ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GÉRALD TENENBAUM

Sur un problème de crible et ses applications

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 19, nº 1 (1986), p. 1-30
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1986_4_19_1_1_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 19, 1986, p. 1 à 30.

SUR UN PROBLÈME DE CRIBLE ET SES APPLICATIONS

PAR GÉRALD TENENBAUM

1. Introduction et énoncé des résultats

La répartition des facteurs premiers d'un entier est une donnée cruciale de quantité de problèmes arithmétiques. Elle apparaît souvent sous forme de conditions liant les tailles relatives des facteurs. Soit

$$n=\prod_{i=1}^{k} p_i \tag{1.1}$$

la décomposition canonique d'un entier générique dont les facteurs premiers, non nécessairement distincts, sont rangés par ordre croissant : $p_1 \leqq p_2 \leqq \ldots \leqq p_k$. On pose alors

$$n_j=\begin{cases} 1 & (j=1), \\ \prod_{i<j} p_i & (1<j\leqq k). \end{cases} \tag{1.2}$$

La plupart des questions de taille relative se posent en termes de comparaison de p_j et n_j, ce qui est en accord avec le principe d'Erdös [2] que la croissance de $\log p_j$ est normalement exponentielle.

Ainsi, dans le crible de Rosser-Iwaniec (*cf.* par exemple [11]) les ensembles $\mathscr{D}^+$, $\mathscr{D}^-$, sont-ils définis par des conditions du type

$$\max_{j \in \mathrm{J}} p_j^{\beta}\left(\frac{n}{n_j}\right)<\mathrm{D}, \tag{1.3}$$

où β est un paramètre $\geqq 1$ et J un sous ensemble donné de $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Erdös a souvent eu l'occasion d'utiliser le fait que

$$\mathrm{R}(n) := \max_{1 \leqq j \leqq k} (\log n_j)/\log p_j$$

est normalement à croissance très lente. On a en fait [3]

$$\mathrm{R}(n) = (1+o(1)) \frac{\log\log\log n}{\log\log\log\log n}$$

pour presque tout n. Un résultat plus précis est établi dans l'important travail de Bovey [1] qui contient en particulier une étude fine de la répartition des quantités $\log n_j/\log p_j$.

Nous nous intéressons ici à une condition du type (1.3) dans le cas $\beta=1$, $\mathrm{J}=\{1, 2, \ldots, k\}$. Notant $\mathrm{P}^-(n)$ le plus petit facteur premier de n [avec la convention $\mathrm{P}^-(1)=\infty$], nous définissons la fonction F de Schinzel-Szekeres par

$$\mathrm{F}(n) := \begin{cases} 1 & (n=1), \\ \max\{d\mathrm{P}^-(d) : d \mid n,\ d>1\} & (n>1). \end{cases} \tag{1.4}$$

Cette fonction a été implicitement considérée par Schinzel et Szekeres dans [15] en relation avec un problème de crible sur lequel nous reviendrons plus loin. Il est immédiat que le maximum apparaissant dans la définition (1.4) est nécessairement atteint pour un diviseur d de la forme n/n_j, $1 \leqq j \leqq k$. Dans l'esprit de (1.3), nous introduisons les fonctions de répartition

$$\mathrm{D}(x, y) := \operatorname{card}\{n \leqq x : \mathrm{F}(n) \leqq yn\},$$
$$\mathrm{E}(x, y) := \operatorname{card}\{n \leqq x : \mathrm{F}(n) \leqq yx\},$$

initialement définies pour $x \geqq 1$, $y>0$. On a trivialement $\mathrm{F}(n) \geqq n\mathrm{P}^-(n) \geqq 2n$ pour tout $n>1$, donc $\mathrm{D}(x, y) \leqq 1$ pour $y<2$.

Notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 1. — *Soient* γ, λ *des réels tels que*

$$\gamma > 5/3, \quad \lambda > \frac{5}{3}\left(1 - \frac{\log\psi}{\psi}\right) = 4{,}200\,01\ldots, \quad \left(\psi = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right).$$

On a pour $x \geqq y \geqq 2$

$$\frac{x}{u}\mathrm{L}(u, y) \ll_{y,\lambda} \mathrm{D}(x, y) \leqq \mathrm{E}(x, y) \ll \frac{x}{u}\log(2u), \tag{1.5}$$

où l'on a posé $u=(\log x)/\log y$ *et*

$$\mathrm{L}(u, y) = \begin{cases} (\log u)^{-\lambda} & (2 \leqq y \leqq \exp\{(\log\log x)^\gamma\}), \\ 1 & (y > \exp\{(\log\log x)^\gamma\}). \end{cases}$$

Sous l'hypothèse de Riemann, on peut choisir dans l'énoncé précédent

$$L(u, y)=\begin{cases}(\log\log 3u)^{-\xi} & (2 \leqq y \leqq (\log x)^{2+\varepsilon}),\\ 1 & (y>(\log x)^{2+\varepsilon}),\end{cases}$$

avec $\xi=1-(\log \psi)/\psi=2{,}520\,01\ldots$.

L'encadrement (1.5) est susceptible d'applications assez surprenantes. Nous en développerons trois.

La première concerne les entiers dont les diviseurs sont peu espacés. Si l'on désigne par

$$1=d_1<d_2<\ldots<d_\tau=n$$

la suite croissante des diviseurs de n, nous verrons à la section suivante (lemme 2.2), que l'on a

$$\frac{F(n)}{n}=\max_{1 \leqq i<\tau(n)}(d_{i+1}/d_i) \qquad (n>1). \tag{1.6}$$

$D(x, y)$ est donc exactement la fonction de répartition du membre de droite de (1.6). Cela jette un éclairage différent sur l'encadrement (1.5). Par exemple, le nombre $Z(x)$ des entiers $n \leqq x$ ayant au moins un diviseur dans chaque intervalle $(2^k, 2^{k+1}]$, $0 \leqq k<(\log n)/\log 2$, satisfait à $D(x, 2) \leqq Z(x) \leqq D(x, 4)$; il est donc, à une puissance de $\log\log x$ près, de l'ordre de $x/\log x$. Nous avons étudié dans [18] le nombre $H_k(x)$ des entiers $\leqq x$ possédant au moins un diviseur dans $(2^k, 2^{k+1}]$. On a

$$xk^{-\delta} L_1(k)<H_k(x)<xk^{-\delta} L_2(k) \tag{1.7}$$

pour $x>1$, $1 \leqq k \leqq (\log x)/\log 4$, où l'exposant δ vaut

$$\delta=1-\frac{\log(e \log 2)}{\log 2}=0{,}086\,07\ldots, \tag{1.8}$$

et L_1, L_2, sont des fonctions à croissance lente, précisées dans [18], qui tendent vers zéro à l'infini. L'estimation (1.5) met donc en évidence le caractère *fortement dépendant* des conditions de divisibilité impliquées : sur des bases d'indépendance ou de faible dépendance probabiliste, on aurait *a priori* dû conjecturer que $Z(x)$ était considérablement plus petit que sa valeur réelle.

Le cas où y est une puissance fixe de x est lié au problème de la fonction de répartition, au sens de la théorie des fonctions arithmétiques, de

$$\psi(n):=(\log n)^{-1}\max_{1 \leqq i<\tau(n)}\log(d_{i+1}/d_i).$$

L'existence de la densité $f(z)$ de la suite des entiers n tels que $\psi(n)<z$, $0<z \leqq 1$, a été établie dans [17]. Le théorème 1 implique que

$$c_1 z \leqq f(z) \leqq c_2 z \log(2/z) \qquad (0 \leqq z \leqq 1),$$

ce qui améliore l'encadrement prouvé dans [17].

La seconde application concerne les *nombres pratiques.* On dit qu'un entier n est pratique si tout entier $m \leqq n$ s'écrit comme somme de diviseurs distincts de n. On montre alors [16] que cette représentabilité s'étend à tous les $m \leqq \sigma(n) := \sum_{d \mid n} d$. On peut établir facilement par récurrence que la propriété suivante caractérise les nombres pratiques [16]

$$p_j \leqq \sigma(n_j)+1 \qquad (1 \leqq j \leqq k). \tag{1.9}$$

Les estimations actuellement disponibles pour le nombre $P(x)$ de nombres pratiques $\leqq x$ sont peu satisfaisantes.

Le meilleur encadrement connu est

$$x \exp\{-\alpha(\log\log x)^2\} < P(x) < x(\log x)^{-\beta}$$

où α est une constante >0, [12], et $\beta<(1/2)((1/\log 2)-1)^2=0{,}097\,98\ldots$, [9]. Le résultat suivant découle simplement du théorème 1.

THÉORÈME 2. — *Le nombre* λ *étant choisi comme indiqué dans l'énoncé du théorème* 1, *on a pour* $x \geqq 16$

$$\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{-\lambda} \ll_\lambda P(x) \ll \frac{x}{\log x}\log\log x \log\log\log x.$$

Démonstration. — Le critère (1.9) fournit immédiatement le lien avec le théorème 1 : on a

$$D\left(\frac{x}{2}, 2\right) \leqq P(x) \leqq D(x, C\log\log x) \tag{1.10}$$

pour une constante positive convenable C.

