_1^{p,q}, W, F) \simeq (H^{2p+q}((\tilde{Z}^{-p})^*, \mathbb{C}), W[-2p], F[p]).$$

La différentielle d_1 du complexe ${}_{\mathcal{W}}E_1^{i,i}$ de SHM, est un morphisme de Gysin alterné

$$H^{2p+q}((\tilde{Z}^{-p})^*, \mathbb{C}) \xrightarrow{d_1 = \text{Gysin}} H^{2p+2+q}((\tilde{Z}^{-p-1})^*, \mathbb{C})$$

L'endomorphisme v (3.8) induit un endomorphisme v sur le complexe ${}_{\mathcal{W}}E_1^{i,i}$ qui correspond à l'action de $N_p = (1/2i\pi) \text{Log } T$ sur ${}_{\mathcal{W}}E_1^{p,i} = H^{2p+i}((\tilde{Z}^{-p})^*, \mathbb{C})$.

Admettons pour un moment l'assertion [voir (3.11) et (3.22)].

(3.10.3) Pour tout entier b , l'endomorphisme nilpotent

$$((\text{Gr}_{2p+i+b}^{\mathcal{W}} H^{2p+i}((\tilde{Z}^{-p})^*, \mathbb{C}))_{p \in \mathbb{Z}}, \text{Gysin}) \xrightarrow{N_p^b} ((\text{Gr}_{2p+i-b}^{\mathcal{W}} H^{2p+i}((\tilde{Z}^{-p})^*, \mathbb{C}))_{p \in \mathbb{Z}}, \text{Gysin})$$

est un isomorphisme de complexes indexés par $p \in \mathbb{Z}$.

Nous en déduisons, d'après (3.10.2) l'isomorphisme

$$(3.10.4) \quad (\text{Gr}_{i+b}^{\mathcal{W}} ({}_{\mathcal{W}}E_1^{p,i})_{p \in \mathbb{Z}}, d_1) \xrightarrow{v_p^b} (\text{Gr}_{i-b}^{\mathcal{W}} ({}_{\mathcal{W}}E_1^{p,i})_{p \in \mathbb{Z}}, d_1).$$

Nous avons

$$\text{Gr}_i^{\mathcal{W}f} H^n(Y, A_{Y((0))}(\text{Log } Z)) \simeq {}_{\mathcal{W}}E_2^{n-i,i} \simeq H^{n-i}({}_{\mathcal{W}}E_1^{i,i}, d_1)$$

et d'après (2.14, ii)

$$(3.10.5) \quad \text{Gr}_r^{\mathcal{W}} \text{Gr}_i^{\mathcal{W}f} H^n(Y, A_{Y((0))}(\text{Log } Z)) \simeq \text{Gr}_r^{\mathcal{W}H^{n-i}} ({}_{\mathcal{W}}E_1^{i,i}, d_1) \\ \simeq H^{n-i}(\text{Gr}_r^{\mathcal{W}} ({}_{\mathcal{W}}E_1^{i,i}), d_1).$$

L'isomorphisme induit par (3.10.4) sur la cohomologie en degré $p=n-i$, se transforme via (3.10.5) en un isomorphisme induit par v^b

$$\text{Gr}_{i+b}^{\mathcal{W}} \text{Gr}_i^{\mathcal{W}f} H^n(Y, A_{Y((0))}(\text{Log } Z)) \xrightarrow{v^b} \text{Gr}_{i-b}^{\mathcal{W}} \text{Gr}_i^{\mathcal{W}f} H^n(Y, A_{Y((0))}(\text{Log } Z)),$$

ce qui prouve (iii) à partir de (3.10.3).

REMARQUES SUR LE CAS LISSE ET PROPRE (preuve de (3.10.3)).

3.11. L'assertion (3.10.3) est une propriété caractéristique de la filtration par le poids de la monodromie. Nous démontrons qu'elle est équivalente au théorème du cycle local invariant (3.12). L'étude dans ce cas d'une variation de SH associée à une famille lisse et propre sur D^* a été faite par W. Schmid [S]. J. Steenbrink a utilisé le complexe $A_{Y((0))}$ pour cette étude [St] et C. H. Clemens a écrit une démonstration de (3.12) [C]. Nous avons eu des discussions à ce sujet avec O. Gabber et J. L. Verdier où il est apparu le

(ii) L'exactitude de la suite (3.13.2) est vérifiée dans [SGA 7], II, Exp. 14, preuve de (4.18.4).

COROLLAIRE 3.14. — (i) *la suite exacte de CHMC*

$$0 \rightarrow \delta_1(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_{\cdot}(0)}), \mathbf{W}, \mathbf{F}) \rightarrow (\mathbf{W}_n^Y \delta_1 \psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z), \mathbf{W}, \mathbf{F}) \\ \rightarrow (\mathbf{W}_n^Y \delta_1 \psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z), \mathbf{W}[2], \mathbf{F}[-1]) \rightarrow 0$$

induit une suite exacte de SHM

$$(3.14.1) \quad H^i(X^* - Z^*, \mathbb{C}) \rightarrow H^i(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C})^u \\ \rightarrow H^i(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C})^u(-1) \rightarrow H^{i+1}(X^* - Z^*, \mathbb{C}),$$

(ii) *Pour Z vide, l'image de S: $H^k(Y, \mathbb{C}) \rightarrow H^k(X^*, \mathbb{C})$ dans (3.13.1) est égale à $\mathbf{W}^k H^k(X^*, \mathbb{C})$.*

(iii) *Supposons Z vide; la suite exacte (3.13.2) induit alors la suite exacte pour $j \geq k+1$.*

$$(3.14.2) \quad \text{Gr}_j^{\mathbf{W}} H_Y^{k+1}(X, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Gr}_{j+2}^{\mathbf{W}} H_Y^{k+2}(X, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Gr}_{j+4}^{\mathbf{W}} H_Y^{k+3}(X, \mathbb{C}).$$

Preuve. — L'assertion (i) est claire et pour (ii) on utilise que le poids de $H_Y^{k+1}(X, \mathbb{C})$ est $\geq k+1$.

(iii) Le poids de $H^k(Y, \mathbb{C})$ varie de 0 à k, d'où d'après (3.13.1)

$$\text{Gr}_{k+1}^{\mathbf{W}} H^k(X^*, \mathbb{C}) \subset \text{Gr}_{k+1}^{\mathbf{W}} H_Y^{k+1}(X, \mathbb{C})$$

et

$$\text{Gr}_j^{\mathbf{W}}(H^k(X^*, \mathbb{C})) \simeq \text{Gr}_j^{\mathbf{W}} H_Y^{k+1}(X, \mathbb{C}) \quad \text{pour } j > k+1.$$

On déduit alors (3.14.2) de la suite exacte $\text{Gr}^{\mathbf{W}}$ de (3.13.2).

3.15. Considérons le cône mixte en \mathbf{W} au-dessus de l'injection canonique

$$(3.15.1) \quad \Phi_{Y((0))}^{\mathbf{M}}(\text{Log } Z) = \mathbf{C}_{\mathbf{M}}(\mathbf{W}_0^Y \delta_1(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_{\cdot}(m)})) \\ \rightarrow \mathbf{W}_n^Y \delta_1 \psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z).$$

Il est isomorphe via (3.12.1) et (3.12.2) au cône sur le morphisme canonique

$$\Phi_X(j_*^Z \mathbf{C}_{X-Z}) = \mathbf{C}((j_Y^Z)_* \mathbf{C}_{Y-Y.Z} \rightarrow i_* \Psi_X(j_X^{Z^*} \mathbf{C}_{X^*-Z^*})).$$

Lorsque les composantes de Y sont kählériennes (resp. Y et $Y.Z$ sont algébriques), le cône (3.15.1) est un CHMC; il munit la cohomologie évanescence d'une SHM.

THÉORÈME 3.16 (du cycle local invariant). — *Supposons la variété X kählérienne, et Z vide, alors la suite de morphismes*

$$(3.16.1) \quad (\mathbf{W}_0^Y \delta_1(\Omega_X^*(\text{Log } Y) \otimes \mathcal{O}_{Y_{\cdot}(0)}), \mathbf{W}, \mathbf{F}) \rightarrow (\mathbf{W}_n^Y \delta_1 \psi_{Y_{\cdot}(0)}), \mathbf{W}, \mathbf{F}) \\ \rightarrow (\mathbf{W}_n^Y \delta_1 \psi_{Y_{\cdot}(0)}), \mathbf{W}[2], \mathbf{F}[-1],$$

induit, pour tout entier i , une suite exacte de SHM

$$(3.16.2) \quad H^i(Y, \mathbb{C}) \xrightarrow{S_p^*} H^i(\tilde{X}^*, \mathbb{C})^u \xrightarrow{N} H^i(\tilde{X}^*, \mathbb{C})^u(-1).$$

Preuve. — La suite exacte topologique sous-jacente à (3.9.1) a été conjecturée par Griffiths [G]. La preuve est basée sur la théorie des SHM. Elle a été obtenue par P. Deligne, W. Schmid, N. Katz et C. H. Clemens. Nous référons à [C] par exemple.

Nous vérifions dans (II, 3.5) que les suites (3.16.1) et (3.16.2) coïncident.

3.17. Étude cohomologique du complexe $A_{Y((0))}$ de Steenbrink. *Dualité sur* ${}^wE_1(A_{Y((0))})$. — Nous construisons la dualité pour le complexe $A_{Y((0))}$ dans l'appendice. Il nous suffit ici de construire la dualité sur les termes de la suite spectrale ${}^wE_1(A_{Y((0))})$ pour Z vide. On a

$$(3.17.1) \quad \begin{aligned} {}^wE_1^{p,q} &= H^{p+q}(Y, Gr_{-p}^W A_{Y((0))}) = H^{p+q}(Y, \bigoplus_{q'} Gr_{q'-p}^W A_Y^{q'}[-q]) \\ &= H^{p+q}(Y, \bigoplus_{q'} Gr_{2q'-p+1}^{W^Y} A_{Y((0))}^{q'}[-q']) \simeq H^{p+q}(Y, \bigoplus_{q' \geq p, q' \geq 0} \Omega_Y^{2q'-p+1}[p-2q']) \\ &\simeq \bigoplus_{q' \geq p, q' \geq 0} H^{2p-2q'+q}(Y^{2q'-p+1}, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Le complexe $({}^wE_1^q, d_1)$ est le complexe simple associé au complexe double (2.20)

$$(3.17.2) \quad \begin{array}{ccccc} E_1^{p,q} & & E_1^{p+1,q} & & \\ \swarrow & & \searrow & & \\ H^{p+q-q'-1}(Y, Gr_{q'-p+1}^W A_{Y((0))}^{q'+1}) & \xrightarrow{\partial} & H^{p+q-q'}(Y, Gr_{q'-p}^W A_{Y((0))}^{q'+1}) & \rightarrow & H^{p+q-q'+1}(Y, Gr_{q'-p-1}^W A_{Y((0))}^{q'+1}) \\ & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow \\ & & H^{p+q-q}(Y, Gr_{q-p}^W A_{Y((0))}^q) & \xrightarrow{\partial} & H^{p+q-q'+1}(Y, Gr_{q'-p-1}^W A_{Y((0))}^{q'}) \end{array}$$

$d' = \Lambda \eta$

Soient $i_j: Y^{r+1} \rightarrow Y^r$ pour $j \in [1, r+1]$ les immersions naturelles; le morphisme de Gysin $G = \sum_j (-1)^j (i_j)_*: H^m(Y^{r+1}, \mathbb{C}) \rightarrow H^{m+2}(Y^r, \mathbb{C})$ est le dual de Poincaré de la restriction $\rho = \sum_j (-1)^j i_j^*$ d'où la formule de dualité pour tout $a \in H^i(Y^r, \mathbb{C})$ et tout $b \in H^{2n-2r-i}(Y^{r+1}, \mathbb{C})$

$$(3.17.3) \quad \int_{Y^{r+1}} (\rho \cdot a) \cup b = \int_{Y^r} a \cup (G \cdot b).$$

Lorsque le cycle $[Y] = \sum_{i \in [1, p]} n_i Y_i$ nous associons au morphisme de restriction $\rho: \Omega_{Y^r}^m \rightarrow \Omega_{Y^{r+1}}^{m+1}$ (resp. au morphisme de Gysin G) un morphisme $\rho(n.)$ [resp. $G(n.)$] donné par la formule

$$(3.17.4) \quad \rho(n.)_j = n_j \rho_j: \Omega_{Y_{i_1 \dots i_j \dots i_r}}^h \rightarrow \Omega_{Y_{i_1 \dots i_j \dots i_r}}^h,$$

respectivement et dualement.

$$(3.17.5) \quad G(n.)_j = 1/n_j G_j: H^m(Y_{i_1 \dots i_j \dots i_r}, \mathbb{C}) \rightarrow H^{m+2}(Y_{i_1 \dots \hat{i}_j \dots i_r}, \mathbb{C}).$$

La différentielle d' égale à $\Lambda(df/f)$ à gauche devient par la transformation résidu

$$(-1)^h \rho(n.): Gr_r^{W^Y}(\Omega_X^h(\text{Log } Y)) \rightarrow Gr_{r+1}^{W^Y} \Omega_X^{h+1}(\text{Log } Y).$$

de sorte que le diagramme (3.17.2) devient

$$(3.17.6) \quad \begin{array}{ccccc} E_1^{p,q} & & E_1^{p+1,q} & & E_1^{p+2,q} \\ \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\ H^{2p-2q'+q-2}(Y^{2q'-p+3}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{G} & H^{2p-2q'+q}(Y^{2q'-p+2}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{G} & H^{2p-2q'+q+2}(Y^{2q'-p+1}, \mathbb{C}) \\ & & \uparrow (-1)^{p+q+1} \rho(n.) & & \uparrow (-1)^{p+q+2} \rho(n.) \\ & & H^{2p-2q'+q}(Y^{2q'-p+1}, \mathbb{C}) & \rightarrow & H^{2p-2q'+q+2}(Y^{2q'-p}, \mathbb{C}) \end{array}$$

et l'on a les relations

$$(3.17.7) \quad G \circ \rho(n.) = \rho(n.) \circ G, \quad \rho(n.) \circ \rho(n.) = 0, \quad G \circ G = 0.$$

3.18. Désignons par M l'opérateur sur les groupes de cohomologie $H^*(Y_{i_1 \dots i_p}, \mathbb{C})$ tel que $M.a = (n_{i_1} \times \dots \times n_{i_p})a$; il s'étend à $H^*(Y^r, \mathbb{C})$ et vérifie les relations, pour $a \in H^i(Y^r, \mathbb{C})$ et $b \in H^j(Y^r, \mathbb{C})$

$$M.(a \cup b) = (M.a) \cup b = a \cup (M.b),$$

$$(3.18.1) \quad M.(\rho(n.)a) = \rho(M.a), \quad M(G.b) = G(n.).(M.b),$$

$$\int_{Y^{r+1}} (M.(\rho(n.)a)) \cup b = \int_{Y^r} (M.a) \cup (G.b) = \int_{Y^r} a \cup (G(n.).Mb).$$

DÉFINITION 3.18. — Le morphisme de dualité $E_1^{p, 2n-q} \otimes E_1^{-p,q} \xrightarrow{P} \mathbb{C}$ est défini pour

$$a = \sum a_h \in E_1^{p, 2n-q} = \bigoplus_{h \geq p \geq 0} H^{2(n+p-h)-q}(Y^{2h-p+1}, \mathbb{C}),$$

$$b = \sum b_h \in E_1^{-p,q} = \bigoplus_{h \geq p \geq 0} H^{q-2h}(Y^{2h-p+1}, \mathbb{C}),$$

et $\varepsilon = (-1)^{q-p}$, par la formule,

$$(3.18.2) \quad P(a \otimes b) = \sum_{h \geq p} (-1)^{h+p} \varepsilon^p \int_{Y^{2h-p+1}} a_h \cup (M.b_h).$$

LEMME 3.19. — On a, pour $a \in E_1^{p-1, 2n-q}$ et $b \in E_1^{-p,q}$: $P(d_1 a \otimes b) = P(a \otimes d_1 b)$.

Preuve. — Écrivons

$$(d_1 a)_h = \varepsilon \rho(n.) a_{h-1} + G(a_h) \quad \text{où } h \geq p \text{ et } \varepsilon = (-1)^{q-p}$$

$$(d_1 b)_{h'} = -\varepsilon \rho(n.) b_{h'} + G(b_{h'+1}) \quad \text{où } h' \geq p-1.$$

D'après (3.18.1)

$$P(a \otimes d_1 b) = \sum_{h' \geq p-1} (-1)^{h'+p-1} \varepsilon^{p-1}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{Y^{2h'-p+2}} a_{h'} \cup M \cdot G(b_{h'+1}) - \varepsilon a_{h'} \cup (M \cdot \rho(n \cdot)(b_{h'})) \\ & = (-1)^{h'+p} \sum_{h' \geq p-1} -\varepsilon^{p-1} \int_{Y^{2h'-p+3}} (\rho(n \cdot) a_{h'}) \cup (M \cdot b_{h'+1}) + \varepsilon^p \int_{Y^{2h'-p+1}} G(a_{h'}) \cup (M \cdot b_h) \end{aligned}$$

est égal à

$$P(d_1 a \otimes b) = \sum_{h \geq p} (-1)^{h+p} \varepsilon^p \int_{Y^{2h-p+1}} (\varepsilon \rho(n \cdot) a_{h-1} + G(a_h)) \cup (M \cdot b_h).$$

PROPOSITION 3.20. — *Le morphisme P (3.18.2) définit un isomorphisme de dualité sur les termes $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale de $(A_{Y((0))}, W)$ qui se réduit à la dualité de Poincaré via (3.17.6) et qui commute aux différentielles. Il induit un isomorphisme*

$$(3.2.0.1) \quad P: E_2^{-r, q+r} \xrightarrow{\sim} (E_2^{2n-q-r})^*$$

tel que pour $b \in E_1^{-r, q+r}$ de classe \bar{b} , et $a \in E_1^{2n-q-r}$ de classe \bar{a}

$$P(\bar{b})(\bar{a}) = P(a \otimes b) = \sum_{h \geq r} \int_{Y^{2h-r+1}} (-1)^{h+r} \varepsilon^r M a_h \cup b_h.$$

3.2.1. *Action de la monodromie sur ${}_W E_1$.* — L'endomorphisme v du complexe $A_{Y((0))}$ induit un morphisme

$$Gr^W v: Gr_r^W A_{Y((0))} \simeq Gr_{r-2}^W A_{Y((0))} \quad \text{tel que} \quad Gr_r^W v^r: Gr_r^W A_{Y((0))} \xrightarrow{\sim} Gr_r^W A_{Y((0))},$$

soit un isomorphisme pour $r \geq 0$. En effet écrivons

$$\begin{aligned} Gr_r^W A_{Y((0))} &= \bigoplus_{h \geq 0} \Omega_{Y^{r+2h+1}}^*[-r-2h], \\ Gr_{-r}^W A_{Y((0))} &= \bigoplus_{h \geq r} \Omega_{Y^{2h-r+1}}^*[r-2h] \simeq \bigoplus_{h' \geq 0} \Omega_{Y^{2h'+r+1}}^*[-2h'-r] \quad \text{où } h' = h-r; \end{aligned}$$

l'isomorphisme $Gr^W v^r$ induit alors l'identité de la composante d'indice h sur celle d'indice $h' = h-r$. Notons aussi v le morphisme induit sur les termes E_1 et E_2 de la suite spectrale de $\Gamma(A_{Y((0))}, W)$. Nous obtenons, avec les notations de (3.17.1) où on fait $h = q' + r$, le diagramme [St]

$$(3.21.1) \quad \begin{array}{ccccc} E_1^{-r-1, q+r} \xrightarrow{d_1} E_1^{-r, q+r} \xrightarrow{d_1} E_1^{-r+1, q+r} = E_1^{-r+1, q-r} \oplus H^{q-r+2}(Y^r, \mathbb{C}) & & & & \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \bigoplus_{h \geq r} H^{q-2h+r-2}(Y^{2h-r+2}, \mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{h \geq r} H^{q-2h+r}(Y^{2h-r+1}, \mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{h \geq r} H^{q-2h+r+2}(Y^{2h-r}, \mathbb{C}) & & & & \\ \downarrow v^r & \sim \downarrow v^r & & & \downarrow v^r \\ \bigoplus_{h \geq r-1} H^{q-2h+r-2}(Y^{2h-r+2}, \mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{h \geq r} H^{q-2h+r}(Y^{2h-r+1}, \mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{h \geq r+1} H^{q-2h+r+2}(Y^{2h-r}, \mathbb{C}) & & & & \\ \parallel & \parallel & \parallel & & \parallel \\ v^r E_1^{-r-1, q+r} \oplus H^{q-r}(Y^r, \mathbb{C}) = E_1^{-r-1, q-r} \xrightarrow{d_1} E_1^{-r, q-r} \xrightarrow{d_1} E_1^{-r+1, q-r} \end{array}$$

Nous avons les formules [St]

$$(3.21.2) \quad \begin{aligned} E_1^{-r+2, q+r-2} &\simeq v E_1^{-r, q+r} \oplus H^{q-r+2}(Y^{r-1}, \mathbb{C}) \quad \text{pour } r \geq 2, \\ E_1^{-r, q+r} &\stackrel{v^r}{\simeq} E_1^{r, q-r}, \\ E_1^{-1, q-r} &\simeq v^r E_1^{-r-1, q+r} \oplus H^{q-r}(Y^r, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

et la suite exacte $0 \rightarrow H^{q-r+2}(Y^r, \mathbb{C}) \rightarrow E_1^{-r+1, q+r} \xrightarrow{v^r} E_1^{r+1, q-r} \rightarrow 0$.

La différentielle d_1 de E_1 agissant sur $E_1^{-1, q-r}$ (resp. $E_1^{-r, q+r}$) induit

$$d_1 = (-1)^q \rho(n.): \quad H^{q-r}(Y^r, \mathbb{C}) \rightarrow H^{q-r}(Y^{r+1}, \mathbb{C}) \subset E_1^{r, q-r},$$

respectivement

$$d_1 = G(\text{Gysin}): \quad H^{q-r}(Y^{r+1}, \mathbb{C}) \rightarrow H^{q-r+2}(Y^r, \mathbb{C}) \subset E_1^{-r+1, q+r}.$$

PROPOSITION 3.22. — *Supposons la variété X dans (3.10) kählérienne, Z vide, et soit $N = (1/2i\pi) \text{Log } T$ l'endomorphisme nilpotent de type $(-1, -1)$ sur la SHM: $(H^q(\tilde{X}^*, \mathbb{C}), W, F)$. L'assertion*

$$(3.22.1) \quad \text{Gr}(N^r): \quad \text{Gr}_{q+r}^W H^q(\tilde{X}^*, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Gr}_{q-r}^W H^q(\tilde{X}^*, \mathbb{C})(-r)$$

est équivalente au théorème du cycle local invariant (3.16).

Preuve. — Nous déduisons (3.22.1) du théorème du cycle local invariant (3.16) par récurrence descendante sur r , l'assertion (3.22.1) étant vraie pour r assez grand.

Considérons un élément ξ dans $E_1^{-r, q+r}$ tel que $d_1 \xi = 0$ dans $E_1^{-r+1, q+r}$ et de classe de cohomologie $v^r \bar{\xi} = 0$ dans $E_2^{r, q-r} \simeq \text{Gr}_{q-r}^W H^q(\tilde{X}^*, \mathbb{C})$.

Première réduction: $v(\bar{\xi}) = 0$ dans $E_2^{-r+2, q+r-2}$.

D'après (3.21.2), il existe η_1 dans $E_1^{-r-1, q+r}$ et η dans $H^{q-r}(Y^r, \mathbb{C})$ tel que $v^r \xi = d_1(v^r \eta_1 + \eta)$, ou $d_1 \eta = \varepsilon \rho(n.) \eta = v^r(\xi - d_1 \eta_1)$.

En modifiant par $d_1 \eta_1$, on peut supposer

$\xi = \varepsilon \rho(n.) \eta$ dans $H^{q-r}(Y^{r+1}, \mathbb{C})$, $G(\xi) = 0$ et $\rho(n.) \xi = 0$, sans changer de classe de cohomologie $\bar{\xi}$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow \varepsilon \rho(n.) & & \nearrow -\varepsilon \rho(n.) & \\ H^{q-r-2}(Y^{r+2}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{G} & H^{q-r}(Y^{r+1}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{G} & H^{q-r+2}(Y^r, \mathbb{C}) \\ & \nearrow \varepsilon \rho(n.) & & \nearrow -\varepsilon \rho(n.) & \\ H^{q-r}(Y^r, \mathbb{C}) & \xrightarrow{G} & H^{q-r+2}(Y^{r-1}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{G} & H^{q-r+4}(Y^{r-2}, \mathbb{C}) \end{array}$$

La première ligne est identique à une partie de la suite spectrale donnant la SHM de l'ouvert $H^*(X^*, \mathbb{C})$ ou $H_Y^*(X, \mathbb{C})$; l'élément ξ dans $H^{q-r}(Y^{r+1}, \mathbb{C})$ tel que $G(\xi) = 0$ définit une classe de cohomologie $\bar{\xi}$ dans $\text{Gr}_{q+r+2}^W H_Y^{q+2}(X)$ tel que $\rho(n.) \bar{\xi} = 0$.

On déduit alors de (3.14.2) et pour $r \geq 1$ (pour $r=1$, on a déjà $v\bar{\xi}=0$), qu'il existe un élément $\alpha \in H^{q-r}(Y^r, \mathbb{C})$ tel que $G(\alpha)=0$ et $\bar{\xi}=\varepsilon\rho(n.)\underline{\alpha}$ i. e. il existe $\eta' \in H^{q-r-2}(Y^{r+2}, \mathbb{C})$ tel que

$$\varepsilon\rho(n.)\alpha = \xi + G(\eta') \quad \text{et} \quad G \circ \rho(n.)^r = \rho(n.) \circ G(\eta') = 0,$$

d'où $\xi' = \varepsilon\rho(n.)\eta'$ dans $H^{q-r-2}(Y^{r+3}, \mathbb{C})$ définit un élément ξ' dans $E_1^{-(r+2), q+r+2}$ de classe $\bar{\xi}'$ dans $E_1^{-(r+2), q+r+2}$ vérifiant $v^{r+2}\bar{\xi}'=0$. Nous déduisons par hypothèse de récurrence que $\bar{\xi}'=0$, il existe donc η'_1 dans $E_1^{-r-3, q+r+2}$ tel que $d_1\eta'_1 = -\xi'$, d'où $\eta' + \eta'_1$ dans $E_1^{-r-1, q+r}$ tel que $d_1(\eta' + \eta'_1) = G(\eta')$, et nous pouvons modifier donc une nouvelle fois sans changer sa classe dans $E_2^{-r, q+r}$ pour avoir :

$$\xi = \varepsilon\rho(n.)\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in H^{q-r}(Y^r, \mathbb{C}) \quad \text{et de plus} \quad d_1\alpha = v\xi \quad \text{dans} \quad E_1^{-r+2, q+r-2},$$

i. e. $v\bar{\xi}=0$ dans $\text{Gr}_{q+r-2}^W H^q(\tilde{X}^*, \mathbb{C}) \simeq E_2^{-r+2, q+r-2}$.

2. Finalement le théorème du cycle invariant implique $\bar{\xi}=0$, et l'on obtient l'injectivité dans (3.22.1). La surjectivité dans (3.22.1) est obtenue par dualité comme suit. Considérons le diagramme (Gr^W de la cohomologie)

$$(3.22.2) \quad \begin{array}{ccc} E_2^{-r, q+r} & \xrightarrow{P \sim} & (E_2^{r, 2n-q-r})^* \\ v^r \downarrow & & \downarrow i^r v \\ E_2^{r, q-r} & \xrightarrow{P' \sim} & (E_2^{-r, 2n-q+r})^* \end{array}$$

où P et P' sont des isomorphismes de dualité (3.20.1).

LEMME (3.23). — *Le diagramme (3.22.2) est commutatif.*

En effet pour tout a dans $Z^{-r, q+r}$ et tout b dans $Z^{-r, 2n-q+r}$

$$\begin{aligned} ((i^r v^r) \circ P)(\bar{a})(\bar{b}) &= P(a \otimes v^r b), \\ ((P' \circ v^r)(\bar{a})(\bar{b})) &= P(v^r a \otimes b). \end{aligned}$$

Réciproquement, d'après [St] l'assertion (3.22.1) implique que le poids de la SHM induite sur $\ker N$ dans la suite (3.16.2), où on suppose T unipotent,

$$H^i(Y, \mathbb{C}) \xrightarrow{\text{Sp}^*} H^i(\tilde{X}^*, \mathbb{C}) \xrightarrow{N} H^i(\tilde{X}^*, \mathbb{C})$$

est $\leq i$ car $\text{Gr}^W(N^r)$ est injectif sur $\text{Gr}_{i+r}^W H^i(\tilde{X}^*, \mathbb{C})$.

D'après (3.14, (i) et (ii)) l'image de Sp^* , égal au composé

$$H^i(Y, \mathbb{C}) \rightarrow H^i(X^*, \mathbb{C}) \rightarrow H^i(\tilde{X}^*, \mathbb{C}),$$

est égale à $W_i(\ker N)$, et par conséquent, égale à $\ker N$.

Cette preuve complète celle dans [St], voir Remarque (II, 3.18).

CAS D'UNE FAMILLE DE DCN OUVERTS

3.24. HYPOTHÈSE. — Considérons un morphisme propre $f: X \rightarrow D$ d'un espace analytique sur un disque dans \mathbb{C} de centre zéro, et supposons $X \subset P$ plongé dans un espace ambiant lisse muni d'un morphisme propre $g: P \rightarrow D$ lisse sur D^* et induisant f sur X , tel que :

(i) La fibre $Y = g^{-1}(0)$ est un DCN dans P de composantes Y_i lisses kählériennes (ou algébriques d'intersection Y_i , Z algébriques).