L'estimation du théorème 2 découle trivialement de (1.5) et (1.10). Pour montrer (1.10), on observe d'abord que, puisque $\sigma(2n) \geqq 2n$, une condition suffisante pour que $2n$ soit pratique est [avec la notation (1.2)]

$$p_j \leqq 2n_j \qquad (1 \leqq j \leqq k). \tag{1.11}$$

En effet, si $2^s \| n'=2n$, alors (1.9) est trivialement satisfaite pour n' si $1 \leqq j \leqq s$, car $p_j=2$, et découle de (1.11) si $j>s$ car $n'_j=2n_j$. Comme nous l'avons précédemment remarqué, (1.11) équivaut à $F(n) \leqq 2n$, d'où la minoration de (1.10). La majoration provient de l'inégalité classique [8]

$$\sigma(n) \leqq C_1 n \log\log n$$

qui implique que tout entier $n \leqq x$ satisfaisant (1.9) satisfait aussi

$$F(n) \leqq n\Big(\max_{1 \leqq j \leqq k}(\sigma(n_j)/n_j)+1\Big) \leqq n(C_1\log\log x+1) \leqq Cn\log\log x.$$

Notre troisième application du théorème 1 porte sur le « petit crible » d'Erdös et Ruzsa ([4], [14]).

Si A est une suite d'entiers, finie ou non, on désigne par $F(x, A)$ le nombre des entiers $\leqq x$ qui ne sont divisibles par aucun élément de A. Dans [4], Erdös et Ruzsa introduisent la quantité

$$H(x, K) := \min_{A} F(x, A) \qquad (K>0),$$

où le minimum est pris sur l'ensemble des suites A telles que

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a} \leqq K.$$

Dans [14], Ruzsa montre que pour tout $K \geqq 1$ fixé on a

$$\frac{\log H(x, K)}{\log x} = e^{1-K} + o(1) \qquad (x \to \infty).$$

Le cas $K=1$ est particulièrement intéressant. Il constitue en quelque sorte la frontière à partir de laquelle la minoration naïve

$$F(x, A) \geqq \sum_{n \leqq x} \Big(1 - \sum_{\substack{a \mid n \\ a \in A}} 1\Big) = [x] - \sum_{a \in A} \left[\frac{x}{a}\right]$$

est inopérante. Ruzsa montre que

$$\frac{x}{\log x} \ll H(x, 1) \ll \frac{x}{(\log x)^{\delta}} (\log \log x)^{\rho}$$

où δ est défini par (1.8) et $\rho = -\log \log 2/\log 2 = 0{,}528\,76\ldots$ Nous établirons à la section 7 le résultat suivant comme une conséquence relativement simple du théorème 1.

THÉORÈME 3. — *On a pour* $x \geqq 3$

$$\frac{x}{\log x} \ll H(x, 1) \ll \frac{x}{\log x} (\log \log x)^2.$$

Essentiellement fondée sur l'exploitation inductive des propriétés multiplicatives de la fonction F de Schinzel-Szekeres, la méthode utilisée pour prouver le théorème 1 procède cependant de deux techniques assez différentes. La minoration est obtenue en considérant les quantités

$$D_{t,z}(x, y), \qquad E_{t,z}(x, y),$$

analogues de $D(x, y)$, $E(x, y)$, obtenus en imposant aux entiers dénombrés la condition supplémentaire d'avoir tous leurs facteurs premiers dans l'intervalle $(t, z]$. On peut alors mettre en évidence l'existence d'équations fonctionnelles (*cf.* lemme 2.3), dont l'itération conduit à l'évaluation souhaitée. Comme c'est souvent le cas lors de la mise en œuvre d'une telle méthode, l'étape d'initialisation est cruciale. En l'occurrence, elle nécessite un résultat auxiliaire qui possède peut-être un intérêt propre. Cela concerne la quantité

$$\theta(x, y, z) = \operatorname{card}\{n \leqq x : p \mid n \Rightarrow y < p \leqq z\} \tag{1.12}$$

estimée par Friedlander dans [5] lorsque y et z sont des puissances fixes de x.

THÉORÈME 4. — *Pour tout* δ, $0<\delta<1$, *il existe des constantes* $A = A(\delta)$ *et* $y_0 = y_0(\delta)$ *telles que l'on ait*

$$\theta(x, y, z) - \theta\left(\frac{x}{2}, y, z\right) \geqq \frac{x}{\log y}(A\,w)^{-3w} \tag{1.13}$$

où l'on a posé $w := (\log x)/\log z$, *pour tout triplet* (x, y, z) *tel que*

$$y_0 < y \leqq z^{(1-\delta)/2}, \qquad z \leqq x.$$

Remarques. — La condition $y > y_0$ ne peut être supprimée, comme le montre l'exemple $y=2$, $z=9/2$. Seules les puissances de 3 sont alors comptées dans $\theta(x, y, z)$ et le membre de gauche de (1.13) est nul pour une infinité de valeurs entières de x. On ne peut pas non plus affaiblir la condition $\delta>0$: pour $y=\sqrt{(x/2)}$, $z=x/2$, on a

$$\theta(x, y, z) - \theta\left(\frac{x}{2}, y, z\right) = \sum_{\substack{\sqrt{x/2} < p \leqq q \leqq \sqrt{2x} \\ pq \leqq x}} 1 \leqq \pi(\sqrt{2x})^2 \ll \frac{x}{(\log x)^2}.$$

Enfin, il découle facilement des résultats de Friedlander que la minoration (1.13) est essentiellement optimale : on ne peut y remplacer $(A\,w)^{-3w}$ par w^{-w}.

La majoration du théorème 1 est prouvée par une technique peut-être nouvelle. On établit l'existence d'une sorte de « facteur intégrant » pour la somme

$$D(x, y) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ F(n) \leqq yn}} 1.$$

Un argument taubérien élémentaire permet ensuite d'estimer $D(x, y)$ à partir de la somme pondérée associée, le passage à $E(x, y)$ résultant d'un découpage facile (*cf.* lemme 2.4).

L'auteur tient à exprimer ici ses remerciements à Carl Pomerance pour de fructueuses conversations lors de la préparation de ce travail.

NOTATIONS ET CONVENTIONS. — La lettre p, avec ou sans indice, désigne toujours un nombre premier. Le plus grand (resp. le plus petit) facteur premier d'un entier n est noté $P^+(n)$ [resp. $P^-(n)$]. Par convention, $P^+(1)=1$, $P^-(1)=\infty$. Le nombre total des facteurs premiers, comptés avec leur ordre de multiplicité, d'un entier n est désigné par $\Omega(n)$.

Pour tous réels t, z, $1 \leqq t < z$, soit $\mathbb{N}(t, z)$ l'ensemble des entiers dont tous les facteurs premiers appartiennent à l'intervalle $(t, z]$, *i. e.*

$$P^+(n) \leqq z, \qquad P^-(n) > t.$$

Le symbole $\sum^{t,\,z}$ indique une sommation restreinte aux éléments de $\mathbb{N}(t, z)$. On a ainsi

$$\theta(x, y, z) = \sum_{n \leqq x}^{y,\, z} 1.$$

Lorsque la condition impliquant z est trivialement vérifiée (*i.e.* dans le cas précédent $z \geqq x$), nous noterons simplement $\sum^{y}$. Par exemple

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ \mathrm{P}^{-}(n) > y}} 1 = \sum_{n \leqq x}^{y} 1.$$

La fonction arithmétique $\mathrm{F}(n)$ étant définie par (1.4), on pose

$$\mathrm{D}(x, y) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ \mathrm{F}(n) \leqq yn}} 1, \qquad \mathrm{D}_t(x, y) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ \mathrm{F}(n) \leqq yn}}^{t} 1, \qquad \mathrm{D}_{t,\, z}(x, y) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ \mathrm{F}(n) \leqq yn}}^{t,\, z} 1,$$

avec des notations semblables pour $\mathrm{E}(x, y)$ en remplaçant la condition $\mathrm{F}(n) \leqq yn$ par $\mathrm{F}(n) \leqq yx$.

Enfin, nous poserons systématiquement

$$u := \frac{\log x}{\log y}.$$

2. Propriétés fondamentales de la fonction de Schinzel-Szekeres

LEMME 2.1. — *On a*

$$\mathrm{F}(mn) \leqq \max(\mathrm{F}(m)\, n, \mathrm{F}(n)) \quad (m, n \geqq 1), \tag{2.1}$$

avec égalité si

$$\mathrm{P}^{+}(m) \leqq \mathrm{P}^{-}(n). \tag{2.2}$$

COROLLAIRE. — *On a*

$$\mathrm{F}(mp) \leqq \mathrm{F}(m)\, p \qquad (m \geqq 2,\ p \leqq \mathrm{F}(m)).$$

Démonstration du lemme. — Le résultat est immédiat si m ou $n = 1$. Dans le cas général, chaque diviseur d de mn se décompose sous la forme $d = st$, $s \mid m$, $t \mid n$. D'où

$$\mathrm{F}(mn) = \max\{st\ \mathrm{P}^{-}(st) : s \mid m,\ t \mid n,\ st > 1\}.$$

Le maximum partiel correspondant à $s > 1$ ne dépasse pas

$$\max\{st\ \mathrm{P}^{-}(s) : s \mid m,\ s > 1,\ t \mid n\} = \mathrm{F}(m)\, n$$

avec égalité si (2.2) est réalisée puisqu'alors $\mathrm{P}^{-}(st) = \mathrm{P}^{-}(s)$ pour tous s, t. Le maximum partiel correspondant à $s = 1$ vaut exactement $\mathrm{F}(n)$, d'où la conclusion annoncée.

LEMME 2.2. — *Soit n un entier >1 et $1=d_1<d_2<\ldots<d_\tau=n$ la suite croissante de ses diviseurs. On a*

$$\frac{\mathrm{F}(n)}{n}=\max_{1\leqq i<\tau(n)}(d_{i+1}/d_i). \tag{2.3}$$

Démonstration. — Avec les notations (1.1), (1.2), on a

$$\mathrm{F}(n)=\max_{1\leqq j\leqq k}p_j(n/n_j) \tag{2.4}$$

car n/n_j est le plus grand diviseur de n satisfaisant à $\mathrm{P}^-(d)=p_j$, $1\leqq j\leqq k$. Comme $\mathrm{F}(n)/n\geqq \mathrm{P}^-(n)\geqq 2$, il s'ensuit que si le maximum (2.4) est atteint disons pour $j=r$, alors

$$p_r>n_r. \tag{2.5}$$

Or, p_r est un certain diviseur d_{s+1}, $1\leqq s<\tau(n)$, de n et (2.5) implique que $d_s=n_r$. D'où

$$\frac{\mathrm{F}(n)}{n}\leqq\max_{1\leqq i<\tau(n)}(d_{i+1}/d_i).$$

Nous établissons l'inégalité inverse par récurrence sur $k=\Omega(n)$.

La conclusion souhaitée est valide pour $k=1$ puisque $\mathrm{F}(p)=p^2$ pour tout p. Supposons-la vérifiée pour k et considérons un entier n ayant $k+1$ facteurs premiers. On pose $n=pm$, $p=\mathrm{P}^+(n)$.

Notons $1=t_1<t_2<\ldots<t_r=m$ la suite des diviseurs de m; alors chaque diviseur d_i de n s'écrit $d_i=p^\varepsilon t_j$ avec $\varepsilon=0$ ou 1, $1\leqq j\leqq r$. Si $j<r$, on a

$$d_{i+1}\leqq p^\varepsilon t_{j+1}\leqq\frac{\mathrm{F}(m)}{m}p^\varepsilon t_j=\frac{\mathrm{F}(m)}{m}d_i,$$

d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à m. Si $j=r$, c'est-à-dire $t_j=m$, seul le cas $\varepsilon=0$ est à considérer. L'une des deux circonstances suivantes est alors réalisée. Ou bien $m<p$, et il suit

$$d_{i+1}\leqq p=\frac{p}{m}d_i,$$

ou bien $m\geqq p$, et il existe un indice s, $1\leqq s<r$, tel que

$$t_s\leqq\frac{m}{p}<t_{s+1},$$

d'où

$$d_{i+1}\leqq pt_{s+1}\leqq\frac{m}{pt_s}\cdot pt_{s+1}=\frac{t_{s+1}}{t_s}d_i\leqq\frac{\mathrm{F}(m)}{m}d_i,$$

toujours d'après l'hypothèse de récurrence.

Nous avons montré que

$$\max_{1 \leqq t < \tau(n)} (d_{i+1}/d_i) \leqq \max\left(\frac{F(m)}{m}, \frac{p}{m}\right) = \frac{1}{n} \max(F(m)p, p^2) = \frac{F(n)}{n}$$

d'après le lemme 2.1. Cela achève la démonstration.

LEMME 2.3. — *Pour* $2 \leqq t \leqq y \leqq \min(z, x)$, *on a*

$$E_{t,\,z}(x, y) = \sum_{n \leqq x}{}^{t,\,y} 1 + \sum_{y < p \leqq \min(z,\,\sqrt{xy})} E_{t,\,p}\left(\frac{x}{p}, y\right). \tag{2.6}$$

Démonstration. — Nous évaluons $E_{t,\,z}(x, y)$ en classant les entiers selon la valeur de leur plus grand facteur premier. D'après le lemme 2.1 si $n = mp$, $P^+(m) \leqq p$, alors

$$F(mp) = p \max(F(m), p).$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} E_{t,\,z}(x, y) &= 1 + \sum_{t < p \leqq z} \sum_{\substack{m \leqq x/p \\ F(mp) \leqq yx}}{}^{t,\,p} 1 \\ &= 1 + \sum_{t < p \leqq z} \sum_{\substack{m \leqq x/p \\ \max(F(m),\,p) \leqq yx/p}}{}^{t,\,p} 1 \\ &= 1 + \sum_{t < p \leqq \min(z,\,\sqrt{xy})} E_{t,\,p}\left(\frac{x}{p}, y\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

En particulier, pour $z = y$, on obtient

$$E_{t,\,y}(x, y) = 1 + \sum_{t < p \leqq y} E_{t,\,p}\left(\frac{x}{p}, y\right)$$

puisque $y \leqq \sqrt{xy}$ par hypothèse. D'où en reportant dans (2.7) (en prenant en compte le fait que $y \leqq \min(z, \sqrt{xy})$)

$$E_{t,\,z}(x, y) = E_{t,\,y}(x, y) + \sum_{y < p \leqq \min(z,\,\sqrt{xy})} E_{t,\,p}\left(\frac{x}{p}, y\right).$$

La conclusion souhaitée découle de cette identité en remarquant que

$$E_{t,\,y}(x, y) = \sum_{n \leqq x}{}^{t,\,y} 1$$

puisque les conditions $P^+(n) \leqq y$, $n \leqq x$ impliquent trivialement $F(n) \leqq yx$.

Remarque. — On peut établir par une manipulation analogue l'équation fonctionnelle

$$\text{(2.8)} \qquad D_{t,z}(x, y) = \sum_{n \leqq x}{}^{t,\, y} 1 + \sum_{y < p \leqq \min(z,\, \sqrt{xy})} \left\{ D_{t,p}\left(\frac{x}{p}, y\right) - D_{t,p}\left(\frac{p}{y}, y\right) \right\}.$$

La présence des termes négatifs rend plus délicate la mise en œuvre de (2.8) que celle de (2.6). Nous ne ferons pas usage de (2.8) dans cet article.

LEMME 2.4. — *Pour* $x \geqq y \geqq 2$, $z \geqq t \geqq 1$, *posons*

$$\tilde{E}_{t,z}(x, y) := E_{t,z}(x, y) - E_{t,z}\left(\frac{x}{2}, y\right).$$

On a

$$\text{(2.9)} \qquad \tilde{E}_{t,z}\left(x, \frac{y}{2}\right) \leqq D_{t,z}(x, y) \leqq E_{t,z}(x, y).$$

Démonstration. — La seconde inégalité est immédiate. Pour établir la première, il suffit de remarquer que si $x/2 < n \leqq x$, et $F(n) \leqq (y/2)x$, alors $F(n) \leqq yn$.

LEMME 2.5. — *Pour* $x \geqq t \geqq s \geqq z \geqq 2$, $y \geqq 2$, *on a*

$$\text{(2.10)} \qquad D(x, y) \geqq D_z\left(\frac{x}{t}, s\right)\{D_{1,z}(t, y) - D_{1,z}(s, y)\}.$$

Démonstration. — Décomposons canoniquement chaque entier $n \leqq x$ sous la forme $n = ab$, avec

$$P^+(a) \leqq z < P^-(b).$$

Le membre de droite de (2.10) dénombre exactement les entiers pour lesquels on a

$$s < a \leqq t, \qquad F(a) \leqq ya$$
$$b \leqq x/t, \qquad F(b) \leqq sb.$$

Ils satisfont donc à $n = ab \leqq x$ et, d'après le lemme 2.1, à

$$F(n) = \max(F(a)\,b,\ F(b)) \leqq \max(yab,\ sb) = yn \max\left(1, \frac{s}{a}\right) = yn.$$

Partant, ils sont comptés dans $D(x, y)$.

3. Lemmes divers

Nous rassemblons dans cette section les principaux résultats auxiliaires qui nous seront utiles au cours de la démonstration des théorèmes 1 et 4.

LEMME 3.1. — *Posons*

$$\Omega(n, y) = \sum_{\substack{p^\nu \| n \\ p > y}} \nu \qquad (n \geqq 1,\ y \geqq 2).$$

(i) *Soit* $p_1(y)$ *le plus petit nombre premier* $>y$. *On a pour* $x \geqq y \geqq 2$, $1 \leqq \alpha < p_1(y)$,

$$\sum_{n \leqq x} \alpha^{\Omega(n, y)} \ll_\alpha x u^{\alpha-1}$$

(ii) *Pour tout réel positif* ε *et tout entier* k, $0 \leqq k \leqq (2-\varepsilon) \log u$, *on a*

$$\operatorname{card}\{n \leqq x : \Omega(n, y) = k\} \ll_\varepsilon \frac{x}{u} \frac{(\log 2u)^k}{k!}.$$

Démonstration. — Le point (i) est dû à Norton ([13]; *Lemma* 3.11). Le point (ii) est un cas particulier d'un théorème de Halász [6].

L'énoncé suivant est un résultat classique de la théorie du crible dont on trouvera la démonstration par exemple dans [7], *Theorem* 1, p. 201.

LEMME 3.2. — *Il existe une constante absolue* c_1 *telle que l'on ait pour* $2 \leqq y \leqq c_1 x$

$$\sum_{n \leqq x}{}^{y} 1 \asymp \frac{x}{\log y}. \tag{3.1}$$

Nous ferons également usage du théorème de Huxley sur les nombres premiers dans les nombres premiers dans les petits intervalles [10].

LEMME 3.3. — *Soit* $\theta > 7/12$. *On a*

$$\sum_{x < p \leqq x + x^\theta} 1 \gg_\theta \frac{x^\theta}{\log x}.$$

Le résultat technique suivant nous sera utile au cours du processus de minoration de $D(x, y)$.