(ii) L'espace X est un DCN dans P et il existe un DCN Z dans P tel que $X \cup Y \cup Z$ soit un DCN à composantes lisses dans P . Nous supposons de plus $X \cup Z$ n'admet pas de composantes communes avec la fibre centrale Y (de telles composantes n'intervenant pas dans la famille induite par $X \cup Z$ au-dessus de D^*), et de même X n'admet pas de composante commune avec Z .

(iii) La famille $X - Y$ (resp. $Z - Y$) est un DCN relatif sur D^* .

3.25. Soit $\Pi: X_{\underline{i}} \rightarrow X$ l'espace simplicial strict associé au DCN X et aussi $\Pi: Y_{\underline{i}}(0) \rightarrow Y((0))$ celui qui est associé à Y [ce qui laisse envisager une variante en $Y_{\underline{i}}(m.)$]. Pour tout indice i , nous considérons les intersections (produits fibrés sur P)

$$(3.25.1) \quad Y_{\underline{i}} = Y \cdot X_{\underline{i}} \quad \text{et} \quad Z_{\underline{i}} = Z \cdot X_{\underline{i}},$$

qui sont des DCN dans $X_{\underline{i}}$ de même que $Y_{\underline{i}} \cup Z_{\underline{i}}$. Nous avons, avec les notations de (3.1)

$$(3.25.2) \quad X_{\underline{i}} \cdot Y_{\underline{j}}(0) \simeq (Y_{\underline{i}\underline{j}})(0), \quad X_{\underline{i}} \cdot Z' \simeq (Z_{\underline{i}})' \text{ noté aussi } Z'_{\underline{i}}.$$

$$(3.25.3) \quad \Omega_{X_{\underline{i}}}^*(\text{Log } Y_{\underline{i}})(\text{Log } Z_{\underline{i}}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\underline{i}}}} \mathcal{O}_{(Y_{\underline{i}})(0)} \simeq \Omega_{X_{\underline{i}}}^*(\text{Log } Y_{\underline{i}})(\text{Log } Z_{\underline{i}}) \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_{Y_{\underline{j}}(0)}.$$

Soit ${}_i\Pi: {}_iX_{\underline{i}} \rightarrow X$ l'espace tronqué de $X_{\underline{i}}$ d'indices $\geq i$; rappelons que la filtration décroissante L est définie pour tout complexe cosimplicial K_{\bullet} sur $X_{\underline{i}}$ par la formule

$$(3.25.4) \quad L^i(\Pi_* K_{\bullet}) = s(\Pi)_* K_{\bullet} = s({}_i\Pi)_* K_{\bullet}.$$

Le morphisme $f \circ \Pi_i: X_{\underline{i}} \rightarrow D$ est propre, et lisse sur D^* . C'est une situation géométrique donnant lieu à un système de variation de SHM sur $H^*((X_{\underline{i}} - Z_{\underline{i}})_{\mathbb{P}^1}, \mathbb{Z})_{t \in D^*}$ que l'on peut qualifier de cosimplicial. Dans ces conditions, nous avons construit un CHMCF sur $X_{\underline{i}}$ à support dans $Y_{\underline{i}}$ égal à $\delta_1 \Psi_{Y_{\underline{i}}(0)}(\text{Log } Z_{\underline{i}})$ (3.2.1) muni de filtrations W^Y, W^f, W et F , que l'on désignera par $\Psi_{Y_{\underline{i}}(0)}^M(\text{Log } Z_{\underline{i}})$.

Le système

$$(3.25.5) \quad (\Psi_{Y_{\underline{i}}(0)}^M(\text{Log } Z_{\underline{i}}), W^f, W, F),$$

ainsi obtenu est cosimplicial sur $X_{\underline{i}}$ d'après (3.25.3).

3.26. L'image directe diagonale en W^f et W du complexe (3.25.5)

$$(3.26.1) \quad (\Psi_{X \cdot Y((0))}^M(\text{Log } Z), W^f, W, W^Y, F) = \delta_2(\Psi_{Y_{\underline{i}}(0)}^M(\text{Log } Z_{\underline{i}}), W^f, W, W^Y, F)$$

est munie des filtrations diagonales en W^f et W

$$(3.26.2) \quad W_i^f \Psi_{X \cdot Y((0))}^M(\text{Log } Z) = \bigoplus_p W_{i+p}^f \Psi_{Y_{\underline{i}}(0)}^M(\text{Log } Z_{\underline{i}}) \quad (\text{resp. } W \text{ au lieu de } W^f).$$

Les filtrations W^Y et F sont simples. On construit de manière analogue un complexe

$$(3.26.3) \quad (A_{X \cdot Y((0))}(\text{Log } Z), W^f, W, F) = \delta_2(A_{Y_{\underline{i}}(0)}(\text{Log } Z_{\underline{i}}), W^f, W, F).$$

PROPOSITION 3.26. — (i) Pour tout entier $k \geq n = \dim X \cdot Y$, il existe un morphisme dans la catégorie dérivée, de complexes sous-jacents à des \mathbb{Q} -CHMCL

$$\Lambda(df/f): (W_k^Y \psi_{X \cdot Y((0))}^M(\text{Log } Z), W^f, W, F) \rightarrow (A_{X \cdot Y((0))}(\text{Log } Z), W^f, W, F),$$

qui induit un quasi-isomorphisme pour Gr^{W^f} , et par conséquent un isomorphisme de suites spectrales de SHM du foncteur Γ par rapport à W^f .

(ii) Supposons l'action de la monodromie unipotente, alors nous avons des isomorphismes

$$\begin{aligned} H^*(X \cdot Y, \psi_{X \cdot Y((0))}^M(\text{Log } Z), W^f) &\simeq (H^*(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C}), W^Z) \\ &\simeq H^*(X \cdot Y, A_{X \cdot Y((0))}(\text{Log } Z), W^f). \end{aligned}$$

Preuve. — Voir (II, 3.21 et 22).

Remarque 3.27. — Il existe une variante

$$(\Psi_{X \cdot Y((m))}^M(\text{Log } Z), W^f, W, W^Y, F) = \delta_2(\psi_{Y \cdot (m)}^M(\text{Log } Z), W^f, W, W^Y, F).$$

3.28. L'action de la monodromie T sur l'espace \tilde{X}^* est cosimpliciale.

Elle induit un endomorphisme T sur $\Gamma(\Pi_* \mathbb{Q}_{\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*})$ qui est compatible à l'endomorphisme T sur $\Gamma(\mathbb{Q}_{\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*})$.

D'autre part l'action de la monodromie v_i sur chacun des termes $A_{Y_i(0)}(\text{Log } Z_i)$ (resp. $\psi_{Y_i(0)}^M(\text{Log } Z_i)$) est cosimpliciale sur X_i .

Elle induit un endomorphisme v sur $A_{X \cdot Y((0))}(\text{Log } Z)$ (resp. $\psi_{X \cdot Y((0))}^M(\text{Log } Z)$) qui vérifie : $v(W_j^f \subset W_j^f, v(W_j) \subset W_{j-2}$ et $v(F^j) \subset F^{j-1}$. Si la monodromie T est unipotente, v induit sur la cohomologie via (3.26, (ii)) $N = 1/2 i \pi \text{Log } T$.

3.29. Les suites spectrales par rapport à W^f des complexes dans (3.26, i) coïncident, et ce sont donc des suites spectrales de SHM. On a

$$\begin{aligned} (3.29.1) \quad &(\text{Gr}_{-p}^{W^f} W_k^Y \psi_{X \cdot Y((0))}^M(\text{Log } Z), W, F) \\ &\simeq \bigoplus_j \Pi_* (\text{Gr}_{j-p}^{W^f} W_k^Y \psi_{Y_j(0)}^M(\text{Log } Z_j) [-j], W [-j], F) \\ &\quad \bigoplus_j \Pi_* (W_k^Y \psi_{Z_j^{-p}, Y_j(0)}^M [p-2j], W [-p], F [p-j]), \end{aligned}$$

$$(3.29.2) \quad ({}_{W^f} E_1^{p,q}, W, F) = \bigoplus_j H^{p+q}(Z^{j-p} \cdot Y_j(0), W_k^Y \psi_{Z_j^{-p}, Y_j(0)}^M [p-2j], W [-p], F [p-j]).$$

$$(3.29.3) \quad (H^i((\tilde{Z}_j^{-p})^*, \mathbb{C}), W, F) \simeq H^i(Z^{j-p}, Y_j(0), W_k^Y \psi_{Z_j^{-p}, Y_j(0)}^M, W, F).$$

et des formules analogues pour A au lieu de ψ .

PROPOSITION 3.30. — Sous l'hypothèse (3.24), supposons l'action de la monodromie T sur $H^n(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C})$ unipotente et soit $N = (1/2 i \pi) \text{Log } T$.

Pour tout entier $k \geq \dim Y$ les complexes (3.26, i)

$$(W_k^Y \psi_{X, Y((0))}^M(\text{Log } Z), W^f, W, F) \quad \text{et} \quad (A_{X, Y((0))}(\text{Log } Z), W^f, W, F),$$

sont sous-jacents à des \mathbb{Q} -CHMCL et munissent la cohomologie $H^n(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{Z})$ d'une même SHM de filtration par le poids W et de Hodge F , et d'une filtration W^f (décalée de n) définie sur \mathbb{Q} , tel que les assertions (i) et (ii) de (1.10) soient vérifiées.

Si de plus les composantes de X sont kählériennes l'assertion (iii, 1.10.1) est aussi vérifiée.

Preuve. — On déduit (i) et (ii) de (1.10) en appliquant (2.14) à (3.26, i). Nous prouvons (iii) de (1.10).

Appliquant (3.10.1) à (3.29.2) et (3.29.3), nous déduisons

$$(3.30.1) \quad ({}_{w_f}E_1^{p,q}, W, F) \simeq \bigoplus_j (H^{2p+q-2j}((\tilde{Z}_j^{j-p})^*, \mathbb{C}), W[2(j-p)], F[p-j]).$$

La différentielle d_1 du complexe ${}_{w_f}E_1^{*,i}$ de SHM est associé d'après (2.20), au complexe double (à coefficients dans \mathbb{C}).

$$\begin{array}{ccccc} H^{2n-2-2j-i}((\tilde{Z}_j^{i+j-n+1})^*) & \xrightarrow{\text{Gysin}} & H^{2n-2j-i}((\tilde{Z}_j^{i+j-n})^*) & \xrightarrow{\text{Gysin}} & H^{2n-2j+2-i}((\tilde{Z}_j^{i+j-n-1})^*) \\ & & \uparrow \rho & & \uparrow \rho \\ & & H^{2n-2j-i}((\tilde{Z}_{j-1}^{i+j-n})^*) & \xrightarrow{\text{Gysin}} & H^{2n-2j+2-i}((\tilde{Z}_{j-1}^{i+j-n-1})^*) \\ & & {}_{w_f}E_1^{n-i-1, i} & & {}_{w_f}E_1^{n-i, i} \end{array}$$

L'endomorphisme v (3.28) induit un endomorphisme v sur le complexe ${}_{w_f}E_1^{*,i}$ qui correspond à l'action $N_p = (1/2i\pi) \text{Log } T$ sur

$${}_{w_f}E_1^{p, i} = \bigoplus_j H^{2p-2j+i}((\tilde{Z}_j^{j-p})^*, \mathbb{C}),$$

d'où pour tout entier b , d'après (3.22), un isomorphisme de complexes indexés par $p \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} ((\text{Gr}_{2p+i-2j+b}^W H^{2p-2j+i}((\tilde{Z}_j^{j-p})^*, \mathbb{C}))_{p \in \mathbb{Z}}, d_1) \\ \simeq ((\text{Gr}_{2p+i-2j-b}^W H^{2p-2j+i}((\tilde{Z}_j^{j-p})^*, \mathbb{C}))_{p \in \mathbb{Z}}, d_1) \end{aligned}$$

qui induit à son tour, d'après (3.30.1), un isomorphisme

$$(3.30.2) \quad (\text{Gr}_{i+b}^W ({}_{w_f}E_1^{p, i})_{p \in \mathbb{Z}}, d_1) \simeq (\text{Gr}_{i-b}^W ({}_{w_f}E_1^{p, i})_{p \in \mathbb{Z}}, d_1).$$

Nous avons

$$\text{Gr}_i^{w_f} H^n(Y, A_{X, Y((0))}(\text{Log } Z)) \simeq {}_{w_f}E_2^{n-i, i} \simeq H^{n-i}({}_{w_f}E_1^{*, i}, d_1)$$

et d'après (2.14, (ii))

$$(3.30.3) \quad (\text{Gr}_r^W \text{Gr}_i^{w_f} H^n(Y, A_{X, Y((0))}(\text{Log } Z))) \\ \simeq \text{Gr}_r^W H^{n-i}({}_{w_f}E_1^{*, i}, d_1) \simeq H^{n-i}(\text{Gr}_r^W ({}_{w_f}E_1^{*, i}), d_1).$$

L'isomorphisme induit par (3.30.2) sur la cohomologie en degré $p = n - i$, se transforme via (3.30.3) en un isomorphisme induit par v^b

$$\mathrm{Gr}_{i+b}^{\mathrm{W}} \mathrm{Gr}_i^{\mathrm{W}f} \mathrm{H}^n(Y, A_{X \cdot Y((0))}(\mathrm{Log} Z)) \simeq v^b \mathrm{Gr}_{i-b}^{\mathrm{W}} \mathrm{Gr}_i^{\mathrm{W}f} \mathrm{H}^n(Y, A_{X \cdot Y((0))}(\mathrm{Log} Z)),$$

ce qui prouve (iii).

Remarque 3.31. — (i) Avec les notations de (3.24), on peut toujours se ramener au cas d'un DCN Y réduit, à l'aide d'une réduction semi-stable appliquée à g .

Alors le transformé de $X \cup Z$ demeure transversal à Y i.e. $X \cup Y \cup Z$ est un DCN, comme on le voit à l'aide du raisonnement local suivant. Soit un point y de Y de coordonnées $(y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_r, x_1, \dots, x_h, t_1, \dots, t_q)$ dans P tel que Y (resp. Z, X) soit défini par les y_i (resp. z_i, x_i) et que $g = \prod_{i=1}^p y_i n_i$.

Le morphisme g se factorise en une projection p et un morphisme g'

$$(\mathbb{C}^p, 0) \times (\mathbb{C}^{r+h+q}, 0) \xrightarrow{p} (\mathbb{C}^p, 0) \xrightarrow{g'} D.$$

Alors, si $V \rightarrow D'$ est une réduction semi-stable de g' , le morphisme composé

$$V \times (\mathbb{C}^{r+h+q}, 0) \rightarrow V \rightarrow D' \quad \text{l'est pour } g.$$

Cependant, nous n'avons pas besoin de cette réduction.

(ii) Le complexe $\Phi_X(j_*^Z C_{X-Z})$ est muni d'une structure sous-jacente à un CHMC de manière analogue à (3.15).

4. Cas général

Nous déduisons le théorème (1.10) à partir du n° 3 à l'aide de la suite exacte (4.6.1). Nous donnons aussi la méthode qui consiste à utiliser les hyperrecouvrements, elle est en tout point semblable au n° (3.24 à 30). P. Dubois (prépublication: SHM sur la cohomologie évanescence) a récemment montré que l'on peut avoir une réduction semi-stable pour de tels hyperrecouvrements. Cependant une telle réduction n'est pas nécessaire.

4.1. HYPOTHÈSE. — Considérons un morphisme propre $f: X \rightarrow D$ d'un espace analytique sur un disque dans \mathbb{C} de centre zéro, et soient $i_Z: Z \rightarrow X$ une immersion fermée dans X et $i_X: X \rightarrow P_D$ une immersion fermée dans un espace propre et lisse au-dessus de D , i.e. $h: P_D \rightarrow D$, tel que $h \circ i_X = f$.

Supposons les fibres de P_D, X et Z sur D algébriques. La théorie de désingularisation de Hironaka permet de construire le diagramme

$$(4.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} Z''_0 & \rightarrow & X''_0 & \rightarrow & P'_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z'_0 & \rightarrow & X'_0 & \rightarrow & P'_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z_0 & \rightarrow & X_0 & \rightarrow & P_0 \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & 0 & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} Z'' & \rightarrow & X'' & \rightarrow & P'_D \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow^a \\ Z' & \rightarrow & X' & \rightarrow & P'_D \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow^p \\ Z & \rightarrow & X & \rightarrow & P_D \\ & \searrow & \downarrow^f & \swarrow & \downarrow^h \\ & & D & & \end{array}$$

Une suite d'éclatements de centres au-dessus de Z permet d'obtenir l'espace lisse P'_D tel que $P'_0 = p^{-1}(P_0)$, $Z' = p^{-1}(Z)$ et $P'_0 \cup Z'$ soient des DCN; on pose $X' = p^{-1}(X)$. Ensuite, par des éclatements de centres au-dessus de X' nous obtenons l'espace lisse P''_D tel que $X'' = q^{-1}(X')$, $Z'' = q^{-1}(Z)$, $P''_0 = q^{-1}(P'_0)$ et $P''_0 \cup X''$ soient des DCN. Le morphisme p induit des isomorphismes $(P'_D - Z') \simeq (P_D - Z)$ et $(X' - Z') \simeq (X - Z)$ alors que le morphisme q induit $P''_D - X'' \xrightarrow{\sim} P'_D - X'$. En rétrécissant le disque D , nous pouvons supposer X'' , Z'' et Z' des DCN relatifs sur D^* .

Nous extrayons de (4.1.1) le diagramme

$$(4.1.2) \quad \begin{array}{ccccc} X'' - Z'' & \xrightarrow{i''_X} & P''_D - Z'' & \xrightarrow{j''} & P''_D - X'' \\ q_X \downarrow & & q \downarrow & & q \downarrow \\ X' - Z' & \xrightarrow{i'_X} & P'_D - Z' & \xrightarrow{j'} & P'_D - X' \end{array}$$

Nous allons étudier la variation de SHM associée à la famille $(X' - Z') \simeq (X - Z)$ sur D .

Constructions à coefficients dans \mathbb{Q} .

4.2. Soient $X'_1 = \overline{X'' - (Z'' \cup P'_0)}$ et $Z'_1 = \overline{Z'' - P'_0}$ les DCN fermés et distincts dans P''_D , alors $X'_1 - Z'_1$ est un DCN ouvert auquel on peut appliquer les résultats de 3.30 (avec les notations de 3.24, on fait $P = P_D$, $X_1 = X$, $Z_1 = Z$ et $P'_0 = Y$). De même désignons par $Z'_1 = Z' - P'_0$ le DCN fermé dans P'_D , et rappelons que pour tout espace V sur D , on note $\tilde{V}^* = V \times_{\underset{D}{\tilde{D}^*}} \tilde{D}^*$ (resp. $V^* = V \times_{\underset{D}{D^*}} D^*$) le relèvement sur le revêtement universel de $D - (0)$. Nous déduisons de (4.1.2) le diagramme

$$(4.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} (X'_1 - Z'_1) & \xrightarrow{i''_X} & (P''_D - Z'_1) & \xleftarrow{i''} & (P''_D - X'_1) \\ q_X \downarrow & & q \downarrow & & q \downarrow \\ (X' - Z') & \xrightarrow{i'_X} & (P'_D - Z_1) & \xleftarrow{j'} & (P'_D - X') \end{array}$$

Le morphisme trace. — Avec les notations de (4.2.1), le morphisme

$$(4.2.2) \quad \text{Tr } q: \mathbf{q}_* \Psi(j''^Z \mathbb{Q}_{(P''_D - Z'_1)^*}, \tau) \rightarrow \Psi(j'^Z \mathbb{Q}_{(P'_D - Z_1)^*}, \tau)$$

est construit à partir du morphisme trace ([V], exp. VI, 3.1)

$$(4.2.3) \quad \text{Tr } q: \mathbf{q}_*(j''^Z \mathbb{Q}_{(P''_D - Z'_1)^*}, \tau) \rightarrow (j'^Z \mathbb{Q}_{(P'_D - Z_1)^*}, \tau)$$

qui induit en tout point $t \in D^*$, le morphisme

$$\text{Tr } q_t: (H^i((P''_D - Z'_1)_t, \mathbb{Q}), \tau) \rightarrow (H^i((P'_D - Z_1)_t, \mathbb{Q}), \tau)$$

et qui est obtenu par dualité de Poincaré sur les fibres en t .

Avec les notations de (II, 2.6), soit $\Delta = \{t \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Réal } t < 1\}$ nous admettons qu'il existe, pour tout $\alpha \in \Delta$, un morphisme

$$(4.2.4) \quad \text{Tr } q: \mathbf{q}_*(\Psi_{P''_D, \alpha}(\text{Log } Z''_1), W^f) \rightarrow (\Psi_{P'_D, 1-\alpha}(\text{Log } Z'_1), W^f),$$

dans $D^+ F(P'_D, \mathbb{C})$ qui commute à l'action de la monodromie et qui est compatible, via les isomorphismes I (II, 2.6.4), au morphisme trace déduit de (4.2.2) par extension des scalaires à \mathbb{C} .

4.3. Nous disposons d'un complexe filtré $(\Psi_{X'_1, \alpha}(\text{Log } Z'_1), W^f)$ (II, 3.20), ce qui nous permet de définir le cône mixte en W^f .

$$(4.3.1) \quad (\Psi_{X'_1, \alpha}(\text{Log } Z'), W^f) = C_M(\mathbf{q}_*(\Psi_{P'_D, \alpha}(\text{Log } Z'_1), W^f))$$

$$\xrightarrow{i_X^{''*} - \text{Tr } q} \mathbf{q}_*(\Psi_{X'_1, \alpha}(\text{Log } Z'_1), W^f) \oplus (\Psi_{P'_D, \alpha}(\text{Log } Z'_1), W^f).$$

L'action de la monodromie, qui commute à $i_X^{''*}$ et $\text{Tr } q$, s'étend à (4.3.1).

PROPOSITION 4.3. — (i) L'isomorphisme I (II, 2.6.4) s'étend en un isomorphisme

$$(4.3.2) \quad \text{I: } \Psi(\mathbf{j}_*^Z C_{X-Z}) \simeq \bigoplus_{\alpha \in \Delta} p_* \Psi_{X', \alpha}(\text{Log } Z'),$$

où p désigne la projection de X' sur X (4.1.1) induisant $(X' - Z') \simeq (X - Z)$.

(ii) Soient un point $u \in \tilde{D}^*$, $\Pi(u) = t \in D^*$ et $i_t: (X_t - Z_t) \simeq (\tilde{X}_u^* - \tilde{Z}_u^*)$; nous avons des isomorphismes

$$(4.3.3) \quad H^p(X_t - Z_t, \mathbb{C}) \xleftarrow{i_t^*} H^p(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C}) \xrightarrow{i_\infty^*} H^p(Y, \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \Psi_{X', \alpha}(\text{Log } Z'))$$

(iii) La suite spectrale de $\Gamma(Y', \Psi_{X', \alpha}(\text{Log } Z'), W^f)$ dégénère en E_2 i.e. ${}_{w^f} E_2 \simeq {}_{w^f} E_\infty$.

Preuve. — Nous déduisons de (4.2.1) le diagramme

$$(4.3.4) \quad \begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow \mathbf{q}_* j''^* \mathbb{Q}_{P'_D - X'_1} \rightarrow \mathbf{q}^* \mathbb{Q}_{P'_D - Z'_1} \xrightarrow{(i_X^{''})^*} \mathbf{q}_*(i_X^{''})^* \mathbb{Q}_{X'_1 - Z'_1} \rightarrow 0 \\ \text{Tr } q \downarrow \uparrow q_* \quad \text{Tr } q \downarrow \uparrow q_* \quad (\text{Tr } q)/X \downarrow \uparrow q_* \\ 0 \rightarrow \mathbf{j}'^* \mathbb{Q}_{P'_D - X'} \longrightarrow \mathbb{Q}_{P'_D - Z'_1} \longrightarrow (i_X^{''})^* \mathbb{Q}_{X' - Z'} \rightarrow 0 \end{array}$$

où le morphisme trace est celui de (4.2.3), et le morphisme $(\text{Tr } q)/X$ est induit par $\text{Tr } q$.

Les lignes de (4.3.4) forment des triangles; nous en déduisons l'isomorphisme avec le cône sur $(i_X^{''})^* - \text{Tr } q$

$$(4.3.5) \quad (i_X^{''})^* \mathbb{Q}_{X' - Z'} \simeq C((i_X^{''})^* - \text{Tr } q).$$

Le morphisme q étant propre, les foncteurs Ψ et \mathbf{q}_* commutent d'après [SGA7], II, exp. 13, (2.1.7); ce qui permet de transporter (4.3.5) par Ψ

$$(4.3.6) \quad (i_{X_0}^{''})^* \Psi \mathbf{j}_*^{Z'} \mathbb{Q}_{X' - Z'} \simeq C(\Psi(i_X^{''})^* - \Psi(\text{Tr } q)).$$

L'isomorphisme (4. L'isomorphisme (4. directement du diagramme

$$(4.3.7) \quad \begin{array}{ccc} (\tilde{X}_1'' - \tilde{Z}_1'') & \xrightarrow{i_X''} & (\tilde{P}_D'' - \tilde{Z}_1'')^* \\ q_X \downarrow & & \downarrow q \\ (\tilde{X}' - \tilde{Z}')^* & \xrightarrow{i_X} & (\tilde{P}_D - \tilde{Z}_1)^* \end{array}$$

par une technique qui ressemble à celle de (E IV, th. (iii) 3.1), et qui permet d'obtenir des suites exactes

$$(4.3.8) \quad 0 \rightarrow H^i((\tilde{P}_D'' - \tilde{Z}_1'')^*, \mathbb{Q}) \xrightarrow{i_X'' - \text{Tr } q} H^i((\tilde{X}_1'' - \tilde{Z}_1'')^*, \mathbb{Q}) \oplus H^i((\tilde{P}_D - \tilde{Z}_1)^*, \mathbb{Q}) \\ \xrightarrow{(\text{Tr } q)/X + i_X^*} H^j((\tilde{X}' - \tilde{Z}')^*, \mathbb{Q}) \rightarrow 0,$$

où cette fois-ci la trace est obtenue par dualité sur les fibres.

Nous réalisons ainsi $H^i((\tilde{X} - \tilde{Z})^*, \mathbb{C})$ comme coker $(i_X^* - \text{Tr } q)$, d'après l'isomorphisme : $(X' - Z') \simeq (X - Z)$. De même, nous obtenons en tout point $t \in D$, des suites exactes

$$(4.3.9) \quad 0 \rightarrow H^i(P_t' - Z_{1,t}'', \mathbb{Q}) \xrightarrow{i_{X_t}'' - \text{Tr } q_t} H^i((X_{1,t}'' - Z_{1,t}'', \mathbb{Q}) \\ \oplus H^i(P_t' - Z_t', \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X_t' - Z_t', \mathbb{Q}) \rightarrow 0,$$

ce qui prouve (i) et (ii). De plus, nous avons un isomorphisme de complexes

$$\Gamma(Y', \bigoplus_{\alpha \in \Delta} (\psi_{X', \alpha}(\text{Log } Z'), W^f)) \simeq \Gamma(X_t - Z_t, (C_M(i_{X_t}''^* - \text{Tr } q_t), W)).$$

Le terme de droite est sous-jacent à un CHM donnant la SHM sur la cohomologie de $X_t - Z_t$. Nous en déduisons que la suite spectrale de chacun des deux complexes dégénère en E_2 .

LE CHMCL

4.4. Avec les notations de (II, 3.29), il existe un morphisme trace de CHMCF

$$(A_{P_0''((0))}(\text{Log } Z_1'), W^f, W, F) \xrightarrow{\text{Tr } q} (A_{P_0'((0))}(\text{Log } Z_1), W^f, W, F),$$

obtenu par dualité (II, 3.29.1) à partir du morphisme q^* .

Nous ne vérifions pas que ce morphisme $\text{Tr } q$ est compatible avec le morphisme trace construit dans (4.2). De même, nous disposons d'un CHMCF :

$$(A_{X_1', P_0''((m.))}(\text{Log } Z_1''), W^f, W, F).$$

Nous désignons par

$$(4.4.1) \quad (A_{X', P_0'((0))}(\text{Log } Z_1), W^f, W, F) \\ = C_M(\mathbf{q}^* A_{P_0''((0))}(\text{Log } Z_1'')) \xrightarrow{i_X''^* - \text{Tr } q} \mathbf{q}^* A_{X_1', P_0''((0))}(\text{Log } Z_1'') \oplus A_{P_0'((0))}(\text{Log } Z_1),$$

le cône mixte en W^f et W . L'action de la monodromie v sur les termes du cône commute à $i_X'^*$ et $\text{Tr } q$ et passe par conséquent au cône.

Nous construisons de même un complexe bifiltré (à coefficients dans \mathbb{Q}) $(A_{X'.P'_0((0)), Z}(\mathbb{Q}), W^f, W, F)$. Nous déduisons de (4.3).

PROPOSITION 4.5. — (i) *Supposons l'action de la monodromie T sur $H^i((\tilde{X}'' - \tilde{Z}'')^*, \mathbb{C})$ unipotente, alors nous avons*

$$H^i(Y, A_{X'.P'_0((0))}(\text{Log } Z'_1), W^f) \simeq (H^i(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C}), W^f)$$

(ii) Le système

$$\Psi(j_*^{\mathbb{Z}^*} \mathbb{Z}_{X^* - Z^*}), \quad (A_{X'.P'_0((0)), Z}(\mathbb{Q}), W^f, W), \quad (A_{X'.P'_0((0))}(\text{Log } Z'_1), W^f, W, F)$$

est un CHMCL sur $P'_0((0))$.