LEMME 3.4. — *Pour tout* $\alpha > 0$, *il existe un* $B_0 = B_0(\alpha)$ *tel que, si* $B > B_0$, *la fonction* f *définie sur* $[0, +\infty)$ *par*

$$f(v) = \begin{cases} \alpha & (0 \leqq v \leqq 1), \\ (Bv)^{-3v} & (v > 1), \end{cases} \tag{3.2}$$

satisfasse à

$$\int_a^b f(v-1) \frac{dv}{v} \geqq 2(f(a) - f(b)) \qquad (1 \leqq a \leqq b). \tag{3.3}$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier que l'on a

$$\frac{f(v-1)}{v}+2f'(v)\geqq 0 \qquad (v>1). \tag{3.4}$$

Si $1<v\leqq 2$, le membre de gauche de (3.4) vaut

$$\alpha v^{-1}-6(1+\log(\mathrm{B}v))(\mathrm{B}v)^{-3v}.$$

Cette quantité est positive pour $\mathrm{B}>\mathrm{B}_1(\alpha)$.

Si $v>2$, on obtient

$$\begin{aligned}(\mathrm{B}(v-1))^{-3(v-1)}v^{-1}&-6(1+\log(\mathrm{B}v))(\mathrm{B}v)^{-3v}\\ &\geqq(\mathrm{B}v)^{-3(v-1)}v^{-1}\{1-6(1+\log(\mathrm{B}v))v^{-2}\mathrm{B}^{-3}\}\geqq 0\end{aligned}$$

pour $\mathrm{B}>\mathrm{B}_2$. Il suffit donc de choisir $\mathrm{B}_0=\max(\mathrm{B}_1(\alpha),\mathrm{B}_2)$.

4. Majoration de $\mathrm{E}(x, y)$

Nous nous proposons dans cette section d'établir la borne supérieure du théorème 1. Nous montrerons que l'on a

$$\mathrm{D}(x, y)\ll x\frac{\log(2u)}{u} \qquad (x\geqq y\geqq 2). \tag{4.1}$$

Cela implique bien que la même majoration vaut pour $\mathrm{E}(x, y)$. En effet, le cas $y>\sqrt{x}$ est trivial et, admettant (4.1), il découle de (2.9), pour $2\leqq y\leqq\sqrt{x}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(x, y)&\leqq\sum_{0\leqq k\leqq(\log x)/\log 4}\tilde{\mathrm{E}}\left(\frac{x}{2^k}, y\right)+\sqrt{x}\\ &\leqq\sum_{0\leqq k\leqq(\log x)/\log 4}\mathrm{D}\left(\frac{x}{2^k}, y\right)+\sqrt{x}\\ &\ll\sum_{0\leqq k\leqq(\log x)/\log 4}\frac{x}{2^k}\frac{\log(2(\log\sqrt{x})/\log y)}{(\log\sqrt{x})/\log y}\ll x\frac{\log 2u}{u}.\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration. Le lemme suivant constitue le point-clef de la méthode. La quantité

$$\frac{\log(yn/\mathrm{P}^+(n))}{n\log\mathrm{P}^+(n)}$$

y apparaît comme un « facteur intégrant » adapté à la structure de la suite des entiers n tels que $\mathrm{F}(n)\leqq yn$.

LEMME 4.1. — *Posons*

$$S_k(y, z) = \sum_{\substack{F(n)\leqq yn \\ \Omega(n)=k}}^{z} \frac{\log(yn/P^+(n))}{n \log P^+(n)} \qquad (k \geqq 1,\ y > z > 1).$$

On a

$$S_k(y, z) \ll \frac{\log y}{\log z}.$$

Démonstration. — La série $S_k(y, z)$ ne comporte en réalité qu'un nombre fini de termes. Il découle en effet de (2.4) que la condition $F(n) \leqq yn$ implique

$$p_j \leqq y\, n_j \qquad (1 \leqq j \leqq k),$$

d'où par une récurrence facile

$$\log n \leqq (2^k - 1) \log y. \tag{4.2}$$

Si $\Omega(n) = k+1$, $k \geqq 1$, alors n se décompose de manière unique sous la forme $n = mp$, $\Omega(m) = k$, $P^+(m) \leqq p$. Par le lemme 2.1, on a alors

$$\frac{F(n)}{n} = \max\left(\frac{F(m)}{m}, \frac{p}{m}\right).$$

Donc n est compté dans $S_{k+1}(y, z)$ si, et seulement si, m est compté dans $S_k(y, z)$ et l'on a

$$(z <)\, P^+(m) \leqq p \leqq ym. \tag{4.3}$$

On peut donc écrire

$$S_{k+1}(y, z) = \sum_{\substack{F(m)\leqq ym \\ \Omega(m)=k}}^{z} \sum_{P^+(m) \leqq p \leqq ym} \frac{\log(ym)}{mp \log p}.$$

Estimée à l'aide du théorème des nombres premiers, la somme intérieure vaut

$$\frac{\log(ym)}{m} \left\{ \frac{1}{\log P^+(m)} - \frac{1}{\log(ym)} + O\left(e^{-\sqrt{\log P^+(m)}}\right) \right\}$$
$$= \frac{\log(ym/P^+(m))}{m \log P^+(m)} + O\left(\frac{\log ym}{m} e^{-\sqrt{\log P^+(m)}}\right).$$

D'où

$$S_{k+1}(y, z) = S_k(y, z) + R_k(y, z) \qquad (k \geqq 1,\ y > z > 1), \tag{4.4}$$

avec

$$\begin{aligned} R_k(y, z) &\ll \sum_{\Omega(m)=k}^{z} \frac{\log ym}{m} e^{-\sqrt{\log P^+(m)}} \\ &= \sum_{p>z} \frac{e^{-\sqrt{\log p}}}{p} \sum_{\Omega(n)=k-1}^{z,\,p} \frac{\log(ynp)}{n} \\ &\leqq \sum_{p>z} e^{-\sqrt{\log p}} \frac{(k \log p + \log y)}{p} \sum_{\Omega(n)=k-1}^{z,\,p} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

La somme intérieure ne dépasse pas

$$\lambda^{-(k-1)} \sum^{z,\,p} \frac{\lambda^{\Omega(n)}}{n} = \lambda^{-(k-1)} \prod_{z<p'\leqq p} \left(1 - \frac{\lambda}{p'}\right)^{-1} \ll_\lambda \lambda^{-k} \left(\frac{\log p}{\log z}\right)^{\lambda}$$

pour tout λ, $1 \leqq \lambda < 2$. D'où

$$R_k(y, z) \ll_\lambda \lambda^{-k} (\log z)^{-\lambda} (k + \log y)$$

et finalement, quitte à altérer λ,

$$R_k(y, z) \ll_\lambda \lambda^{-k} \frac{\log y}{\log z} \qquad (1 \leqq \lambda < 2,\ k \geqq 1). \tag{4.5}$$

Comme on a

$$S_1(y, z) = \sum_{z<p\leqq y} \frac{\log y}{p \log p} \ll \frac{\log y}{\log z},$$

il vient finalement pour $k \geqq 1$ grâce à (4.5)

$$S_k(y, z) = S_1(y, z) + \sum_{1\leqq j<k} R_j(y, z) \ll \frac{\log y}{\log z}$$

c'est-à-dire la majoration annoncée.

Remarque. — On peut en fait montrer, mais nous n'en aurons pas besoin, que l'on a pour $y \geqq 2$, $4/3 \leqq z \leqq \sqrt{y}$, $k \geqq 1$,

$$S_k(y, z) = S(y, z)(1 + O_\lambda(\lambda^{-k})) \tag{4.6}$$

pour tout λ, $1 < \lambda < 2$, avec

$$S(y, z) := S_1(y, z) + \sum_{j=1}^{\infty} R_j(y, z) \asymp \frac{\log y}{\log z}.$$

Comme (4.2) implique que $n \leqq x$ dès que $k = \Omega(n) \leqq (\log u)/\log 2$, on voit que (4.6) contient aussi une minoration pondérée de $D_z(x, y)$. Nous n'avons pas trouvé d'argument élémentaire permettant d'en déduire la borne inférieure du théorème 1.

Preuve de (4.1). — On peut supposer sans altérer la généralité que $y \leqq x^{1/5}$ car $u \ll 1$ dans le cas contraire.

Montrons d'abord que, quitte à écarter un nombre acceptable d'exceptions, on peut se resteindre à ne considérer que les entiers $n \leqq x$ qui, outre $F(n) \leqq yn$, satisfont aussi les conditions supplémentaires

$$2 \leqq \Omega(n, y) \leqq e \log u, \tag{4.7}$$

$$n/P^+(n) > x^{1/10}. \tag{4.8}$$

En effet on a, d'après le lemme 3.1 (ii),

$$\operatorname{card}\{n \leqq x : \Omega(n, y) \leqq 1\} \ll x \frac{\log(2u)}{u}$$

et d'après la partie (i) du même lemme

$$\operatorname{card}\{n \leqq x : \Omega(n, y) > e \log u\} \leqq \sum_{n \leqq x} e^{\Omega(n, y) - e \log u} \ll x u^{-1}$$

puisque $p_1(y) \geqq 3 > e$ pour $y \geqq 2$.

Si (4.8) n'est pas réalisée, nous utilisons l'implication

$$F(n) \leqq yn \quad \Rightarrow \quad P^+(n) \leqq \sqrt{yn} \tag{4.9}$$

qui découle de (4.3). Il vient

$$n = \frac{n}{P^+(n)} \cdot P^+(n) \leqq \frac{n}{P^+(n)} \left(\frac{yn}{P^+(n)} \right) = y \left(\frac{n}{P^+(n)} \right)^2 \leqq x^{1/5 + 2/10} = x^{2/5}.$$

Nous avons donc montré que l'on a

$$D(x, y) \leqq \Delta(x, y) + O\left(x \frac{\log 2u}{u} \right) \tag{4.10}$$

avec

$$\Delta(x, y) := \operatorname{card}\{n \leqq x : 2 \leqq \Omega(n, y) \leqq e \log u,\ n/P^+(n) > x^{1/10}\}.$$

En décomposant les entiers n comptés dans $\Delta(x, y)$ sous la forme $n = mp$, $p = P^+(n)$, il vient

$$\Delta(x, y) \leqq \sum_{\substack{x^{1/10} < m \leqq x \\ F(m) \leqq ym \\ 1 \leqq \Omega(m, y) \leqq e \log u}} \sum_{\substack{P^+(m) \leqq p \leqq x/m \\ p \leqq ym}} 1 \tag{4.11}$$

La somme intérieure est nulle si $x/m < P^+(m)$. Dans le cas contraire elle est

$$\ll \frac{x}{m \log (x/m)} \leqq \frac{x}{m \log \mathrm{P}^{+}(m)} \ll \frac{x}{\log x} \frac{\log (ym/\mathrm{P}^{+}(m))}{m \log \mathrm{P}^{+}(m)}$$

où la dernière estimation découle du fait que les conditions $\mathrm{F}(m) \leqq ym$ et $x^{1/10} < m \leqq x$ impliquent successivement

$$\mathrm{P}^{+}(m) \leqq \sqrt{ym}$$

et

$$\log (ym/\mathrm{P}^{+}(m)) \geqq \frac{1}{2} \log (ym) \geqq \frac{1}{20} \log x.$$

En reportant dans (4.11), on obtient donc

$$\Delta(x, y) \ll \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{\mathrm{F}(m) \leqq ym \\ 1 \leqq \Omega(m, y) \leqq e \log u}} \frac{\log (ym/\mathrm{P}^{+}(m))}{m \log \mathrm{P}^{+}(m)}. \tag{4.12}$$

Décomposons chaque entier m apparaissant dans la sommation précédente sous la forme $m = ab$ avec

$$\mathrm{P}^{+}(a) \leqq y < P^{-}(b).$$

On a trivialement $\mathrm{F}(a) \leqq ya$, et par le lemme 2.1

$$\frac{\mathrm{F}(m)}{m} = \max\left(\frac{\mathrm{F}(a)}{a}, \frac{\mathrm{F}(b)}{ab}\right).$$

Donc $\mathrm{F}(m) \leqq ym$ équivaut à $\mathrm{F}(b) \leqq yab$. De plus, on a $\mathrm{P}^{+}(ab) = \mathrm{P}^{+}(b)$ puisque $\Omega(m, y) = \Omega(b) \geqq 1$. La somme en m dans (4.12) vaut donc

$$\sum\nolimits^{1, y} \frac{1}{a} \sum_{\substack{\mathrm{F}(b) \leqq yab \\ 1 \leqq \Omega(b) \leqq e \log u}}^{y} \frac{\log (yab/\mathrm{P}^{+}(b))}{b \log \mathrm{P}^{+}(b)} \tag{4.13}$$

$$= \sum\nolimits^{1, y} \frac{1}{a} \sum_{1 \leqq k \leqq e \log u} \mathrm{S}_k(ay, y) \ll \sum\nolimits^{1, y} \frac{1}{a} \frac{\log (ay)}{\log y} \log u$$

d'après le lemme 4.1.

On a

$$\sum\nolimits^{1, y} \frac{1}{a} = \prod_{p \leqq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \ll \log y$$

et

$$\sum{}^{1,\,y}\frac{\log a}{a}=\prod_{p\leqq y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\sum{}^{1,\,y}\frac{\Lambda(d)}{d}\ll(\log y)^2.$$

La majoration (4.13) est donc $O(\log y \log u)$ d'où en reportant dans (4.12)

$$\Delta(x,\,y)\ll\frac{x}{\log x}\log y\log u=x\frac{\log u}{u}.$$

Compte tenu de (4.10), cela achève la démonstration.

5. Démonstration du théorème 4

Soit

$$\mathrm{T}:=\sum_{x/2<n\leqq x}{}^{y,\,z}\,1.$$

Il faut montrer que pour tout $\delta>0$, il existe $\mathrm{A}=\mathrm{A}(\delta)$ et $y_0=y_0(\delta)$ tels que l'on ait

$$\mathrm{T}\geqq\frac{x}{\log y}(\mathrm{A}\,w)^{-3\,w},\tag{5.1}$$

avec $w=(\log x)/\log z$, sous les conditions

$$y_0<y\leqq z^{(1-\delta)/2},\qquad z\leqq x.\tag{5.2}$$

On a

$$\mathrm{T}\log x\geqq\sum_{x/2<n\leqq x}{}^{y,\,z}\sum_{p\mid n}\log p=\sum_{m<x/y}{}^{y,\,z}\sum_{\substack{x/(2m)<p\leqq x/m\\ y<p\leqq z}}\log p\tag{5.3}$$

$$\geqq\sum_{x/z<m\leqq x/(2y)}{}^{y,\,z}\sum_{x/(2m)<p\leqq x/m}\log p\gg x\sum_{x/z<m\leqq x/(2y)}{}^{y,\,z}\frac{1}{m}.$$

Nous utiliserons (5.3) sous l'hypothèse supplémentaire

$$z>(\log x)^{5/2}.\tag{5.4}$$

Lorsque (5.4) n'est pas satisfaite, on a $xw^{-3\,w}<1$ pour x assez grand et il suffit de montrer que la somme T est non vide. Nous emploierons à cet effet une méthode directe.

Plaçons nous donc dans l'hypothèse (5.4) et posons

$$k=k(w)=\begin{cases}[2\,w]-1 & (\text{si } 1\leqq w\leqq 3),\\ [w]+1 & (\text{si } w>3),\end{cases}$$

$$\eta=\frac{\delta}{4\,w},$$

$$\mathrm{I}=\begin{cases} (z^{1/2},\ z^{(1+\eta)/2}] & (\text{si } 1\leqq w\leqq 3),\\ (z^{(w-1)/k},\ z^{(1+\eta)(w-1)/k}] & (\text{si } w>3).\end{cases}$$

On a dans tous les cas

$$\mathrm{I}\subset(\max(y,\ z^{1/2}),\ z].$$

Désignons par a et b des entiers génériques satisfaisant aux conditions

$$\mathrm{P}^-(a)>y \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \Omega(b)=k\\ p\,|\,b \ \Rightarrow\ p\in\mathrm{I}.\end{cases}$$

Nous allons voir que l'on a nécessairement

$$\frac{x}{z}<b<\frac{x}{2y}\,z^{-\delta/5}. \tag{5.5}$$

Si $1\leqq w\leqq 3$, on a d'une part

$$\log b>\frac{k}{2}\log z=\left(\frac{[2w]-1}{2}\right)\log z\geqq(w-1)\log z=\log(x/z)$$

et d'autre part

$$\log(x/b)\geqq\log x-\frac{1}{2}(1+\eta)k\log z=\left\{w-\frac{1}{2}(1+\eta)([2w]-1)\right\}\log z$$
$$>\left(\frac{1}{2}-\eta w\right)\log z=\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\log z+\frac{\delta}{4}\log z>\log(2y)+\frac{\delta}{5}\log z$$

dès que $y_0(\delta)$ est assez grand.

Si $w>3$, il vient similairement

$$\log b>(w-1)\log z=\log(x/z)$$

et

$$\log(x/b)\geqq(w-(1+\eta)(w-1))\log z>(1-\eta w)\log z>\log(2y)+\frac{\delta}{5}\log z.$$

On peut donc minorer la somme en m dans (5.3) en considérant tous les produits $m=ab$ avec $1\leqq a\leqq z^{\delta/5}$. Lorsque $z^{\delta/5}\leqq y$, seul $a=1$ est autorisé. Les facteurs premiers de a et b étant choisis dans des intervalles disjoints, on a

$$\sum_{x/z<m\leqq x/(2y)}^{y,\,z}\frac{1}{m}\geqq\sum_{1\leqq a\leqq z^{\delta/5}}^{y}\frac{1}{a}\sum\frac{1}{b}.$$

D'après le lemme 3.2, on a

(5.6) $$\sum_{1 \leqq a \leqq z^{\delta/5}}^{y} \frac{1}{a} \gg_{\delta} \frac{\log z}{\log y}.$$

C'est clair si $z \leqq y^{10/\delta}$. Cela découle de (3.1) par sommation d'Abel dans le cas contraire.

On a de plus

(5.7) $$\sum \frac{1}{b} \geqq \frac{1}{k!}\Big(\sum_{p \in \mathrm{I}} \frac{1}{p}\Big)^{k}.$$

Lorsque $\log z > (\log \log x)^2$, on peut estimer la somme en p par le théorème des nombres premiers. Il vient

$$\sum_{p \in \mathrm{I}} \frac{1}{p} = \log(1+\eta) + O(e^{-\sqrt{\log z}}) \gg_{\delta} \frac{1}{w}.$$

Lorsque $(5/2) \log \log x < \log z \leqq (\log \log x)^2$, on a

$$z^{\eta} \ll 1 \qquad \text{et} \qquad z^{(w-1)/k} \asymp z$$

d'où par le lemme 3.3

$$\sum_{p \in \mathrm{I}} \frac{1}{p} \gg \frac{1}{z} \sum_{p \in \mathrm{I}} 1 \gg \frac{z^{(w-1)/k}(z^{\eta(w-1)/k}-1)}{z \log z} \gg_{\delta} \frac{1}{w},$$

puisque $z^{(1+\eta)(w-1)/k} - z^{(w-1)/k} \asymp \eta z \log z > z^{3/5}$.