PROPOSITION 4.6. — *Sous l'hypothèse 4.1, supposons l'action de la monodromie T sur $H^n(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C})$ unipotente et soit $N = (1/2i\pi) \log T$.*

Le CHMCL $(A_{X'.P'_0((0))}(\text{Log } Z'_1), W^f, W, F)$ (4.4.1) munit la cohomologie $H^n(\tilde{X}^ - \tilde{Z}^*, \mathbb{Z})$ d'une SHM de filtration par le poids W , et de Hodge F ; et de plus induit une filtration W (décalée de n) définie sur \mathbb{Q} , tel que les assertions (i) et (ii) de (1.10) soient vérifiées. Si de plus le morphisme f est quasi-projectif l'assertion (iii) de (1.10) est vérifiée.*

Preuve. — Nous obtenons (i) et (ii) d'après (2.14). Pour prouver (iii), nous utilisons la suite exacte associée à un cône mixte qui s'identifie à (4.4.7) à coefficients dans \mathbb{C} et qui respecte les filtrations. D'où, la suite exacte

$$(4.6.1) \quad 0 \rightarrow H^n((\tilde{P}'_D - \tilde{Z}'_1)^*, \mathbb{C}) \rightarrow H^n((\tilde{X}'_1 - \tilde{Z}'_1)^*, \mathbb{C}) \oplus H^n((\tilde{P}'_D - \tilde{Z}'_1)^*, \mathbb{C}) \rightarrow H^n((\tilde{X} - \tilde{Z})^*, \mathbb{C}) \rightarrow 0.$$

La monodromie agit sur toute la suite exacte (4.6.1). Nous déduisons le diagramme à coefficients dans \mathbb{C}

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Gr}_{i+b}^W \text{Gr}_i^{W^f} H^n((\tilde{P}'_D - \tilde{Z}'_1)^*) & \rightarrow & \text{Gr}_{i+b}^W \text{Gr}_i^{W^f} (H^n((\tilde{X}'_1 - \tilde{Z}'_1)^*) \oplus H^n((\tilde{P}'_D - \tilde{Z}'_1)^*)) & \rightarrow & \text{Gr}_{i+b}^W \text{Gr}_i^{W^f} H^n((\tilde{X} - \tilde{Z})^*) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{GrN}^b & & & & \\ 0 \rightarrow \text{Gr}_{i-b}^W \text{Gr}_i^{W^f} H^n((\tilde{P}'_D - \tilde{Z}'_1)^*) & \rightarrow & \text{Gr}_{i-b}^W \text{Gr}_i^W (H^n((\tilde{X}'_1 - \tilde{Z}'_1)^*) \oplus H^n((\tilde{P}'_D - \tilde{Z}'_1)^*)) & \rightarrow & \downarrow \text{GrN}^b & & \\ & & & & \text{Gr}_{i-b}^W \text{Gr}_i^{W^f} H^n((\tilde{X} - \tilde{Z})^*) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

On a déjà vu que les deux morphismes GrN^b à gauche sont des isomorphismes. On en déduit que GrN^b à droite l'est aussi.

MÉTHODE DES ESPACES SIMPLICIAUX

4.7. Soient $f: X \rightarrow D$ un morphisme propre d'un espace analytique X sur un disque D ; de fibre Y en zéro, et Z un sous-espace analytique de X propre sur D , tel que les fibres de X et Z sur D soient algébriques. Nous admettons, d'après la théorie des

hyperrecouvrements ([HIII], 6.2 et [SGA4], V bis) que l'on peut construire un espace simplicial $\pi: X_\bullet \rightarrow X$ formant un hyperrecouvrement propre de X , lisse sur \mathbb{C} , tel que $\pi^{-1}(Z)$ [resp. $\pi^{-1}(Y)$] soit un DCN Z_\bullet (resp. Y_\bullet) dans X_\bullet , et que $Z_\bullet \cup Y_\bullet$ soit un DCN dans X_\bullet . Nous nous proposons d'étudier la famille $X^* - Z^*$ sur D^* , et nous pouvons supposer Z_\bullet et Y_\bullet sans composante irréductible commune.

4.8. Avec les notations de (3.3) le système $(A_{Y_\bullet(0)}(\text{Log } Z_\bullet), W^f, W, F)$ à support dans Y_\bullet , forme un CHMCFS sur X_\bullet .

Nous ne vérifions pas cependant l'existence d'une construction à coefficients dans \mathbb{Q} , fonctorielle en X_\bullet .

DÉFINITION 4.9. — Nous désignons par

$$(K_{Y_\bullet(0)}^\pi(\text{Log } Z_\bullet), W^f, W, F) = \delta_2(A_{Y_\bullet(0)}(\text{Log } Z_\bullet), W^f, W, F),$$

le CHMCF image directe par π , diagonal en W^f et W .

4.10. La fibre en un point t de D^* , $(X_\bullet)_t = \pi^{-1}(X_t)$ est un hyperrecouvrement de X_t ; mais l'espace $(Z_i)_t$ n'est pas nécessairement un DCN dans $(X_i)_t$, pour tout indice i . Cependant il existe un entier N tel que seulement les espaces X_i d'indice $i \leq N$ interviennent dans la cohomologie de X . Nous supposons dans ce qui suit D assez petit, pour que $(Z_i)_t$ soit un DCN dans $(X_i)_t$ pour $i \leq N$.

L'action de la monodromie v_i sur $A_{Y_i(0)}(\text{Log } Z_i)$ est cosimpliciale sur X_\bullet , et induit une action v sur $K_{Y_\bullet(0)}^\pi(\text{Log } Z_\bullet)$.

Nous obtenons de manière analogue à (3.30).

PROPOSITION 4.11. — *Sous l'hypothèse (4.7), si la monodromie T est unipotente sur $H^n(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C})$, le \mathbb{Q} -CHMCL $(K_{Y_\bullet(0)}(\text{Log } Z_\bullet), W^f, W, F)$ munit la cohomologie $H^n(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{Z})$ d'une SHM de filtration par le poids W , et de Hodge F ; et de plus induit une filtration W^f (décalée de n) définie sur \mathbb{Q} , tel que les assertions (i) et (ii) de (1.10) soient vérifiées. Si de plus, le morphisme est projectif, l'assertion ((iii), (1.10.1)) est aussi vérifiée.*

Remarque 4.12. — Pour obtenir (1.10.1), il suffirait de trouver un hyperrecouvrement par des variétés X_\bullet kählériennes dans (4.7).

(ii) Le complexe $\Phi_X(j_*^Z \mathbb{C}_{X-Z})$ est muni d'une structure sous-jacente à un CHMC de manière analogue à (II, 3.6).

II. DEUXIÈME PARTIE

Pour simplifier la présentation de la première partie nous n'avons donné ni les motivations de la construction des complexes utilisés, ni les constructions à coefficients dans \mathbb{Q} , ni la preuve des propriétés requises pour en faire des CHMCL. C'est l'objet du paragraphe 2 de cette partie. Au paragraphe 1, on trouve des préliminaires sur les complexes logarithmiques et au paragraphe 3 des compléments sur la littérature.

1. Complexes logarithmiques

La notion de complexe logarithmique [H II] est à la base de l'étude des SHM. Nous groupons ici des résultats qui servent dans la construction des complexes mixtes.

HYPOTHÈSE 1.1. — Nous considérons une variété analytique X contenant des DCN Y , Z et $Y \cup Z$. Les notations sont celles de (I. 3. 1) dans la première partie.

PROPOSITION 1.2. — *Sous l'hypothèse (1.1), le morphisme résidu le long de Z induit*

(i) *Un quasi-isomorphisme bifiltré*

$$(1.2.1) \quad R_Z: (\mathrm{Gr}_i^{\mathbb{W}^Z} \Omega_X^*(\mathrm{Log} Y)(\mathrm{Log} Z), \mathbb{W}, \mathbb{F}) \xrightarrow{\sim} (\Omega_Z^{*i}(\mathrm{Log} Z^i \cdot Y)[-i], \mathbb{W}[i], \mathbb{F}[-i]),$$

qui envoie \mathbb{W}_j^Y sur \mathbb{W}_j pour tout j dans \mathbb{N} .

(ii) *Un quasi-isomorphisme filtré pour $a \leq b$ dans \mathbb{N}*

$$(1.2.2) \quad R_Z: (\mathrm{Gr}_m^{\mathbb{W}}((\mathbb{W}_b^Z/\mathbb{W}_a^Z) \Omega_X^*(\mathrm{Log} Y)(\mathrm{Log} Z)), \mathbb{F}) \\ \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in [a, b]} (\mathrm{Gr}_{m-i}^{\mathbb{W}} \Omega_Z^{*i}(\mathrm{Log} Z^i \cdot Y)[-i], \mathbb{F}[-i]),$$

qui transforme \mathbb{W}_r^Y en la somme directe pour $i \in [m-r, b]$ (égale à zéro pour $b < m-r$). En particulier, on a un quasi-isomorphisme filtré

$$(1.2.3) \quad R_Z: (\mathrm{Gr}_m^{\mathbb{W}} \Omega_X^*(\mathrm{Log} Y)(\mathrm{Log} Z), \mathbb{F}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \geq 0} (\mathrm{Gr}_{m-i}^{\mathbb{W}} \Omega_Z^{*i}(\mathrm{Log} Z^i \cdot Y)[-i], \mathbb{F}[-i]).$$

De même, on a un isomorphisme analogue à (1.2.2) pour $(\mathbb{W}_b^Z/\mathbb{W}_a^Z) \mathrm{Gr}_m^{\mathbb{W}} \Omega_X^*(\mathrm{Log} Y)(\mathrm{Log} Z)$; en particulier l'isomorphisme de Zassenhaus $\mathrm{Gr}_m^{\mathbb{W}}(\mathbb{W}_b^Z/\mathbb{W}_a^Z) \simeq (\mathbb{W}_b^Z/\mathbb{W}_a^Z) \mathrm{Gr}_m^{\mathbb{W}}$ est filtré pour \mathbb{F} sur $\Omega_X^*(\mathrm{Log} Y)(\mathrm{Log} Z)$. Enfin on peut échanger Z et Y dans les formules (1.2.1) à (1.2.3).

(iii) *Un quasi-isomorphisme filtré*

$$(1.2.4) \quad R_Z: (\mathrm{Gr}_m^{\mathbb{W}}(\mathbb{W}_b^Y/\mathbb{W}_a^Y) \Omega_X^*(\mathrm{Log} Y)(\mathrm{Log} Z)), \mathbb{F}) \\ \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in [m-b, m-a]} \mathrm{Gr}_{m-i}^{\mathbb{W}} \Omega_Z^{*i}(\mathrm{Log} Z^i \cdot Y)[-i], \mathbb{F}[-i])$$

Preuve. — Soit α une section de $\Omega_X^a(\mathrm{Log} Y)(\mathrm{Log} Z)$ de poids le long de Z , $i = \omega^Z(\alpha)$, égal au plus petit entier r tel que $\alpha \in \mathbb{W}_r^Z$; on définit de la même manière le poids total ω en \mathbb{W} et ω^Y en \mathbb{W}^Y . Le résidu $\mathrm{Rés}_{Z^i}(\alpha)$ est défini comme une section de $\Omega_Z^{a-i}(\mathrm{Log} Y \cdot Z^i)$ et égal à la somme des résidus $\mathrm{Rés}_{z_{j_1 \dots j_i}}(\alpha)$. La vérification de (1.2.1) est identique à la démonstration classique [D].

Choisissons localement des équations $(z_j)_{j \in I}$ de Z . Posons $\alpha_m = 0$ pour $m > i$, et soit

$$\alpha_i = \sum_{j_1 < \dots < j_i} (\mathrm{Rés}_{z_{j_1 \dots j_i}} \alpha) dz_{j_1}/z_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_i}/z_{j_i}$$

une section locale de $\Omega_X^n(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)$ tel que $\omega^Z(\alpha - \alpha_i) < i$. Nous définissons α_m par récurrence pour $m \leq i$ par la formule

$$\alpha_m = \sum_{j_1 \dots j_m} (\text{R}é\text{Z}_{Z_{j_1} \dots j_m}(\alpha - \sum_{j > m} \alpha_j)) dz_{j_1}/z_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_m}/z_{j_m}$$

Alors on a la décomposition locale de α

$$(1.2.4) \quad \alpha = \sum_{m \geq 0} \alpha_m$$

En tout point x de X , la formule (1.2.4) définit un morphisme résidu $R_{Z, x}$ le long de Z , qui est en fait un isomorphisme indépendant du choix des coordonnées.

$$(1.2.5) \quad R_{Z, x}: ((\Omega_X^n(\text{Log } Y)(\text{Log } Z))_x, W, F) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \geq 0} ((\Omega_Z^{n-i}(\text{Log } Z^i \cdot Y))_x, W[i], F[i])$$

bifiltré pour W et F et qui envoie W_r^Z dans la somme directe pour $i \geq r$. Soient β une section locale en x de $\Omega_{Z_{i_1 \dots i_r}}^{n-i}(\text{Log } Y \cdot Z_{i_1 \dots i_r})$ et $\tilde{\beta}$ un relèvement de β comme section locale en x de $\Omega_X^{n-i}(\text{Log } Y)$.

Le morphisme inverse à $R_{Z, x}$ fait correspondre $\beta_i = \tilde{\beta} \wedge dz_{j_1}/z_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_i}/z_{j_i}$ à β . Le morphisme $R_{Z, x}$ (1.2.5) envoie $(W_r^Z \cap W_m) \Omega_X^n(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)_x$ dans $\bigoplus_{i \leq r} W_{m-i} \Omega_Z^{n-i}(\text{Log } Y \cdot Z^i)_x$. Ces différents morphismes pour tout point x de X , se recollent

en un morphisme induit R_Z (1.2.3) global sur X . Vérifions qu'il commute aux différentielles. Considérons la décomposition $\alpha = \sum_{i \leq r} \alpha_i$ (1.2.4) d'une section α de poids m tel que

α_i soit de poids $\omega^Z(\alpha_i) = i$ et $\omega(\alpha_i) = m$. Si $\omega^Z(d\alpha_i) = i$, la projection $R_{Z^i}(d\alpha_i) = d(R_{Z^i}(\alpha_i))$ commute aux différentielles.

Supposons qu'il existe i tel que $\omega^Z(d\alpha_i) < i$, alors $\omega(d\alpha) \leq m-1$ et la projection $R_{Z^i}(d\alpha_i) \in W_{m-1-j}$ est nul dans $\text{Gr}_{m-j}^W \Omega_{Z^i}^*(\text{Log } Z^i \cdot Y)$.

Le quasi-isomorphisme (1.2.2) peut être démontré directement comme (1.2.3), ou déduit de (1.2.3) à l'aide de l'isomorphisme $\text{Gr}_m^W(W_b^Z/W^Z) \simeq (W_b^Z/W_a^Z) \text{Gr}_m^W$; dans ce cas il est immédiat qu'il demeure filtré pour F en raison de la structure simple (ou scindée), de F . L'assertion (iii) se déduit de (ii).

1.3. RÉSOLUTIONS SIMPLICIALES. — Soit Y un DCN dans une variété lisse X , admettant des composantes irréductibles lisses et connexes $(Y_i)_{i \in [1, p]}$.

Désignons par $Y_i(m_i)$ le voisinage infinitésimal d'ordre m_i de Y_i dans X , défini par l'idéal $J_i(m_i)$ égal, en un point y de Y , à $(y_i^{m_i+1}) \mathcal{O}_{X, y}$ où y_i est une équation irréductible de Y_i en y .

Pour une suite λ . dans $[1, p]$ et des entiers m_{λ} , l'intersection

$$(1.3.1) \quad Y_{\lambda} \cdot (m_{\lambda}) = Y_{\lambda_1 \dots \lambda_i} \cdot (m_{\lambda}) = Y_{\lambda_1} \cdot (m_{\lambda_1}) \cdot Y_{\lambda_2} \cdot (m_{\lambda_2}) \cdot \dots \cdot Y_{\lambda_i} \cdot (m_{\lambda_i})$$

est définie par l'idéal

$$(1.3.2) \quad J_{\lambda.}(m_{\lambda.}) = \sum_j J(m_{\lambda_j}).$$

Lorsque la famille $m_{\lambda.} = 0$, l'espace $Y_{\lambda.}(0)$ est réduit.

Des entiers $m_i \in \mathbb{N}$ pour $i \in [1, p]$ déterminent pour toute suite $\lambda.$ dans $[1, p]$ une suite $m_{\lambda.} \in \mathbb{N}$; on écrit alors $Y_{\lambda.}(m.)$ pour $Y_{\lambda.}(m_{\lambda.})$.

Désignons enfin par $Y((m.))$ la sous-variété de X définie par l'idéal

$$(1.3.3) \quad I(m.): \quad \prod_{i \in [1, p]} J_i(m_i),$$

1.4. Soient $(m.) \in \mathbb{N}^p$, $Y = \cup_{i \in [1, p]} Y_i$ un DCN dans X , $Y_i(m.)$ la somme disjointe des intersections $Y_{\lambda_0 \dots \lambda_i}(m.)$ (1.3.1) de $i+1$ composantes distinctes, et $\lambda_{j, i} : Y_i(m.) \rightarrow Y_{i-1}(m.)$ le morphisme induisant l'immersion $Y_{\lambda.}(m.) \rightarrow Y_{\lambda.(\hat{j})}(m.)$ où $\lambda.(\hat{j})$ consiste à omettre λ_j . On désigne par résolution de Mayer-Vietoris le schéma simplicial strict $\Pi : Y_{\cdot}(m.) \rightarrow Y((m.))$ au-dessus de $Y((m.))$ (1.3.3).

Le complexe $(\Pi_* \mathbb{Z}_{Y_{\cdot}(m.)}, \rho = \sum_{j \in \{0, 1\}} (-1)^j \lambda_{j, i}^*)$ est une résolution de $\mathbb{Z}_{Y((m.))}$ que l'on appelle aussi résolution de Mayer-Vietoris.

LEMME 1.5. — *Le complexe simple $(\Pi_* \mathcal{O}_{Y_{\cdot}(m.)}, d = \rho)$ (1.4) définit une résolution (de Mayer-Vietoris) à droite de $\mathcal{O}_{Y((m.))}$.*

1.6. Avec les notations de (1.3), considérons de plus un DCN, Z dans X tel que $Y \cup Z$ le soit aussi. Soit Y^k (resp. Z^k) la somme disjointe des intersections $Y_{i_1 \dots i_k}$ (resp. $Z_{i_1 \dots i_k}$) de k composantes distinctes de Y (resp. Z). L'intersection $Y^k \cdot Z = Y^k \times_X Z$ (resp. $Y \cdot Z^k = Y \times_X Z^k$) est un DCN dans Y^k (resp. Z^k), et l'on peut définir $(Y^k \cdot Z)^i$ [resp. $(Y \cdot Z^k)^i$]. L'intersection $Y^k \cdot Z^i = Y^k \times_X Z^i$ vérifie : $Y^k \cdot Z^i = (Y^k \cdot Z)^i = (Y \cdot Z^i)^k$.

(1.6.1). *Par convention, l'intersection $Z^i \cdot Y_{i_1 \dots i_k} \cdot Y_{\lambda.}(m_{\lambda.})$ désigne la sous-variété de $Z^i \cdot Y_{i_1 \dots i_k}$ définie par l'idéal $\sum_j J_{\lambda_{\sigma_j}}(m_{\lambda_{\sigma_j}}) \mathcal{O}_{Z^i \cdot Y_{i_1 \dots i_k}}$ pour la sous-suite λ_{σ_j} des éléments de $\lambda.$ distincts de (i_1, \dots, i_k) . En particulier $Z^i \cdot Y_j \cdot Y_j(m_j) = Z^i \cdot Y_j$.*

(1.6.2) La différentielle de $\Omega_X^*(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)$ (1.1) induit une différentielle sur $\Omega_X^*(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_i(m.)}$ et sur $\Omega_X^*(\text{Log } Y) \otimes \mathcal{O}_{Y((m.))}$. En effet l'inverse d'un élément f dans $J_{\lambda.}(m_{\lambda.})$ (1.3.2) étant holomorphe sur $X - Y$, nous pouvons écrire $df = f \wedge (df/f)$, d'où $df \in J_{\lambda.}(m_{\lambda.}) \Omega_X^*(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)$ (resp. $I(m.) \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z)$ (1.3.3).

Nous déduisons alors de (1.5) la résolution

$$(1.6.3) \quad \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{\mathcal{O}_{Y((m.))}} \xrightarrow{\cong} \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\cdot}(m.)}}$$

PROPOSITION 1.7. — *Avec les notations de (1.6.1), les résidus le long de Z puis le long de Y (1.2.2) induisent*

(i) *Les isomorphismes respectant la filtration F*

$$(1.7.1) \quad (\mathrm{Gr}_n^W(W_b^Z/W_a^Z)(\Omega_X^*(\mathrm{Log} Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_\lambda, (m_\lambda)}), F)$$

$$\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{R_Z j \in [a, b]} (\mathrm{Gr}_{n-j}^W(\Omega_{Z^j}^*(\mathrm{Log} Z^j \cdot Y) \otimes \mathcal{O}_{Y_\lambda, (m_\lambda)})[-j], F[-j])$$

$$\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{R_Y j \in [a, b]} (\Omega_{Z^j \cdot Y^{n-j}}^* \cdot \mathcal{O}_{Y_\lambda, (m_\lambda)}[-n], F[-n]).$$

De même on a une formule analogue pour $(W_b^Z/W_a^Z) \mathrm{Gr}_n^W(\Omega_X^*(\mathrm{Log} Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_\lambda, (m_\lambda)})$.

Le composé $R_Z \circ R_Y$ des morphismes résidus dans (1.2.2) induit un isomorphisme égal au composé $R_Y \circ R_Z$ dans (1.7.1).

(ii) *Les isomorphismes respectant la filtration F*

$$(1.7.2) \quad (\mathrm{Gr}_n^W(W_b^Y/W_a^Y)(\Omega_X^*(\mathrm{Log} Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_\lambda, (m_\lambda)}), F)$$

$$\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{R_Z j \in [n-b, n-a]} (\mathrm{Gr}_{n-j}^W(\Omega_{Z^j}^*(\mathrm{Log} Z^j \cdot Y) \otimes \mathcal{O}_{Y_\lambda, (m_\lambda)})[-j], F[-j])$$

$$\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{R_Y j \in [n-b, n-a]} (\Omega_{Z^j \cdot Y^{n-j}}^* \cdot \mathcal{O}_{Y_\lambda, (m_\lambda)}[-n], F[-n]).$$

Le composé $R_Z \circ R_Y$ des morphismes résidus dans (1.2.2) induit un isomorphisme égal au composé $R_Y \circ R_Z$ dans (1.7.2). En particulier, pour $m_\lambda = 0$, le résidu R_Y analogue à (1.2.1) induit un quasi-isomorphisme bifiltré

$$(1.7.3) \quad (\mathrm{Gr}_i^{W^Y}(\Omega_X^*(\mathrm{Log} Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_\lambda, (0)}), W, F)$$

$$\xrightarrow{\sim} (\Omega_{Y^i \cdot Y_\lambda, (0)}^*(\mathrm{Log} Y^i \cdot Y_\lambda, (0) \cdot Z)[-i], W[i], F[-i])$$

et l'on a

$$(1.7.4) \quad (\mathrm{Gr}_n^W(W_b^Y/W_a^Y)(\Omega_X^*(\mathrm{Log} Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_\lambda, (0)}), F)$$

$$\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{R_Y i \in (a, b)} (\mathrm{Gr}_{ni}^W \Omega_{Y^i \cdot Y_\lambda, (0)}^*(\mathrm{Log} Y^i \cdot Y_\lambda, (0) \cdot Z)[-i], F[-i])$$

$$\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{R_Z i \in [a, b]} (\Omega_{Y^i \cdot Y_\lambda, (0)}^* \cdot Z^{n-i}[-n], F[-n])$$

Preuve. —(i) Soient (M, W) un module filtré et N un sous-module de M .

Les filtrations W induite sur N et W quotient sur M/N , vérifient la suite exacte

$$(1.7.5) \quad 0 \rightarrow \mathrm{Gr}_i^W N \rightarrow \mathrm{Gr}_i^W M \rightarrow \mathrm{Gr}_i^W M/N \rightarrow 0.$$

Le résidu le long de Z (1.2.5) transforme, pour toute suite (λ_*) de $[1, p]$ le sous-module de $\Omega_X^i(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)$ engendré par $J_{\lambda_*}(m_*)$ (1.3.2) sur le sous-module de $\bigoplus_{i \geq 0} \Omega_Z^{j-i}(\text{Log } Z^i \cdot Y)$ engendré par $J_{\lambda_*}(m_*)$ i.e. l'image de l'intersection du sous-module

$$J_{\lambda_*}(m_{\lambda_*}) \Omega_X^*(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) = \sum_{\lambda \in \lambda_*} y^{m_\lambda + 1} \Omega_X^*(\text{Log } Y)(\text{Log } Z),$$

avec W_n mod. W_{n-1} par le morphisme R_Z (1.2.2) est engendrée dans la composante $\text{Gr}_{n-i}^W \Omega_Z^{*i}(\text{Log } Z^i \cdot Y)$ par $(y_\lambda^{m_\lambda + 1})_{\lambda \in \lambda_*}$. Son image à son tour, par le résidu le long de Y

$$R_Y: \text{Gr}_{n-2}^W \Omega_Z^{*i}(\text{Log } Z^i \cdot Y) \xrightarrow{\sim} \Omega_{Z^i \cdot Y^{n-i} \cdot Y^{n-i}}^*$$

est engendrée dans la composante $\Omega_{Z^i \cdot Y_{j_1 \dots j_{n-i}}}^*$ par

$$(1.7.6) \quad (y_\lambda^{m_\lambda} dy_\lambda \wedge \Omega_{Z^i \cdot Y_{j_1 \dots j_{n-i}}}^* + y_\lambda^{m_\lambda + 1} \Omega_{Z^i \cdot Y_{j_1 \dots j_{n-i}}}^*),$$

pour $\lambda \in ((\lambda_*) - (j_1, \dots, j_{n-i}))$. Le quotient est alors égal à

$$\Omega_{Z^i \cdot Y_{j_1 \dots j_{n-i}} \cdot Y_{v_1}(m_{v_1}) \dots Y_{v_t}(m_{v_t})}^* \quad \text{pour } v_i \in (\lambda_*) - (j_1, \dots, j_{n-i}),$$

ce qui prouve (1.7.1).

Pour prouver $R_Z \circ R_Y = R_Y \circ R_Z$, on considère le résidu le long de Y , local en un point x de Y et analogue à (1.2.5). Il transforme pour toute suite (λ_*) de $[1, p]$, le sous-module de $\Omega_X^i(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)_x$ engendré par $J_{\lambda_*}(m_*)$ sur le sous-module de $\bigoplus_{i \geq 0} \Omega_Y^{j-i}(\text{Log } Y^i \cdot Z)_x$

engendré dans la composante $\Omega_{Y_{j_1 \dots j_i}}^{j-i}(\text{Log } Y_{j_1 \dots j_i} \cdot Z)_x$ par

$$(1.7.7) \quad y_\lambda^{m_\lambda} dy_\lambda \wedge \Omega_{Y_{j_1 \dots j_i}}^{j-i-1}(\text{Log } Y_{j_1 \dots j_i} \cdot Z)_x + y_\lambda^{m_\lambda + 1} \Omega_{Y_{j_1 \dots j_i}}^{j-i}(\text{Log } Y_{j_1 \dots j_i} \cdot Z)_x$$

pour $\lambda \in (\lambda_*) - (j_1, \dots, j_i)$.

Ce résidu local est bien défini sur $\text{Gr}_n^W(W_b^Z/W_a^Z)(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{O_{Y_\lambda(m_\lambda)}} 0_{Y_\lambda(m_\lambda)})$; si on le compose avec le résidu le long de Z on transforme (1.7.7) en (1.7.6), ce qui prouve (i) La démonstration de (ii) est analogue à (i); pour $m_\lambda = 0$ le quotient de $\Omega_{Y_{j_1 \dots j_i}}^{j-i}(\text{Log } Y_{j_1 \dots j_i} \cdot Z)_x$ par (1.7.7) s'identifie à

$$\Omega_{Y_{j_1 \dots j_i} \cdot Y_\lambda(0)}^{j-i}(\text{Log } Y_{j_1 \dots j_i} \cdot Y_\lambda(0) \cdot Z)_x,$$

d'où (1.7.3) et (1.7.4).

COROLLAIRE 1.8. — *Les morphismes de restriction*

$$\rho_{n,j}(m_\lambda): \Omega_{Z^j \cdot Y^{n-j} \cdot Y_\lambda(m_\lambda)}^* \rightarrow \Omega_{Z^j \cdot Y^{n-j} \cdot Y_\lambda(0)}^*$$

$$\rho_{a,b}^Z(m_\lambda): (W_b^Z/W_a^Z)(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{O_{Y(m_\lambda)}}) \rightarrow (W_b^Z/W_a^Z)(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{O_{Y_\lambda(0)}}),$$

$$\rho_{a,b}^Y(m_\lambda): (W_b^Y/W_a^Y)(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{O_{Y_\lambda(m_\lambda)}}) \rightarrow (W_b^Y/W_a^Y)(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{O_{Y_\lambda(0)}}),$$

ont des noyaux acycliques $N_{\lambda}^{n, j}(m_{\lambda}) = \ker \rho_{n, j}(m_{\lambda})$, $N_{Z, \lambda}^{a, b}(m_{\lambda}) = \ker \rho_{a, b}^Z(m_{\lambda})$ et $N_{Y, \lambda}^{a, b}(m_{\lambda}) = \ker \rho_{a, b}^Y(m_{\lambda})$ tel que

$$\mathrm{Gr}_n^W N_{Z, \lambda}^{a, b}(m_{\lambda}) \simeq \bigoplus_{j \in [a, b]} N_{\lambda}^{n, j}(m_{\lambda}), \quad \mathrm{Gr}_n^W N_{Y, \lambda}^{a, b}(m_{\lambda}) \simeq \bigoplus_{j \in [n-b, n-a]} N_{\lambda}^{n, j}(m_{\lambda}).$$

Preuve. — Puisque les isomorphismes de (3.7) sont compatibles avec les restrictions, il suffit de voir que le noyau $N_{\lambda}^{n, j}(m_{\lambda})$ est acyclique. On utilise le résultat bien connu : Pour toute sous-variété lisse Z de X , la restriction $\Omega_{Z^{(i)}}^* \rightarrow \Omega_Z^*$ est un quasi-isomorphisme.

La vérification dans [(0), th. 1.3] s'étend au cas qui nous intéresse.

EXEMPLE 1.9. — Soit $Y_i(m_i)$ une composante irréductible de Y de multiplicité $m_i + 1$ dans X . Le complémentaire $Y' = Y - Y_i$ est un DCN dans X et sa trace $Y'_i = Y' \cap Y_i$ est un DCN dans Y_i . D'après (1.7.1) et la convention (1.6.1), on obtient en décomposant les sous suites de $[1, p]$ en deux parties selon qu'elles contiennent l'indice i ou non :

$$\mathrm{Gr}_n^W (W_b^Z / W_a^Z) (\Omega_X^* (\mathrm{Log} Y) (\mathrm{Log} Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_i(m_i)}) \simeq \bigoplus_{j \in [a, b]} ((\Omega_{Z'}^{*j} \cdot Y_i^{n-j-1} \cdot Y_i \oplus \Omega_{Z'}^{*j} \cdot Y_i^{n-j} \cdot Y_i \cdot (m_i))) [-n],$$

Si de plus $m_i = 0$, on trouve une somme directe de CH de poids m

$$((\Omega_{Z'}^{*j} \cdot Y_i^{n-j-1} \cdot Y_i \oplus \Omega_{Z'}^{*j} \cdot Y_i^{n-j} \cdot Y_i) [-n], F[-n]).$$

1.10. Avec les notations de (1.1), considérons les immersions ouvertes

$$\begin{array}{ccc} X - Y - Z & \xrightarrow{j^{Y-Z}} & X - Z \\ \downarrow j^{Z-Y} & \searrow j & \downarrow j^Z \\ X - Y & \xrightarrow{j^Y} & X \end{array}$$

Nous avons des isomorphismes dans $D^+(X, \mathbb{Q})$

$$(j_*^Y \circ j_*^{Z-Y}) \mathbb{Q}_{X-Y-Z} \xrightarrow{I_1} j_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z} \xrightarrow{I_2} (j_*^Z \circ j_*^{Y-Z}) \mathbb{Q}_{X-Y-Z}.$$

Nous désignons par τ^Z (resp. τ^Y) la filtration sur $j_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z}$ déduite de $j_*^Y \tau$ (resp. $j_*^Z \tau$) image directe par j_*^Y (resp. j_*^Z) de la filtration τ canonique ([HII], 1.4.6) sur $j_*^{Z-Y} \mathbb{Q}_{X-Y-Z}$ (resp. $j_*^{Y-Z} \mathbb{Q}_{X-Y-Z}$).

La filtration τ^Z (resp. τ^Y) est définie sur le complexe obtenu via les résolutions de Godement désignées par la lettre G

$$\mathcal{H}^Z = j_*^Y (s G (j_*^{Z-Y} G \mathbb{Q}_{X-Y-Z})) \quad (\text{resp. } \mathcal{H}^Y = j_*^Z (s G (j_*^{Y-Z} G \mathbb{Q}_{X-Y-Z}))).$$

Nous disposons de morphismes injectifs canoniques

$$i^Z: j_* G \mathbb{Q}_{X-Y-Z} \rightarrow \mathcal{H}^Z \quad \text{et} \quad i^Y: j_* G \mathbb{Q}_{X-Y-Z} \rightarrow \mathcal{H}^Y.$$

Alors le complexe quotient $\mathcal{H}^Z \oplus \mathcal{H}^Y / \mathrm{Im}(i^Z - i^Y)$, ou le cône $C(i^Z - i^Y)$, représente un complexe muni des trois filtrations τ^Z , τ^Y et τ que l'on désigne par

$$(1.10.1) \quad (j_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z}, \tau, \tau^Z, \tau^Y).$$

Soient $\Pi: (Y \cup Z)^i \rightarrow X$, $\Pi^Z: Z^i \rightarrow X$ et $\Pi^Y: Y^i \rightarrow X$ les projections finies de la somme disjointe des intersections de i composantes distinctes des DCN, $Y \cup Z$, Z et Y respectivement. On a

$$(1.10.2) \quad \text{Gr}_i^r \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z} \simeq \mathbf{R}^i \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z} \simeq \Pi_* \mathbb{Q}_{(Y \cup Z)^i},$$

considérons les immersions ouvertes $j^Z: (Z^i - (Z^i \cdot Y)) \rightarrow Z^i$ et $j^Y: (Y^i - (Y^i \cdot Z)) \rightarrow Y^i$. On a

$$(1.10.3) \quad \text{Gr}_i^r \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z} \simeq \mathbf{j}_*^Y \text{Gr}_i^r \mathbf{j}_*^{Z-Y} \mathbb{Q}_{X-Y-Z} \simeq \mathbf{j}_*^Y \mathbf{R}^i \mathbf{j}_*^{Z-Y} \mathbb{Q}_{X-Y-Z}[-i] \simeq \Pi_*^Z \mathbf{j}_*^{Z^i} \mathbb{Q}_{Z^i - (Z^i \cdot Y)}[-i]$$

$$(1.10.4) \quad \text{Gr}_i^r \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z} \simeq \mathbf{j}_*^Z \text{Gr}_i^r \mathbf{j}_*^{Y-Z} \mathbb{Q}_{X-Y-Z} \\ \simeq \mathbf{j}_*^Z \mathbf{R}^i \mathbf{j}_*^{Y-Z} \mathbb{Q}_{X-Y-Z}[-i] \simeq \Pi_*^Y \mathbf{j}_*^{Y^i} \mathbb{Q}_{Y^i - (Y^i \cdot Z)}[-i],$$

$$(1.10.5) \quad \text{Gr}_k^r \text{Gr}_i^r \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z} \simeq \Pi_* \mathbb{Q}_{Z^i \cdot Y^{k-i}}[-k]$$

et

$$\text{Gr}_k^r \text{Gr}_i^r \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z} \simeq \Pi_* \mathbb{Q}_{Y^i \cdot Z^{k-i}}[-k]$$

1.11. Avec les notations de (1.1), (1.3) et (1.10), le complexe $\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{Y_i(0)}$ muni des filtrations W^Z , W et F quotient de celles de $\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z)$, est cosimplicial sur $Y_{\cdot}(0)$.

PROPOSITION 1.11. — Avec les notations de (1.11), soit $\Pi_i: Y_i(0) \rightarrow X$ la projection finie, et considérons de plus l'un des deux cas : les composantes Y_i de Y kähleriennes, ou Y et $Y \cdot Z$ algébriques.

(i) Le système

$$(1.11.1) \quad (\Pi_i \mathbf{j}_* \mathbb{Z}_{X-Y-Z}, (\Pi_i \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z}, \tau^Z, \tau), (\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_i(0)}} \mathbb{Q}, W^Z, W, F)),$$

muni des isomorphismes de compatibilité

$$\beta: \Pi_i \mathbf{j}_* \mathbb{Z}_{X-Y-Z} \otimes \mathbb{Q} \simeq \Pi_i \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z}$$

et

$$\gamma: (\Pi_i \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z}, \tau^Z, \tau) \otimes \mathbb{C} \simeq (\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_i(0)}} \mathbb{C}, W^Z, W)$$

est un CHMCF sur $Y_i(0)$, cosimplicial sur $Y_{\cdot}(0)$.

(ii) L'assertion obtenue en remplaçant τ^Z par τ^Y et W^Z par W^Y dans (i) est aussi vraie.

(iii) La filtration W^Y sur le \mathbb{Q} -CHMCF

$$(\Pi_i \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z}, \tau^Z, \tau), \quad (\Omega_X^*(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\cdot}(0)}} \mathbb{Q}, W^Z, W, F)$$

muni de l'isomorphisme de compatibilité (γ) dans (i), est une filtration par des sous \mathbb{Q} -CHMCF.

(iv) Pour tout entier i , le couple quotient

$$(\Pi_i \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z} / \tau_k^Y, \tau^Z, \tau), \quad ((\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\cdot}(0)}} \mathbb{Q}) / W_k^Y, W^Z, W, F),$$

muni de l'isomorphisme de compatibilité induit par (γ) dans (i)

$$\begin{aligned} (\Pi_i j_* \mathbb{Q}_{X-Y-Z}/\tau_k^Y, \tau^Z, \tau) \otimes \mathbb{C} &\xrightarrow{\sim} (\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_i(0)}}/\tau_k^Y, W^Z, W) \\ &\xrightarrow{\sim} ((\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_i(0)}})/W_k^Y, W^Z, W), \end{aligned}$$

forme un \mathbb{Q} -CHMCFs.

Preuve. — (i) Pour toute partie $\lambda.$ de $[1, p]$, d'après (1.7.1)

$$\text{Gr}_n^W((W_b^Z/W_a^Z)(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_\lambda(0)}}), W, F) \simeq \bigoplus_{j \in [a, b]} (\Omega_Z^{*j} \cdot Y^{n-j} \cdot Y_\lambda(0)[-n], F[-n])$$

est un CHC de poids n . Nous en déduisons le quasi-isomorphisme (γ) en comparant avec (1.10.5). De même l'axiome (I, 2.4.1) est vérifié. Le quasi-isomorphisme devient trifiltré pour F , voir (1.11.2).

(ii) Nous utilisons :

$$\begin{aligned} \text{Gr}_n^W((W_b^Y/W_a^Y)(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_\lambda(0)}}), W, F) \\ \simeq \bigoplus_{j \in [n-b, n-a]} (\Omega_Z^{*j} \cdot Y^{n-j} \cdot Y_\lambda(0)[-n], F[-n]). \end{aligned}$$

(iii) En effet pour tout entier k

$$\begin{aligned} (1.11.2) \quad (\text{Gr}_n^W(W_a^Z/W_b^Z)W_k^Y(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_i(0)}}), F) \\ \simeq \bigoplus_{\substack{j \in [a, b] \\ j \geq n-k}} (\Omega_Z^{*j} \cdot Y^{n-j} \cdot Y_i(0)[-n], F[-n]). \end{aligned}$$

(iv) En effet pour tout entier k

$$\begin{aligned} (1.11.3) \quad (\text{Gr}_n^W(W_a^Z/W_b^Z)((\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_i(0)}})/W_k^Y), F) \\ \simeq \bigoplus_{\substack{j \in [a, b] \\ j < n-k}} (\Omega_Z^{*j} \cdot Y^{n-j} \cdot Y_i(0)[-n], F[-n]). \end{aligned}$$

VARIANTE 1.11. — Le morphisme de restriction

$$(1.11.4) \quad \rho: \Omega_X^*(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{Y_i(m)} \rightarrow \Omega_X^*(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{Y_i(0)}$$

est un quasi-isomorphisme cosimplicial et bifiltré pour W^Z et W d'après (1.7.1) et (1.8). La filtration de Hodge F sur $\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z)$ induit sur le complexe $\text{Gr}_k^W(W_b^Z/W_a^Z)(\Omega_X^*(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_i(m)}})$ une filtration de Hodge \bar{F} dite formelle dans [0], qui ne permet pas nécessairement d'obtenir une structure de CHC de poids k , si $(m.) \neq 0$.

Il est cependant possible de munir ce dernier complexe d'une filtration de Hodge F définie lorsque $\dim X = n + 1$ par

$$(1.11.5) \quad F^j = \bar{F}^j + \ker \rho \quad \text{pour } j \leq n + 2 \quad \text{et } F^{n+3} = 0,$$

tel que ρ soit un quasi-isomorphisme trifiltré, puisque $\ker \rho = N_{Y_{\underline{i}}(m.)}$ est un complexe acyclique.

La proposition (1.11) demeure vraie pour $Y_{\underline{i}}(m.)$ au lieu de $Y_{\underline{i}}(0)$.

REMARQUE 1.12. — D'après (1.11, iii) et (1.11.5), le complexe

$$(W_0^Y(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_{\underline{i}}(m.)}), W^Z, W, F)$$

est sous-jacent à un CHMCFS sur $Y_{\underline{i}}(m.)$. Il est quasi-isomorphe au complexe obtenu pour $m. = 0$.

D'après (1.7.3),

$$W_0^Y(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_{\underline{i}}(0)}) \simeq \Omega_{Y_{\underline{i}}(0)}^*(\text{Log } Y_{\underline{i}}(0) \cdot Z).$$

Nous en déduisons que l'image directe diagonale en W

$$(1.12.1) \quad \delta_1 W_0^Y(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_{\underline{i}}(0)}) = W_0^Y \delta_1(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_{\underline{i}}(0)}),$$

coïncide avec le CHMC du DCN ouvert $Y - (Z, Y)$ (E IV) et nous avons des quasi-isomorphismes

$$(1.12.2) \quad \begin{aligned} j_* \mathbb{C}_{Y - (Z, Y)} &\xrightarrow{\cong} W_0^Y(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_{(m.)}}) \\ &\simeq \Omega_X^*(\text{Log } Z) / I_{Y_{(m.)}} \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \xrightarrow{\cong} W_0^Y \delta_1(\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_{\underline{i}}(m.)}). \end{aligned}$$

PROPOSITION 1.13. — Pour tout $(m.) \in \mathbb{N}^p$, tout entier j , et tout poids n et k , le module différentiel gradué

$$(1.13.1) \quad \Pi_* \text{Gr}_k^{W^Z} \text{Gr}_n^W((\Omega_X^j \text{Log } Y)(\text{Log } Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_{\underline{i}}(m.)})$$

(resp. W^Y au lieu de W) définit une résolution à droite de

$$(1.13.2) \quad \text{Gr}_k^{W^Z} \text{Gr}_n^W(\Omega_X^j(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_{(m.)}})$$

(resp. W^Y au lieu de W) compatible avec la différentielle extérieure induite, pour j variant.

Preuve. — Le résidu le long de Z transforme (1.13.1) en

$$\Pi_* \text{Gr}_{n-k}^W \Omega_Z^{j-k}(\text{Log } Z^k \cdot Y) \otimes \mathcal{O}_{Y_{\underline{i}}(m.)}[-k].$$

De la même manière, (1.13.2) se transforme en

$$\text{Gr}_{n-k}^W(\Omega_Z^{j-k}(\text{Log } Z^k \cdot Y) \otimes \mathcal{O}_{Y_{(m.)}})[-k].$$

Ce qui nous ramène à travailler sur Z^k , et il suffit de considérer $X - Z^0$ i. e. faire $k=0$ dans (1.13). L'inclusion $I(m.) \Omega_X^*(\text{Log } Y) \subset \Omega_X^*$ montre que

$$\text{Gr}_i^W \Omega_X^h(\text{Log } Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y(m.)} \simeq \Omega_Y^{h-i} \quad \text{pour } i > 0$$

et

$$\text{Gr}_0^W (\Omega_X^h(\text{Log } Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y(m.)}) \simeq \Omega_X^h / I(m.) \Omega_X^h(\text{Log } Y).$$

D'après (1.7.1) nous devons démontrer pour $n > 0$ la résolution

$$\Omega_{Y^n}^h \xrightarrow{\sim} \Pi_* \Omega_{Y^n, Y_{\underline{p}}(m.)}^h.$$

Choisissons une suite $(t_1 < \dots < t_n) \subset [1, p]$ et considérons la composante $Y_{t_1 \dots t_n}$ de Y^n . Définissons le complexe K :

$$K^p = 0 \quad \text{pour } p < -1, \quad K^{-1} = \Pi_* \Omega_{Y_{t_1 \dots t_n}}^h$$

et

$$K^p = \Pi_* \Omega_{Y_{t_1 \dots t_n, Y_{\underline{p}}(m.)}}^h \quad \text{pour } p \geq 0,$$

muni de la différentielle ρ (1.4) et (1.5). Il suffit de démontrer que K est acyclique. On raisonne par récurrence sur le nombre de composante de Y . Si Y est lisse, c'est évident. Sinon, introduisons le DCN, $Y' = Y - Y_{t_1}$, dans X . En séparant les termes $Y_{\underline{p}}(m.)$ contenus dans Y_{t_1} , nous obtenons la décomposition

$$Y_{\underline{p}}(m.) = Y_{t_1}(m_{t_1}) \cdot Y'_{\underline{p-1}}(m.)$$

est la sous-variété de X définie par la somme des idéaux correspondants.

Nous en déduisons une réalisation du complexe $K[1]$ comme un cône au-dessus de l'identité d'un complexe L' , où

$$L^0 = \Omega_{Y_{t_1 \dots t_n}}^{j-n} \quad \text{et} \quad L^p = \Omega_{Y_{t_1 \dots t_n}}^{j-n} \cdot Y'_{\underline{p-1}}(m.) \quad \text{pour } p > 0,$$

muni de la différentielle ρ' associée au DCN $Y'(m.)$ (1.4) et (1.5). Alors $K^p \simeq L^{p+1} \oplus L^p$ et la différentielle $\rho: K^p \rightarrow K^{p+1}$ est donnée à un signe près par la matrice $\begin{pmatrix} \rho' & 0 \\ \text{Id} & \rho' \end{pmatrix}$.

Pour $n=0$, considérons la suite exacte de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow W_0(\Omega_X^j(\text{Log } Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y(m.)}) & \rightarrow & \Omega_X^j(\text{Log } Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y(m.)} & \rightarrow & \Omega_X^j(\text{Log } Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y(m.)} / W_0 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow W_0(\Omega_X^j(\text{Log } Y) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\underline{p}}(m.)}}) & \rightarrow & \Omega_X^j(\text{Log } Y) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\underline{p}}(m.)}} & \rightarrow & \Omega_X^j(\text{Log } Y) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\underline{p}}(m.)}} / W_0 & \rightarrow & 0. \end{array}$$

La colonne du milieu est acyclique (1.6.3), la colonne quotient à droite ne comportant que des poids > 0 est donc acyclique d'après ce qui précède, d'où la colonne à gauche l'est aussi.

COROLLAIRE 1. 14. — (i) Soit $I(m.) \subset O_X$ l'idéal de $Y(m.)$, et faisons $n=k$ dans (1. 13). On obtient pour tout k (y compris pour $k=0$, $Z^0=X$) un complexe acyclique

$$0 \rightarrow \Omega_{Z^k/I(m.)}^i \Omega_{Z^k}^i(\text{Log } Z^k \cdot Y) \rightarrow \Omega_{Z \cdot Y_0(m.)}^i \rightarrow \Omega_{Z^k \cdot Y_1(m.)}^i \rightarrow \Omega_{Z^k \cdot Y_{n+1}(m.)}^i \rightarrow 0.$$

(ii) Le complexe suivant est acyclique (considérer $\text{Gr}_0^{W^Y}$ dans (1. 13) et (1. 7. 3))

$$0 \rightarrow \Omega_X^i(\text{Log } Z)/I_{Y((0))} \Omega_X^i(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \rightarrow \Pi_* \Omega_{Y_0(0)}^i(\text{Log } Z, Y_0(0)) \rightarrow \Pi_* \Omega_{Y_i(0)}^i(\text{Log } Z, Y_i(0)) \rightarrow 0$$

et de même son gradué Gr^{W^Z} ; en particulier le complexe $\Omega_X^*/I_{Y((0))} \Omega_X^*(\text{Log } Y)$ est isomorphe au complexe des formes régulières ω_Y^* sur Y [E IV] et constitue une résolution de C_Y par des O_Y -modules cohérents.

COROLLAIRE 1. 15. — Le morphisme de restriction

$$\rho: (\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{O_X} O_{Y((m.))}, W^Z, W) \rightarrow ((\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{O_X} O_{Y((0))}, W^Z, W)$$

est un quasi-isomorphisme bifiltré.

Munissions $\Omega_X^*(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \otimes_{O_X} O_{Y((m.))}$ de la filtration F déduite de la filtration quotient F en ajoutant $N_{Y(m.)} = \ker \rho$ en degrés $\leq n+2$. i. e. $F^j = \bar{F}^j + N_{Y((m.))}$ pour $j \leq n+2$ et $F^{n+3} = 0$; alors le complexe $N_{Y((m.))}$ est acyclique et ρ est un quasi-isomorphisme trifiltré (I, 2. 1). Enfin la restriction sur les résolutions de Mayer-Vietoris dans (1. 11. 4) est compatible avec ρ ci-dessus.

Preuve. — Le complexe $N_{Y((m.))} = \ker \rho$ est acyclique d'après (1. 11) et (1. 13).

LE COMPLEXE Log

1. 16. — Soient D un disque dans \mathbb{C} contenant 0, $D^* = D - (0)$, et $f: X \rightarrow D$ un morphisme lisse sur D^* de fibre centrale $f^{-1}(0) = Y$ (avec les notations de 1. 3 et 1. 6).

Soit z un paramètre sur le disque, on pose

$$(1. 16.1) \quad \eta = f^*(dz/z) = df/f \quad \text{section de } \Omega_X^1(\text{Log } Y).$$

On peut trouver localement sur X , des coordonnées $(y_i)_{i \in [1, n+1]}$ et p nombres entiers $(n_i) = (n_1, \dots, n_p)$ tel que $f = \prod_{i \in [1, p]} y_i^{n_i}$ alors,

$$(1. 16.2) \quad \eta = \sum_{i \in [1, p]} n_i dy_i/y_i.$$

DÉFINITION 1. 17. — Le complexe $\text{Log}_{X,z}^*$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \rightarrow \dots \xrightarrow{d' = \Lambda \eta} \dots \rightarrow \Omega_X^{n+1}(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \rightarrow 0$$

est égal en degré i à $\Omega_X^i(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)$, muni de la différentielle $d' = \Lambda \eta$ (1. 61. 1).

1.18. — Le complexe $\text{Log}_{X,Z}^\bullet$ est muni de poids W^Y et W non stables par d' , et d'une filtration W^Z . Il est utile d'introduire les filtrations δW^Y et δW

$$(1.18.1) \quad \begin{aligned} (\delta W^Y)_j(\text{Log}_{X,Z}^i) &= W_{i+j}^Y \Omega_X^i(\text{Log } Y)(\text{Log } Z), \\ (\delta W)_j(\text{Log}_{X,Z}^i) &= W_{i+j} \Omega_X^i(\text{Log } Y)(\text{Log } Z). \end{aligned}$$

Pour toute suite d'entiers $m_{\lambda.}$ indexée par une suite $\lambda.$ dans $[1, p]$, [resp. $(m.) \in \mathbb{N}^p$], nous considérons les complexes

$$\text{Log}_{X,Z}^\bullet \otimes_{O_{Y_{\lambda.}(m_{\lambda.})}} \text{Log}_{X,Z}^\bullet \otimes_{O_{Y((m.))}}$$

munis toujours des filtrations W^Z , δW^Y et δW induites.

(1.19) Soit $\text{Log}_{Z^i}^\bullet$ le complexe construit ainsi pour le DCN $Z^i.Y$ dans Z^i ; nous déduisons, d'après (1.2.1) et une variante de (1.7.1), les formules

$$(1.19.1) \quad (\text{Gr}_i^{W^Z}(\text{Log}_{X,Z}^\bullet, \delta W^Y, \delta W) \simeq (\text{Log}_{Z^i}^\bullet[-i]), W, W[i] \text{ dans } D^+ F_2(Z^i, \mathbb{C}))$$

$$(1.19.2) \quad \text{Gr}_i^{W^Z} \text{Gr}_{-h}^{\delta W^Y} \text{Log}_{X,Z}^\bullet \otimes_{O_{Y_{\lambda.}(m_{\lambda.})}} \simeq \text{Gr}_{-h}^{\delta W}(\text{Log}_{Z^i}^\bullet \otimes_{O_{Y_{\lambda.}(m_{\lambda.})}})[i]$$

dans $D^+(Z^i.Y_{\lambda.}(m_{\lambda.}), \mathbb{C})$

$$(1.19.3) \quad \text{Gr}_i^{W^Z} \text{Gr}_{-h}^{\delta W^Y}(\text{Log}_{X,Z}^\bullet \otimes_{O_{Y((m.))}}) \simeq \text{Gr}_{-h}^{\delta W}(\text{Log}_{Z^i}^\bullet \otimes_{O_{Y((m.))}})[i] \text{ dans } D^+(Z^i.Y, \mathbb{C}).$$

PROPOSITION 1.20. — (i) Pour tout O_X -module M transversal à Z i.e. $\text{Tor}_X^j(\pi_* 0_{Z^i}, M) = 0$ pour tout $i \geq 0$ et $j > 0$, le complexe $\text{Gr}_k^{W^Z}(\text{Log}_{X,Z}^\bullet \otimes_{O_X} M)$ (1.17) et (1.19.1) est acyclique.

(ii) Le complexe $\text{Gr}_k^{W^Z} \text{Gr}_h^{\delta W^Y}(\text{Log}_{X,Z}^\bullet \otimes_{O_{Y_{\lambda.}(m_{\lambda.})}})$ (1.19.2) est acyclique si et seulement si l'un des $m_{\lambda_i} = 0$.

(iii) Le complexe $\text{Gr}_k^{W^Z} \text{Gr}_{-h}^{\delta W^Y}(\text{Log}_{X,Z}^\bullet \otimes_{O_{Y((0))}})$ est acyclique.

En particulier le complexe suivant admet un gradué Gr^{W^Z} acyclique :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow 0_{Y((0))} = 0_X / I_{Y((0))} \xrightarrow{\wedge \eta} \dots \rightarrow \Omega_X^p(\text{Log } Y \cup Z) / (I_{Y((0))}) \\ \rightarrow \Omega_X^{p+1}(\text{Log } Y \cup Z) / W_0^Y \xrightarrow{\wedge \eta} \dots \rightarrow \Omega_X^{n+1}(\text{Log } Y \cup Z) / W_{n-p}^Y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Vérifions (i) pour M localement libre. Au voisinage d'un point y , nous pouvons construire une base $(e_i)_{i \in [1, n+1]}$ de $\Omega_X^1(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)_y$ avec e_1 égal au germe défini par η . D'où la décomposition

$$\Omega_X^p(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)_y = \eta \wedge \Omega_X^{p-1}(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)_y \oplus B_p,$$

où B_p est engendré par les produits $\wedge e_{\lambda_i}$ avec $e_{\lambda_i} \neq e_1$.

Alors $\wedge \eta$ est injectif sur B_p , et on en déduit l'acyclicité de Log^\bullet .

Le produit tensoriel avec M reste acyclique puisque $\text{Log}_{X,Z}^\bullet$ se compose de modules localement libres. En général M admet localement une résolution libre de longueur finie. Nous procédons par récurrence sur cette longueur.

Considérons, au voisinage du point y , une suite exacte

$$(1.20.1) \quad 0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0,$$

où L est libre. Alors N est transversal à Z . Supposons par récurrence l'assertion (i) vraie pour N . Le produit tensoriel de (1.20.1) par $\text{Log}_{X,Z}^*$, composé de modules localement libres, est exact, et son Gr_k^{WZ} est isomorphe, d'après (1.7.4) et (1.19.1) au produit tensoriel de (1.20.1) par le complexe $\text{Log}_Z^k[-k]$, qui est acyclique. La colonne de gauche tensoriel N est acyclique par récurrence; celle du milieu tensoriel L l'est aussi, donc celle de droite tensoriel M est acyclique.

(ii) En appliquant (1.19.2), on se ramène à étudier $\text{Gr}_{-h}^{\delta \text{W}^Y}(\text{Log}_Z^k \otimes 0_{Y_\lambda, (m_\lambda)})$ qui est analogue au cas $\text{Gr}_{-h}^{\delta \text{W}^Y}(\text{Log}_X^* \otimes 0_{Y_\lambda, (m_\lambda)})$ i.e. $k=0$.

La démonstration est analogue à celle de (1.13) dont on reprend les notations. Considérons le complexe D^* égal en degré k à $\Omega_{Y^k, Y_\lambda, (m_\lambda)}^h$, muni de la différentielle $\rho(n) : D^k \rightarrow D^{k+1}$ définie à partir de (1.4) et (1.5) par la formule

$$(1.20.2) \quad \rho(n)_{i_1 \dots i_k} = (n_\lambda) \rho_{i_1 \dots i_k} : \Omega_{Y_{i_1 \dots i_k}, Y_\lambda, (m_\lambda)}^h \rightarrow \Omega_{Y_{i_1 \dots i_k}, Y_\lambda, (m_\lambda)}^h.$$

Le résidu le long de Y induit un isomorphisme de modules d'après (1.7)

$$\text{Gr}_k^{\text{W}}(\Omega_X^{h+k}(\text{Log } Y) \otimes 0_{Y_\lambda, (m_\lambda)}) \simeq \Omega_{Y^k, Y_\lambda, (m_\lambda)}^h$$

et de complexes

$$\text{Gr}_{-h}^{\delta \text{W}}(\text{Log}_X^* \otimes 0_{Y_\lambda, (m_\lambda)}) \simeq \Omega_{Y^*, Y_\lambda, (m_\lambda)}^h[-k] = D[-k].$$

transformant la différentielle $d' = \Lambda \eta$ en $\rho(n)$.

Supposons Y_{λ_1} la composante réduite définie par $J(m_{\lambda_1})$ et soit $Y' = Y - Y_{\lambda_1}$.

Considérons le complexe G^* défini par $G^k = \Omega_{Y^{k-1}, Y_{\lambda_1}, Y_{\lambda_1}, (m_\lambda)}^h$ (nul pour $k < 1$ et $G^1 = \Omega_{Y_\lambda, (m_\lambda)}^h$) et muni de la différentielle $\rho'(n)$ définie à partir de ρ associé au DCN Y' par une formule analogue à (1.20.2).

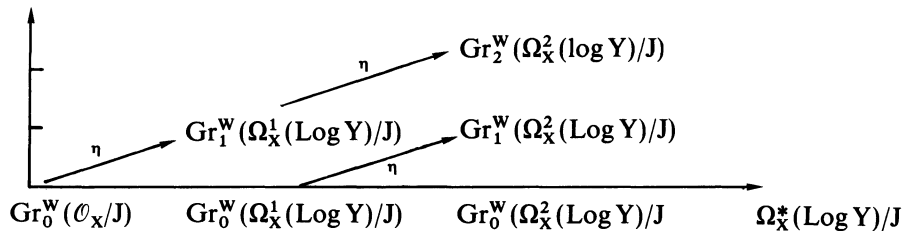
Alors D^* est isomorphe au cône de l'automorphisme $n_{\lambda_1} \cdot \text{Id}$ de G^* .

En effet

$$D^k \simeq \Omega_{Y^k, Y_\lambda, (m_\lambda)}^h \simeq G^{k+1} \oplus G^k,$$

où G^{k+1} est obtenu comme résidu de termes ne contenant pas $dy_{\lambda_1}/y_{\lambda_1}$ et G^k est obtenu comme résidu de termes contenant $dy_{\lambda_1}/y_{\lambda_1}$.