Sous l'hypothèse (5.4), on a donc

$$\sum_{p \in \mathrm{I}} \frac{1}{p} \gg_{\delta} \frac{1}{w}$$

d'où en reportant dans (5.7)

$$\sum \frac{1}{b} \geqq (\mathrm{A}_1(\delta) k w)^{-k} > (\mathrm{A}_2(\delta) w)^{-2w}.$$

Cela implique la minoration souhaitée.

Supposons maintenant que (5.4) n'est pas réalisée, *i. e.*

(5.8) $$z \leqq (\log x)^{5/2}.$$

Nous allons montrer que si $h_1 < h_2 < \ldots$ désigne la suite infinie des entiers satisfaisant à

$$h_1 > z^2$$
$$y < \mathrm{P}^-(h_j) \leqq \mathrm{P}^+(h_j) \leqq z \qquad (j=1, 2, \ldots),$$

alors on a

$$(5.9) \qquad h_{j+1}/h_j<2 \qquad (j \geqq 1).$$

On a trivialement pour $y_0(\delta)$ assez grand

$$h_1<z^3<x/2$$

donc, sous l'hypothèse (5.8), (5.9) implique bien (5.1) sous la forme

$$T \geqq 1.$$

Montrons (5.9). Soit p_0 le plus grand nombre premier $\leqq z$. Si h_j n'est pas une puissance de p_0, il existe au moins un facteur premier p de h_j tel que

$$\exists p' : p<p'<\min(2p, z).$$

Alors

$$h_{j+1} \leqq p' . \frac{h_j}{p}<2 h_j.$$

Si $h_j=p_0^\nu$, on a nécessairement $\nu>2$. Si y_0 est assez grand, le théorème des nombres premiers implique alors l'existence d'un p tel que

$$y<\sqrt{p_0}<p<\sqrt{2 p_0} \leqq z.$$

On a donc

$$h_{j+1} \leqq p^2 p_0^{\nu-1}<2 p_0^\nu=2 h_j.$$

Cela achève la démonstration du théorème 4.

6. Minoration de $D(x, y)$

L'inégalité (2.10) du lemme 2.5 implique immédiatement

$$(6.1) \qquad D(x, y) \geqq \tilde{E}_z\left(\frac{x}{t}, s\right)\{D_{1, z}(t, y)-D_{1, z}(2 s, y)\}$$

pour $x \geqq t \geqq 2 s \geqq z \geqq 2$, $y \geqq 2$.

Les deux termes du produit figurant au membre de droite de (6.1) seront estimés par des méthodes différentes. Le procédé récursif fondé sur l'équation fonctionnelle (2.6) fonctionne bien si $y>\exp\{(\log \log x)^\gamma\}$ avec $\gamma>5/3$. Nous l'emploierons pour minorer $\tilde{E}_z(x/t, s)$, avec un choix convenable des paramètres libres s, t, z. La quantité $D_{1, z}(t, y)$ sera ensuite estimée par une évaluation directe, de qualité médiocre, mais valable pour $t \geqq y \geqq 2$. Les résultats obtenus sont les suivants.

LEMME 6.1. (méthode inductive). — *Il existe une fonction* $f: \mathbb{R} \rightarrow(0,1]$ *non croissante telle que l'on ait pour tout réel* $\gamma>5/3$

$$\tilde{E}_{t,\,z}(x,\,y) \geqq \frac{xf(v-1)}{u \log t}, \tag{6.2}$$

où l'on a posé $v := (\log xy)/\log z$, *pour tous* $x,\,y,\,z,\,t$ *tels que*

$$\begin{cases} t_0 \leqq t, \qquad t^3 \leqq y \leqq z \\ \exp\{\log\log x)^\gamma\} \leqq y \leqq x \end{cases} \tag{6.3}$$

où t_0 *est une constante ne dépendant que de* f *et de* γ.

Lemme 6.2 (méthode directe). — Posons

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \xi = 1 - \frac{\log\log\varphi}{\log\varphi} = 2{,}520\,01\ldots$$

Pour tous $\delta,\,x,\,y,\,z$ *tels que* $0<\delta<1$, $x \geqq y \geqq 2$, $z \geqq x^\delta$, *on a*

$$D_{1,\,z}(x,\,y) \gg_\delta x u^{-\xi}. \tag{6.4}$$

Avant de démontrer ces lemmes, voyons comment ils impliquent la minoration du théorème 1.

Dans un premier temps, choisissons $z=x$, $t=t_0$, dans (6.2). On obtient

$$D(x,\,y) \geqq \tilde{E}_{t_0,\,z}\left(x,\,\frac{y}{2}\right) \geqq \frac{xf(1)}{u \log t_0} \gg_\gamma \frac{x}{u} \tag{6.5}$$

pour $x \geqq x_0(f,\,\gamma)$, $\exp\{(\log\log x)^\gamma\} \leqq y \leqq x$.

Si $\log y < (\log\log x)^\gamma$, on utilise (6.1) avec

$$s = \exp\{(\log\log x)^\gamma\}, \qquad t = s^2, \quad z = s^{1/3}.$$

Par (6.4), on a

$$D_{1,\,z}(t,\,y) - D_{1,\,z}(2s,\,y) \gg t\left(\frac{\log y}{\log t}\right)^\xi + O(\sqrt{t}) \gg t\left(\frac{\log y}{\log t}\right)^\xi \qquad (x > x_1),$$

et par (6.2)

$$\tilde{E}_z\left(\frac{x}{t},\,s\right) = \tilde{E}_{z,\,x}\left(\frac{x}{t},\,s\right) \gg \frac{(x/t)f(1)}{(\log(x/t)/\log s)\log z} \gg \frac{x}{t \log x}$$

pour $x > x_2(f,\,\gamma)$.

D'où, en reportant dans (6.1), pour x assez grand,

$$D(x,\,y) \gg \frac{x}{t \log x}\, t\left(\frac{\log y}{\log t}\right)^\xi \geqq \frac{x}{u}(\log t)^{-\xi} \gg \frac{x}{u}(\log\log x)^{-\gamma\xi} \gg \frac{x}{u}(\log u)^{-\gamma\xi}.$$

Le cas où x est borné étant trivial puisque $F(1)=1$, cela établit bien la minoration annoncée au théorème 1.

Démonstration du lemme 6.1. — Soit β, $5/3<\beta<\gamma$. On pose

$$K=K(x)=\left[\frac{\log x}{(\log\log x)^{\beta}}\right].$$

Nous allons montrer par récurrence sur l'entier k, $2\leqq k\leqq K$, que l'on a (6.2) sous l'hypothèse

$$(\mathrm{H}_k)\qquad \begin{cases} t_0\leqq t\leqq y^{1/3}, & y\leqq z,\\ 1\leqq u\leqq k. \end{cases}$$

La fonction f est choisie de la forme

$$f(v)=\begin{cases} \alpha & (v\leqq 1)\\ (\mathrm{B}v)^{-3v} & (v>1) \end{cases}$$

où α, B sont des constantes positives convenables indépendantes de β. En particulier nous supposons que l'on a $B>B_0(\alpha)$ où $B_0(\alpha)$ est la quantité apparaissant au lemme 3.4.

D'après le lemme 2.3 on a

$$(6.6)\qquad \tilde{\mathrm{E}}_{t,z}(x,y)\geqq \sum_{x/2<n\leqq x}^{t,y} 1+\sum_{y<p\leqq\min(z,\sqrt{xy})}\tilde{\mathrm{E}}_{t,p}\left(\frac{x}{p},y\right)$$

pour tous x, y, z, t tels que

$$2\leqq t\leqq y\leqq\min(z,x).$$

(En toute rigueur, le lemme 2.3 implique seulement (6.6) lorsque $y\leqq x/2$, en appliquant (2.6) pour x et $x/2$. Si $x/2<y\leqq\min(z,x)$, les termes $\tilde{\mathrm{E}}_{t,p}((x/p),y)$ apparaissant dans (6.6) valent tous 1. Or pour $y<p\leqq\min(z,\sqrt{xy})$, on a $x/2<p\leqq x$ et $\mathrm{F}(p)=p^2\leqq xy$. Partant, (6.6) est encore valable).

D'après le théorème 4, on a

$$(6.7)\qquad \sum_{x/2<n\leqq x}^{t,y} 1\geqq\frac{x}{\log t}(\mathrm{A}u)^{-3u}$$

pour $y_0(1/3)<t\leqq y^{1/3}$, $y\leqq x$, avec $\mathrm{A}=\mathrm{A}(1/3)$. En reportant dans (6.6) et en choisissant $t_0>y_0(1/3)$, $\alpha\geqq(3\mathrm{A})^{-9}$, $\mathrm{B}\geqq 3\mathrm{A}$, on voit que H_3 implique (6.2).