Le diagramme suivant illustre les complexes $\text{Gr}_{-h}^{\delta \text{W}}(\text{Log}_X^*/J)$.



(1.20.3) Il est nécessaire que l'un des λ_i soit égal à zéro pour obtenir l'acyclicité de $Gr^{\delta W}_{-h}(\text{Log}_{\dot{X}}/J_{\lambda} (m_{\lambda}))$ comme on le voit sur l'exemple $X = \mathbb{C}^2$ et $J = (y^{m_1+1})$. Le complexe s'écrit alors :

$$\Omega^h_{Y_1(m_1)} \rightarrow \Omega^h_{Y_1} \oplus \Omega^h_{Y_2, Y_1(m_1)} \rightarrow \Omega^h_{Y_1, Y_2}.$$

(iii) En appliquant (1.19.3), on se ramène à étudier $Gr^{\delta W}_{-h}(\text{Log}_{\dot{X}} \otimes \mathcal{O}_{Y((0))})$.

Soit $I(0)$ l'idéal définissant Y réduit. L'inclusion $I(0) \Omega^*_X(\text{Log } Y) \subset W_0 \Omega^*_X(\text{Log } Y)$ montre que

$$Gr^W_0(\Omega^*_X(\text{Log } Y) \otimes \mathcal{O}_{Y((0))}) \simeq \Omega^*_X/I(0) \Omega^*_X(\text{Log } Y)$$

et pour $i \geq 1$

$$Gr^W_i(\Omega^*_X(\text{Log } Y) \otimes \mathcal{O}_{Y((0))}) \simeq Gr^W_i \Omega^*_X(\text{Log } Y) \simeq \text{Res}_Y \Omega^*_i[-i].$$

Le morphisme $\Lambda \eta$ se transforme par le résidu en $\rho(n)$ (1.20.2), ce qui nous ramène à démontrer l'acyclicité du complexe

$$0 \rightarrow \Omega^h_X/I(0) \Omega^h_X(\text{Log } Y) \rightarrow \Omega^h_{Y_1} \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^h_{Y_i} \xrightarrow{\rho(n)} \Omega^h_{Y_{i+1}} \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^h_{Y_{n+1}} \rightarrow 0.$$

Le morphisme induisant la multiplication par $n_{i_1} \dots n_{i_k}$ sur le terme $\Omega^h_{Y_{i_1 \dots i_k}}$ transforme la différentielle $\rho(n)$ en ρ , ce qui permet d'appliquer (1.14 (ii)).

1.21. Nous pouvons introduire le complexe logarithmique relatif $\Omega^*_{X/D}(\text{Log } Y)$ ($\text{Log } Z$) :

$$\begin{aligned} \Omega^1_{X/D}(\text{Log } Y \cup Z) &\simeq \Omega^1_X(\text{Log } Y \cup Z)/f^* \Omega^1_D(\text{Log } 0), \\ \Omega^p_{X/D}(\text{Log } Y \cup Z) &\simeq {}^p \Lambda \Omega^1_{X/D}(\text{Log } Y \cup Z). \end{aligned}$$

Il est muni de la différentielle extérieure et des filtrations W^Z , W^Y , W et F induites par celles de $\Omega^*_X(\text{Log } Y)$ ($\text{Log } Z$) (1.1).

Le terme de degré p est localement libre sur 0_X , et la relation (1.16.2) $\sum_{i \in [1, p]} n_i (dy_i/y_i) = 0$ est satisfaite dans le terme de degré 1.

COROLLAIRE 1.21. — (i) *Pour tout \mathcal{O}_X -module M transversal à Z (1.20), les complexes tronqués*

$$\sigma_{\leq 0}(Gr_k^{W^Z}(\text{Log}_{\dot{X}, Z} \otimes_{\mathcal{O}_X} M[p])) \text{ (resp. } \sigma_{\leq 0}(Gr_k^{W^Z}(Gr^{\delta W^Y}_{-h}(\text{Log}_{\dot{X}, Z} \otimes \mathcal{O}_{Y(0)})[p]))$$

sont des résolutions à gauche de

$$Gr_k^{W^Z}(\Omega^p_{X/D}(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \otimes_{\mathcal{O}_X} M) \text{ (resp. } Gr_k^{W^Z} Gr_{p-h}^{W^Y}(\Omega^p_{X/D}(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \otimes \mathcal{O}_{Y(0)})).$$

De plus, si dans une suite m_{λ} indexée par $(\lambda) \subset [1, p]$ l'un des $m_{\lambda_i} = 0$

$$\sigma_{\leq 0} Gr_k^{W^Z}((Gr^{\delta W^Y}_{-h}(\text{Log}_{\dot{X}, Z} \otimes \mathcal{O}_{Y_{\lambda}(m_{\lambda})})) [p])$$

est une résolution à gauche de $\mathrm{Gr}_k^{\mathrm{wZ}} \mathrm{Gr}_{p-h}^{\mathrm{wY}} (\Omega_{X/D}^p (\mathrm{Log} Y) (\mathrm{Log} Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_{\lambda. (m_{\lambda.})}})$

(ii) De même nous avons des résolutions à droite pour M transversal à Z

$$\mathrm{Gr}_k^{\mathrm{wZ}} (\Omega_{X/D}^p (\mathrm{Log} Y) (\mathrm{Log} Z) \otimes M) \xrightarrow{\approx} \sigma_{\geq 0}^{\Lambda\eta} (\mathrm{Gr}_k^{\mathrm{wZ}} (\mathrm{Log}_{X,Z}^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_X} M [p+1]))$$

$$\mathrm{Gr}_k^{\mathrm{wZ}} \mathrm{Gr}_{p-h}^{\mathrm{wY}} (\Omega_{X/D}^p (\mathrm{Log} Y) (\mathrm{Log} Z) \otimes \mathcal{O}_{Y((0))}) \xrightarrow{\approx} \sigma_{\geq 0}^{\Lambda\eta} (\mathrm{Gr}_k^{\mathrm{wZ}} (\mathrm{Gr}_{-h}^{\delta\mathrm{wY}} (\mathrm{Log}_{X,Z}^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_Y((0))}) [p+1])).$$

De plus, si dans une suite $m_{\lambda.}$ indexé par $(\lambda.) \subset [1, p]$, l'un des $m_{\lambda_i} = 0$.

$$\mathrm{Gr}_k^{\mathrm{wZ}} \mathrm{Gr}_{p-h}^{\mathrm{wY}} (\Omega_{X/D}^p (\mathrm{Log} Y) (\mathrm{Log} Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_{\lambda. (m_{\lambda.})}})$$

$$\xrightarrow{\approx} \sigma_{\geq 0}^{\Lambda\eta} (\mathrm{Gr}_k^{\mathrm{wZ}} (\mathrm{Gr}_{-h}^{\delta\mathrm{wY}} (\mathrm{Log}_{X,Z}^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\lambda. (m_{\lambda.})}}}) [p+1])).$$

Preuve. — On vérifie que l'on a des suites exactes

$$\Omega_X^{p-1} (\mathrm{Log} Y) (\mathrm{Log} Z) \xrightarrow{\Lambda\eta} \Omega_X^p (\mathrm{Log} Y) (\mathrm{Log} Z) \xrightarrow{\pi} \Omega_{X/D}^p (\mathrm{Log} Y) (\mathrm{Log} Z) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \Omega_{X/D}^p (\mathrm{Log} Y) (\mathrm{Log} Z) \xrightarrow{\Lambda\eta} \Omega_X^{p+1} (\mathrm{Log} Y) (\mathrm{Log} Z),$$

qui demeurent exactes par produit tensoriel avec M .

La proposition (1.20) assurent que l'exactitude demeure vraie sur les différents gradués.

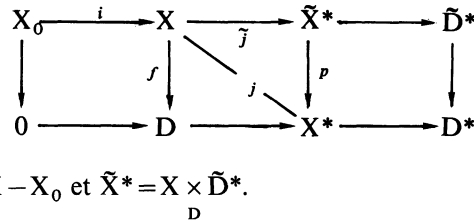
2. Construction de CHMCF cohomologiques : Ψ mixte

Nous considérons pour une famille de variétés algébriques lisses sur le disque étoilé, mais non nécessairement propres, des constructions analogues à celles de la théorie de Hodge des faisceaux des cycles évanescents au paragraphe 4 de l'exposé 14 par P. Deligne dans [SGA 7], II, afin de compléter cette théorie.

Le principal résultat de ce paragraphe est la construction du CHMCF : $\Psi_{Y((m_{\lambda.}))}^M (\mathrm{Log} Z)$ (le Ψ mixte) (2.13). Il s'agit de munir le complexe de faisceaux de cycles proches d'une structure de CHMCF de manière indépendante des multiplicités n_i des composantes Y_i de Y , ce qui servira plus tard à éviter une réduction semi-stable. A la fin, nous faisons la liaison avec le complexe $A_{Y((0))}$ de Steenbrink [St]. Ce paragraphe donne les motivations et la preuve de certains résultats de (I.3) dans la première partie.

LE COMPLEXE Ψ . RAPPELS

2.1. Avec les notations de (I.1.1) et (I.1.3), considérons le diagramme



DÉFINITION 2.1. — *Le foncteur*

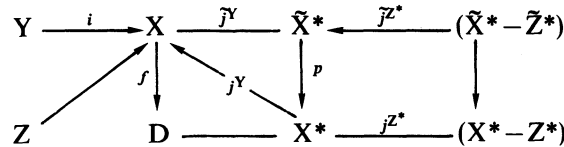
$$\Psi: D^+(X^*, \mathbb{Z}) \rightarrow D^+(X_0, \mathbb{Z}) \quad (\text{resp. } D^+F(X^*, \mathbb{Z}) \rightarrow D^+F(X_0, \mathbb{Z})),$$

fait correspondre à un complexe (resp. complexe filtré) de faisceaux abéliens G sur X le complexe (resp. complexe filtré)*

$$\Psi(G) = i^* \circ \tilde{j}_* (p^* G),$$

de faisceaux abéliens sur X₀.

2.2. Avec les notations de (1.16), (1.3) et (1.6), supposons $f: X \rightarrow D$ propre, lisse sur D^* , et considérons les diagrammes



où $\tilde{X}^* = X \times_D \tilde{D}^*$, $\tilde{Z}^* = Z \times_D \tilde{D}^*$, $X^* = X - Y$ et $Z^* = Z \times_D D^*$,

$$(2.2.2) \quad \begin{array}{ccc}
 X_t - Z_t & \xrightarrow{i_t} & \tilde{X}^* - \tilde{Z}^* \\
 \tilde{j}_t^* \downarrow & & \downarrow \tilde{j}^{Z^*}, \quad Z_t^m \xrightarrow{i_t^m} (\tilde{Z}^m)^* \\
 X_t & \xrightarrow{i_t^0} & \tilde{X}^*
 \end{array}$$

où i_t^0 désigne l'immersion d'une fibre X_t , en un point $t \in D^*$, sur la fibre \tilde{X}_u^* en un point $u \in D^*$ tel que $\pi(u) = t$, et i_t, i_t^m sont induits par i_t^0 .

Désignons par W^Z la filtration par le poids induite sur $H^p(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{Q})$ (resp. $H^p(X_t - Z_t, \mathbb{Q})$) par la filtration τ sur $\tilde{j}_*^* \mathbb{Q}_{\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*}$ (resp. $\tilde{j}_*^* \mathbb{Q}_{X_t - Z_t}$), et de même, son produit tensoriel avec \mathbb{C} , $H^p(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C})$ (resp. $H^p(X_t - Z_t, \mathbb{C})$).

PROPOSITION 2.3. — *Avec les notations de (2.2),*

(i) *Le complexe $i^* \circ \tilde{j}_*^*(\Omega_{\tilde{X}^*}^*(\text{Log } \tilde{Z}^*), W^Z)$ calcule $\Psi(\tilde{j}_*^* \mathbb{C}_{X^* - Z^*}, \tau)$ dans $D^+F(Y, \mathbb{C})$.*

(ii) *On a des isomorphismes filtrés*

$$(2.3.1) \quad i_t^*: (H^p(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{Q}), W^Z) \xrightarrow{\sim} (H^p(X_t - Z_t, \mathbb{Q}), W^Z), \quad \forall t \in D^*.$$

$$(2.3.2) \quad i_{\infty}^* : (H^p(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C}), W^Z) \simeq H^p(X, \tilde{j}_*^Y(\tilde{j}_*^Z C_{\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*}, \tau)) \\ \simeq H^p(Y, \Psi(j_*^Z C_{X^* - Z^*}, \tau))$$

(iii) La suite spectrale de $\Gamma(Y, \Psi(j_*^Z C_{X^* - Z^*}, \tau))$ dégénère en ${}_{\tau}E_2$ i. e. ${}_{\tau}E_2 \simeq {}_{\tau}E_{\infty}$.

Preuve. — (i) Les faisceaux cohérents $W_i^Z \Omega_X^*(\text{Log } \tilde{Z}^*)$ sont \tilde{j}_*^Y acycliques. En effet tout point y de Y admet un système fondamental de voisinages U dans X de Stein, $U^* = U - (U \cap Y)$ est alors de Stein car on peut supposer Y défini par une équation dans U , son revêtement $U \times_D \tilde{D}^*$ qui est une sous-variété fermée de $U^* \times \tilde{D}^*$ est aussi de Stein.

Il suffit d'appliquer \tilde{j}_*^Y à l'isomorphisme dans $D^+ F(\tilde{X}^*, \mathbb{C})$ [HII], (3.1.8)

$$(2.3.3) \quad p^*(j_*^Z C_{X^* - Z^*}, \tau) \simeq (\tilde{j}_*^Z C_{\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*}, \tau) \simeq (\Omega_X^*(\text{Log } \tilde{Z}^*), W^Z).$$

(ii) Pour tout entier $m \geq 0$, les variétés $Z^m (Z^0 = X)$ [resp. $(\tilde{Z}^m)^*$] ont le même type d'homotopie que l'image inverse $Z^i \cap f^{-1} U$ d'un disque $U \subset D$ contenant zéro (resp. une fibre Z_t^m pour $t \in D^*$). D'où des isomorphismes

$$(2.3.4) \quad \text{Gr}_m^i \Gamma(\tilde{X}^*, \tilde{j}_*^Z \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}) \simeq \Gamma((\tilde{Z}^m)^*, \mathbb{Q})[-m] \\ \simeq \Gamma(Z_t^m, \mathbb{Q})[-m] \simeq \text{Gr}_m^i \Gamma(X_t, j_*^Z \mathbb{Q}_{X_t - Z_t})$$

et lorsque U varie dans un système fondamental de voisinages de zéro, et donc $Z^m \cap f^{-1} U$ parcourt un système fondamental de voisinages de Z^m . Y puisque f est propre, et d'après [Go], II (4.11.1).

$$(2.3.5) \quad \text{Gr}_m^{W^Z} \Gamma(Y, i^* \tilde{j}_*^Y (\Omega_X^*(\text{Log } \tilde{Z}^*))) \simeq \Gamma(\tilde{Z}^m, Y, i \tilde{j}_*^Y \Omega_{(\tilde{Z}^m)^*}^*)[-m] \simeq \\ \simeq \Gamma(\tilde{Z}^m, Y, i^* \tilde{j}_*^Y C_{(\tilde{Z}^m)^*})[-m] \simeq \lim_U \Gamma(\tilde{Z}^m \times U, \tilde{j}_*^Y C_{(\tilde{Z}^m)^*})[-m] \quad (2.3, (i)) \\ \simeq \lim_U \text{Gr}_m^i \Gamma(\tilde{X}_U^*, \tilde{j}_*^Z C_{\tilde{X}_U^* - \tilde{Z}_U^*}) \simeq \text{Gr}_m^i \Gamma(\tilde{X}^*, \tilde{j}_*^Z C_{X^* - Z^*}).$$

(iii) La suite spectrale de $\Gamma(X_t, (j_*^Z \mathbb{Q}_{X_t - Z_t}, \tau))$ est appelée la suite spectrale par rapport au poids et dégénère en $E_2 = E_{\infty}$ [HII], (3.2.10). Elle est isomorphe d'après (2.3.4) à celle de $\Gamma(\tilde{X}^*, (\tilde{j}_*^Z \mathbb{Q}_{\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*}, \tau))$, d'après (2.3.5) à celle de $\Gamma(Y, i^* \tilde{j}_*^Y (\Omega_X^*(\text{Log } \tilde{Z}^*), W^Z))$ et enfin d'après (2.3, (i)) à celle de $\Gamma(Y, i^* \tilde{j}_*^Y (\Omega_X^*(\text{Log } \tilde{Z}^*), W^Z))$ et enfin d'après (2.3, (i)) à celle de $\Gamma(Y, \Psi(j_*^Z C_{X^* - Z^*}, \tau))$.

2.4. NOTATIONS. — Soient $z : D \rightarrow \mathbb{C}$ une coordonnée sur le disque déterminant un plongement holomorphe tel que $z(0) = 0$, et $\pi : \tilde{D}^* \rightarrow D$ un revêtement universel de paramètre u tel que $\pi(u) = \exp u = z$. Il est classique de noter $u = \text{Log } z$ et $z^\alpha : \exp(\alpha \text{Log } z) = \pi(\alpha u)$, de sorte que les fonctions $\pi(\alpha u)$, u^k sur \tilde{D}^* , pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$, sont désignées par $z^\alpha (\text{Log } z)^k$ définies sur \tilde{D}^* . Monodromie :

Le générateur positif T de $\pi_1(D^*)$ agit sur \tilde{D}^* par $T.u = u + 2i\pi$, et sur les fonctions sur \tilde{D}^* par transport de structure, tel que

$$(2.4.1) \quad T. \text{Log } z = \text{Log } z + 2i\pi, \quad T.z^\alpha = [\exp(2i\pi\alpha)] z^\alpha.$$

Des fonctions holomorphes $f^\alpha (\text{Log } f)^k$ sont définies sur $\tilde{X}^* = X \times_D \tilde{D}^* \rightarrow \tilde{D}^*$ comme images inverses de $z^\alpha (\text{Log } z)^k$.

De même T agit sur la cohomologie $H^p(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C})$.

DÉFINITION 2.5. — *Le complexe double $\Psi_{X,\alpha}^{p,q}(\text{Log } Z) = \Omega_X^{p+q}(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{Z}$ et $p \leq 0$ et égal à zéro pour $p > 0$ est muni des différentielles*

$$d' : \Psi_{X,\alpha}^{p,q}(\text{Log } Z) \rightarrow \Psi_{X,\alpha}^{p+1,q}(\text{Log } Z) \quad \text{tel que } d'w = \eta \wedge w \quad (1.16.1)$$

$$d'' : \Psi_{X,\alpha}^{p,q}(\text{Log } Z) \rightarrow \Psi_{X,\alpha}^{p,q+1}(\text{Log } Z) \quad \text{tel que } d''w = dw + \alpha \eta \wedge w.$$

Nous désignons par $\Psi_{X,\alpha}(\text{Log } Z)$ le complexe simple associé et simplement par $\psi_X(\text{Log } Z)$ [resp. $\psi_X^{p,q}(\text{Log } Z)$] le complexe $\psi_{X,0}(\text{Log } Z)$ [resp. $\psi_{X,0}^{p,q}(\text{Log } Z)$].

Nous omettons l'inscription $\text{Log } Z$ lorsque $Z = \emptyset$.

2.6. Nous disposons d'un plongement de complexes i. e., commutant aux différentielles.

$$(2.6.1) \quad I_\alpha : \psi_{X,\alpha}(\text{Log } Z) \rightarrow \tilde{J}_*^Y \Omega_{X^*}^*(\text{Log } \tilde{Z}^*),$$

tel que

$$I_\alpha(w) = w^\alpha (f^\alpha (\text{Log } f)^p / p! \quad \text{pour } w \in \psi_{X,\alpha}^{-p,q}.$$

Munissons $\psi_{X,\alpha}(\text{Log } Z)$ d'une filtration W^Z définie par

$$(2.6.2) \quad W_i^Z \Psi_{X,\alpha}^m(\text{Log } Z) = \bigoplus_{p+q=m} W_i^Z \Psi_{X,\alpha}^{p,q}(\text{Log } Z).$$

Le morphisme I_α respecte alors la filtration W^Z des deux côtés.

L'isomorphisme R_Z (1.2.1) induit un isomorphisme

$$(2.6.3) \quad R_Z : \text{Gr}_i^{W^Z} \psi_{X,\alpha}(\text{Log } Z) \simeq \Psi_{Z^i,\alpha}[-i].$$

THÉORÈME 2.6 — *Soit $\Delta = \{t \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Réel}(t) < 1\}$. Le morphisme*

$$(2.6.4) \text{ I} : \bigoplus_{\alpha \in \Delta} i^*(\Psi_{X,\alpha}(\text{Log } Z), W^Z) \xrightarrow{\sim} i^*(\tilde{J}_*^Y \Omega_{X^*}^*(\text{Log } \tilde{Z}^*), W^Z) \simeq \Psi(\mathbf{J}_*^Z \mathbb{C}_{X^*-Z^*}, \tau)$$

induit par ΣI_α (2.6.1) est un plongement qui définit un quasi-isomorphisme filtré dans $D^+ F(Y, \mathbb{C})$. Il définit aussi un quasi-isomorphisme si on remplace Δ par $\Delta \cap \mathbb{Q}$ dans (2.6.3).

Preuve. — Lorsque Z est vide, l'isomorphisme I est démontré dans les assertions (4.3), (4.15), (4.13) et (4.17) dans l'exposé 14 de [SGA 7], II, pour les complexes simples $\Psi_{\alpha,m}$ associés aux complexes doubles de termes $(-p, n+p)$, $p, n \in \mathbb{N}$, où $\alpha \in \Delta$

$$\Psi_{\alpha,m}^{-p,n+p} = i^* j_{*,m}^Y \Omega_{X^*}^n(\text{Log } Z^*),$$

où $j_{*,m}^Y$ désigne l'image directe des sections méromorphes le long de Y . D'après [H III], 3.1.11, les colonnes $\Psi_{\alpha,m}^{-p,*+p}$ sont quasi-isomorphes aux colonnes $\Psi_{X,\alpha}^{-p,*+p}(\text{Log } Z)$, et par là, les complexes simples $\Psi_{X,\alpha}(\text{Log } Z)$ et $\psi_{X,\alpha}$ sont quasi-isomorphes. Lorsque Z est

non vide, le morphisme $\text{Gr}_i^{\text{W}^Z} I$ se transforme, en appliquant le résidu $R_Z(2.6.3)$ à gauche de (2.6.4) et le résidu le long de Z à droite de (2.6.4), en l'isomorphisme

$$I_Z i: \bigoplus_{\alpha \in \Delta} i^* \Psi_{Z^i, \alpha}[-i] \xrightarrow{\sim} \Psi_{\mathbb{C}_{(Z^i)^*}}[-i] \quad \text{dans } D^+(Z^i, Y, \mathbb{C})$$

correspondant à la famille $Z^i \rightarrow D$ propre sur D .

COROLLAIRE 2.7. — (i) *Le composé de l'isomorphisme i_∞^* (2.3.2) et de celui induit par $I(2.6.4)$ sur l'hypercohomologie est un isomorphisme*

$$(2.7.1) \quad I_\infty: \bigoplus_{\alpha \in \Delta} (H^p(Y, i^* \Psi_{X, \alpha}(\text{Log } Z), \text{W}^Z) \simeq (H^p(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C}), \text{W}^Z),$$

tel que l'action de la monodromie T sur le sous-espace d'indice α soit de valeur propre égale à $e^{2i\pi\alpha}$.

(ii) *La suite spectrale de $(\Gamma(Y, i^* \Psi_{X, \alpha}(\text{Log } Z)), \text{W}^Z)$ dégénère en E_2 i.e. $E_2 \simeq E_\infty$.*

Preuve. — L'assertion (i) se déduit de [SGA 7], II, 4.6, et (ii) se déduit de (2.3, (iii)).

LE COMPLEXE Ψ MIXTE. LA STRUCTURE MIXTE

2.8. Reprenons les hypothèses et les notations de (2.2). Nous définissons des filtrations W^f , W , W^Y et F sur les colonnes de $\psi_X^*(\text{Log } Z)$ (2.5.) pour $p \leq 0$,

$$(2.8.1) \quad \begin{aligned} W_i^f(\Psi_X^p(\text{Log } Z)) &= W_i^Z \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z)[p] \\ W_i(\Psi_X^p(\text{Log } Z)) &= W_{i+p} \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z)[p] \end{aligned}$$

(resp. de même pour W^Y).

$$F^i(\Psi_X^p(\text{Log } Z)) = F^{i+p} \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z)[p]$$

Le décalage sur W et F permet de rendre d' (2.5) une différentielle filtrée. Les filtrations W^f , W^Y et F sur le complexe simple $\Psi_X(\text{Log } Z)$ sont

$$(2.8.2) \quad \begin{aligned} W_i^f \Psi_X(\text{Log } Z) &= \bigoplus_{p \leq 0} W_i^f \Psi_X^p(\text{Log } Z)[-p] = \bigoplus_{p \leq 0} W_i^Z \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z), \\ W_i \Psi_X(\text{Log } Z) &= \bigoplus_{p \leq 0} W_{i+p} \Psi_X^p(\text{Log } Z)[-p] = \bigoplus_{p \leq 0} W_{i+2p} \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z), \\ W_i^Y \Psi_X(\text{Log } Z) &= \bigoplus_{p \leq 0} W_i^Y \Psi_X^p(\text{Log } Z)[-p] = \bigoplus_{p \leq 0} W_{i+p}^Y \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z), \\ F^i \Psi_X(\text{Log } Z) &= \bigoplus_{p \leq 0} F^i \Psi_X^p(\text{Log } Z)[-p] = \bigoplus_{p \leq 0} F^{i+p} \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z). \end{aligned}$$

2.9. — *Le complexe $\psi_{X,Z}(\mathbb{Q})$. Nous avons construit (1.10.1) un complexe*

$$(j^* \mathbb{Q}_{X-Y-Z}, \tau^Z, \tau, \tau^Y) \quad \text{ans } D^+ F_3(X, \mathbb{Q}).$$

L'élément df/f (1.16.1) définit une classe de cohomologie rationnelle, i.e. correspond à un élément $\eta \in H^1(X^*, \mathbb{Q})$. On peut trouver une résolution de \mathbb{Q} qui permet de relever η en un élément dans $\tau_1^Y \Gamma(X^*, \mathbb{Q})$.

Le cup-produit avec la restriction de η à $X^* - Z^*$, se relève en un morphisme dans $D^+ F_2(X, \mathbb{Q})$ respectant τ^Z

$$(2.9.1) \quad \eta: (\mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}, \tau^Y, \tau) \rightarrow (\mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}[1], \tau^Y[-1], \tau[-1]).$$

Le fait que la suite, respectant τ^2 ,

$$\mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}[-1] \xrightarrow{\eta} \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X^* - Z^*} \xrightarrow{\eta} \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}[1],$$

induit une suite exacte [SGA 7], 2, Exp. 14, démonstration de (4.18.4)]

$$(2.9.2) \quad R^q \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X^* - Z^*} \xrightarrow{\eta} R^{q+1} \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X^* - Z^*} \xrightarrow{\eta} R^{q+2} \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X^* - Z^*},$$

permet de réaliser un complexe double

$$(\Psi_{X, Z}^{\bullet}(\mathbb{Q}), \eta, d) \quad \text{tel que} \quad (\Psi_{X, Z}^{\bullet}(\mathbb{Q}), d) = \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}[p],$$

pour $p \leq 0$.

Nous désignons le complexe simple associé par

$$(2.9.3) \quad \Psi_{X, Z}(\mathbb{Q}) = s \Psi_{X, Z}^{\bullet}(\mathbb{Q}).$$

Nous définissons une filtration W^f (resp. W et W^Y) sur les colonnes

$$(2.9.4) \quad W_i^f \Psi_{X, Z}^{\bullet}(\mathbb{Q}) = \tau_i^Z \mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}[p]$$

(resp. par des formules analogues à (2.8.1)) et sur le complexe simple, W^f et W^Y sont simples alors que W est diagonale comme en (2.8.2).

2.10. Soit $(m.) \in \mathbb{N}^p$, et considérons l'immersion $i: Y((m.)) \rightarrow X$ et la projection $\pi_j: Y_j(m.) \rightarrow X(1.3)$. Nous construisons à partir de (2.8) et de (2.9) les complexes simples suivants :

$$(2.10.1) \quad \begin{aligned} & (\Psi_{Y((m.)), Z}(\mathbb{Q}), W^f, W^Y, W) = i^*(\Psi_{X, Z}(\mathbb{Q}), W^f, W^Y, W), \\ & (\Psi_{Y((m.))}(\text{Log } Z), W^f, W^Y, W) = (\Psi_X(\text{Log } Z), W^f, W^Y, W) \otimes_{\mathcal{O}_{Y((m.))}} \\ & (\Psi_{Y_j(m.), Z}(\mathbb{Q}), W^f, W^Y, W) = \pi_j^*(\Psi_{X, Z}(\mathbb{Q}), W^f, W^Y, W), \\ & (\Psi_{Y_j(m.)}(\text{Log } Z), W^f, W^Y, W) = (\Psi_X(\text{Log } Z), W^f, W^Y, W) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_j(m.)}} \end{aligned}$$

2.11. Le morphisme de restriction

$$(2.11.1) \quad \rho: \Psi_{Y_j(m.)}(\text{Log } Z) \rightarrow \Psi_{Y_j(0)}(\text{Log } Z)$$

est cosimplicial et respecte les filtrations W^f , W^Y et W , et de plus son bigradué $\text{Gr}^W(\text{Gr } W^f \rho)$ est un quasi-isomorphisme.

Dans le but d'obtenir le CHMCF ψ mixte que l'on s'est fixé au départ, les différents complexes pour $(m.)$ variant dans \mathbb{N}^p vont donc donner le même complexe Ψ mixte à quasi-isomorphisme près, c'est pourquoi nous supposons dans la suite $(m.)=0$.

PROPOSITION 2.12. — Avec les notations de (2.10), supposons les composantes Y_i de Y kählériennes, ou algébriques d'intersection Z . Y_i algébriques, et munissons $\Psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z)$ de la filtration F déduite de celle de $\Psi_X(\text{Log } Z)$ (2.8.2), alors la filtration W^Y sur le couple

$$(2.12.1) \quad (\Psi_{Y_{\cdot}(0), Z}(\mathbb{Q}), W^f, W), \quad (\Psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z), W^f, W, F),$$

munie de l'isomorphisme de compatibilité, est une filtration par des \mathbb{Q} -CHMCFs.

(Voir plus loin (2.14) pourquoi on doit se restreindre aux sous-complexes définis par W^Y .)

Preuve. — Pour tous entiers i et k et d'après (I,3.10.1), le décalage sur W et F (2.8.1) permet de déduire de (1.11(iii)) que la colonne d'indice p : $(W_{k+p}^Y \Psi_{Y_i(0)}^p(\text{Log } Z), W^f, W, F)$ est sous-jacente à un CHMCF sur $Y_i(0)$. Le passage à la filtration diagonale en W (2.8.2) rend le complexe simple $W_k^Y \Psi_{Y_i(0)}(\text{Log } Z)$ un CHMCF. La structure cosimpliciale est déduite de celle de $0_{Y_{\cdot}(0)}$.

DÉFINITION 2.13. — Nous appelons Ψ mixte et nous désignons par $\delta_1 \Psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z)$ (ou plus simple $\Psi_{Y((0))}^M(\text{Log } Z)$) l'image directe sur $Y((0))$ du système $\Psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z)$ (2.12.1) par le foncteur δ_1 diagonal en W (les filtrations W^f , W^Y et F étant simples) (I,2.16 et 2.17).

(2.13.1). — Pour tout entier k , le complexe

$$(W_k^Y \delta_1 \Psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z), W^f, W, F)$$

est sous-jacent à un \mathbb{Q} -CHMCF. En effet, l'image directe diagonale en W ,

$$\delta_1 W_k^Y \Psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z) = W_k^Y \delta_1 \Psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z),$$

d'un \mathbb{Q} -CHMCFs est un \mathbb{Q} -CHMCF sur $Y((0))$.

REMARQUE 2.14. — (i) Les filtrations W^Y , W et F sur $\Psi_X(\text{Log } Z)$, $\Psi_{Y_{\cdot}(0)(m.)}(\text{Log } Z)$ et $\Psi_{Y((m.))}(\text{Log } Z)$ ne sont pas finies en chaque degré. Cependant pour tout entier k , elles induisent sur le terme W_k^Y de chacun de ces complexes, des filtrations finies en chaque degré.

En effet le complexe double $W_{k+p}^Y \Psi_X^p(\text{Log } Z)$, sous-jacent à $W_k^Y \Psi_X(\text{Log } Z)$, a un nombre fini de termes non nuls ($-k \leq p \leq n+1-k$).

(ii) Les complexes $\Psi_{Y_i(m.)}^-(\text{Log } Z)$ ont toutes les propriétés des CHMCF sauf que W et F ne sont pas finies en chaque degré [ce qui explique que les énoncés (2.12) et (2.13) soient pour les termes de la filtration W^Y]. En effet un quasi-isomorphisme filtré n'est pas alors nécessairement un quasi-isomorphisme. Cependant chacun des morphismes de restriction dans la suite

$$(2.14.1) \quad \begin{array}{ccc} i^* \psi_X(\text{Log } Z) & \rightarrow & \psi_{Y((m.))}(\text{Log } Z) \rightarrow \delta_1 \psi_{Y_-(m.)}(\text{Log } Z) \\ & & \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ & & \psi_{Y((0))}(\text{Log } Z) \rightarrow \delta_1 \psi_{Y_-(0)}(\text{Log } Z) \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme. En effet il suffit de le vérifier sur les colonnes $\Psi^{p,*}$ des complexes doubles sous-jacentes, ce qui se déduit de (1.11), (1.12), (1.14) et (1.15) selon les cas.

(iii) Le complexe $\psi_{Y((0))}(\text{Log } Z)$ muni de la filtration F déduite de celle de $\psi_X(\text{Log } Z)$ (2.8.2) n'induit pas sur les sous-complexes W^Y une structure de CHMC, en effet

$$\text{Gr}_0^W(\Omega_X^*(\text{Log } Y) \otimes \mathcal{O}_{Y((0))}) \simeq \Omega_X^*/I_{Y((0))} \Omega_X^*(\text{Log } Y)$$

n'est pas un CHC sur $Y((0))$.

VARIANTE 2.15. — Il est possible de munir $\psi_{Y_-(m.)}(\text{Log } Z)$ (resp. $\psi_{Y((m.))}(\text{Log } Z)$ pour tout $m. \in \mathbb{N}^p$) d'une filtration de Hodge F tel que les énoncés (2.12) et (2.13) restent vrais et que le morphisme de restriction ρ (2.10.3) induise un quasi-isomorphisme trifiltré pour W^f , W et F sur les sous-complexes de la filtration W^Y . Soit \bar{F} la filtration quotient de celle de $\psi_X(\text{Log } Z)$ (2.8.2) et soit $\ker \rho$ le complexe acyclique égal au noyau de la restriction ρ (2.10.3) (resp. $\rho : \psi_{Y((m.))}(\text{Log } Z) \rightarrow \psi_{Y((0))}(\text{Log } Z)$), on pose si $\dim X = n+1$,

$$F^j = \bar{F}^j + \ker \rho \quad \text{pour } j \leq n+2 \quad \text{et} \quad F^{n+3} = 0.$$

Pour démontrer par exemple que ρ induit sur les sous-complexes définis par W^Y un quasi-isomorphisme trifiltré pour W^F , W et F , on utilise les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \text{Gr}_i^W(W_b^f/W_a^f) W_k^Y \psi_{Y_h(m.)}(\text{Log } Z), F & \\ \simeq \otimes_{p \leq 0} (\text{Gr}_{i+2p}^W(W_b^f/W_a^f) W_{k+p}^Y (\Omega_X^*(\text{Log } YUZ) \otimes \mathcal{O}_{Y_h(m.)}), F[p]) & \\ \simeq \bigoplus_{\substack{j \in [a, b] \\ j \geq i+p-k, p \leq 0}} \Omega_X^{*j} \cdot Y^{2p+i-j} \cdot Y_h(m.)[-2p-i], F[-p-i] & \end{aligned}$$

et ce dernier complexe est aussi quasi-isomorphe au cas $(m.)=0$.

De plus, le morphisme naturel

$$(2.15.1) \quad \beta: \psi_{Y((m.))}(\text{Log } Z) \rightarrow \delta_1 \psi_{Y_-(m.)}(\text{Log } Z),$$

respecte les filtrations W^f , W^Y , W et F et le gradué de β pour chacune des filtrations W^f , W^Y et F est un quasi-isomorphisme.

LES COMPLEXES $A_{Y((0))}(\text{Log } Z)$ ET $L_{Y((m.))}(\text{Log } Z)$

2.16. Nous construisons maintenant le complexe $A_{Y((0))}(\text{Log } Z)$, et, pour le comparer à $\psi_{Y((m.))}^M(\text{Log } Z)$ sans supposer la fibre centrale Y réduite, nous introduisons des complexes $L_{Y((m.))}(\text{Log } Z)$ de manière analogue et duale à la partie précédente.

Lorsque Z est vide, nous retrouvons le complexe $A_{Y((0))}$ de Steenbrink [St].

Il est utile d'introduire d'abord le complexe double $C_X^{\bullet,q}(\text{Log } Z)$

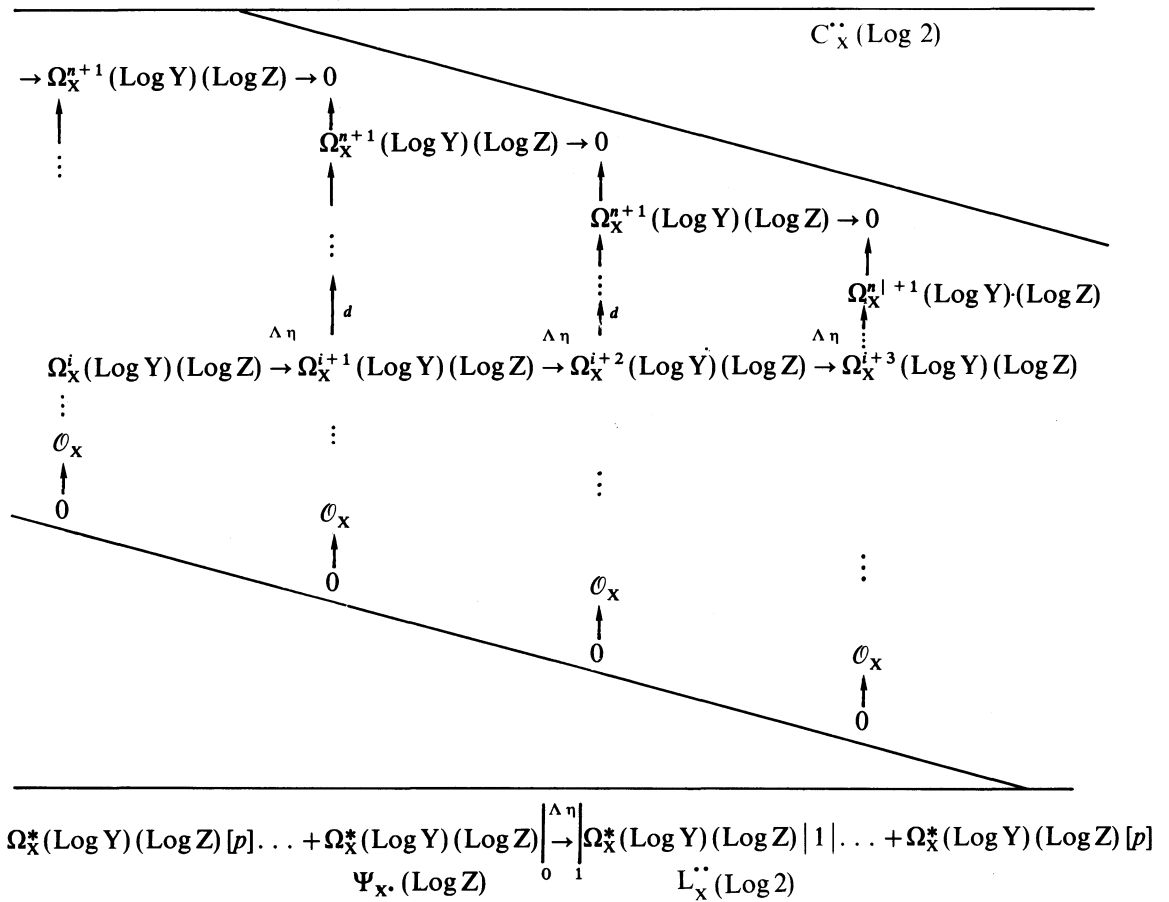
$$(2.16.1) \quad C_X^{p,*}(\text{Log } Z) = \Omega_X^*(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)[p]$$

admettant le complexe logarithmique décalé pour p -ième colonne, et le produit extérieur avec η (1.16.1) pour différentielle

$$d' : C_X^{p,*}(\text{Log } Z) \rightarrow C_X^{p+1,*}(\text{Log } Z).$$

Le complexe $L_X^{\bullet,q}(\text{Log } Z)$ est défini par la formule

$$(2.16.2) \quad L_X^{i,q}(\text{Log } Z) = \sigma_{\geq 0}(C_X^{i,q}(\text{Log } Z)[1]) \text{ i. e. } L_X^{p,q}(\text{Log } Z) \\ = C_X^{p+1,q}(\text{Log } Z) \text{ pour } p \geq 0 \text{ et zéro sinon.}$$



Nous avons

$$(2.16.3) \quad \Psi_X^{i,q}(\text{Log } Z) = \sigma_{\leq 0} C_X^{i,q}(\text{Log } Z).$$

La différentielle $d' : C_X^{0,q}(\text{Log } Z) \rightarrow C_X^{1,q}(\text{Log } Z)$, à un signe près égal à $(-1)^q$, définit un morphisme de complexes doubles

$$(2.16.4) \quad \Lambda \eta : \Psi_X^{\bullet,q}(\text{Log } Z) \rightarrow L_X^{\bullet,q}(\text{Log } Z).$$

Nous définissons des filtrations W^f , W et F sur les colonnes de $C_X^{\bullet}(\text{Log } Z)$ par des formules analogues à (2.8.1), et sur $L_X^{\bullet}(\text{Log } Z)$.

On pose

$$(2.16.5) \quad W_i^f L_X^p \bullet (\text{Log } Z) \text{ (resp. } W_i, F^i)$$

égal à

$$W_i^Z \Omega_X^* \text{Log}(Y \cup Z)[p+1] \text{ (resp. } W_{i+p+1}, F^{i+p+1}).$$

Nous définissons des complexes à coefficients dans \mathbb{Q}

$$(2.16.6) \quad (C_{X,Z}^{\bullet}(\mathbb{Q}), W^f, W^Y, W) \quad \text{et} \quad (L_{X,Z}^{\bullet}(\mathbb{Q}), W^f, W^Y, W),$$

de manière analogue à (2.9).

Les complexes simples $C_X(\text{Log } Z)$ et $L_X(\text{Log } Z)$ [resp. $C_{X,Z}(\mathbb{Q})$ et $L_{X,Z}(\mathbb{Q})$] associés aux complexes doubles respectifs sont munis des filtrations W^Y et W^f simples et de la filtration W diagonale, par exemple

$$(2.16.7) \quad \begin{aligned} W_i^f C_X(\text{Log } Z) &= \bigoplus_p W_i^f C_X^p \bullet (\text{Log } Z)[-p] = \bigoplus_p W_i^Z \Omega_X^*(\text{Log } Y), \\ W_i^Y L_X(\text{Log } Z) &= \bigoplus_{p \geq 0} W_i^Y L_X^p \bullet (\text{Log } Z)[-p] = \bigoplus_{p \geq 0} W_{i+p+1}^Y \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z)[1], \\ W_i L_X(\text{Log } Z) &= \bigoplus_{p \geq 0} W_{i+p} L_W^p \bullet (\text{Log } Z)[-p] = \bigoplus_{p \geq 0} W_{i+2p+1} \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z)[1] \end{aligned}$$

et de même pour $C_{X,Z}(\mathbb{Q})$ et $L_{X,Z}(\mathbb{Q})$. La filtration F est définie par

$$(2.16.8) \quad \begin{aligned} F^i C_X(\text{Log } Z) &= \bigoplus_p F^i C_X^p \bullet (\text{Log } Z)[-p] = \bigoplus_p F^{i+p} \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z), \\ F^i L_X(\text{Log } Z) &= \bigoplus_{p \geq 0} F^i L_X^p \bullet (\text{Log } Z)[-p] = \bigoplus_{p \geq 0} F^{i+p+1} \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \quad [1] \end{aligned}$$

2.17. — Soient $(m.) \in \mathbb{N}^p$, l'immersion $i : Y((m.)) \rightarrow X$ et la projection $\pi_j : Y_j(m.) \rightarrow X(1.3)$.

Nous construisons à partir de (2.16) les complexes munis des filtrations W^f , W^Y et W suivants :

$$\begin{aligned} L_{Y_j(m.)}(\text{Log } Z) &= L_X(\text{Log } Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_j(m.)}, & L_{Y_j(m.), Z}(\mathbb{Q}) &= \pi_j^* L_{X,Z}(\mathbb{Q}), \\ L_{Y((m.))}(\text{Log } Z) &= L_X(\text{Log } Z) \otimes \mathcal{O}_{Y((m.))}, & L_{Y((m.)), Z}(\mathbb{Q}) &= i^* L_{X,Z}(\mathbb{Q}) \end{aligned}$$

et de même pour C au lieu de L .

2.18. On fait des constructions analogues à (2.10) jusqu'à (2.15) sur le complexe L . Munissons le complexe co-simplicial $L_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z)$ de la filtration F de Hodge déduite de (2.16.8). On a alors :

PROPOSITION 2.18. — *Supposons les composantes Y_i de Y kählériennes ou algébriques d'intersection Z . Y_i algébriques, alors pour tout entier k , le couple*

$$(2.18.1) \quad (L_{Y_{\cdot}(0)}(\mathbb{Q})/W_k^Y, W^f, W), \quad (L_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z)/W_k^Y, W^f, W, F),$$

muni de l'isomorphisme de compatibilité, forme un \mathbb{Q} -CHMCFS.

COROLLAIRE 2.19. — Pour tout entier k , l'image directe diagonale en W du CHMCF (2.18.1) i. e. $(\delta_1 L_{Y_{(0)}}(\text{Log } Z)/W_k^Y, W^f, W, F)$ est sous-jacent à un Q-CHMCF sur $Y((0))$.

REMARQUE 2.20. — (i) De même on construit $(L_{Y((0))}(\text{Log } Z)/W_k^Y, W^f, W, F)$ mais on n'obtient pas des CHMCF pour tout k (voir cependant plus loin pour $k = -1$).

(ii) On a une variante pour les complexes $L_{Y_{(m)}}(\text{Log } Z)$ [resp. $L_{Y((m))}(\text{Log } Z)$] de manière analogue à (2.15) de sorte que (2.18) et (2.19) soient vrais pour tout (m) .

(iii) Les complexes $L_{Y_{(m)}}(\text{Log } Z)$ ont toutes les propriétés des CHMCF sauf que W et F ne sont pas finies en chaque degré, ce qui explique aussi que les morphismes de restriction

$$i^* L_X(\text{Log } Z) \rightarrow L_{Y((m))}(\text{Log } Z) \rightarrow L_{Y((0))}(\text{Log } Z),$$

ne sont pas nécessairement des quasi-isomorphismes.

PREUVE DES RÉSULTATS (I,3.4 A 7) DE LA PREMIÈRE PARTIE

Comparaison avec le complexe logarithmique relatif

LEMME 2.20. — (i) Les complexes suivants sont acycliques

$$(2.20.1) \quad \text{Gr}_k^{W^f} \text{Gr}_i^{W^Y} C_{Y_j(0)}^q(\text{Log } Z) \quad (\text{resp. } \text{Gr}_k^{W^f} \text{Gr}_i^{W^Y} C_{Y((0))}^q(\text{Log } Z)).$$

(ii) Nous avons des résolutions à gauche

$$\text{Gr}_k^{W^f} \text{Gr}_i^{W^Y} \psi_{Y_j(0)}^q(\text{Log } Z) \xrightarrow{\approx} \text{Gr}_k^{W^Z} \text{Gr}_i^{W^Y} (\Omega_{X/D}^q(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \otimes_{O_{Y_j(0)}})$$

et de même pour $Y((0))$ au lieu de $Y_j(0)$.

(iii) Nous avons des résolutions à droite

$$\text{Gr}_k^{W^Z} \text{Gr}_i^{W^Y} (\Omega_{X/D}^q(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \otimes_{O_{Y_j(0)}}) \xrightarrow{\approx} \text{Gr}_k^{W^f} \text{Gr}_i^{W^Y} L_{Y_j(0)}^q(\text{Log } Z)$$

et de même pour $Y((0))$ au lieu de $Y_j(0)$.

Preuve. — Le complexe (2.20.1) est isomorphe à

$$\text{Gr}_k^{W^Z} (\text{Gr}_{i-q}^{\delta W^Y}(\text{Log}_{X,Z} \otimes_{O_{Y_j(0)}})) [q] \quad (\text{resp. } \text{Gr}_k^{W^Z} \text{Gr}_{i-q}^{\delta W^Y}(\text{Log}_{X,Z} \otimes_{O_{Y((0))}})) [q],$$

ce qui permet de déduire (i) à partir de (1.20). Nous déduisons (ii) de (1.21, (i)) et (iii) de (1.21, (ii)).

COROLLAIRE 2.21. — (i) Pour tout entier j , la projection naturelle $\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \rightarrow \Omega_{X/D}^*(\text{Log } Y \cup Z)$ induit un quasi-isomorphisme filtré

$$(2.21.1) \quad (\psi_{Y_j(0)}(\text{Log } Z), W^f) \xrightarrow{\approx} (\Omega_{X/D}^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes_{O_{Y_j(0)}}, W^Z)$$

qui est aussi filtré pour W^Y . De même on peut remplacer $Y_j(0)$ par $Y((0))$ dans (2.21.1).

(ii) Pour tout entier j , le morphisme

$$(2.21.2) \quad (\Omega_{X/D}^*(\text{Log } U \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_j(0)}, W^Z) \xrightarrow{\Lambda \eta} (L_{Y_j(0)}(\text{Log } Z), W^Z)$$

est un quasi-isomorphisme filtré, et son gradué pour W^Y est aussi un quasi-isomorphisme. De même, on peut remplacer $Y_j(0)$ par $Y((0))$ dans (2.21.2).

(iii) Le morphisme induit par $\Lambda \eta$ (2.16.4)

$$(2.21.3) \quad \delta_1 \psi_{Y_j(0)}(\text{Log } Z) \xrightarrow{\Lambda \eta} \delta_1 L_{Y_j(0)}(\text{Log } Z)$$

est un quasi-isomorphisme, qui respecte toutes les filtrations.

De plus le bigradué $\text{Gr}^{W^Y} \text{Gr}^{W^Z}(\eta)$ est aussi un quasi-isomorphisme.

Preuve. — (i) Nous déduisons de (2.20, (ii)) des quasi-isomorphismes bifiltrés pour tout entier i

$$(W_i^Y \psi_{Y_j(0)}(\text{Log } Z), W^j, W^Y) \xrightarrow{\sim} (W_i^Y \Omega_{X/D}^*(\text{Log } Y \cup Z), W^Z, W^Y),$$

d'où

$$(\psi_{Y_j(0)}(\text{Log } Z), W^j) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_i (W_i^Y \psi_{Y_j(0)}(\text{Log } Z), W^j) \xrightarrow{\sim} (\Omega_{X/D}^*(\text{Log } Y \cup Z), W^Z)$$

et de même pour $Y((0))$ au lieu de $Y_j(0)$.

(ii) Appliquer (2.20, (iii))-(iii) Appliquer (2.21.1) et (2.21.2).

REMARQUE 2.22. — Le corollaire (2.21) n'est plus satisfait lorsque l'on munit chacune des composantes Y_i de Y d'une multiplicité $m_i + 1$ avec $m_i > 0$ [voir (1.20.3)].

PROPRIÉTÉS DE Gr^{W^Y} DE ψ ET DE L

PROPOSITION 2.23. — Avec les notations de (2.12) à (2.15), supposons X de dimension $n + 1$.

(i) Les complexes

$$\text{Gr}_i^{W^Y} \psi_{Y_j(m_i)}(\text{Log } Z), \quad \text{Gr}_i^{W^Y} \delta_1 \psi_{Y_j(m_i)}(\text{Log } Z) \quad (\text{resp. } \text{Gr}_i^{W^Y} \psi_{Y((m_i))}(\text{Log } Z))$$

sont acycliques pour tout $i > n$.

(ii) Pour tout entier $k \geq n$, l'immersion

$$i : W_k^Y \delta_1 \psi_{Y_j(m_i)}(\text{Log } Z) \rightarrow \delta_1 \psi_{Y_j(m_i)}(\text{Log } Z) \\ (\text{resp. } i : W_k^Y \psi_{Y((m_i))}(\text{Log } Z) \rightarrow \psi_{Y((m_i))}(\text{Log } Z))$$

est un quasi-isomorphisme.

Preuve. — D'après (2.15) il suffit de considérer le cas $(m_i) = 0$.

Le module $\text{Gr}_i^{\text{W}^Y}(\Omega_{X/D}^q(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_j(0)})$ est nul pour $i > n$; on en déduit (i) dans le cas de $Y_{\cdot}(0)$ d'après (2. 21, (i)).

(ii) Le quotient $(\text{W}_i^Y/\text{W}_k^Y) \delta_1 \Psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z)$ est donc acyclique, et en passant à la limite inductive sur i , le quotient $\delta_1 \Psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z)/\text{W}_k^Y \delta_1 \Psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z)$ est aussi acyclique. La même méthode s'applique pour $\Psi_{Y((0))}(\text{Log } Z)$ au lieu de $\Psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z)$.

PROPOSITION 2. 24. — Avec les notations de (2. 19), pour tout $k < 0$, la projection

$$\begin{aligned} \pi_1 : \delta_1 L_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z) &\rightarrow \delta_1 L_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z)/\text{W}_k^Y \\ (\text{resp. } \pi : L_{Y((0))}(\text{Log } Z) &\rightarrow L_{Y((0))}(\text{Log } Z)/\text{W}_k^Y) \end{aligned}$$

est un quasi-isomorphisme.

Preuve. — Dans l'assertion (2. 21, (ii)) le module $\text{Gr}_i^{\text{W}^Y}(\Omega_{X/D}^q(\text{Log } Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y_j(0)})$ est nul pour $i < 0$, et par conséquent, $G_i^{\text{W}^Y} \delta_1 L_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z) \simeq \delta_1 \text{Gr}_i^{\text{W}^Y} L_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z)$ est acyclique pour $i < 0$. Nous en déduisons que les lignes de $\ker \pi_1$, et enfin $\ker \pi_1$ lui-même, sont acycliques. La même méthode s'applique pour $\ker \pi$.

PROPOSITION 2. 25. — Avec les notations de (2. 19), désignons par

$$\begin{aligned} (2. 25. 1) \quad (A_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z), W^f, W, F) &= (L_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z)/\text{W}_{-1}^Y, W^f, W, F) \\ (A_{Y((0))}(\text{Log } Z), W^f, W, F) &= (L_{Y((0))}(\text{Log } Z)/\text{W}_{-1}^Y, W^f, W, F), \end{aligned}$$

les complexes quotients par W_{-1}^Y . Le complexe $A_{Y((0))}(\text{Log } Z)$ est sous-jacent à un CHMCF et le morphisme naturel

$$(2. 25. 2) \quad A_{Y((0))}(\text{Log } Z) \rightarrow \delta_1 A_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z),$$

respecte les filtrations W^f, W^Y, W et F et induit un quasi-isomorphisme bifiltré pour W^f et W^Y .

Preuve. — Vérifions que $A_{Y((0))}(\text{Log } Z)$ est sous-jacent à un CHMCF.

Nous avons une formule analogue à (1. 7. 1)

$$\begin{aligned} (\text{Gr}_m^{\text{W}}(\text{W}_b^Z/\text{W}_a^Z)((\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z) \otimes \mathcal{O}_{Y((m,))})/\text{W}_k^Y), F) \\ \simeq \bigoplus_{\substack{j \in [a, b] \\ j < m-k}} (\text{Gr}_{m-j}^{\text{W}}(\Omega_{Z^j}^*(\text{Log } Z^j \cdot Y) \otimes \mathcal{O}_{Y((m,))})[-j], F[-j]) \end{aligned}$$

c'est un CHC si $m > j$ isomorphe à $\bigoplus (\Omega_{Z^j \cdot Y^{m-j}}^*[-m], F[-m])$, c'est le cas si $k \geq 0$ et précisément $\text{W}_{-1}^Y L_{Y((m,))}(\text{Log } Z)$ induit W_p^Y sur $L_{Y((m,))}^p(\text{Log } Z)$ pour $p \geq 0$.

2. 26. EN RÉSUMÉ, nous avons construit un diagramme de complexes quasi-isomorphes

$$\begin{array}{ccccccc} \text{W}_k^Y \delta_1 \Psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z)_{k \geq n} & \rightarrow & \delta_1 \Psi_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z) & \xrightarrow{\eta} & \delta_1 L_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z) & \rightarrow & \delta_1 A_{Y_{\cdot}(0)}(\text{Log } Z) \\ \uparrow & & \uparrow & \searrow & \nearrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{W}_k^Y \Psi_{Y((0))}(\text{Log } Z)_{k \geq n} & \rightarrow & \Psi_{Y((0))}(\text{Log } Z) & \rightarrow & \Omega_{X/D}^*(\text{Log } Y \cup Z) & \rightarrow & L_{Y((0))}(\text{Log } Z) & \rightarrow & A_{Y((0))}(\text{Log } Z) \end{array}$$

dont trois extrémités sont sous-jacentes à des \mathbb{Q} -CHMCF.

Il existe des variantes avec des multiplicités arbitraires $(m.) \in \mathbb{N}^p$.

On a $A_{Y((m.))}(\text{Log } Z) = A_{Y((0))}(\text{Log } Z)$. Le morphisme η induit un quaqi-isomorphisme sur Gr^{W^Y} , Gr^F et Gr^{W^f} mais pas nécessairement sur Gr^W .

La filtration W sur $A_{Y((0))}(\text{Log } Z)$ coïncide avec celle de ([EII], II,3.1) ainsi que je l'ai vérifié avec Zucker.

PROPOSITION 2.27. — Désignons par $(H^i(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C})^u, W^Z)$ le sous-espace de la cohomologie de $\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*$ sur lequel l'action de la monodromie est unipotente i. e. de valeur propre 1, muni de la filtration induite $\tau^Z = W^Z$ (2.2). Nous avons avec les notations de (2.13)

(i) Un isomorphisme défini par (2.7.1)

$$(2.27.1) \quad (H^i(Y, \psi_{Y((m.))}^M(\text{Log } Z)), W^f) \simeq (H^i(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{C})^u, W^Z).$$

(ii) La suite spectrale de $(\Gamma(Y, \psi_{Y((m.))}^M(\text{Log } Z)), W^f)$ dégénère en E_2 i. e. ${}_w^f E_2 \simeq {}_w^f E_\infty$.

(iii) Les assertions (i) et (ii) sont vraies pour $A_{Y((0))}(\text{Log } Z)$ au lieu de ψ .

Preuve. — D'après (2.14.1) nous avons un quasi-isomorphisme filtré

$$(i^* \psi_X(\text{Log } Z), W^Z) \xrightarrow{\sim} (\delta_1 \psi_{Y_-(m.)}(\text{Log } Z), W^f) = (\psi_{Y((m.))}^M(\text{Log } Z), W^f),$$

alors il suffit d'appliquer (2.7(i)) et (ii) et (2.21.3), (2.24) et (2.25) pour (iii).