Soit donc k, $4\leqq k\leqq K$. Admettant que H_{k-1} implique (6.2) nous allons montrer qu'il en va de même pour H_k. Comme $f(v-1)$ est constante pour $v\leqq 2$ (*i. e.* $z\geqq\sqrt{xy}$) et que $\tilde{\mathrm{E}}_{t,z}(x,y)$ est une fonction croissante de z, nous pouvons supposer $v\geqq 2$. Nous pouvons également nous restreindre au cas $3\leqq k-1<u\leqq k$: l'inégalité souhaitée découle de l'hypothèse de récurrence si $u\leqq k-1$. Pour tout p, $y<p\leqq\min(z,\sqrt{xy})=z$, on a alors

$$t_0 \leqq t \leqq y^{1/3}, \qquad y \leqq p$$
$$1 \leqq \frac{\log (x/p)}{\log y} \leqq k-1.$$

La première série d'inégalités est évidente. On obtient la seconde en écrivant

$$\log (x/p) \geqq \log \sqrt{x/y} = \frac{1}{2}(u-1) \log y \geqq \log y$$

et

$$\frac{\log (x/p)}{\log y} = u - \frac{\log p}{\log y} \leqq u-1 \leqq k-1.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence pour minorer les termes $\tilde{\mathrm{E}}_{t,\, p}(x/p, y)$ dans (6.6). Tenant également compte de (6.7), il vient

$$(6.8) \quad \tilde{\mathrm{E}}_{t,\, z}(x, y) \geqq \frac{xf(u)}{\log t} + \sum_{y < p \leqq z} \frac{x \log y}{p \log t \log (x/p)} f\left(\frac{\log xy}{\log p} - 2\right)$$
$$= \frac{x}{u \log t}\left\{uf(u) - \int_v^{u+1} f(w-2)\, d\mathrm{G}(w)\right\},$$

où l'on a posé

$$\mathrm{G}(w) := \sum_{y < p \leqq (xy)^{1/w}} \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\log p}{\log x}\right)^{-1} \qquad (w \geqq 2).$$

Par le théorème des nombres premiers, on a

$$\mathrm{G}(w) = \log\left(\frac{u^2-1}{uw-(u+1)}\right) + \mathrm{R}(w),$$

avec

$$\mathrm{R}(w) \ll_\beta \exp\{-(\log y)^{1/\beta}\} = : \mathrm{R}_\beta(y), \text{ disons.}$$

D'où

$$-\int_v^{u+1} f(w-2)\, d\mathrm{G}(w) = \int_v^{u+1} \frac{f(w-2)}{w-1-(1/u)}\, dw + \int_v^{u+1} f(w-2)\, d\mathrm{R}(w)$$
$$\geqq \int_v^{u+1} \frac{f(w-2)}{w-1}\, dw + \mathrm{S}$$

avec

$$|S| = |[R(w)f(w-2)]_v^{u+1} - \int_v^{u+1} R(w)\,df(w-2)| \leqq C(\beta) f(v-2)\, R_\beta(y).$$

En reportant dans (6.8), on obtient

$$\tilde{E}_{t,z}(x,y) \geqq \frac{x}{u \log t}\left\{u f(u) + \int_{v-1}^{u} \frac{f(w-1)}{w} dw - C(\beta) f(v-2)\, R_\beta(y)\right\}$$

d'où, par le lemme 3.4,

$$(6.9)\quad \tilde{E}_{t,z}(x,y) \geqq \frac{x}{u \log t}\{(u-2)f(u) + 2f(v-1) - C(\beta) f(v-2)\, R_\beta(y)\}$$

$$\geqq \frac{xf(v-1)}{u \log t}\left\{2 - C(\beta)\, R_\beta(y)\frac{f(v-2)}{f(v-1)}\right\}$$

puisque $u \geqq 2$. On a

$$\frac{f(v-2)}{f(v-1)} = \begin{cases} \alpha(B(v-1))^{3(v-1)} & (\text{si } 2 \leqq v \leqq 3), \\ \left(1 + \dfrac{1}{v-2}\right)^{3(v-1)} (B(v-2))^3 & (\text{si } v > 3). \end{cases}$$

Comme on a $v \leqq u+1 \leqq K+1$, on peut donc écrire

$$\frac{f(v-2)}{f(v-1)} \leqq MB^6K^3 \qquad (v \geqq 2)$$

où M est une constante absolue. Cela implique

$$C(\beta)\, R_\beta(y)\frac{f(v-2)}{f(v-1)} \leqq C(\beta)\, MB^6K^3 \exp\{-(\log y)^{1/\beta}\} \leqq 1$$

pour $\log y \geqq (\log\log x)^\gamma$ et $x \geqq x_0(B, \beta, \gamma)$. Cette dernière condition est réalisée si t_0 est convenablement choisi. En reportant dans (6.9), on obtient donc que l'on a (6.2) sous l'hypothèse H_k. Cela achève la démonstration.

Démonstration du lemme 6.2. — Nous pouvons supposer que $u \geqq u_0(\delta)$ où $u_0(\delta)$ est une constante arbitraire mais fixée car $D_{1,z}(x,y)$ est une fonction décroissante de u.

On a

$$D_{1,z}(x,y)\log x \geqq \sum_{\substack{n \leqq x \\ F(n) \leqq yn}}^{1,z} \log n \geqq \sum_{\substack{n \leqq x \\ F(n) \leqq yn}}^{1,z} \sum_{p \mid n} \log p \geqq \sum_{\substack{m \leqq x \\ F(m) \leqq ym}}^{1,z} \sum_{p \leqq \min(z,\, my,\, x/m)} \log p$$

où la dernière inégalité découle de la majoration (2.1) sous la forme

$$\frac{F(pm)}{pm} \leqq \max\left(\frac{F(m)}{m}, \frac{p}{m}\right).$$

Soit $\eta = \min(\delta, 1/2)$. Si $m > x^{1-\eta}$, on a $\min(z, my, x/m) = x/m$.

D'où par le théorème des nombres premiers

$$\mathrm{D}_{1,\,z}(x,\,y) \geqq \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{x^{1-\eta}<m\leqq x \\ \mathrm{F}(m)\leqq ym}}^{1,\,z} \frac{1}{m}. \tag{6.10}$$

Pour minorer la somme en m, nous choisissons tous les entiers m qui s'écrivent $m = a\,p_1 \ldots p_{k+h}$, avec

$$\left\{\begin{array}{l} y^{1/\varphi} < a \leqq y, \qquad p_1 < p_2 < \ldots < p_k < p_{k+1} \leqq \ldots \leqq p_{k+h}, \\ \varphi^{i-1} < (\log p_i)/\log y \leqq \varphi^i \qquad (1 \leqq i \leqq k), \\ \varphi^k < (\log p_{k+j})/\log y \leqq \varphi^k (1-\eta/2)^{-1} \qquad (1 \leqq j \leqq h), \\ k = \left[\dfrac{\log(\eta\, u\, (\varphi-1)/2\,\varphi)}{\log \varphi} \right], \\ h_1 < h \leqq h_2 \end{array}\right.$$

où l'on a posé

$$h_1 = \varphi^{-k} \{(1-\eta)\, u - \log(ap_1 \ldots p_k)/\log y\},$$
$$h_2 = (1-\eta/2)\, \varphi^{-k} \{u - \log(ap_1 \ldots p_k)/\log y\}.$$

Si $u_0(\delta)$ est assez grand, on a $k \geqq 1$.

Maintenant, on a d'une part

$$\left(\frac{\varphi-1}{2\,\varphi^2}\right) \eta\, u < \varphi^k \leqq \left(\frac{\varphi-1}{2\,\varphi}\right) \eta\, u$$

d'où

$$\frac{2\,\varphi}{\eta\,(\varphi-1)} \leqq u\, \varphi^{-k} < \frac{2\,\varphi^2}{\eta\,(\varphi-1)}$$

et d'autre part

$$\log(ap_1 \ldots p_k)/\log y \leqq \sum_{i=0}^{k} \varphi^i < \varphi^k \frac{\varphi}{\varphi-1}.$$

Cela implique

$$1 < h_2 \leqq \frac{2\,\varphi^2}{\eta\,(\varphi-1)}, \tag{6.11}$$

où la minoration provient de

$$h_2 > \frac{(2-\eta)\varphi}{\eta(\varphi-1)} - \frac{\varphi}{\varphi-1} \geqq \frac{2\varphi}{\varphi-1}.$$

Puisque

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}\eta\varphi^{-k}(u+\log(ap_1 \ldots p_k)),$$

on a aussi :

$$(6.12) \qquad 1 < \frac{\varphi}{\varphi-1} \leqq h_2 - h_1.$$

Les inégalités (6.11), (6.12) montrent que, pour chaque choix de a, $p_1, \ldots, p_k$, il existe au moins une valeur admissible $\geqq 1$ pour h. De plus, (6.11) montre que pour chaque h admissible on a

$$(6.13) \qquad h \ll_\delta 1,$$

et l'encadrement $h_1 < h < h_2$ implique immédiatement

$$(6.14) \qquad x^{1-\eta} < m \leqq x.$$

Nous allons voir que l'on a aussi

$$(6.15) \qquad \mathrm{F}(m) \leqq ym.$$

On établit (6.15) par récurrence sur j, en posant

$$m_j = a \prod_{1 \leqq i \leqq j} p_i \qquad (0 \leqq j \leqq k+h).$$

Le cas $j=0$ est trivial puisque $a \leqq y$. Admettant la conclusion pour $j-1$, il vient

$$\frac{\mathrm{F}(m_j)}{m_j} = \max\left(\frac{\mathrm{F}(m_{j-1})}{m_{j-1}}, \frac{p_j}{m_{j-1}}\right) \leqq \max\left(y, \frac{p_j}{m_{j-1}}\right).$$

Si $1 \leqq j \leqq k$, on a

$$\log(p_j/ym_{j-1}) \leqq \left\{\varphi^j - 1 - \sum_{i=-1}^{j-2} \varphi^i\right\} \log y = 0$$

et si $k < j \leqq k+h$,

$$\log(p_j/ym_{j-1}) \leqq \log(p_j/ym_k) < \left\{\frac{\varphi^k}{1-\eta/2} - 1 - (\varphi^{k+1}-1)\right\} \log y < 0.$$

On a donc dans tous les cas $p_j \leqq ym_{j-1}$, d'où (6.15).