COROLLAIRE 2.28. — Le système

$$(W_k^Y \psi_{Y((m.)), Z}^M(\mathbb{Q}), W^f, W), (W_k^Y \psi_{Y((m.))}^M(\text{Log } Z), W^f, W, F), k \geq n,$$

muni de l'isomorphisme de compatibilité, est un \mathbb{Q} -CHMCL sur $Y((m.))$.

De plus, si la monodromie est unipotente, il munit $H^*((\tilde{X} - \tilde{Z})^*, \mathbb{Z})$ d'une SHM (dite limite).

COROLLAIRE 2.29. — Le diagramme de quasi-isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} W_k^Y \psi_{Y((m.))}^M(\text{Log } Z) & \xrightarrow{i} & \delta_1 \psi_{Y_-(m.)}(\text{Log } Z) \xrightarrow{\Lambda^n} \delta_1 L_{Y_-(m.)}(\text{Log } Z) \\ & & \rightarrow \delta_1 A_{Y_-(m.)}(\text{Log } Z) \xleftarrow{\beta} A_{Y((0))}(\text{Log } Z), \end{array}$$

respecte toutes les filtrations et induit des isomorphismes de SHM filtrées par W^f

$$H^*(Y, W_k^Y \psi_{Y((m.))}^M(\text{Log } Z)) \xrightarrow{\sim} H^*(Y, \delta_1 A_{Y_-(m.)}(\text{Log } Z)) \xleftarrow{\sim} H^*(Y, A_{Y((0))}(\text{Log } Z)).$$

3. Compléments au paragraphe 3 de la première partie

Ce paragraphe regroupe une série de compléments fastidieux mais nécessaires pour une démonstration rigoureuse de la première partie, notamment les complexes à coefficients dans \mathbb{Q} , la dualité au niveau des complexes et des remarques sur le cas lisse et propre.

L'ACTION DE LA MONODROMIE

3.1. Nous définissons l'endomorphisme v de $\psi_X(\text{Log } Z)$ (2.8) par le morphisme identique pour $p < 0$ ($v=0$ pour $p=0$)

$$(3.1.1) \quad v : \psi_X^{pq}(\text{Log } Z) \simeq \Omega_X^{p+q}(\text{Log } Y \cup Z) \simeq \psi_X^{p+1, q-1}(\text{Log } Z).$$

Nous en déduisons des endomorphismes v sur les différents complexes considérés dans (2.10), et enfin une action v sur $\psi_{Y((m.))}^M(\text{Log } Z)$.

L'endomorphisme v (3.1.1) décale les filtrations sur $\psi_{Y((m.))}^M(\text{Log } Z)$:

$$(3.1.2) \quad v(W_i^Y) \subset W_{i-1}^Y, v(W_i^f) \subset W_i^f, v(W_i) \subset W_{i-2} \quad \text{et} \quad v(F^i) \subset F^{i-1},$$

ce que nous écrivons

$$(3.1.3) \quad v : (\psi_{Y((m.))}^M(\text{Log } Z), W^f, W^Y[-1], W[-2], F[1]) \\ \rightarrow (\psi_{Y((m.))}^M(\text{Log } Z), W^f, W^Y, W, F)$$

3.2. L'action de la monodromie T sur \tilde{D}^* s'étend à $\tilde{X}^* \simeq X \times_{\mathbb{D}} \tilde{D}^*$. L'action de T sur Ω_X^* (par transport de structure) préserve $\psi_{X, \alpha}(\text{Log } Z)$ via I_α (2.6.1). L'action v (3.1.1) n'est autre que $(1/2i\pi) \text{Log } T$. La cohomologie $H^n(Y, i^* \psi_{X, \alpha}(\text{Log } Z))$ est isomorphe au sous-espace de $H^n(\tilde{X}^*, \mathbb{C})$ sur lequel T agit avec une valeur propre égale à $e^{2in\alpha}$. Sur le sous-espace de cohomologie unipotente, v (3.1.1) induit un endomorphisme $N = (1/2i\pi) \text{Log } T$. Nous en déduisons :

PROPOSITION 3.3. — L'endomorphisme v (3.1.3) induit sur $H^i(Y, W_k^Y \psi_{Y((m.))}^M(\text{Log } Z))$ (2.29) un endomorphisme v vérifiant $v(W_j^f) \subset W_j^f$, $v(W_j) \subset W_{j-2}$ et $v(F^j) \subset F^{j-1}$ et qui se transforme par l'isomorphisme (2.27.1) en l'endomorphisme $N = (1/2i\pi) \text{Log } T$.

COROLLAIRE 3.4. — Considérons la famille $Z^j \rightarrow \mathbb{D}$, et l'endomorphisme $v_j : W_k^Y \psi_{Z^j, Y((m.))}^M \rightarrow W_k^Y \psi_{Z^j, Y((m.))}^M$ induisant $N_j = (1/2i\pi) \text{Log } T$ dans $\text{End}(H^*((\tilde{Z}^j)^*, \mathbb{C})^u)$ (cohomologie unipotente sous T). Le résidu le long de Z transforme $\text{Gr}_j^{W^f}(v)$ en v_j . La cohomologie du complexe $(H^p((\tilde{Z}^j)^*, \mathbb{C}))_{j \in \mathbb{Z}}^u$, Gysin) vérifie

$$(\text{Gr}_i^{W^Z} H^n((\tilde{X} - \tilde{Z})^*, \mathbb{C})^u, \text{Gr}_i^{W^Z} N) \simeq H^{i-n}(H^{2n-i}((\tilde{Z}^*)^*, \mathbb{C})^u, N).$$

3.5. Considérons le complexe $(A_{Y((0))}(\text{Log } Z), W^Y, W^f, W, F)$ (2.25.1) sur lequel la monodromie agit de manière analogue à (3.1), par l'endomorphisme

$$(3.5.1) \quad v : A_{Y((0))}^{p, q}(\text{Log } Z) \rightarrow A_{Y((0))}^{p+1, q-1}(\text{Log } Z),$$

induit par l'identité sur $\Omega_X^{p+q+1}(\text{Log } Y \cup Z)$ pour $p \geq 0$.

Le morphisme $\Lambda \eta : \delta_1 \psi_{Y((m.))}(\text{Log } Z) \rightarrow \delta_1 L_{Y((m.))}(\text{Log } Z)$ dans (2.21.3) commute à l'action de la monodromie v , à homotopie près. Nous ne vérifions pas qu'une telle homotopie peut être définie, à un signe près égal à $(-1)^q$, à partir du morphisme identique

$$\psi_X^{0, q}(\text{Log } Z) = \Omega_X^q(\text{Log } Y)(\text{Log } Z) \simeq L_X^{0, q-1}(\text{Log } Z).$$

On en déduit que l'isomorphisme de SHM (2.29) est compatible avec l'action de la monodromie.

Nous avons coker $v \simeq (\Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z)/W_0^Y)[1]$ et pour toute colonne p

$$(\ker v)^p = W_{p+1}^Y A_{Y((0))}^p(\text{Log } Z) \simeq \text{Gr}_{p+1}^{W^Y} \Omega_X^*(\text{Log } Y \cup Z)[p+1] \simeq \Omega_{Y^{p+1}}^{R_Y}(\text{Log } Z, Y^{p+1})$$

d'où comme en (I, 3.12.2), un quasi-morphisme

$$(j_Y^Z)_* \mathbb{C}_{Y-Y, Z} \xrightarrow{\sim} \text{Ker } v .$$

La suite exacte

$$0 \rightarrow \ker v \rightarrow A_{Y((0))}(\text{Log } Z) \xrightarrow{v} \text{Im } v \rightarrow 0,$$

identifie $\text{Im } v$ au cône sur i , et par conséquent le complexe CHMC : $\text{Im } v$ munit la cohomologie évanescence d'une SHM :

$$H^i(Y, \text{Im } v) \simeq H^i(Y, \Phi_X(j_*^Z \mathbb{C}_{X-Z})).$$

De plus, la suite exacte $0 \rightarrow \text{Im } v \rightarrow A_{Y((0))}(\text{Log } Z) \rightarrow \text{Coker } v \rightarrow 0$ induit une suite exacte longue de SHM

$$\dots \rightarrow H^i(Y, \Phi_X(j_*^Z \mathbb{C}_{X-Z})) \rightarrow H^i(Y, \Psi_X(j_*^Z \mathbb{C}_{X-Z})) \rightarrow H_Y^{i+2}(X-Z, \mathbb{C}) \rightarrow \dots$$

DUALITÉ AU NIVEAU DES COMPLEXES

3.6. Considérons les filtrations W et F sur le complexe dualisant

$$K_X^* \text{ de } X \text{ [EIV] tel que } W_{-1} K_X^* = 0, \quad W_0 K_X^* = K_X^*, \quad F^0 K_X^* = K_X^* \text{ et } F^1 K_X^* = 0.$$

Supposons pour simplifier Z vide. Le dual du complexe $A_{Y((0))}$ (2.25.1) $\underline{\text{Hom}}_X(A_{Y((0))}, K_X^*)$ est muni de filtrations W et F duales.

PROPOSITION 3.6. — *Il existe un isomorphisme de dualité*

$$(3.6.1) \quad \varphi : (A_{Y((0))}, W, F) \rightarrow (\underline{\text{Hom}}_X(A_{Y((0))}, K_X^*)[-2n], W, F[-n])$$

qui commute à l'action de la monodromie v (3.5.1) et qui est donné explicitement par la formule (3.6.3) et (3.8.1). Le morphisme gradué $\text{Gr}^W \varphi$ correspond à des morphismes de dualité sur $Y_i(0)$, et le composé avec la trace : $K_X^* \rightarrow \mathbb{C}$, induit un isomorphisme de dualité (sur les fibres) sur la cohomologie

$$(3.6.2) \quad (H^i(Y, A_{Y((0))}), W, F) \simeq (\text{Hom}(H^{2n-i}(Y, A_{Y((0))}), \mathbb{C}), W[2n], F[-n]).$$

Preuve. — Nous donnons d'abord la formule explicite de φ (3.6.1) dans le cas où les multiplicités n_i des composantes Y_i de Y sont égales à un.

Notons y_i une équation locale d'une composante Y_i de Y , $y_{i_1 \dots i_s}$ le point générique de $Y_{i_1 \dots i_s}$, $Y \cdot Y_{i_1 \dots i_s}$ le DCN trace de Y sur $Y_{i_1 \dots i_s}$, et $\tilde{\omega}$ le relèvement dans

$\Omega_{X, y_{i_1} \dots i_s}^*$ d'une forme ω dans $\Omega_{Y, y_{i_1} \dots i_s}^*$. Considérons le complexe $L_X^i = \sum_{p \geq 0} \Omega_X^{i+1}(\text{Log } Y)_p$ (2. 16) où p désigne l'indice des colonnes, et définissons φ (peut-être à un signe près) par la formule

$$(3.6.3) \quad \sum_{p \geq 0} \Omega_X^{i+1}(\text{Log } Y)_p \otimes \sum_{q \geq 0} \Omega_X^{j+1}(\text{Log } Y)_q \xrightarrow{\varphi} K_X^{-n+p+q}$$

$$\varphi(\omega_p \otimes \omega'_q) = \sum_{i_1 < \dots < i_{p+q+1}} \left[\frac{\widetilde{(\text{Rés}_{Y_{i_1 \dots i_{p+q+1}}} \omega_p)} \wedge \widetilde{(\text{Rés}_{Y_{i_1 \dots i_{p+q+1}}} \omega'_q)} \wedge dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_{p+q+1}}}{y_{i_1} \dots y_{i_{p+q+1}}} \right]$$

pour $j+1 = n+p+q$, et φ égal à zéro sinon. Cette formule est symétrique en ω et ω' .

Le morphisme résidu $\text{Rés}_{Y_{i_1 \dots i_s}} : \Omega_X^*(\text{Log } Y) \rightarrow \Omega_{Y_{i_1 \dots i_s}}^*(\text{Log } Y \cdot Y_{i_1 \dots i_s})[-s]$ est défini et s'annule sur W_{s-1} . Il induit une famille de morphismes

$$(3.6.4) \quad \text{Rés}_{Y_{\cdot}} : \Omega_X^*(\text{Log } Y) \rightarrow \Omega_{Y_{\cdot}}^*(\text{Log } Y \cdot Y_{\cdot}(0))$$

Nous avons construit dans ([E IV], th. II. 2. 1) un morphisme de dualité

$$(3.6.5) \quad \Omega_{X-Y_{\cdot}(0)}^* \rightarrow \underline{\text{Hom}}_X(\Omega_X^*(\text{Log } Y), K_X^{\cdot})[-2(n+1)],$$

Il se généralise en une famille de morphismes

$$(3.6.6) \quad \psi : \Omega_{Y_{\cdot}}^*(\text{Log } Y \cdot Y_{\cdot}(0)) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_X(\Omega_X^*(\text{Log } Y), K_X^{\cdot}),$$

où X est de dimension $n+1$. En écrivant le symbole de Grothendieck dans (3.6.3) sous la forme

$$\left[\frac{\widetilde{(\text{Rés}_{Y_{i_1 \dots i_{p+q+1}}} \omega_p)} \wedge \left(\prod_{i=1}^{p+q+1} y_i \right) \omega'_q}{y_{i_1} \dots y_{i_{p+q+1}}} \right]$$

on fait apparaître $\varphi : \Omega_X^{i+1}(\text{Log } Y)_p \rightarrow \underline{\text{Hom}}_X(\Omega_X^{n+p+q-i+1}(\text{Log } Y)_q, K_X^{-n+p+q})$ induit par φ (3.6.3) comme le composé $\psi \circ \text{Rés}_{Y_{\cdot}(0)}$ (3.6.4) et (3.6.6).

Le morphisme de restriction se généralise en

$$\rho : \Omega_{Y^s}^*(\text{Log } Y \cdot Y^s) \rightarrow \Omega_{Y^{s+1}}^*(\text{Log } Y \cdot Y^{s+1}),$$

qui transforme la section dy_i/y_i de $\Omega_{Y^s}^1(\text{Log } Y \cdot Y^s)$ en zéro dans $\Omega_{Y_i, Y^s}^1(\text{Log } Y_i \cdot Y^s \cdot Y)$, le résidu $\text{Rés}_{Y_{\cdot}(0)}$ (3.6.4) transforme $\Lambda \eta : \Omega_X^*(\text{Log } Y) \rightarrow \Omega_X^*(\text{Log } Y)[1]$ en ρ .

Nous pouvons indiquer maintenant comment les différentielles d_H de $\underline{\text{Hom}}_X(L_X, K_X^\bullet)$ et d_{L_X} se comparent. Considérons la composante

$$\varphi(\omega_p)_q \in \underline{\text{Hom}}_X(\Omega_X^{n+p+q-i+1}(\text{Log } Y)_q, K_X^{p+q-n});$$

nous avons

$$(3.6.7) \quad d_H(\varphi(\omega_p))_q = d\varphi(\omega_p)_q + (\varphi(\omega_p))_{q+1} \circ (\Lambda\eta),$$

(3.6.8)
(3.6.9)

où le terme (3.6.9) est une section de $\underline{\text{Hom}}_X(\Omega_X^{p+q+n-i+1}(\text{Log } Y)_q, K_X^{p+q+1-n})$ et le terme (3.6.8) est une section de

$$\underline{\text{Hom}}_X(\Omega_X^{n+p+q-i}(\text{Log } Y)_q, K_X^{p+q-n}) \oplus \underline{\text{Hom}}_X(\Omega_X^{p+q+n-i+1}(\text{Log } Y)_q, K_X^{p+q+1-n}),$$

où la deuxième composante, égale à $\partial_{K_X} \circ \varphi(\omega_p)_q$ transforme ω'_q section de $\Omega_X^{p+q+n-i+1}(\text{Log } Y)_q$ en

$$\partial_X(\varphi(\omega_p \otimes \omega'_q)) = \theta \pm \widetilde{\text{Rés}}_{Y_i} \omega_p \wedge \partial_X \begin{bmatrix} \pi(y_i) \omega'_q \\ y_i \end{bmatrix},$$

et

$$\theta = \partial_X \begin{bmatrix} \widetilde{\text{Rés}}_{Y_i} \omega_p \\ \dots y_i \dots \end{bmatrix} \wedge (\pi y_i) \omega'_q$$

s'annule avec le terme (3.6.9).

Le terme restant dans (3.6.7) égal à $d\varphi(\omega_p)_q - \theta$ correspond par la dualité (3.6.5) et le résidu (3.6.4) à la différentielle

$$d_{L_X}(\omega_p) = (d\omega)_p + (\omega \wedge \eta)_{p+1}.$$

Pour tout poids a , vérifions que

$$(3.6.10) \quad \text{Gr}_a^W(\varphi) : \text{Gr}_a^W L_X \rightarrow \underline{\text{Hom}}_X(\text{Gr}_{-a}^W L_X, K_X^\bullet)[-2n]$$

est un isomorphisme. Le morphisme φ sur

$$\sum_{p \geq 0} \text{Gr}_{a+2p+1}^{WY} \Omega_X^*(\text{Log } Y) \otimes \sum_{q \geq 0} \text{Gr}_{-a+2q+1}^{WY} \Omega_X^*(\text{Log } Y),$$

s'annule pour $p+q \geq a+2p+1$ (resp. $p+q \geq -a+2q+1$) quand on prend $\text{Rés}_{Y^{1+p+q}} \omega_p$ (resp. $\text{Rés}_{Y^{p+q+1}} \omega'_q$) i. e. $q \geq a+p+1$ (resp. $q \leq a+p-1$), et (3.6.10) se réduit à la dualité pour tout p (avec $Y^0 = X$)

$$\Omega_{Y^{a+2p+1}}^* \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_{Y^{a+2p+1}}(\Omega_{Y^{a+2p+1}}^*, K_{Y^{a+2p+1}}^\bullet)[-2(n-a-2p)].$$

Enfin, le morphisme φ déduit de φ (3.6.3) s'annule sur $W_p^Y \Omega_X^*(\text{Log } Y)_p$ (resp. $W_q^Y \Omega_X^*(\text{Log } Y)_q$) car pour $q \geq 0$, $p+q+1 \geq p+1$, le résidu $\text{Rés}_{Y^{p+q+1}}$ est nul sur W_p^Y (resp. par symétrie). Nous en déduisons (3.6.1).

Action de la monodromie : Soit ω_p une section de $\Omega_X^{i+1}(\text{Log } Y)_p$, et $v\omega_p$ une section de $\Omega_X^{i+1}(\text{Log } Y)_{p+1}$, alors pour toute section ω'_q de $\Omega_X^{n+p+q-i} \text{Log } Y)_q$

$$\varphi(v\omega_p)(\omega'_q) = \varphi(v\omega_p \otimes \omega'_q) = \varphi(\omega_p \otimes v\omega'_q) = (v(\varphi(\omega_p)))(\omega'_q).$$

3.7. Nous avons construit dans [E IV], prop. II 4.1 un morphisme de dualité

$$\mathbb{Q}_{X-Y} \xrightarrow{\varphi^{\mathbb{Q}}} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{j}_* \mathbb{Q}_{X-Y}, \mathbb{Q}_X).$$

Nous admettons que l'on peut en déduire avec des résolutions adéquates un morphisme

$$\varphi^{\mathbb{Q}} : (A_{Y((0))}(\mathbb{Q}), W) \rightarrow ((\underline{\text{Hom}}_X(A_{Y((0))}(\mathbb{Q}), \mathbb{Q}_X), W))$$

compatible avec le morphisme φ (3.6.1).

3.8. Supposons maintenant le DCN Y de multiplicité n_i en Y_i .

Le résidu $\text{Rés}_{Y_{\underline{0}}}$ (3.6.4) transforme $\Lambda \eta$ en

$$\rho(n) : \Omega_{Y^s}^*(\text{Log } Y \cdot Y^s) \rightarrow \Omega_{Y^{s+1}}^*(\text{Log } Y \cdot Y^{s+1}),$$

qui coïncide avec $n_{i_1 \dots i_s} \rho_{i_1 \dots i_s}$ sur la composante à support $Y_{i_1 \dots i_s}$.

Introduisons l'opérateur M sur $\Omega_{Y_{i_1 \dots i_s}}^*(\text{Log } Y \cdot Y_{i_1 \dots i_s})$ tel que

$$M(\omega_{i_1 \dots i_s}) = (n_{i_1} \times \dots \times n_{i_s}) \omega_{i_1 \dots i_s},$$

alors nous avons $M(\rho(n)\omega) = \rho(M\omega)$, et nous définissons φ par la formule

$$(3.8.1) \quad \varphi = \psi \circ M \circ \text{Rés}_{Y_{\underline{0}}}.$$

3.9. Le morphisme $\eta : \psi_X \rightarrow L_X$ (2.16.4) est un quasi-isomorphisme qui respecte les filtrations. Nous en déduisons le morphisme composé

$$(3.9.1) \quad \varphi' : \psi_X \xrightarrow{\eta} L_X \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_X(L_X, K_X^*)[-2n] \xrightarrow{\eta} \underline{\text{Hom}}_X(\psi_X, K_X^*)[-2n].$$

Le morphisme φ' est un quasi-isomorphisme qui respecte les filtrations, bien qu'il ne soit pas un quasi-isomorphisme filtré. Son action est non nulle sur les colonnes de ψ_X de degré zéro, soit

$$(3.9.2)$$

$$\Omega_X^i(\text{Log } Y)_0 \otimes \Omega_X^{n-i}(\text{Log } Y)_0 \rightarrow K_X^{-n}$$

$$\underline{\varphi}'(\omega \otimes \omega') = (\omega \wedge \eta \otimes \omega' \wedge \eta) = \sum_j \left[\begin{array}{c} (\text{Rés}_{Y_j} \omega \wedge \eta) \wedge (\text{Rés}_{Y_j} \omega' \wedge \eta) \wedge dy_j \\ y_j \end{array} \right]$$

Considérons le morphisme de restriction $\rho : \Omega_X^*(\text{Log } Y) \rightarrow \Omega_{Y_j}^*(\text{Log } Y_j, Y)$ qui envoie dy_j/y_j en zéro dans $\Omega_{Y_j}^1(\text{Log } Y_j, Y)$; l'action (3.9.2) s'écrit alors

$$(3.9.3) \quad \underline{\varphi}'(\omega \otimes \omega') = \sum_j \left[\begin{array}{c} \rho(\omega) \wedge \rho(\omega') \wedge dy_j \\ y_j \end{array} \right],$$

COROLLAIRE 3.10. — *Le morphisme φ' (3.9.1) induit un morphisme de dualité*

$$\varphi' : (\Psi_{Y((m,))}^M, W, F) \rightarrow (\underline{\text{Hom}}_X(\Psi_{Y((m,))}^M, K_X^*)[-2n], W, F[-n]),$$

qui ne commute à l'action de la monodromie v qu'à une homotopie près. C'est un quasi-isomorphisme (sans filtrations) qui induit un isomorphisme de dualité

$$(H^i(Y, W_k^Y \Psi_{Y((m,))}^M), W, F) \xrightarrow{\sim} (\underline{\text{Hom}}(H^{2n-i}(Y, W_k^Y \Psi_{Y((m,))}^M), \mathbb{C}), W[2n], F[-n]).$$

3.11. A l'aide d'une rétraction par déformation r de X^* sur une fibre X_t en un point $t \in D^*$, nous pouvons transporter la dualité de Poincaré sur la cohomologie de X_t en une dualité

$$(3.11.1) \quad D : H^i(\tilde{X}^*, \mathbb{Q}) \simeq \text{Hom}(H^{2n-i}(\tilde{X}^*, \mathbb{Q}), \mathbb{Q}).$$

L'action de la monodromie T sur la fibre X_t , commute à l'intersection des cycles sur X_t . Nous en déduisons la formule

$$(3.11.2) \quad D \circ T = {}^t(T^{-1}) \circ D.$$

En particulier, la dualité (3.11.1) correspond à une dualité

$$(3.11.3) \quad D : H_\beta^i \simeq \text{Hom}(H_{1/\beta}^{2n-i}, \mathbb{C}),$$

sur les sous-espaces $H_\beta^j \subset H^j(\tilde{X}^*, \mathbb{C})$ sur lesquels T agit avec une valeur propre β .

En fait, parce que nous n'en aurons pas explicitement besoin, nous admettons qu'il existe des quasi-isomorphismes de dualité

$$(3.11.4) \quad \varphi_\alpha : \Psi_{X, \alpha} \simeq \underline{\text{Hom}}_X(\Psi_{X, 1-\alpha}, K_X^*)[-2n]$$

REMARQUE 3.12. — Les constructions des complexes Ψ_X et L_X présentent un aspect dual.

THÉORIE DE LEFSCHETZ

3.13. Supposons que le morphisme $f : X \rightarrow D$ admet la factorisation suivante :

$$X \hookrightarrow D \times \mathbb{P}^m \rightarrow D,$$

en une immersion fermée dans le produit de D avec l'espace projectif \mathbb{P}^m , et la projection naturelle sur D . On peut trouver un hyperplan $H \subset \mathbb{P}^m$ qui coupe transversalement toutes les intersections $Y_{i_1 \dots i_r}$ des composantes de Y et tel que pour D assez petit H coupe

transversalement toute fibre X_t pour $t \in D^*$. Autrement dit, on peut supposer $X_H = X \cap (D \times H)$ lisse et $X_H \cup Y$ un DCN dans X . Le morphisme f induit un morphisme $f_H : X_H \rightarrow D$ lisse sur D^* , admettant le DCN $Y_H = Y \cap H$ dans X_H pour fibre en 0.

(3.13.1) La classe fondamentale $C \in H^2(\tilde{X}^*, \mathbb{Q})$ de \tilde{X}_H^* dans \tilde{X}^* s'appelle la classe fondamentale d'une section hyperplane. Elle ne dépend pas du choix de H .

3.14. L'immersion fermée $i : X_H \rightarrow X$ ci-dessus induit un morphisme de restriction de SHM (2.29) sur la cohomologie unipotente

$$i^* : H^m(\tilde{X}^*, \mathbb{C})^u \rightarrow H^m(\tilde{X}_H^*, \mathbb{C})^u,$$

injectif pour $m = \dim(X_H) - 1$ et bijectif pour $m < \dim(X_H) - 1$.

Le morphisme image directe (ou de Gysin), dual de Poincaré de i^* sur les fibres

$$i_* : H^m(\tilde{X}_H^*, \mathbb{C})^u \rightarrow H^{m+2}(\tilde{X}^*, \mathbb{C})^u$$

est de type (1, 1). Le cup-produit avec C (3.13.1) induit un morphisme de SHM de type (1, 1) égal à $(1/2 i \pi) (i_* \circ i^*)$. Le cup-produit avec C^q induit un isomorphisme de SHM de type (q, q) .

La décomposition en cohomologie primitive et unipotente

$$P^{n-q}(X^*, \mathbb{C})^u = \ker C^{q+1} \subset H^{n-q}(\tilde{X}^*, \mathbb{C})^u, \quad q \geq 0$$

est compatible avec la SHM limite.

(3.15) Considérons les CHMC $A_{Y((0))}$ et $A_{Y_H((0))}$ sur Y_H associé au morphisme f_H . Il est facile de définir $i^* : i^* A_{Y((0))} \rightarrow A_{Y_H((0))}$ dans $D^+ F_2(Y_H, \mathbb{C})$ à partir de $i^* : i^* \Omega_X^*(\text{Log } Y) \rightarrow \Omega_{X_H}^*(\text{Log } Y_H)$. Pour construire i_* nous considérons le diagramme de morphismes bifiltrés.

$$(3.15.1) \quad \begin{array}{ccc} & \varphi_1 & \\ & \swarrow \tilde{\leftarrow} & \\ (A_{Y_H((0))}, W, F) & & (A_{Y((0))}(\text{Log } X_H)/A_{Y((0))}[1], W[-1], F[1]) \\ & \varphi_2 \uparrow s & \\ & & (C_M(A_{Y((0))} \rightarrow A_{Y((0))}(\text{Log } X_H))[1], W[-1], F[1]) \xrightarrow{\varphi_3} (A_{Y((0))}[2], W, F[1]) \end{array}$$

où $\varphi_1 = (2i\pi)^{-1} \text{Rés}_{X_H}$ est un résidu le long de X_H , d'inverse défini localement par le produit extérieur avec dh/h pour une équation h de X_H , φ_2 est induit par la projection $A_{Y((0))}(\text{Log } X_H) \rightarrow A_{Y((0))}(\text{Log } X_H)/A_{Y((0))}$ et φ_3 est induit par la projection sur le premier facteur $A_{Y((0))}[1] \oplus A_{Y((0))}(\text{Log } X_H) \rightarrow A_{Y((0))}[1]$. Le diagramme (3.15.1) induit au niveau de la cohomologie le morphisme de Gysin i_* égal au morphisme composé

$$H^i(Y_H, A_{Y_H((0))}) \simeq H_{Y_H}^{i+2}(Y, A_{Y((0))}) \rightarrow H^{i+2}(Y, A_{Y((0))}).$$

Sur les termes de la suite spectrale ${}_w E_1(A_{Y_H((0))})$ et celle de $A_{Y((0))}$, le morphisme i^* correspond à des morphismes de restriction du type

$$(3.15.2) \quad i^* : H^i(Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_p}, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_p} \cap H, \mathbb{Q})$$

et le morphisme i_* à des morphismes de Gysin du type

$$(3.15.3) \quad i_* : H^i(Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_p} \cap H, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{i+2}(Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_p}, \mathbb{Q}).$$

Pour établir la formule $\cup C = 1/2 i \pi i_* \circ i^*$, on remarque dans le diagramme (3.15.1) que le morphisme ϕ_1 est l'inverse du cup-produit avec $(1/2 i \pi) C$, car si h désigne une équation locale de X_H dans X , la classe fondamentale C dans $H_{X_H}^2(X, \mathbb{C})$ est associée classiquement à la section dh/h de $\Omega_X^*(\text{Log } X_H)/\Omega_X^*$.

3.16. La théorie de Lefschetz sur \tilde{X}^* se déduit de celle sur une fibre générale. En effet, soit $u \in \tilde{D}^*$ tel que $t = \pi(u)$. La fibre \tilde{X}_u^* est isomorphe à X_t , et l'immersion $i_u : X_t \rightarrow \tilde{X}^*$ est une équivalence d'homotopie. L'isomorphisme $i_u^* = H^m(\tilde{X}^*, \mathbb{Q}) \simeq H^m(X_t, \mathbb{Q})$ commute au cup-produit, et la classe fondamentale C de \tilde{X}_H^* dans \tilde{X}^* induit la classe fondamentale $C_t = i_u^*(C)$ de $X_t \cap H$ dans X_t .

(i) La classe C agit sur les termes de la suite spectrale ${}_w E_r^{pq}$ par la formule $(1/2 i \pi) i_* \circ i^*$, correspondant au cup-produit avec la restriction de C à $Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_p}$ (3.15.2) et (3.15.3) sur E_1^{pq} , et au cup-produit avec C sur les termes E_2^{pq} .

(ii) Lorsque la variété X est kählérienne, nous disposons d'une forme fermée de type $(1, 1)$, qui définit une classe $C \in H^2(\tilde{X}^*, \mathbb{R})$. Les assertions de (3.14) sont alors vraies sans supposer f projectif.

REMARQUES SUR LA PREUVE DE (I,3.22.1)

3.17. L'endomorphisme $N = 1/2 i \pi \text{Log } T$ sur la cohomologie unipotente de \tilde{X}^* commute au cup-produit avec C , et l'assertion (I,3.22.1) est alors équivalente à

$$(3.17.1) \quad \text{Gr}^W(N^r) : \text{Gr}_{m+r}^W, \mathbf{P}^m(\tilde{X}^*, \mathbb{C}) \simeq \text{Gr}_{m-r}^W, \mathbf{P}^m(\tilde{X}^*, \mathbb{C})(-n)$$

et il suffit de la prouver pour $m = n$.

LEMME 3.17. — Avec les notations de (3.21.1), les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Le morphisme v_2^r sur $E_2^{-r, q+r}$ est injectif.

(ii) Considérons le diagramme

$$(3.17.2) \quad \begin{array}{ccccc} H^{q-r}(Y^r, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\rho(n)} & H^{q-r}(Y^{r+1}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{G} & H^{q-r+2}(Y^r, \mathbb{C}) \\ & & \uparrow G & & \\ & & H^{q-r-2}(Y^{r+2}, \mathbb{C}) & & \end{array}$$

pour tout élément η de $H^{q-r}(Y^r, \mathbb{C})$ tel que $(G \circ \rho(n)) \eta = 0$, il existe alors $\alpha \in H^{q-r-2}(Y^{r+2}, \mathbb{C})$ tel que $G(\alpha) = \rho(n) \eta$.

(iii) Dualement le morphisme $v_2^r : E_2^{-r, 2n-q+r} \rightarrow E_2^{r, 2n-q+r}$ est surjectif.

(iv) Considérons le diagramme

$$(3.17.3) \quad \begin{array}{ccccc} H^{2n-q-r}(Y^r, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\rho(n)} & H^{2n-q-r}(Y^{r+1}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{G} & H^{2n-q-r+2}(Y^r, \mathbb{C}) \\ & & \downarrow \rho(n) & & \\ & & H^{2n-q-r}(Y^{r+2}, \mathbb{C}) & & \end{array}$$

pour tout élément $\eta \in H^{2n-q-r}(Y^{r+1}, \mathbb{C})$ tel que $\rho(n.)\eta=0$, il existe alors $\alpha \in H^{2n-q-r}(Y^r, \mathbb{C})$ tel que $(G \circ \rho(n.))(\alpha) = G(\eta)$.

REMARQUE 3. 18. — (i) Un élément ξ dans ${}_wE_1^{p,q}A_{Y((0))}$ est un cycle primitif si $d_1 \xi = 0$ et $C \cup \xi = 0$ via l'action de C (3. 16, (i)). Alors tout élément $\xi \in Gr_{n+r}^W P^n(\tilde{X}^*, \mathbb{C})$ peut être représenté par un cycle primitif ξ . La démonstration de Steenbrink [St] consiste à démontrer (3. 17. 1) en se ramenant d'une part à (3. 17. 2) et d'autre part à supposer le cycle ξ primitif. Cependant on a besoin de faire ces deux réductions à la fois, et ceci ne nous semble pas évident. L'équivalence avec le théorème du cycle local invariant suggère de comparer avec le théorème (6. 6) dans [S].

(ii) Clemens a donné un contre-exemple à (I,3.22.1) où X n'est pas globalement kählerienne [C].

DCN OUVERTS : ψ À COEFFICIENTS DANS \mathbb{Q}

Pour simplifier la partie I, nous avons reporté jusqu'ici la construction dans (I,3.25) à coefficients dans \mathbb{Q} .

3. 19. Avec les notations de (I,3.25) et sous l'hypothèse de (I,3.24), considérons le diagramme

$$(3. 19. 1) \quad \begin{array}{ccccccc} \tilde{X}^* - \tilde{Z}^* & \xrightarrow{j^Z} & \tilde{X}^* & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{X}^* & \rightarrow & \tilde{D}^* \\ \downarrow & & \downarrow j^Y & & \downarrow j^Y & & \downarrow \\ X_- - Z_- & \xrightarrow{j^Z} & X_- & \xrightarrow{\pi} & X & \rightarrow & D \end{array}$$

où $\tilde{X}^* = X \times_D \tilde{D}^*$, $\tilde{Z}^* = Z \times_D \tilde{D}^*$, et soient $j^Y : X^* = X \times_D D^* \rightarrow X$, $j^Z : X^* - Z^* \rightarrow X^*$, $i : Y_- \rightarrow X_-$ et $p : \tilde{X}^* \rightarrow X^*$. Le complexe

$$(3. 19. 2) \quad (C.(\mathbb{Q}), \tau) = (\tilde{j}^Y)_* ((\tilde{j}^Z)_* \mathbb{Q}_{\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*}, \tau)$$

est cosimplicial sur X_- . Son image directe diagonale est le complexe

$$(3. 19. 3) \quad (C(\mathbb{Q}), W^f) = \delta_1(C.(\mathbb{Q}), \tau),$$

muni de la filtration $W^f = \delta(\tau, L)$ tel que $W_i^f = \bigoplus_p \tau_{i+p} C_p(\mathbb{Q})$.

Le complexe $(\tilde{\pi}^*)_* \mathbb{Q}_{\tilde{X}^*}$ est une résolution de Mayer-Vietoris de $\mathbb{Q}_{\tilde{X}^*}$.

Nous en déduisons un isomorphisme

$$(3. 19. 4) \quad \Psi(j_*^Z \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}) \simeq i^* \tilde{j}_* \mathbb{Q}_{\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*} \simeq i^* C(\mathbb{Q}) \quad (\tilde{j}_* = \tilde{j}_*^Y \circ \tilde{j}_*^Z),$$

qui permet de munir $\Psi(j_*^Z \mathbb{Q}_{X^* - Z^*})$ d'une filtration W^f , qui induit à son tour une filtration W^f sur $H^*(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{Q})$ (resp. à coefficients dans \mathbb{C}).

PROPOSITION 3.20. — Avec les notations de (3.19) et (2.6), soit pour $\alpha \in \Delta$

$$(\psi_{X, \alpha}(\text{Log } Z), W^f) = \delta_1(\psi_{X, \alpha}(\text{Log } Z), W^{Z_2}) \quad \text{tel que} \quad W_i^f = \bigoplus_p W_{i+p}^{Z_p}.$$

(i) L'isomorphisme I (2.6.4) se généralise en un isomorphisme dans $D^+ F(Y, \mathbb{C})$

$$(3.20.1) \quad I: \bigoplus_{\alpha \in \Delta} i^*(\psi_{X, \alpha}(\text{Log } Z), W^f) \simeq (\Psi(j_*^{Z^*} C_{X^* - Z^*}), W^f)$$

(resp. $\Delta \cap \mathbb{Q}$ au lieu de Δ).

(ii) Soient un point $u \in \tilde{D}^*$, $\pi(u) = t \in D^*$ et $i_t: (X_t - Z_t) \simeq (\tilde{X}_u^* - \tilde{Z}_u^*)$. Nous avons des isomorphismes

$$(3.20.2) \quad (H^p(X_t - Z_t, \mathbb{Q}), W) \xleftarrow{i_t^*} (H^p(\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*, \mathbb{Q}), W^f) \xrightarrow{i_\infty^*} H^p(Y, (\Psi(j_*^{Z^*} \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}), W^f)).$$

(iii) La suite spectrale de $\Gamma(Y, (\Psi(j_*^{Z^*} \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}), W^f))$ dégénère en ${}_{W^f}E_2$ i.e. ${}_{W^f}E_2 \simeq {}_{W^f}E_\infty$.

Preuve. — (i) Nous déduisons (3.20.1) de (2.6.4) en composant les isomorphismes

$$\begin{aligned} \Psi(j_*^{Z^*} C_{X^* - Z^*}) &\simeq i^* \tilde{j}^Y (p^* j_*^{Z^*} C_{X^* - Z^*}) \simeq i^* \tilde{j}^Y \tilde{j}_*^{Z^*} C_{\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*} \\ &\simeq \pi_* i^* (\tilde{j}^Y)^* (\tilde{j}^{Z^*})^* C_{\tilde{X}^* - \tilde{Z}^*} \simeq \bigoplus_{\alpha \in \Delta} i^* \psi_{X, \alpha}(\text{Log } Z). \end{aligned}$$

Par construction même, les filtrations W^f se correspondent.

(ii) L'assertion se déduit de (2.3, (ii)), en remarquant que le poids W sur $H^p(X_t - Z_t, \mathbb{Q})$ se déduit de la filtration diagonale

$$(\pi_* j_*^{Z^*} \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}, W)_t \simeq \delta_1(j_*^{(Z^*)} \mathbb{Q}_{(X_t)_2 - (Z_t)_2}, \tau) \simeq (\pi_* j_*^{(Z^*)} \mathbb{Q}_{(X_t)_2 - (Z_t)_2}, \delta(\tau, L)).$$

(iii) Nous avons d'après (2.3)

$$(3.20.3) \quad \Gamma(Y, (\Psi(j_*^{Z^*} \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}), W^f)) \simeq \Gamma(Y, \delta_1(\Psi(j_*^{Z^*} \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}), \tau)) \\ \simeq \Gamma(X_t, \delta_1(j_*^{(Z^*)} \mathbb{Q}_{(X_t)_2 - (Z_t)_2}, \tau)).$$

La suite spectrale du dernier terme est celle du CHM associé à l'espace X_t par rapport à la filtration par le poids; elle dégénère par conséquent en ${}_{W^f}E_2 (\simeq {}_{W^f}E_\infty)$.

Nous déduisons de (3.3) et (2.7) le corollaire de (3.20) suivant :

COROLLAIRE 3.21. — (i) La suite spectrale de $\Gamma(Y, (\psi_{X, Y(m, \cdot)}^M(\text{Log } Z), W^f))$ dégénère en E_2 .

(ii) Désignons par $H^i((\tilde{X} - \tilde{Z})^*, \mathbb{C})^u$ la cohomologie unipotente sous l'action de T . On a

$$(3.21.1) \quad H^i(Y, (\psi_{X, Y(m, \cdot)}^M(\text{Log } Z), W^f)) \\ \simeq H^i(Y, (\Psi(j_*^{Z^*} C_{X^* - Z^*}), W^f))^u \simeq (H^i((\tilde{X} - \tilde{Z})^*, \mathbb{C})^u, W^f).$$

(iii) L'endomorphisme v sur le terme de gauche de (3.21.1) vérifie

$$v(W_j^f) \subset W_j^f, v(W_j) \subset W_{j-2} \quad \text{et} \quad v(F^j) \subset F^{j-1}$$

et se transforme par l'isomorphisme (3.21.1) en l'endomorphisme $N = (1/2i\pi) \text{Log } T$.

COROLLAIRE 3.22. — Le système

$$(W_k^Y \psi_{X \cdot Y((m.)), Z}^M(\mathbb{Q}), W^f, W), (W_k^Y \psi_{X \cdot Y((m.))}^M(\text{Log } Z), W^f, W, F), \quad k \geq n,$$

muni de l'isomorphisme de compatibilité est un \mathbb{Q} -CHMCL sur $X \cdot Y((m.))$.

De plus, si la monodromie est unipotente, il munit $H^*(\tilde{X} - \tilde{Z})^*, \mathbb{C}$ d'une SHM (dite limite).

3.23. CAS DE LA COHOMOLOGIE À SUPPORT COMPACT. — Sous l'hypothèse (I,3.24.1), et avec les notations de (I,3.25.2), nous savons construire, pour tout indice i , un CHMCL

$$(\psi_{Z_i \cdot Y_i(m.)}^M, W^f, W, F) \quad [\text{resp. } (\psi_{Y_i(m.)}^M, W^f, W, F)]$$

associé à la famille propre (non lisse) $Z_i \rightarrow D$ (resp. $X_i \rightarrow D$). Il existe un morphisme de restriction naturel $\rho_i : \psi_{Y_i(m.)}^M \rightarrow \psi_{Z_i \cdot Y_i(m.)}^M$ respectant les filtrations. Nous désignons par

$$(3.23.1) \quad (\psi_{(X_i - Z_i) \cdot Y(m.)}^M, W^f, W, F) \\ = (C_M(\psi_{Y_i(m.)}^M \xrightarrow{\rho_i} \psi_{Z_i \cdot Y_i(m.)}^M) [-1], W^f[-1], W[-1], F)$$

le cône mixte en W^f et W , puis décalé de -1 , aussi bien que W^f et W .

De même avec les notations de (3.20), nous construisons pour tout $\alpha \in D$

$$(3.23.2) \quad (\psi_{X_i - Z_i, \alpha}^M, W^f) = (C_M(\psi_{X_i, \alpha}^M \xrightarrow{\rho_i} \psi_{Z_i, \alpha}^M) [-1], W^f[-1])$$

le cône mixte en W^f , puis décalé de -1 , aussi bien que W^f .

Le système $(\psi_{(X_i - Z_i) \cdot Y(m.)}^M, W^f, W, F)$ [resp. $(\psi_{X_i - Z_i, \alpha}^M, W^f)$] est cosimplicial sur X_i . Nous désignons par

$$(3.23.3) \quad (\psi_{(X-Z) \cdot Y(m.)}^M, W^f, W, F) = \delta_2(\psi_{(X_i - Z_i) \cdot Y(m.)}^M, W^f, W, F),$$

l'image directe diagonale en W^f et W (F et W^Y sont toujours simples); respectivement pour tout $\alpha \in \Delta$

$$(3.23.4) \quad (\psi_{X-Z, \alpha}^M, W^f) = \delta_1(\psi_{X_i - Z_i, \alpha}^M, W^f),$$

l'image directe diagonale en W^f .

3.24. Soit $j_i^{Z^*} \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}$ l'extension par zéro sur X^* de $\mathbb{Q}_{X^* - Z^*}$. Nous déduisons de la suite exacte $0 \rightarrow j_i^{Z^*} \mathbb{Q}_{X^* - Z^*} \rightarrow \mathbb{Q}_{X^*} \rightarrow \mathbb{Q}_{Z^* \cdot X^*} \rightarrow 0$ un isomorphisme

$$j_i^{Z^*} \mathbb{Q}_{X^* - Z^*} \simeq C(\mathbb{Q}_{X^*} \rightarrow \mathbb{Q}_{Z^* \cdot X^*}) [-1]$$

induisant à son tour

$$(3.24.1) \quad \Psi(j_i^{Z^*} \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}) \simeq C(\Psi \mathbb{Q}_{X^*} \rightarrow \Psi \mathbb{Q}_{Z^* - X^*}).$$

Les constructions dans (3.19) permettent de munir $\Psi(\mathbb{Q}_{Z_i^*})$ sur $Y_i \cdot Z_i$ et $\Psi(\mathbb{Q}_{X_i^*})$ sur Y_i de filtrations W^f . Nous désignons par

$$(\Psi_{X_i - Z_i}(\mathbb{Q}), W^f) = (C_M(\Psi \mathbb{Q}_{X_i^*} \rightarrow \Psi \mathbb{Q}_{Z_i^*})[-1], W^f[-1]),$$

le cône mixte en W^f , puis décalé de -1 , aussi bien que W^f .

Le système $(\Psi_{X_i - Z_i}(\mathbb{Q}), W^f)$ est cosimplicial sur $X_i - Z_i$, et son image directe diagonale $(\Psi_{X-Z}(\mathbb{Q}), W^f)$ est isomorphe aux termes de (3.24.1) et permet de les munir d'une filtration W^f , induisant à son tour une filtration W^f sur $H^*(\tilde{X}^*, \tilde{Z}^* \cdot \tilde{X}^*, \mathbb{Q})$.

PROPOSITION 3.25. — Avec les notations de (3.20) et (3.24.4)

(i) L'isomorphisme I (3.20.1) se généralise en un isomorphisme

$$(3.25.1) \quad I: \bigoplus_{\alpha \in \Delta} (\Psi_{X-Z, \alpha}, W^f) \simeq (\Psi(j_i^{Z^*} \mathbb{C}_{X^* - Z^*}), W^f) \quad (\text{resp. } \Delta \cap \mathbb{Q} \text{ au lieu de } \Delta).$$

(ii) Soient un point $u \in \tilde{D}^*$, $t = \pi(u) \in D^*$ et $i_t: (X_t - Z_t) \simeq (\tilde{X}_u^* - \tilde{Z}_u^*)$. Nous avons des isomorphismes

$$(3.25.2) \quad (H_c^p((X_t - Z_t), \mathbb{Q}), W) \underset{i_t}{\overset{\sim}{\leftarrow}} H^p(\tilde{X}^*, \tilde{Z}^* \cdot \tilde{X}^*, \mathbb{Q}), W^f) \\ \simeq H^p(Y, \Psi(j_i^{Z^*} \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}), W^f).$$

(iii) La suite spectrale de $\Gamma(Y, (\Psi(j_i^{Z^*} \mathbb{Q}_{X^* - Z^*}), W^f))$ dégénère en ${}_{W^f}E_2$ i. e. $E_2 \simeq E_\infty$.

La preuve est analogue à celle de (3.20).

COROLLAIRE 3.26. — Désignons par $(H^i(\tilde{X}^*, \tilde{Z}^* \cdot \tilde{X}^*, \mathbb{C}), W^f)^\mu$ la cohomologie unipotente sous l'action de T

(i) On a

$$(3.26.1) \quad H^i(Y, \Psi_{(X-Z) \cdot Y((m,))}^M, W^f) \simeq H^i(Y, (\Psi j_i^{Z^*} \mathbb{C}_{X^* - Z^*}, W^f))^\mu \\ \simeq (H^i(\tilde{X}^*, \tilde{Z}^* \cdot \tilde{X}^*, \mathbb{C}), W^f)^\mu.$$

(ii) La suite spectrale de $\Gamma(Y, (\Psi_{(X-Z) \cdot Y((m,))}^M, W^f))$ dégénère en E_2 ($\simeq E_\infty$).

(iii) L'endomorphisme v induit un endomorphisme sur $\Psi_{(X-Z) \cdot Y((m,))}^M$ qui induit à son tour un endomorphisme v sur le terme de gauche de (3.26.1) vérifiant

$$v(W_j^f) \subset W_j^f, v(W_j) \subset W_{j-2} \quad \text{et} \quad v(F^j) \subset F^{j-1}$$

et se transforme par l'isomorphisme (3.26.1) en l'endomorphisme $N = (1/2 i \pi) \text{Log } T$.

COROLLAIRE 3.27. — Si la monodromie T sur $H^*(\tilde{X}^*, \tilde{Z}^*, \tilde{X}^*, \mathbb{C})$ est unipotente, et avec les notations de (3.24.3), le système, pour $k \geq \dim X \cdot Y$

$$\Psi j_i^* Z_{X^* - Z^*}, (W_k^Y \Psi_{(X-Z) \cdot Y}^M(\mathbb{Q}), W^f, W), (W_k^Y \Psi_{(X-Z) \cdot Y}^M, W^f, W, F)$$

est un CHMCL sur Y .

PROPOSITION 3.28. — Avec les notations de (I,3.30), et sous les mêmes hypothèses, le CHMCL $(W_k^Y \Psi_{(X-Z) \cdot Y}^M, W^f, W, F)$ (3.27) munit la cohomologie $H^n(\tilde{X}^*, \tilde{Z}^*, \mathbb{Z})$ d'une SHM de filtration par le poids W , et de Hodge F ; et de plus induit une filtration W^f (décalée de n) définie sur \mathbb{Q} , tel que les assertions (i), (ii) et (I,1.10.1) soient vérifiées.

Preuve. — Vérifions (iii). Désignons par $\pi_j : (Z_j)_\bullet \rightarrow Z_j$ le schéma simplicial strict associé au DCN Z_j dans X_j et complété en degré -1 par \tilde{X}_j . Nous avons $X_j \cdot Z_j = (Z_j)_\bullet$. Le CHMCL

$$\begin{aligned} (\mathrm{Gr}_{-p}^{W^f} W_k^Y \Psi_{(X-Z) \cdot Y}^M, W, F) \simeq \bigoplus_j (\mathrm{Gr}_{j-p}^W W_k^Y \Psi_{(X_j - Z_j) \cdot Y}^M[-j], W[-j], F) \\ \bigoplus_j \pi_* W_k^Y \Psi_{(Z_j)_{p-j-1} \cdot Y}^M[-p], W[-p], F), \end{aligned}$$

munit la suite spectrale $E_1(\Gamma(Y, W_k^Y \Psi_{(X-Z) \cdot Y}^M, W^f))$ d'une SMH induite par W et F .

Nous avons

$$(H^i(((\tilde{Z}_j)_{p-j-1}^*, \mathbb{C}), W, F) \simeq H^i((Z_j)_{p-j-1} \cdot Y, W_k^Y \Psi_{X_j \cdot Z_{p-j-1} \cdot Y}^M, W, F),$$

d'où

$$({}_W E_1^{p,q}, W, F) \simeq \bigoplus_j (H^q((\tilde{Z}_j)_{p-j-1}^*, \mathbb{C}), W, F).$$

La différentielle d_1 du complexe ${}_W E_1^i$ de SHM est associée, d'après (I,2.20) au complexe double à coefficients dans \mathbb{C}

$$\begin{array}{ccccc} H^i((\tilde{Z}_j)_{n-1-j-2}^*) & \xrightarrow{\rho} & H^i((\tilde{Z}_j)_{n-i-j-1}^*) & \xrightarrow{\rho} & H^i((\tilde{Z}_j)_{n-i-j}^*) \\ & & \rho \uparrow & & \rho \uparrow \\ & & H^i((\tilde{Z}_{j-1})_{n-i-j-1}^*) & \xrightarrow{\rho} & H^i((\tilde{Z}_{j-1})_{n-i-j}^*) \end{array}$$

L'endomorphisme v induit un endomorphisme v_p sur le complexe ${}_W E_1^i$ qui correspond à l'action $N_p = (1/2i\pi) \mathrm{Log} T$ sur ${}_W E_1^{p,i} = \bigoplus_j H^i((\tilde{Z}_j)_{p-j-1}^*, \mathbb{C})$, d'où, pour tout entier b , un isomorphisme de complexes indésés par $p \in \mathbb{Z}$

$$(\mathrm{Gr}_{i+b}^W ({}_W E_1^{p,i})_{p \in \mathbb{Z}, d_1}) \simeq (\mathrm{Gr}_{i-b}^W ({}_W E_1^{p,i})_{p \in \mathbb{Z}, d_1})^{v_p^b}.$$

Nous en déduisons (iii) comme dans (I,3.30).

3.29. DUALITÉ. — Nous construisons de manière analogue à $\Psi_{(X-Z).Y}^M$ un CHMCL : $A_{(X-Z).Y((0))}$. Supposons X lisse et $Y \cup Z$ un DCN dans X . L'image directe, sur l'espace simplicial strict $\pi : \underline{Z}_\bullet \rightarrow Z$ tel $Z^0 = X$ et $Z^i = Z_{i-1}$, diagonale en W^f et $W : \delta_2(A_{Y((0)).Z}, W^f, W, F)$ permet de calculer le CHMCL : $A_{(X-Z).Y((0))}$. L'isomorphisme de dualité (3.6.1) se généralise en un isomorphisme

$$(3.29.1) \quad \varphi : (A_{(X-Z).Y((0))}, W^f, W, F) \rightarrow (\text{Hom}_X(A_{Y((0))}(\text{Log } Z), K_X^i[-2n], W^f, W, F[-n])$$

défini par l'accouplement

$$(3.29.2) \quad \varphi : \delta_2 A_{Y(0).Z} \otimes A_{Y(0)}(\text{Log } Z) \rightarrow K_X^i[-2n]$$

$$\varphi : \sum_{j \geq 0, p \geq 0} \Omega_Z^{a+j+1}(\text{Log } Z^j.Y)_p \otimes \sum_{q \geq 0} \Omega_X^{b+1}(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)_q \rightarrow K_X^i,$$

pour $i = a + b + j - 2n$. Considérons la variété $Z_{\lambda_1 \dots \lambda_j}$ définie par des équations $z_i = 0$ pour $i \in [1, j]$ au point générique z_{λ_\bullet} , et pour toute section ω_p de $\Omega_{Z_{\lambda_1 \dots \lambda_j}}^{a+1}(\text{Log } Z_{\lambda_\bullet}.Y)_{z_{\lambda_\bullet}}$ un relèvement $\tilde{\omega}_p$ dans $\Omega_X^{a+1}(\text{Log } Y)_{z_{\lambda_\bullet}}$; pour toute section ω'_q de $\Omega_X^{b+1}(\text{Log } Y)(\text{Log } Z)_{z_{\lambda_\bullet}}$, nous définissons φ (3.29.2) par une formule combinée de (3.6.3) et de celle dans (EIV, II.2)

$$(3.29.3) \quad \varphi(\omega \otimes \omega') = \sum_{i_1 < \dots < i_{p+q+1}} \left[\begin{array}{c} \text{Rés}_{Y_{i_1 \dots i_{p+q+1}}} \tilde{\omega}_p \wedge \prod_{i=1}^{p+q+1} (y_i) \cdot \prod_{i=1}^j (z_{\lambda_i}) \omega'_q \\ y_{i_1}, \dots, y_{i_{p+q+1}}, \quad z_{\lambda_1}, \dots, z_{\lambda_j} \end{array} \right].$$

En général, il faut introduire l'opérateur M dans (3.8) dans la formule.

Nous ne vérifions pas que l'on obtient ainsi (à un signe près) un quasi-isomorphisme de complexes trifiltrés.

3.30. L'isomorphisme de dualité (3.29.1) commute à l'action de la monodromie et induit un isomorphisme de dualité de SHM sur la cohomologie

$$(H_c^i((\tilde{X} - \tilde{Z})^*, \mathbb{C}), W, F) \xrightarrow{\sim} (\text{Hom}(H^{2n-i}((\tilde{X} - \tilde{Z})^*, \mathbb{C}), W[2n], F[-n])).$$

Abstract

Let $f : X \rightarrow D$ be a morphism of an analytic variety to a disc D in \mathbb{C} with center zero; when f is smooth and proper over D , the work of Griffiths ([G], [S]) shows the importance of the study of the variation of Hodge structures (HS) arising from f . The asymptotical behaviour of this variation lead Deligne and Schmid to conjecture and prove the existence of a limit mixed Hodge structure (MHS), [S]. In this article we associate to any morphism f a variation of MHS degenerating to a limit MHS whose filtration by weight

W satisfies the required property (I,1.9.1) in Deligne's problem (I,1.9) on defining a class of good variations of MHS. The results and properties of the limit MHS have been announced in [E I-III].

BIBLIOGRAPHIE

- [C] C. H. CLEMENS, *Degeneration of Kähler Manifolds* (*Duke Math. Journal*, vol. 44, 1977, p. 215-290).
- [HII] P. DELIGNE, *Théorie de Hodge II* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 40, 1972, p. 5-57).
- [HIII] P. DELIGNE, *Théorie de Hodge III* (*Publ. I.H.E.S.*, vol. 44, 1975, p. 6-77).
- [WII] P. DELIGNE, *Weil II* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 52, 1980).
- [D] P. DELIGNE, *Équations différentielles à points singuliers réguliers* (*Lecture Notes in Math.*, n° 163, Springer, 1970).
- [SGA7, II] P. DELIGNE et N. KATZ, *Groupes de Monodromie en Géométrie algébrique* (*Springer Lecture Notes in Math.*, n° 340, 1973).
- [EI] F. ELZEIN, *Complexes de Hodge mixtes filtrés* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 295, série I, 1982, p. 669-672).
- [EII] F. ELZEIN, *Dégénérescence diagonale I et II* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 292 et 296, série I, 1983, p. 51-54 et p. 199-202).
- [EIII] F. ELZEIN, *Structures de Hodge mixtes* (*International conference in Math.*, Ryadh, 1982). Ed. Y. Al-Khamees.
- [EIV] F. ELZEIN, *Mixed Hodge Structures* (*Transactions of the Amer. Math. Soc.*, vol. 275, 1983).
- [G] P. GRIFFITHS, *Periods of Integrals* (*Bull. of the Amer. Math. Soc.*, vol. 76, 1970).
- [G-H] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York.
- [G-S] P. GRIFFITHS et W. SCHMID, *Recent developments in Hodge theory* (*Discrete subgroups of Lie Groups*, Bombay Colloquium, Oxford University press, 1973).
- [K] N. KATZ, *Algebraic solutions of differential equations* (*Inv. Math.*, vol. 18, 1972, p. 1-118).
- [S] W. SCHMID, *Variations of Hodge structure* (*Inventiones Math.*, vol. 22, 1973, p. 211-319).
- [ST] J. STEENBRINK, *Limits of Hodge structures* (*Inventiones Math.*, vol. 31, 1976, p. 229-257).
- [O] A. OGUS, *Formal Hodge filtration* (*In. Math.*, vol. 31, 1976, p. 193-228).
- [V] J. L. VERDIER, *Astérisque*, n° 36, 1976.

(Manuscrit reçu le 18 juin 1984, révisé le 7 janvier 1986.)

Fouad El Zein,
 École Normale supérieure,
 Mathématiques,
 45, rue d'Ulm,
 75230 Paris. Cedex 05.