On peut écrire

$$\sum_{\substack{x^{1-\eta}<m\leqq x\\ \mathrm{F}(m)\leqq ym}} \frac{1}{m} \geqq \sum_{y^{1/\varphi}<a\leqq y} \frac{1}{a} \sum_{p_1,\ldots,p_k} \frac{1}{p_1\ldots p_k} \sum_{\substack{h_1<h<h_2\\ h\geqq 1}} \frac{1}{h!}\left(\Sigma\frac{1}{p}\right)^h$$

où p_i varie dans l'intervalle défini par

$$\varphi^{i-1}<(\log p_i)/\log y\leqq\varphi^i \qquad (1\leqq i\leqq k),$$

et la sommation en p porte sur les conditions

$$\varphi^k<(\log p)/\log y\leqq\varphi^k(1-\eta/2)^{-1}.$$

Comme $h_2=O_\delta(1)$, la somme sur h est

$$\gg_\delta |\log(1-\eta/2)|^{h_2}\gg_\delta 1.$$

D'où

$$\sum_{\substack{x^{1-\eta}<m\leqq x\\ \mathrm{F}(m)\leqq ym}} \frac{1}{m}\gg_\delta \log y \prod_{i=1}^{k}\left(\sum\frac{1}{p_i}\right)\gg_\delta \log y\,.\,(\log\varphi)^k\gg_\delta(\log y)\, u^{1-\xi}.$$

En reportant dans (6.10), on obtient bien la minoration souhaitée (6.4).

7. Preuve du théorème 3

Nous utilisons la méthode développée par Ruzsa dans [14] en introduisant les ensembles

$$\mathrm{T}_x:=\{n:1<n\leqq x,\ n\mathrm{P}^-(n)>x\},$$
$$\mathrm{S}_x:=\{n:n\in\mathrm{T}_x;\ d\,|\,n,\ d<n\Rightarrow d\notin\mathrm{T}_x\}.$$

Ainsi S_x, l'ensemble de Schinzel-Szekeres, est l'ensemble des éléments primitifs de T_x, *i.e.* la plus petite partie de T_x ayant même ensemble de multiples que T_x. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x,\mathrm{S}_x)&=\mathrm{card}\{n\leqq x: d\,|\,n\Rightarrow d\notin\mathrm{S}_x\}\\ &=\mathrm{card}\{n\leqq x: d\,|\,n\Rightarrow d\notin\mathrm{T}_x\}\\ &=\mathrm{card}\ \{n\leqq x:\mathrm{F}(n)\leqq x\}\ =\mathrm{E}(x,1).\end{aligned}$$

D'après le théorème 1, il vient donc

$$\mathrm{F}(x,\mathrm{S}_x)\ll\frac{x}{\log x}\log\log x. \tag{7.1}$$

Le résultat suivant a été annoncé par Ruzsa dans [14].

LEMME 7.1. — *Soit* $\mathrm{A}\subset[1,x]$ *une famille d'entiers telle que*

(7.2) $$m,\ n\in \mathrm{A},\qquad m\neq n \quad\Rightarrow\quad [m,\ n]>x.$$

Posons

$$\delta=\delta(x,\ \mathrm{A})=\mathrm{F}(x,\ \mathrm{A})/x$$

alors on a

(7.3) $$\sum_{a\in \mathrm{A}}\frac{1}{a}\leqq 1+3\,\delta\log(2/\delta).$$

Démonstration. — On remarque d'abord que (7.2) implique que $1\notin \mathrm{A}$ et donc que $\delta\geqq 1/x$.

Pour tout y, $1\leqq y\leqq x$, on a

$$\mathrm{F}(y,\ \mathrm{A})=[y]-\sum_{a\in \mathrm{A}}\left[\frac{y}{a}\right]$$

car la propriété (7.2) implique la nullité de tous les autres termes dans la formule d'inclusion-exclusion. D'où

$$\mathrm{F}(y,\ \mathrm{A})\geqq 2\,\mathrm{F}\left(\frac{y}{2},\ \mathrm{A}\right)-\mathrm{F}(y,\ \mathrm{A})$$
$$=\sum_{a\in \mathrm{A}}\left(\left[\frac{y}{a}\right]-2\left[\frac{y}{2a}\right]\right)-\left([y]-2\left[\frac{y}{2}\right]\right)\geqq \sum_{\substack{a\in \mathrm{A}\\ y/2<a\leqq y}}1-1.$$

où l'on a utilisé le fait que $[z]-2[z/2]$ est dans $\{0,\ 1\}$ pour tout z et vaut 1 si $1\leqq z\leqq 2$. En choisissant successivement $y=x/2^j$, $0\leqq j\leqq k-1$, il vient

$$k\,\mathrm{F}(x,\ \mathrm{A})\geqq \sum_{\substack{a\in \mathrm{A}\\ x/2^k<a\leqq x}}1-k\geqq \mathrm{card}\ \mathrm{A}-x\,2^{-k}-k.$$

Maintenant on peut écrire

$$\sum_{a\in \mathrm{A}}\frac{x}{a}\leqq \sum_{a\in \mathrm{A}}\left(\left[\frac{x}{a}\right]+1\right)\leqq x-\mathrm{F}(x,\ \mathrm{A})+\mathrm{card}\ \mathrm{A}\leqq x+(k-1)\,\mathrm{F}(x,\ \mathrm{A})+k+x\,2^{-k}$$

d'où

$$\sum_{a\in \mathrm{A}}\frac{1}{a}\leqq 1+(k-1)\,\delta+\frac{k}{x}+2^{-k}\leqq 1+(2k-1)\,\delta+2^{-k}.$$

Choisissant $k=1+[\log(1/\delta)/\log 2]$, on obtient bien (7.3).

Pour terminer la démonstration du théorème 3, il suffit de remarquer que S_x satisfait (7.2). En effet si $n,\ m\in \mathrm{S}_x$, $n<m$, alors $n\nmid m$ donc

$$[n, m] \geqq P^{-}(nm)\, m \geqq \min(P^{-}(n)\, n,\ P^{-}(m)\, m) > x.$$

On peut donc appliquer le Lemme 7.1 à $A = S_x$ avec, d'après l'estimation (7.1),

$$\delta \ll \frac{\log \log x}{\log x}.$$

Il vient

$$\sum_{a \in S_x} \frac{1}{a} \leqq 1 + O\left(\frac{(\log \log x)^2}{\log x}\right).$$

On conclut alors comme dans [14]. Si A' est un sous ensemble maximal de S_x tel que $\sum_{a \in A'} 1/a \leqq 1$, on a

$$\sum_{a \in S_x \setminus A'} \frac{1}{a} \ll \frac{(\log \log x)^2}{\log x}$$

car S_x n'est composé que d'entiers $> \sqrt{x}$. D'où

$$F(x, A') \leqq F(x, S_x) + x \sum_{a \in S_x \setminus A'} \frac{1}{a} \ll x \frac{(\log \log x)^2}{\log x}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. D. Bovey, *On the Size of Prime Factors of Integers* (*Acta Arith.*, vol. 33, 1977, p. 65-80).

[2] P. Erdös, *On the Distribution Function of Additive Functions* (*Ann. of Math.*, vol. 47, 1946, p. 1-20).

[3] P. Erdös *On Some Properties of Prime Factors of Integers* (*Nagoya Math. J.*, vol. 27, 1966, p. 617-623).

[4] P. Erdös et I. Z. Ruzsa, *On the Small Sieve. I. Sifting by Primes*, (*J. Number Theory*, vol. 12, 1980, p. 385-394).

[5] J. B. Friedlander, *Integers Free from Large and Small Primes* (*Proc. London Math. Soc.*, (3), n° 33, 1976, p. 565-576).

[6] G. Halász, *Remarks to my paper* : « *On the Distribution of Additive and the Mean Value of Multiplicative Arithmetic Functions* » (*Acta Math. Acad. Scient. Hung.*, vol. 23, (3-4), 1972, p. 425-432).

[7] H. Halberstam et K. F. Roth, *Sequences*, Oxford at the Clarendon Press, 1966.

[8] G. H. Hardy et E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford at the Clarendon Press, 5e éd., 1979.

[9] M. Hausman et H. N. Shapiro, *On Pratical Numbers* (*Comm. Pure and Applied Math.*, vol. 37, 1984, p. 705-713).

[10] M. N. Huxley, *The distribution of prime numbers*, Oxford at the Clarendon Press, 1972.

[11] H. Iwaniec, *Rosser's Sieve—Bilinear Forms of the Remainder Terms—Some Applications* (*Recent Progress in Analytic Number Theory*, Vol. 1, H. Halberstam and C. Hooley éd., Academic Press, 1981, p. 203-230).

[12] M. Margenstern, *Résultats et conjectures sur les nombres pratiques* (*C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 299, série I, n° 18, 1984, p. 895-898).

[13] K. K. NORTON, *On the Number of Restricted Prime Factors of an Integer I* (*Ill. J. Math.*, vol. 20, 1976, p. 681-705).

[14] I. Z. RUZSA, *On the Small Sieve II. Sifting by Composite Numbers* (*J. Number Theory*, vol. 14, 1982, p. 260-268).

[15] A. SCHINZEL et G. SZEKERES, *Sur un problème de M. Paul Erdös* (*Acta Sc. Math. Szeged*, vol. 20, 1959, p. 221-229).

[16] B. M. STEWART, *Sums of Distinct Divisors* (*Amer. J. Math.*, vol. 76, 1954, p. 779-785).

[17] G. TENENBAUM, *Lois de répartition des diviseurs*, 5 (*J. London Math. Soc.*, (2), n° 20, 1979, p. 165-176).

[18] G. TENENBAUM, *Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné* (*Compositio Math.*, vol. 51, 1984, p. 243-263).

(Manuscrit reçu le 8 janvier 1985)

Gérald TENENBAUM
Département de Mathématiques,
Université de Nancy-I,
B.P. n° 239,
54506 Vandœuvre Cedex, France